Alessandro Zampini: curriculum vitae et studiorum

Nome:	Alessandro Zampini
E-mail:	alessandro.zampini@unina.it
	azampini@na.infn.it
Data di nascita:	9 gennaio 1976
Luogo di nascita:	Napoli (I)
Cittadinanza:	italiana
Lingue straniere:	inglese (fluente), tedesco (fluente)

- Ricercatore a tempo determinato tipo B in Algebra e Geometria presso il Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli" – Università Federico II, Napoli;
- Membro associato alla ricerca – I.N.F.N. – sezione di Napoli.

Titoli accademici

- Dottorato di ricerca in *fisica fondamentale ed applicata*, conseguito il 14 gennaio 2005 presso l'Università di Napoli "Federico II". Il titolo della tesi è *Applications of the Weyl-Wigner formalism to non commutative geometry* – relatori i Proff. G.Marmo, F.Lizzi.
- Diploma di laurea in *fisica*, conseguito l'11 luglio 2001 presso l'Università di Napoli "Federico II". Il titolo della tesi è *Il limite classico della meccanica quantistica nella formulazione à la Weyl-Wigner* – relatori i Proff. G.Marmo, F.Lizzi.

Posizioni ricoperte, contratti, borse di studio

2018, dic -	Ricercatore a tempo determinato tipo B in Algebra e Geometria
	Dipartimento di Matematica ed Applicazioni – Università Federico II, Napoli
2016, lug. - 2018, dic.	Docente di ruolo (matematica e fisica)
	presso il L.S.S. G.Mercalli, Napoli
2013, gen. - 2016, lug.	Research Associate, University of Luxembourg
2012, ott. - 2012, dic.	Wissenschaftliche Mitarbeiter – L.M.U. München (D)
	(Ricercatore Post-doc)
2012, mag. - 2012- set.	Stellvertreterprofessor für angewandte Mathematik
	(Professore in matematica applicata) – L.M.U. München (D)
2011, apr. - 2012, mar.	Wissenschaftliche Mitarbeiter – L.M.U. München (D)
	(Ricercatore Post-doc)
2007, mar. - 2008, feb.:	Forschungsstipendiat AvH
	(Assegnista Fondazione A. von Humboldt) – Uni Bonn (D)
2005, mag. - 2006, ott.:	Borsista Post-doc – settore di fisica matematica – SISSA Trieste
2001, nov. - 2004, ott:	Studente di dottorato (XVII ciclo) in Fisica
	Università di Napoli "Federico II"

Soggiorni di ricerca

2012, apr.:	Visitatore – Hausdorff Zentrum für Mathematik, Bonn (D)
2011, feb. - 2011, mar.:	Visitatore – Hausdorff Zentrum für Mathematik, Bonn (D)
2010, mag. - 2010, ott.:	Visitatore – Max Planck Institut für Mathematik, Bonn (D)
2010, apr:	Visitatore – I.H.E.S., Bures sur Yvette - Paris, France (F)
2009, ott. - 2010, mar.:	Visitatore – Max Planck Institut für Mathematik, Bonn (D) (Borsista Fondazione Ludovisi)
2009, mar. - 2009, set.:	Visitatore – Hausdorff Zentrum für Mathematik, Bonn (D)
2008, giu. - 2008, nov.:	Visitatore – Max Planck Institut für Mathematik, Bonn (D)
	Visitatore presso: Syracuse University, Dubna Joint Institute for Nuclear Research, IMSC Chennai, IISC Bangalore, NITheP Stellenbosch.

Didattica

- Dottorato
  - semestre invernale 2020-21: corso di dottorato *Differential geometry*, Scuola Superiore Meridionale – Università di Napoli Federico II.
  - semestre estivo 2020: corso di dottorato *A differential geometric approach to gauge theories*, Dipartimento di Matematica ed Applicazioni – Università di Napoli Federico II.
  - semestre estivo 2016: corso di dottorato *Differential Geometry in Quantum Theories*, Mathematics Research Unit – University of Luxembourg.
  - semestre estivo 2013: corso di dottorato *The geometry of quantum groups*, Mathematics Research Unit – University of Luxembourg.
- Corsi di Laurea
  - semestre estivo 2020: titolare del corso *Geometria*, al primo anno del corso di Laurea in Ingegneria (ramo Informazione), Università di Napoli Federico II.
  - semestre estivo 2019: titolare del corso *Geometria*, al primo anno del corso di Laurea in Scienze dell'Informazione, Università di Napoli Federico II.
  - semestre invernale 2018-2019: incarico di insegnamento per il modulo di *Matematica ed Elementi di Statistica*, Scuola di Medicina e Chirurgia, corso di Laurea in Biotecnologie della Salute, Università di Napoli Federico II.
  - semestre invernale 2015-2016: responsabile per le esercitazioni (in inglese) del corso *Fiber Bundles and Connections*, Mathematics Research Unit – University of Luxembourg.
  - semestre estivo 2015: responsabile per le esercitazioni (in inglese) del corso *Homological Algebra*, Mathematics Research Unit – University of Luxembourg.
  - semestre invernale 2014-2015: responsabile per le esercitazioni (in inglese) dei corsi *Differential Geometry* e *Fiber Bundles and Connections*, Mathematics Research Unit – University of Luxembourg.
  - semestre invernale 2013-2014: tutor per il reading course *Algebraic Geometry*, Mathematics Research Unit – University of Luxembourg.
  - semestre invernale 2013-2014: titolare del corso (in inglese) *Geometry*, Mathematics Research Unit – University of Luxembourg.
  - semestre invernale 2012-2013: responsabile per le esercitazioni (in tedesco) in *Analysis 3*, Mathematisches Institut der L.M.U., München.
  - semestre estivo 2012: titolare del corso *Mathematik III für Physiker* (in tedesco – Metodi matematici per la fisica), Physikalisches Institut der L.M.U., München.
  - semestre invernale 2011-2012: titolare del corso *Staatsexamenkurs Analysis (teil gewöhnliche Differentialgleichungen)* (in tedesco – analisi – equazioni differenziali ordinarie), Mathematisches Institut der L.M.U., München.

- semestre estivo 2011: responsabile per le esercitazioni (in tedesco) in Analysis 1, Mathematisches Institut der L.M.U., München.

- Tesi
  - relatore (ciclo XXXV) in cotutela internazionale insieme al Prof. A. Ibort Latre (uc3m – Madrid) per la tesi di Luca Schiavone.
  - relatore (maggio 2014, con il Prof. Norbert Poncin) della tesi di Bachelor (laurea triennale) in Matematica di Jimmy Devillet, dal titolo *Topics in C^*-algebras.*
  - tutor (gennaio 2014) per il progetto monografico in Algebra di Mike Schomer, *The GNS theorem*, University of Luxembourg.

Miscellanea

- Referee per: Communications in Mathematical Physics, Journal of Physics A, Letters in Mathematical Physics, Classical and Quantum Gravity, Axioms, International Journal of Geometrical Methods in Modern Physics, Sigma.
- Membro di più commissioni per l'assegnazione di contratti di insegnamento e ricerca presso il Dipartimento di Matematica ed Applicazioni R. Caccioppoli, Università di Napoli Federico II.
- (Co)-organizzatore della conferenza *Quantum days in Bologna*, Università di Bologna – giugno 2019.
- (Co)-rganizzatore della conferenza *A quantum Lie day*, Università di Bologna – ottobre 2018.
- Organizzatore della conferenza *Advances in theoretical and mathematical physics*, Napoli – Istituto per gli Studii Filosofici – marzo 2008.
- Dal 2019, membro dell'iniziativa specifica *GeosymQFT* (resp. nazionale Fedele Lizzi)
- Biennio 2017-2018, membro dell'iniziativa specifica *Quantum* (resp. nazionale Paolo Facchi)
- Membro dei seguenti PRIN:
  - 2002-2004: *Singolarità, Integrabilità, Simmetrie* (resp. nazionale Francesco Calogero),
  - 2004-2006: *Singolarità, Integrabilità, Simmetrie* (resp. nazionale Francesco Calogero),
  - 2006-2008: *Geometria non commutativa, gruppi quantici ed applicazioni* (resp. nazionale Giovanni Landi)

Seminari e partecipazioni a Convegni

- Seminari su invito presso le Università di: uc3m – Carlos III, Madrid (2019), Bologna (2019), Napoli (2018), Bologna (2018), Buffalo SUNY (2016), UC - Colorado Springs (2016), Stoccolma (2014), Reims (2014), Roma II (2012), Firenze – INFN (Firenze) (2012), Potsdam, Clermont-Ferrand, Metz (2011), Roma "La Sapienza" (2011), Marburg (2010), MPIM Bonn (2008), Bonn (2004), Napoli (2004);
- invited speaker, *Information geometry, quantum mechanics and applications* – Grajera, Segovia (2019)
- invited speaker, *Information geometry, quantum mechanics and applications* – Policeta san Rufo (2018)
- invited speaker, *Geometry and Physics* – Univ. Bologna (2017)
- invited speaker, *Quantum Physics and information geometry* – Policeta San Rufo (2017),
- invited speaker, *Quantum Physics: foundations and applications* – IISC Bangalore (2016),
- invited plenary speaker, *XXIV International Fall Workshop on Geometry and Physics* – Zaragoza (2015),

- invited speaker, *Trails in quantum mechanics and surroundings* – Univ. Insubria (2015),
- invited speaker, *Quantum Physics: foundations and applications* – NITheP, Stellenbosch (2015),
- invited speaker, *Quantum mechanics and Applications* – Università di Bari (2014),
- minicorso su *Geometry of quantum groups* – Università del Lussemburgo (2013),
- invited speaker, *Quantum geometry and Matter* – SISSA (2013),
- invited speaker, *Trails in quantum mechanics and surroundings* – Frascati (2013),
- invited speaker, *Meccanica quantistica e dintorni* – L'Aquila (2012),
- invited speaker, *Seminars on Geometry and Physics* – MPIM, Bonn (2011),
- invited speaker, *Folding and Unfolding: interactions from geometry* – Ischia (2011),
- invited speaker, *Trails in the non-commutative land* – SISSA, Trieste (2010),
- invited speaker, *Informal meeting on quantum mechanics 2010* – SISSA, Trieste (2010),
- contributed talk, *Third school and workshop on mathematical methods in quantum mechanics* – Bressanone (2009),
- invited speaker, *Noncommutative Manifolds II* – SISSA, Trieste (2007),
- invited speaker, *Annual meeting on Singularities, Integrability and Simmetry* – Vietri sul Mare (2005),
- invited speaker, *Noncommutative Manifolds* – SISSA, Trieste (2004),
- invited speaker, *Geometry and Physics of particles, fields and strings* – Zaragoza (2004),
- invited speaker, *Recent Advances in Non Commutative Geometry: spheres, instantons, sigma models* – Firenze (2004),
- invited speaker, *The Quantum - Classical transition* – Vietri sul Mare (2003),
- invited speaker, *Jet Nestruev seminars, Diffiety School* – S.Stefano del Sole (2003),
- invited speaker, *Gauge Theories and Geometry of differential Equations* - Vietri sul Mare (2002).

Lista dei lavori scientifici

[1] G. Marmo, L. Schiavone, A. Zampini, *Symmetries and reduction. Part I – Poisson and symplectic picture*, Int. J. of Geom. Meth. Mod. Phys. 17, 9 (2020) 2030002; arXiv:2006.03380[math.ph].

[2] F.M. Ciaglia, F. Di Cosmo, A. Ibort Latre, G. Marmo, L. Schiavone, A. Zampini, *Lagrangian description of Heisenberg and Landau – von Neumann equations of motions*, Mod. Phys. Lett. A 35 (2020) 2050161; arXiv:2005.01876[quant-ph].

[3] G.Marmo, P.Vitale, A.Zampini, *Derivation based differential calculi for noncommutative algebras deforming a class of three dimensional spaces*, J. Geom. Phys. 136 (2019) 104-118; arXiv:1805.06300[math.QA].

[4] G.Marmo, A.Zampini, *Kähler geometry on quantum projective spaces via reduction and unfolding*, Rendiconti di Matematica ed Applicazioni (7) 39 (2018) 329-345; arXiv:1809.09993v1[math-ph].

[5] F. Di Cosmo, G. Marmo, J.M. Perez-Pardo, A. Zampini, *A Hodge - de Rham Dirac operator on the quantum* SU(2), Int. J. of Geom. Meth. Mod. Phys. 15, 2 (2018) 1850030; arXiv:1609.06276[math.QA].

[6] F. Di Cosmo, A. Zampini, *Dirac operators on the* S^3 *and* S^2 *spheres*, Int. J. of Geom. Meth. Mod. Phys. 14, 8 (2017) 1740005; arXiv:1609.05868[math-ph].

[7] A.Zampini, *Warped products and Yang-Mills equations on non commutative spaces*, Lett. Math. Phys. 105, 2 (2015) 221-243; arXiv:1403.5498[math-ph].

[8] A.Zampini, *Hodge duality operators on left covariant exterior algebras over two and three dimensional quantum spheres*, Rev. Math. Phys. 25 (2013) 9-38; arXiv:11126383[math.QA].

[9] A.Zampini, *(A class of) Hodge duality operators over the quantum* SU(2), J. Geom. Phys. 62 (2012) 1732-1746; arXiv:1104.0425[math.QA].

[10] A.Zampini, *Examples of Hodge Laplacians on quantum spheres*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 9,2 (2012) 126009: 1-8; arXiv:1109.1529[math.QA].

[11] L.S.Cirio, C.Pagani, A.Zampini, *The quantum Cartan algebra associated to a bicovariant differential calculus*, Rep. Math. Phys. 68 (2011) 319-346; arXiv:1003.1202[math.QA].

[12] G.Landi, A.Zampini, *Calculi, Hodge operators and Laplacians on a quantum Hopf fibration*, Rev. Math. Phys. 23 (2011) 575-613; arXiv:1009.3738[math.QA].

[13] A.Zampini, *Laplacians and gauged Laplacians on a quantum Hopf bundle*, on *Quantum groups and non commutative spaces*, M.Marcolli, D.Parashar (eds.), Vieweg Verlag (2010); arXiv:1003.5598[math.QA].

[14] G.Landi, C.Reina, A.Zampini, *Gauged Laplacians on a quantum Hopf bundle*, Comm. Math. Phys. 287 (2009) 179-209; arXiv:0801.3376[math.QA].

[15] S.Chaturvedi, G.Marmo, N.Mukunda, R.Simon, A.Zampini, *The Schwinger Representation of a Group: Concept and Applications*, Rev. Math. Phys. 18 (2006) 887-912; arXiv:quant-ph/0505012.

[16] G.Marmo, P.Vitale, A.Zampini, *Noncommutative differential calculus for Moyal subalgebras*, J. Geom. Phys. 56 (2006) 611-622; arXiv:hep-th/0411223.

[17] F.Lizzi, P.Vitale, A.Zampini, *The beat of a fuzzy drum: fuzzy Bessel functions for the disc*, JHEP 0509 (2005) 080; arXiv:hep-th/0506008.

[18] N. Mukunda, G. Marmo, A. Zampini, S. Chaturvedi, R. Simon, *Wigner-Weyl isomorphism for quantum mechanics on Lie groups*, J. Math. Phys. 46, 012106 (2005); arXiv:quant-ph/0407257.

[19] F. Lizzi, P. Vitale, A. Zampini, *The fuzzy disc*, JHEP 0308 (2003) 057; arXiv:hep-th/0306247.

[20] A. Agostini, F. Lizzi, A. Zampini, *Generalized Weyl systems and κ-Minkowski space*, Mod. Phys. Lett. A17 (2002) 2105-2126; arXiv:hep-th/0209174.

[21] F. Lizzi, R. J. Szabo, A. Zampini, *Geometry of the Gauge Algebra in Noncommutative Yang-Mills Theory*, JHEP 0108 (2001) 032; arXiv:hep-th/0107115.

Conference Proceedings (peer reviewed)

[22] F. Di Cosmo, G. Marmo, A. Zampini, *Topology and quantum states: the electron-monopole system*, Il Nuovo Cimento C 38 (2015) 158; arXiv:1609.06468[math-ph].

[23] F.Lizzi, P.Vitale, A.Zampini, *The fuzzy disc: a review*, 8th Ellenic School on Elementary Particle Physics, J. Phys. Conf. 53 (2006) 830-842.

[24] F.Lizzi, P.Vitale, A.Zampini, *From the fuzzy disc to edge currents in Chern-Simons Theory.* In Mod. Phys. Lett. A -Special Issue- 18, 33-35 (2003) *Spacetime and Fundamental Interactions: Quantum Aspects*; arXiv:hep-th/0309128.

Preprint

[25] G. Marmo, A. Zampini, *Abstract dynamical systems: remarks on symmetries and reduction*; arXiv:2008.11692[math.ph]

Libri

[26] G.Landi, A.Zampini, *Linear algebra and analytic geometry for the physical sciences* – Undergraduate Lecture Notes in Physics – Springer (2018).

[27] Traduttore dal tedesco e curatore dell'Edizione italiana di *H.Hertz: Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt – I principi della meccanica delineati in una nuova forma*, INFN Naples series in Physics and Astrophysics, Bibliopolis - Napoli (2010).

Tesi

[28] A.Zampini, *Applications of the Weyl-Wigner formalism to non commutative geometry*, tesi di dottorato in fisica fondamentale ed applicata, università di Napoli "Federico II". Non pubblicata, una versione è disponibile in arXiv:hep-th/0505271.

[29] A.Zampini, *Il limite classico della meccanica quantistica nella formulazione à la Weyl-Wigner*, tesi di laurea in fisica, università di Napoli "Federico II". Non pubblicata, una versione è disponibile al link http://people.na.infn.it/%7Elizzi/tesi/zampinilaurea.pdf

Descrizione dell'attività di ricerca

Il motivo unificante della mia attività di ricerca è nello studio del formalismo geometrico originato nella teoria dei sistemi dinamici di punto e di campo, sia in meccanica classica che quantistica. Nella tesi di dottorato ho studiato aspetti del formalismo simplettico all'interno del problema della quantizzazione di un sistema dinamico classico e del limite classico di un sistema dinamico quantistico, all'interno del formalismo à la Weyl-Wigner. In ambito di dinamica di punto ho analizzato aspetti della dinamica quantistica di sistemi il cui spazio delle configurazioni classico è dato da un gruppo di Lie, in ambito di teoria di campo ho studiato approssimazioni matriciali (fuzzy) a teorie di campo quantistiche su spazi con bordo, e più in generale a teorie di gauge in setting non commutativo.
Durante il percorso come ricercatore post-doc in Italia, Germania, Lussemburgo, il mio interesse si è orientato allo studio di calcoli differenziali, operatori di Dirac, strutture riemanniane e teorie di gauge su spazi non commutativi. Particolare rilievo ha avuto lo studio delle proprietà dell'operatore Laplaciano.
Negli ultimi anni, durante il periodo come Ricercatore presso il Dipartimento di Matematica ed Applicazioni dell'Università di Napoli, accanto ai temi già citati mi sono interessato a problemi di geometria differenziale (in un'ottica di Information Geometry) sullo spazio degli stati di un sistema quantistico.
Una breve descrizione della mia attività di ricerca è di seguito, i riferimenti sono ai lavori di cui sono (co)autore.

- **Geometria differenziale su uno spazio di stati.** È noto che lo spazio degli stati $\mathcal{S}$ di un sistema dinamico quantistico di punto è dato dal proiettivo complesso di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ complesso separabile, ovvero $\mathcal{S} \simeq \mathcal{H}/\mathbb{C}_0$. Se $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ (il sistema ha un numero finito di livelli), allora $\mathcal{S} \simeq \mathbb{C}\mathrm{P}(n)$. Una dinamica quantistica è descritta in termini di un campo vettoriale su tale spazio che sia compatibile sia con la metrica Riemanniana che con la struttura simplettica date dalla struttura Hermitiana. In [4] si analizza come la struttura di Kähler su $\mathbb{C}\mathrm{P}(n)$ si possa ottenere sia attraverso una procedura di riduzione da $\mathbb{C}(n)$ lungo una opportuna fibrazione, sia usando le proprietà di una momentum map corrispondente alla realizzazione di $\mathcal{S}$ come un opportuno spazio omogeneo del gruppo unitario $\mathrm{U}(n)$. In [2] questo approccio permette di avere una descrizione Lagrangiana delle equazioni del moto quantistico anche su opportune sottovarietà di stati parametrizzati (nell'ottica quindi dell'Information Geometry), nella forma sia di Heisenberg che di Landau - von Neumann. La linea concettuale di considerare la meccanica classica un opportuno limite di quella quantistica è quella che informa anche la descrizione in [1] delle relazioni tra simmetrie e riduzione di sistemi dinamici all'interno del formalismo di Poisson e simplettico, prima parte di un più esteso lavoro ora in sviluppo che copra anche il formalismo Lagrangiano (regolare e singolare) e di Hamilton Jacobi.

- **Teorie di gauge su spazi quantici.** In geometria differenziale classica è possibile definire una classe di fibrati principali su sfere attraverso $\pi : \mathrm{Spin}(N+1) \to \mathrm{Spin}(N+1)/\mathrm{Spin}(N) \sim S^N$. La connessione di Levi-Civita associata alla metrica riemanniana standard su S^n può essere sollevata ad una connessione di spin sul fibrato principale, ed essa risolve le equazioni di Yang-Mills su S^N. Per $N=2$ tale fibrazione è quella di Hopf di monopolo, e tale connessione corrisponde alla soluzione di monopolo di ordine topologico piu' basso. Per $N=3$ la connessione canonica dà la cosiddetta soluzioni di merone, mentre per $N=4$ tale costruzione fornisce la connessione di istantone di carica topologica più bassa.

  L'analisi di tali temi nella generalizzazione al setting non commutativo, in particolare nell'ambito di gruppi quantici e corrispondenti spazi omogenei, è una delle linee di ricerca sviluppate dopo il conseguimento del dottorato.

  Le equazioni di Yang-Mills corrispondenti alla fibrazione di Hopf $\mathrm{U}(1)$ con spazio totale il gruppo quantico $\mathrm{SU}_q(2)$ e base la sfera di Podles standard $S^2_q \hookrightarrow \mathrm{SU}_q(2)$ è studiata in [14, 12, 13].

  La formulazione per queste fibrazioni in geometria non commutativa dipende profondamente dai calcoli differenziali definiti sia su $\mathrm{SU}_q(2)$ che sul gruppo di gauge $\mathrm{U}(1)$. Tali lavori analizzano come sia possibile introdurre dualità di Hodge sulle corrispondenti algebre esterne $\Omega(\mathrm{SU}_q(2)), \Omega(S^2_q)$ ed i Laplaciani ad esse relativi; presentano poi le connessioni per tali fibrazioni, gli spettri dei Laplaciani accoppiati alle rispettive connessioni di monopolo per ogni valore della carica topologica $n \in \mathbb{Z}$ (o numeri di Chern della fibrazione), ed esibiscono esplicitamente gli autostati come funzioni di Laughlin deformate. L'aspetto più nuovo di questo modello è che lo spettro dell'Hamiltoniano quantistico non ha degenerazione rispetto allo scambio $n \to -n$, ovvero rispetto all'inversione del campo magnetico. Tale simmetria viene ristabilita nel limite classico $q \to 1$.

  Lo scopo di [9, 10] è di introdurre il concetto di tensore massimamente simmetrico come analogo in geometria quantica del concetto di tensore metrico sull'algebra esterna $\Omega(\mathrm{SU}_q(2))$, di analizzarne le corrispondenti dualità di Hodge e i Laplaciani, mentre [8] estende questo formalismo alla più generale classe di calcoli 3-dimensionali left-covarianti su $\mathrm{SU}_q(2)$. Questo formalismo viene applicato in [7] al problema di definire e risolvere le equazioni di Yang-Mills su $\mathrm{SU}_q(2)$ e su $(\mathbb{R}^4\backslash\{0\})_q \sim \mathrm{GL}_q(1,\mathbb{H})$.

  L'evoluzione di questo lavoro è nella direzione di analizzare come sia possibile definire una forma di Chern-Simons sulla sfera quantica $\mathrm{SU}_q(2)$ e come questo formalismo permetta di definire operatori di Dirac e triple spettrali twistate, sia di tipo riemanniano che pseudo-riemanniano, su una classe di sfere quantiche.

- **Calcoli differenziali ed algebre di Kähler − Atiyah.** Su una varietà differenziale M su cui è definito un tensore metrico g per cui M sia orientabile l'algebra di Kähler − Atiyah è data da $(\Omega(M), \wedge, \vee, \mathrm{d}, i_X, L_X)$, dove $(\Omega(M), \wedge)$ è l'algebra esterna delle forme differenziali, (d, i_X, L_X) denotano gli operatori di Cartan del calcolo esterno, ovvero il differenziale esterno di de Rham, la contrazione e la derivata di Lie rispetto ad un campo vettoriale X su M, mentre $\Omega(M), \vee)$ denota il prodotto di Clifford corrispondente alla metrica g definito sull'algebra esterna. Attraverso l'algebra di Kähler − Atiyah si definisce l'operatore di Dirac nella forma di Hodge − de Rham. In [6] si studiano in dettaglio i vari operatori di Dirac che possono essere definiti sulle sfere tri- e bi-dimensionali. Fondendo questa analisi con il formalismo della geometria non commutativa, in [5] si introduce un operatore di Dirac di Hodge - de Rham sull'algebra esterna tridimensionale di $\mathrm{SU}_q(2)$, e se ne caratterizza lo spettro.

  Se M è la varietà che corrisponde ad un gruppo di Lie G, gli operatori di Cartan generano un'algebra gradata che agisce su $\Omega(Q)$ se Q è uno spazio omogeneo per l'azione di G struttura di commutatore gradato, gli operatori di Cartan generano un'algebra che agisce su $\Omega(M)$. Le proprietà dell'algebra di Cartan sono alla base dei modelli di Borel, Cartan-Weil e BRST in coomologia equivariante, usata nello studio delle teorie di campo topologiche.

  Dato un gruppo quantico in cui il calcolo differenziale à la Woronowicz sia bicovariante, in [11] si generalizza la nozione di algebra di Cartan per l'azione di tale gruppo quantico su se stesso.

- **Analisi del formalismo à la Weyl-Wigner**. Il tema unificante della mia tesi di dottorato [28] è lo studio del formalismo alla Weyl-Wigner, al fine di analizzare le relazioni fra la formulazione classica e quella quantistica per la dinamica di un sistema fisico. La nozione di sistema di Weyl permette di introdurre ciò che Dirac chiamava quantum conditions, ovvero le relazioni di commutazione tra gli osservabili quantistici di una opportuna classe di sistemi fisici, e di avere una formulazione per il principio detto di classical analogy. Secondo la sua prima formulazione, la mappa di Weyl-Wigner è una biezione tra un insieme di operatori su uno spazio di Hilbert ed un insieme di funzioni (simboli di Weyl) su uno spazio vettoriale delle fasi simplettico. Essa permette di descrivere un'algebra di operatori come un'algebra non commutativa (rispetto al prodotto di Moyal) di funzioni su tale spazio delle fasi. Il prodotto di Moyal dipende esplicitamente da $\hbar$, riducendosi al prodotto puntuale nel limite $\hbar \to 0$: questo formalismo permette una descrizione sia della procedura di quantizzazione per una classe opportuna di dinamiche classiche, che della loro evoluzione quantistica. Estensioni e generalizzazioni di questo formalismo hanno seguito due direttrici.

  I simboli di Weyl di operatori densità (le funzioni di Wigner) danno misure di quasiprobabilità sullo spazio delle fasi classico corrispondente a dinamiche quantistiche di punto in $\mathbb{R}^d$. Le distribuzioni di probabilità quantistiche associate agli operatori densità sono allora i marginali delle funzioni di Wigner. Il problema di definire una mappa di Weyl-Wigner per dinamiche classiche il cui spazio delle fasi sia T^*G con G un gruppo di Lie compatto semplice è studiato in [18, 15]. La novità in tale approccio consiste nell'aver definito tale biezione alla Weyl-Wigner fra operatori su uno spazio di Hilbert e funzioni definite non sullo spazio delle fasi classico T^*G, quanto sullo spazio prodotto $G \times \Gamma$, con G lo spazio delle configurazioni classico e Γ un opportuno spazio discreto, che dipende dalle proprietà topologiche globali di G. I simboli di Weyl associati a operatori densità danno funzioni di Wigner su $G \times \Gamma$, i cui marginali rispecchiano consistentemente le distibuzioni di probabilità per gli stati quantistici. Utilizzando la cosiddetta rappresentazione di Schwinger è inoltre possibile definire un prodotto non commutativo sull'algebra delle funzioni su T^*G.

  Una seconda direttrice di sviluppo è seguita in [20]. La topologia di $\mathbb{R}^4$ come spazio delle configurazioni è lasciata invariata, ma differenti strutture di gruppo vengono introdotte sul suo duale. Per essi si propone una nozione di sistema di Weyl generalizzato, ed esso è usato per definire prodotti non commutativi à la Moyal nell'insieme delle funzioni definite su $\mathbb{R}^4$: la non commutatività di questi prodotti riproduce le regole di commutazione dei generatori dello spazio quantico omogeneo di κ-Minkowski.

  Il formalismo alla Weyl-Wigner ha permesso, in [21], di dare una descrizione analitica dettagliata del gruppo di gauge U(1) per una teoria di singoletto sul piano di Moyal. Tale gruppo di gauge (in generale lo spazio degli automorfismi unitari interni del modulo proiettivo finito che descrive le sezioni dei fibrati associati rilevanti) risulta essere isomorfo al gruppo unitario per l'algebra di Moyal $\mathcal{A}_\hbar(\mathbb{R}^4)$. Questo lavoro mostra come alcune trasformazioni dello spazio-tempo possano essere descritte come il limite classico di automorfismi interni, ovvero trasformazioni di gauge. Ciò suggerisce che tali modelli possano descrivere aspetti di teorie in cui la covarianza generale è parte di una covarianza di gauge.

  Attraverso la mappa di Jordan – Schwinger è possibile realizzare ogni algebra universale inviluppante $U_\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie tridimensionale come una sottoalgebra di $\mathcal{A}_\hbar(\mathbb{R}^4)$. Attraverso una opportuna procedura di riduzione, in [16] si è introdotto un calcolo differenziale quadridimensionale su $U_\mathfrak{g}$ nel caso in cui $\mathfrak{g}$ sia semisemplice. Attraverso una analisi del ruolo delle derivazioni sia interne che esterne è stato possibile introdurre (in [3]) un calcolo differenziale quadridimensionale anche su $U_\mathfrak{g}$ nel caso in cui $\mathfrak{g}$ non è semisemplice.

  Questa linea di ricerca si evolve attualmente lungo la direzione di definire calcoli differenziali opportuni su algebre non commutative di tipo k-Minkowski per definire rigorosamente un funzionale d'azione per una teoria di campo.

- **Fuzzy disc geometry:** Come ulteriore applicazione del formalismo à la Weyl – Wigner, in [19, 17, 24, 23] viene introdotta una approssimazione fuzzy per l'algebra delle funzioni su un disco.

  Uno spazio fuzzy è una successione di algebre (non commutative) di matrici di rango finito, il cui limite è l'algebra commutativa delle funzioni sullo spazio stesso (il significato di questo limite è stato reso consistente da Rieffel attraverso topologie indotte da metriche di Gromov-Hausdorff). Una simile approssimazione regolarizza le divergenze ultra-violette di teorie di campo definite su questi spazi: il vantaggio più interessante di questa approssimazione rispetto a quella di reticolo consiste nel conservare un'azione consistente delle simmetrie continue del modello di partenza, nonché una nozione rigorosa degli operatori differenziali sull'algebra degli osservabili, ad ogni passo dell'approssimazione. Esempi noti di approssimazioni fuzzy erano stati introdotti per la sfera, il toro, alcuni più generali spazii proiettivi.

Il disco fuzzy è il primo esempio di un'approssimazione fuzzy per uno spazio classico che ha un bordo. Esso è definito attraverso un opportuno troncamento dell'algebra del piano di Moyal. Questo lavoro introduce uno spazio di derivazioni e studia le proprietà spettrali dei relativi Laplaciani: i simboli degli autovettori di essi sono detti fuzzy Bessel poiché convergono (nel limite opportuno in cui il rango delle matrici diviene infinito) alle autofunzioni dell'operatore Laplaciano continuo su un disco con condizioni di Dirichlet al bordo. Attraverso le fuzzy Bessel diviene immediato studiare il propagatore di una teoria di campo approssimata.

novembre 2020
Alessandro Zampini