

In questi anni ho focalizzato i miei interessi in due ambiti: quello dei **Fondamenti della matematica** e quello della **Didattica della matematica**.

Nell'ambito di **Fondamenti della matematica** ho cercato di utilizzare strumenti, nozioni e metodi, tipici della logica, per analizzare problemi concernenti il trattamento dell'informazione incompleta. Per quanto riguarda la **Didattica della matematica**, invece, la mia attenzione inizialmente era rivolta alle potenzialità della logica matematica nella didattica e successivamente si è concentrata sull'importanza sia degli aspetti linguistici sia degli aspetti affettivi nei processi di insegnamento/apprendimento della matematica.

La ricerca sui **Fondamenti della matematica**, è iniziata durante la scuola di Dottorato, seguendo interessi già maturati all'interno del mio percorso formativo della Laurea in Matematica. Le ricerche in tale ambito hanno avuto come punto di partenza un particolare approccio ai fondamenti della geometria: la *Geometria senza punti* (Whitehead), in cui si ipotizza la possibilità di considerare la nozione di regione come primitiva al posto di quella di punto; i punti sono, invece, un concetto derivato e si ottengono utilizzando la nozione di processo di astrazione (limite di successioni di particolari regioni). In accordo con l'approccio metrico, anche le nozioni di inclusione tra regioni, distanza tra regioni e diametro di una regione sono assunte come primitive. La ricerca esposta nella tesi di Dottorato ed in alcuni lavori pubblicati (fa riferimento proprio all'approccio metrico nell'ambito della Geometria senza punti, focalizzando l'attenzione su distanze generalizzate ed approssimate. Sono stati analizzati anche i concetti duali di similarità generalizzate ed approssimate (la "similarità" è una nozione logica che dualizza quella di distanza e che nasce nell'ambito degli studi sulla logica a più valori). Diversi sono i risultati ottenuti: è stato trovato un collegamento, espresso anche formalmente, tra la Geometria senza punti e la Teoria dei Fuzzy Set, cioè tra strutture con particolari distanze tra regioni, le ultrametriche, e strutture con particolari fuzzy relazioni, le semisimilarità; sono state definite distanze approssimate. In quest'ultimo caso si è estesa l'usuale nozione di distanza tra punti tenendo conto anche dell'errore che deriva da una conoscenza incompleta dei punti: se le regioni sono "approssimazioni" di punti, la distanza tra regioni è una approssimazione della distanza tra punti.

La Geometria senza punti ha valenza nell'ambito di Fondamenti della Matematica ma i risultati ottenuti possono essere sviluppati anche in altri ambiti. In molti contesti riguardanti processi di elaborazione e di classificazione dell'informazione, è fondamentale confrontare gli oggetti investigati e fornire una misura di quanto questi oggetti siano "dissimili" o, se si vuole, di quanto siano "simili", tramite le nozioni di distanza o di similarità. La Geometria senza punti risulta utile per trattare informazione incompleta: la "regione" può essere vista come un "pezzo di informazione"; il "diametro" misura il grado di informazione: più è ampio il diametro più è incompleta l'informazione; il "punto" rappresenta informazione completa; la distanza

o similarity tra regioni rappresenta la misura della vicinanza di due pezzi di informazione.

Durante il periodo della Borsa biennale post- Dottorato la ricerca di modelli dei sistemi di assiomi proposti ha condotto ad altre ricerche in ambito non strettamente fondazionale. Sono stati trovati modelli di distanze approssimate tra regioni e sono stati esaminati algoritmi di clustering basati su tali distanze. In altri lavori utilizzando distanze non simmetriche (le quasi-metriche) e la nozione duale di inclusione fuzzy si è cercato di sviluppare una teoria che unificasse ed estendesse sia la teoria dei punti fissi in insiemi ordinati sia quella in ambito metrico. Il modello canonico che ispira tale approccio è sempre legato alla Geometria senza punti, in quanto un tipico esempio di quasi-metrica è fornito dalla nozione di eccesso di una regione rispetto ad un'altra. Infine, in collegamento anche con alcune ricerche sui fondamenti della probabilità, si è utilizzata la nozione di similarity per definire valutazioni probabilistiche relative a casi singoli. L'idea è che il nostro "grado di credenza" riguardo ad una proprietà di un nuovo caso da esaminare derivi dalla nostra esperienza riguardo ad una classe di casi passati "simili" al caso in esame (stesse proprietà osservabili crisp o vaghe). Si sono esaminate le potenzialità di questo punto di vista per la costruzione di sistemi esperti.

Durante il percorso di dottorato ho cominciato ad interessarmi alle tematiche della **Didattica della matematica**, frequentando appositi incontri tra giovani ricercatori del settore, il Seminario Nazionale in Didattica della Matematica e anche alcuni convegni internazionali (CERME). I miei primi interessi sono stati fortemente influenzati dalla mia formazione logica. In particolare, l'attività di ricerca intrapresa si è soffermata sull'analisi delle potenzialità della logica per sviluppare abilità dimostrative e di deduzione negli studenti anche attraverso il supporto sia di materiali poveri che di software informatici. In questa fase si è puntato prevalentemente alla progettazione di attività didattiche (in particolare sperimentando su classi del territorio), all'individuazione ed all'analisi di opportuni strumenti di supporto. L'idea di base è la reinterpretazione del sistema assiomatico, allontanandosi sia dalla tradizione fondazionale che strutturalista: il sistema di assiomi viene inteso come informazione disponibile (in generale non completa) circa situazioni di vita reale ed il teorema come conseguenza ricavabile da tale informazione.

Successivamente, con l'arricchimento del background teorico (grazie anche alla collaborazione con ricercatori di didattica della matematica ma anche di diverse discipline che interagiscono fortemente con la didattica della matematica come psicologia e pedagogia) l'ipotesi di ricerca si è raffinata, diventando anche più ambiziosa. Questo mi ha spinto ad esplorare, a diversi livelli di analisi, il rapporto tra linguaggio e sviluppo di abilità logiche, attraverso attività cooperative e linguistico-manipolative in classi di scuola primaria. Le "abilità logiche" sono intese come abilità nel trovare e scegliere differenti strategie per risolvere problemi riguardanti compiti

logici. A tal proposito sono state svolte diverse sperimentazioni in classi di scuole primarie del territorio campano. Si ipotizza che attraverso tale tipo di attività sia possibile: stimolare nei bambini un cambio nella rappresentazione e nell'uso del linguaggio che da solo strumento di comunicazione diventa anche oggetto di manipolazione. Tale cambio rappresenta un importante step nel processo di sviluppo del pensiero matematico. Fondamentale è la "manipolazione" che si ritiene faciliti la costruzione di nuova conoscenza matematica e che aiuti a stimolare una riflessione sul concetto di interpretazione e sulla possibilità di elaborare diverse interpretazioni di uno stesso linguaggio. Le attività riguardano sia gli aspetti assertivi che quelli procedurali del linguaggio, entrambi ritenuti fondamentali per lo sviluppo del pensiero matematico. Nel primo caso si cerca di analizzare come e se la trasformazione di processi di deduzione in manipolazione di oggetti linguistici possa supportare una comprensione di alcuni aspetti fondamentali dei processi logico deduttivi. Nel secondo caso si cerca di analizzare come e se attività basate sulla creazione e manipolazione di semplici linguaggi procedurali possa stimolare una riflessione sull'uso dei simboli e favorire una riflessione sulla distinzione tra sintassi e semantica. La cornice teorica del lavoro di ricerca fa riferimento ai contributi della scuola storico-culturale di Vygotskij, ai lavori classici del costruzionismo sociale genetico, alla psicologia sociale e culturale dello sviluppo ed alla logica formale, intesa come espressione di un percorso storico che ha portato ad un cambiamento del ruolo del linguaggio nella matematica. Inoltre la logica è intesa come espressione esplicita di determinati aspetti riguardanti il linguaggio: da strumento di comunicazione diventa anche oggetto di manipolazione; l'interpretazione può non essere univoca; gli oggetti matematici nascono non solo tramite processi di astrazione dall'esperienza diretta ma anche attraverso l'oggettificazione del linguaggio ed attraverso l'individuazione di regole di manipolazione di oggetti linguistici. I dati di diverso tipo raccolti, in esperienze strutturate secondo quella che viene definita "discussione matematica" (Bartolini Bussi, 1996) (audio e video registrazioni, interviste di esplicitazione e protocolli prodotti dagli studenti, etc) sono stati analizzati sia quantitativamente che qualitativamente.

I risultati ottenuti sono stati presentati a varie conferenze, come ad esempio al CERME, e pubblicati in varie riviste sia nazionali che internazionali. Successivamente sono state svolte ulteriori sperimentazioni in scuole dell'infanzia e primaria del territorio anche grazie al Progetto Laboratorio di Multimedialità e Didattica in Matematica Facile proposto dal Dipartimento di Matematica dell'Università degli studi di Salerno in convenzione con MIUR-USR per la Campania, nell'ambito del quale ho svolto attività di formazione docenti su tali tematiche in modo da poter far svolgere, nelle loro classi, attività appositamente progettate sulla base anche dei risultati precedentemente ottenuti. L'analisi interpretativa e quantitativa delle attività permetterà di costruire modelli teorici ancora più raffinati, anche grazie alla collaborazione in atto con psicologi dell'educazione dell'Institut de Psychologie et Education de l'Université de Neuchâtel.

Nell'ultimo periodo ho ampliato la mia attività di ricerca anche su altri aspetti riguardanti l'analisi del rapporto tra linguaggio, sviluppo di abilità logiche e processi cognitivi coinvolti nell'insegnamento/apprendimento della matematica, per cercare di avere un quadro teorico più completo riguardante tale tematica. Inoltre il mio focus non è più solo concentrato sull'osservazione di attività in scuola primaria ma anche di attività che coinvolgono studenti di altri livelli scolastici. Secondo importanti risultati di ricerca ottenuti nel campo dell'educazione matematica (Duval, 1995, 2006; Ferrari, 2004) i processi matematici sono caratterizzati da una dominante importanza e varietà delle rappresentazioni semiotiche. La necessità di educare gli studenti a far pratica di traduzione da un sistema semiotico ad un altro mi ha spinto, a progettare (in collaborazione con il gruppo di ricerca in educazione matematica di Salerno) percorsi di attività didattiche basate sul coordinamento di rappresentazioni semiotiche, in cui gli studenti abbiano la possibilità di esplicitare e prendere coscienza dei processi di apprendimento soggiacenti alla risoluzione dei quesiti/ problemi loro posti. La progettazione si è svolta in collaborazione con docenti e le attività sono state inserite nelle usuali attività scolastiche legate al curriculum e svolte in classi di un biennio di un Liceo Scientifico. L'effetto "collaterale" di questo tipo di attività potrà essere anche un miglioramento nei risultati delle prove INVALSI ed OCSE-PISA visto che il saper coordinare sembra essere un prerequisito fondamentale per rispondere alla maggior parte di esse. I risultati ottenuti in tale ambito sono stati presentati al Convegno Nazionale UMI nel 2011 e pubblicati come contributo in un volume edito dalla FrancoAngeli.

Un ulteriore passo nella mia attività di ricerca è stato compiuto nel considerare ed osservare attività in cui vengono coinvolti studenti universitari. In particolare, sfruttando anche il mio background di formazione logica, è stato elaborato un modello cognitivo che permetta di descrivere ed analizzare il ragionamento messo in atto dagli studenti quando vengono esposti ad una attività matematica che coinvolge operazioni logiche. Inizialmente ci si è soffermati all'applicazione del modello ad affermazioni del tipo SE ALLORA. L'analisi è stata effettuata considerando diversi gradi di consapevolezza che gli studenti hanno con le regole logiche formali, e diversi livelli di formality (riguarda l'uso appropriato di regole logiche). Entrambe le dimensioni, consapevolezza e formality, possono dar luogo ad una dimensione più legata all'aspetto meta-cognitivo ed affettivo, che riguarda la fiducia in sé stessi circa la correttezza del proprio ragionamento. I primi risultati che sono stati ottenuti evidenziano che le tre componenti del modello elaborato, la fiducia in sé stessi, la consapevolezza e la formality, non possono essere viste come tre variabili non correlate: le tre componenti sono strettamente collegate tra loro. Tali risultati sono stati presentati al PME 2011 e pubblicati nei relativi Proceedings.

I risultati, ottenuti in questi anni nella mia attività di ricerca, hanno evidenziato che l'analisi della sola componente cognitiva non è sufficiente a spiegare le difficoltà incontrate dagli studenti nello studio della matematica. Spesso è emerso che le

performance di studenti sono influenzate anche da fattori affettivi, coerentemente con i risultati ottenuti nella ricerca internazionale in educazione matematica (McLeod, 1992; Di Martino e Zan, 2011). Per questo motivo i miei interessi di ricerca nell'ultimo periodo sono rivolti anche al ruolo dei fattori affettivi in educazione matematica. In particolare, tenendo conto che le emozioni degli insegnanti verso la matematica influenzano le loro pratiche di insegnamento e, quindi, condizionano la qualità dell'apprendimento in matematica degli studenti, e rendendomi conto durante le mie varie esperienze di formazione docenti di diverso livello scolastico (anche durante l'assistenza didattica tenuta nei corsi a Scienze della Formazione Primaria) che l'atteggiamento emotivo nei confronti della matematica è spesso negativo, ho iniziato a focalizzare l'attenzione su una problematica centrale dell'educazione matematica: capire "cosa sia necessario per insegnare in modo efficace la matematica". Questo mi ha spinto ad analizzare la componente affettiva degli insegnanti di matematica ponendo al centro dell'analisi il costrutto dell'"attitudine verso l'insegnamento della matematica". La ricerca, sviluppata in più anni in collaborazione con altre Università italiane, è tuttora in corso e coinvolge futuri insegnanti di scuola primaria. Si sta investigando sulle relazioni tra le diverse dimensioni di tale costrutto: la componente emozionale, la visione della matematica e le competenze percepite sia nei confronti della matematica sia nei confronti dell'idea di doverla insegnare.

Alcuni primi risultati ottenuti (presentati alla MAVI Conference 2012, al PME 37 ed al CIEAEM65 nel 2013 e pubblicati nei relativi Proceedings e sulla rivista internazionale *Nomad*) hanno evidenziato che prevalgono emozioni negative (paura, ansia, stress) sia nei confronti della matematica sia nei confronti dell'idea di doverla insegnare. Uno dei risultati più interessanti è che tali emozioni sono accompagnate da una maggiore consapevolezza, e dalla voglia (non sempre, ma molto spesso) di ricostruire il proprio rapporto con la matematica, dalla convinzione che aver alzato quel muro nei confronti della matematica abbia costituito una occasione persa. Sembra apparire in questi insegnanti un desiderio che abbiamo chiamato *math-redemption* perché descrive il fenomeno degli insegnanti di volersi redimere in modo da non far provare ai loro studenti quello che loro hanno provato. L'interesse attuale è cercare di capire l'origine di tale fenomeno.

Nel cercare di capire le difficoltà incontrate dagli studenti nei processi di apprendimento della matematica collegate anche a come tale disciplina viene insegnata, il mio interesse di ricerca si è soffermato anche sull'analisi dell'uso dell'e-learning nei processi di apprendimento/insegnamento della matematica e nella formazione insegnanti. In particolare è stato analizzato l'uso dell'e-learning sia come supporto agli studenti per migliorare l'apprendimento della matematica sia come supporto per promuovere un pensiero riflessivo sulle pratiche d'insegnamento o sugli strumenti da usare nelle pratiche d'insegnamento. E' stato condotto un primo studio su futuri insegnanti di scuola primaria, in cui l'uso dell'e-learning era focalizzato all'approfondimento di alcuni argomenti come la "dimostrazione in matematica".

L'analisi è stata condotta sulla base di un modello teorico che coinvolge quattro differenti aspetti, in accordo al "focus" delle attività (Matematica e Didattica) ed al "ruolo" degli utenti (Studente ed Insegnante). Dall'analisi di un'indagine finale emergono numerose ed interessanti correlazioni tra questi aspetti. In particolare, sembra emergere che gli studenti apprezzino l'e-learning più come strumento riflessivo per il loro futuro lavoro (facendo prevalere la correlazione Didattica/Insegnante). Esistono però numerosi studenti che chiedono esplicitamente che sulla piattaforma utilizzata per l'e-learning ci sia qualche contenuto che permetta di migliorare le loro competenze matematiche (facendo prevalere la correlazione Matematica/Studente). L'interesse in questo ambito di ricerca è stato oggetto del seminario su invito tenuto nel 2013 al XXX Seminario nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica "Giovanni Prodi" ed i primi risultati sono stati presentati al CIEAEM 65 (2013).

Negli ultimi anni l'attività di ricerca si è concentrata sulla Teacher Education, focalizzando l'attenzione su due costrutti: l'**Interpretative Knowledge** e la **Cultural Transposition**. La prima è un tipo di conoscenza matematica che permette agli insegnanti di dare un senso al ragionamento e alle produzioni degli studenti, anche se non corrette o non standard, permettendo lo sviluppo delle conoscenze matematiche degli studenti a partire dai loro elaborati. La seconda, invece, è una prospettiva che inquadra l'uso di pratiche educative di matematica straniera come opportunità per mettere in discussione le pratiche didattiche del proprio contesto culturale. Coinvolge ricercatori e docenti-ricercatori in Educazione Matematica, che entrano in contatto con le pratiche didattiche di altri paesi e le sottopongono a un processo di decostruzione per reinterpretare le loro componenti attraverso la lente delle credenze e dei valori della propria cultura.