# Capitolo 2

# DOMANDA

## 2.1 ELEMENTI MASSIMI

La questione che si affronta in questa sezione è la determinazione della scelta della migliore alternativa possibile. Per risolvere questo problema è necessario avere una definizione precisa di scelta e alcune ipotesi sull'insieme delle scelte possibili. Le scelte di un individuo sono tipicamente limitate ad un sottoinsieme dell'insieme delle alternative $X$. Questo sottoinsieme verrà per ora definito come "insieme-vincolo" e indicato con $A$. La scelta verrà identificata con gli elementi massimi per una RP su $A$.

**D 2.1 (Elementi massimi)** *$x^* \in A$ si dice elemento massimo per $\succeq$ su $A$ quando:*

$$x^* \succeq x \ \forall x \in A, \qquad \textit{ovvero} \qquad Q(x^*) \cap A = \emptyset.$$

Con $M^A$ si definisca l'insieme degli elementi massimi su $A$, ovvero:

$$M^A = \{x^* \in A : x^* \succeq x, \ \forall x \in A\}.$$

**P 2.1** *Sia $M^A \neq \emptyset$, $A$ convesso e $\succeq$ una RPR convessa su $X$. Allora:*

- *$M^A$ è convesso;*
- *$M^A$ ha un solo elemento se $\succeq$ è strettamente convessa.*

**Dimostrazione.** Siano $x_1^*$ e $x_2^*$ due elementi di $M^A$ e $\alpha \in (0,1)$. Per la convessità di $A$ si ha:

$$\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^* \in A,$$

e, per la convessità di $\succeq$, $\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^* \succeq x_1^*$, ovvero $\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^* \in M^A$. Ciò dimostra la convessità di $M^A$.

Ora sia $\succeq$ strettamente convessa. Allora:

$$\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^* \in A, \ \ \alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^* \succ x_1^*,$$

e dunque $x_1^*$ non può appartenere a $M^A$, cioè non può esistere più di un elemento in $M^A$. **Q.E.D.**

**P 2.2** *Se $\succeq$ è una RPR che soddisfa la monotonicità, un elemento massimo su $A$ non può essere un elemento interno di $A$.*

**Dimostrazione.** Sia $x^*$ un punto interno di $A$. Allora esiste un intorno $U$ di $x^*$ tutto contenuto in $A$. Per la monotonicità, $\alpha x^* \succ x^*$ per ogni $\alpha > 1$. Per $\alpha$ sufficientemente vicino a 1, $\alpha x^* \in U$. Dunque, $y = \alpha x^* \succ x^*$ con $y$ in $U \subset A$, contro l'ipotesi che $x^* \in M^A$. **Q.E.D.**

È evidente che vi sono situazioni in cui non è mai possibile derivare una scelta. Ciò avviene, in generale, sia quando le relazioni di preferenza non soddisfano l'ipotesi di continuità, sia quando l'insieme vincolo è illimitato o non chiuso. Ad esempio, l'ipotesi di monotonicità implica $M^A = \emptyset$ se $A$ è illimitato. Inoltre, poiché per gli elementi di un aperto esiste sempre un intorno che è tutto contenuto nell'insieme a cui appartengono, la monotonicità implica $M^A = \emptyset$ se $A$ è aperto.

**P 2.3** *Sia $\succeq$ una RPR continua, convessa e monotona. Se, inoltre, $A$ è non vuoto, compatto e convesso, $M^A$ è non vuoto e convesso e non contiene punti interni di $A$.*

**Dimostrazione.** Poiché $\succeq$ è una RPR continua, può essere rappresentata da una funzione di utilità continua $u(.)$. Dunque, la scelta può essere effettuata risolvendo il problema

$$\max_x u(x) \text{ sub } x \in A.$$

Se $A$ è compatto, allora l'insieme $u(A)$ è compatto, ovvero chiuso e limitato. Segue che esiste un valore $\bar{u} \in A$ tale che $\bar{u} \geq u(x)$ per ogni $x \in A$. La convessità di $M^A$ segue dalla P.2.1. Infine, il fatto che $M^A$ non contenga punti interni di $A$ segue dalla P.2.2. **Q.E.D.**

## 2.2 LA SCELTA DEL CONSUMATORE

### 2.2.1 Il vincolo di bilancio

Possiamo ora entrare nel merito del problema di scelta del consumatore. Da ora in poi poniamo $X = \mathbb{R}^n_+$ e tale insieme (con elementi $x$) verrà indicato come insieme di consumo. L'insieme di consumo è composto da tutti i beni disponibili sul mercato nelle quantità che permettono la sopravvivenza del consumatore.

Il numero $m > 0$ indicherà il reddito monetario del consumatore e $p \in \mathbb{R}^n_+$ sarà il vettore (riga) di prezzo. Il fatto che la dimensione del vettore di prezzo $p$ sia uguale alla dimensione dell'insieme di consumo implica l'ipotesi che esista un mercato (e quindi un prezzo) per ogni bene che rientra nell'insieme di consumo.

Per definire il valore dei panieri di consumo, a dati prezzi, faremo uso del prodotto scalare tra $p$ e $x$, ovvero:

$$px = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Il rapporto $p_i/p_j$ tra il prezzo del bene $i$ ed il prezzo del bene $j$ si dice prezzo relativo del bene $i$ in termini del bene $j$.

**D 2.2 (Insieme di bilancio)** *Dati $p \in \mathbb{R}^n_+$ e $m > 0$, si definisce insieme di bilancio del consumatore:*

$$B(p, m) = \{x \in X : px \leq m\}.$$

**P 2.4** *$B(p, m)$ è un insieme chiuso ed è compatto se e solo se $p \gg 0$.*

**Dimostrazione.** Sia $x^n \in B(p, m)\ \forall n,\ x^n \to x$. Mostriamo che $x \in B(p, m)$. Per la continuità della funzione prodotto scalare si ha che $px^n \to px$. Poiché $px^n \leq m$ per ogni $n$, $px^n \to px$ implica $px \leq m$.

Ora dimostriamo che $B(p, m)$ è compatto se e solo se $p \gg 0$. Poiché sappiamo già che $B(p, m)$ è chiuso, dobbiamo mostrare solo che è limitato se e solo se $p \gg 0$.

Dimostriamo innanzitutto che se $B(p, m)$ è limitato si deve avere $p \gg 0$. Sia dunque $B(p, m)$ limitato e $p_i = 0$ per qualche $i$. Per il vettore $e^i$ tale che $e^i_j = 0$ $\forall j \neq i$, $e^i_i = 1$, si ha:

$$pe^i = 0, \quad \alpha e^i \in B(p, m)\ \forall \alpha > 0.$$

Ne segue che $B(p, m)$ è illimitato, il che contraddice l'ipotesi; dunque, $p \gg 0$.

Dimostriamo ora che se $p \gg 0$ allora $B(p, m)$ è limitato. Sia $p \gg 0$ e $p_m = min\{p_1, .., p_k\}$. Se $x \in B(p, m)$, allora, per ogni $i$, si ha $0 \leq p_i x_i \leq px \leq m$, e dunque anche:

$$0 \leq x_i \leq (px/p_i) \leq (m/p_m) < \infty \ \ \forall i.$$

**Q.E.D.**

Nella figura 2.1 vengono rappresentati due insiemi di bilancio. Nel primo si ha $(p_1, p_2) \gg 0$, nel secondo $p_1 = 0$, $p_2 > 0$. La pendenza della retta di bilancio è uguale al rapporto tra i prezzi $p_1/p_2$.

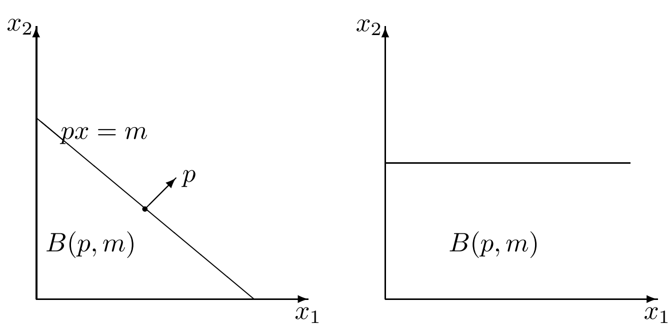



**Figura 2.1** *Due insiemi di bilancio.*

**E 2.1** *Sia $X = \mathbb{R}^2_+$ l'insieme di consumo. Il governo vuole finanziare il consumo del bene 1 e per fare questo consegna un "buono" di $T$ lire al consumatore con la clausola che il buono può essere speso solo per comprare il bene 1 e non può essere venduto sul mercato. Traccia l'insieme di bilancio in presenza del buono.*

### 2.2.2 L'insieme di domanda

Consideriamo ora il problema classico del consumatore. Egli deve scegliere il vettore di consumo preferito nell'insieme di bilancio. Stiamo implicitamente assumendo che egli prenda come dati (cioè che non ritenga di poter influenzare) i prezzi dei beni.

**D 2.3 (Insieme di domanda)** *L'insieme di domanda (idd) è l'insieme degli elementi massimi per $\succeq$ su $B(p,m)$:*

$$\phi(p,m) = M^{B(p,m)} = \{x \in B(p,m) : x \succeq y,\ \forall y \in B(p,m)\}.$$

Se facciamo uso del concetto di utilità (il che è possibile quando la RP è razionale e continua su $X$), il problema può essere definito nel modo seguente:

$$\text{(PMU)} \qquad \max_x u(x) \text{ sub } x \in B(p,m).$$

Poiché abbiamo ipotizzato che $X = \mathbb{R}^n_+$, il vincolo $x \in B(p,m)$ può essere riformulato nel modo seguente:

$$px \leq m, \qquad x \geq 0.$$

**E 2.2** *Sia $X = \mathbb{R}^2_+$ e supponi che il consumatore abbia la seguente RP:*

$$\forall x, y \in X, \qquad y \succeq x \Leftrightarrow y_1 \geq x_1.$$

*Determina la domanda $\phi(p,m)$ del consumatore.*

## 2.3 PROPRIETÀ DELLA DOMANDA

**P 2.5** *Sia $\succeq$ una RPR. Allora:*

- $\succeq$ *convessa* $\Rightarrow$ $\phi(p,m)$ *convesso;*
- $\succeq$ *strettamente convesso* $\Rightarrow$ $\phi(p,m)$ *è costituito da un solo elemento* $x(p,m)$*;*
- $\succeq$ *soddisfa la monotonicità* $\Rightarrow$ $px = m$, $\forall x \in \phi(p,m)$*;*
- $p \gg 0$, $\succeq$ *continua* $\Rightarrow$ $\phi(p,m) \neq \emptyset$.

**Dimostrazione.** Il lettore è in grado di dimostrare questa proposizione ricorrendo alle proposizioni P.2.9, P.2.10 e P.2.11. **Q.E.D.**

**P 2.6 (Omogeneità di grado zero)** $\forall \alpha > 0$*, si ha* $\phi(\alpha p, \alpha m) = \phi(p,m)$.

**Dimostrazione.** È sufficiente notare che $B(\alpha p, \alpha m) = B(p,m)$. **Q.E.D.**

Da questo momento in poi assumeremo che le preferenze siano strettamente convesse e rappresentabili mediante funzioni di utilità differenziabili almeno due volte. La stretta convessità implica che l'idd è costituito da un solo elemento, cioè la funzione di domanda (fdd) $x(p,m)$, e che tale elemento è una funzione continua in $p$ e $m$.

**D 2.4 (Beni normali)** *Sia $x(p,m)$ differenziabile. Un bene $i$ viene detto normale se:*

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} \geq 0,$$

*altrimenti viene detto inferiore.*

**D 2.5 (Legge della domanda)** *Sia $x(p,m)$ differenziabile. Si dice che un bene $i$ soddisfa la legge della domanda se:*

$$\frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_i} \leq 0,$$

*altrimenti viene detto "bene Giffen".*

## 2.4 CALCOLO DELLE FUNZIONI DI DOMANDA

Ricordiamo che le condizioni necessarie di Kuhn-Tucker (cf. sez. 1.5) per un ottimo vincolato implicano che se $x \in \phi(p,m)$ e $m > 0$ allora esiste uno scalare non negativo $\lambda$ tale che:

$$Du(x) \leq \lambda p, \qquad [Du(x) - \lambda p]x = 0.$$

ove:

$$Du(x) = (\partial u/\partial x_1, .., \partial u/\partial x_n).$$

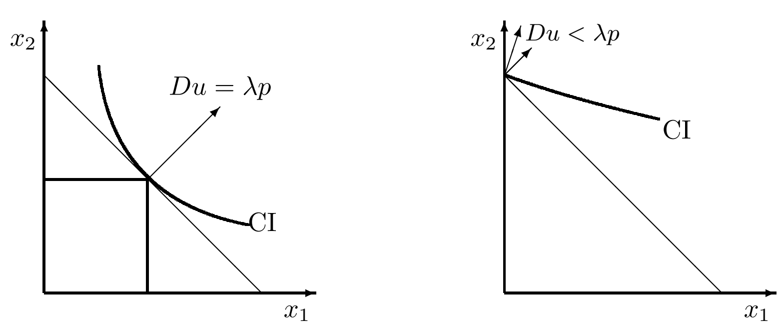
Dunque, se $x \in \phi(p,m)$ è strettamente positivo, si ha:

$$Du(x) = \lambda p. \tag{2.1}$$

**P 2.7** *Se la funzione di utilità è concava allora le condizioni di Kuhn-Tucker sono sufficienti, ovvero se $x$ soddisfa tali condizioni per qualche scalare positivo $\lambda$ allora $x = x(p,m)$.*

L'equazione 2.1 esprime la famosa condizione di tangenza, secondo la quale il saggio marginale di sostituzione tra due beni è uguale al rapporto tra i prezzi dei beni stessi (vedi la figura 2.2a).

**P 2.8** *Se la fdd è un vettore interno all'insieme $\mathbb{R}^n_+$, allora il prezzo relativo del bene $i$ rispetto al prezzo del bene $j$ è uguale al $SMS_{ij}$ tra il bene $i$ ed il bene $j$ per ogni $i, j = 1, .., n$. Ovvero, $p_i/p_j = SMS_{ij}$.*




(a) (b)

**Figura 2.2** *Punti di ottimo.*

Il SMS definisce grosso modo il numero massimo di unità del bene 2 a cui dovrebbe rinunciare il consumatore se, ottenendo un'unità in più del bene 1, egli non volesse ridurre il suo livello di soddisfazione. Il SMS potrebbe dunque essere definito come il massimo costo opportunità che il consumatore è disposto a pagare per acquisire un'unità in più del bene 1. Tale costo va distinto dal costo di mercato del bene, espresso dal prezzo relativo $p_1/p_2$. Infatti, $p_1/p_2$ misura il numero di unità del bene 2 a cui deve rinunciare il consumatore per ottenere un'unità in più del bene 1 sul mercato. L'equilibrio del consumatore (per soluzioni interne) si ha quando $SMS = p_1/p_2$, cioè quando il massimo costo opportunità di acquisire un'unità in più del bene 1 è uguale al costo sul mercato. Se infatti fosse $SMS > p_1/p_2$, vorrebbe dire che, per ottenere un'unità aggiuntiva del bene 1, il mercato chiede al consumatore di dar via un numero di unità del bene 2 inferiore al numero massimo di unità che egli è disposto a dar via pur di non diminuire il suo benessere. Dunque, in tal caso egli trarrebbe vantaggio dallo scambiare il bene 2 con il bene 1.

**P 2.9** *Sia $x_1(p,m) = 0$ e $x_j(p,m) > 0$ per ogni $j \neq 1$. Allora:*

$$SMS_{1j} = \frac{\partial u(x)/\partial x_1}{\partial u(x)/\partial x_j} \leq p_1/p_j.$$

*Ovvero, il prezzo relativo del bene che il consumatore non desidera consumare è maggiore o uguale al saggio marginale di sostituzione tra quel bene ed il bene in termini del quale viene calcolato il suo prezzo relativo (vedi la figura 2.2b).*

**Dimostrazione.** Si ottiene come semplice corollario del teorema di Kuhn-Tucker. **Q.E.D.**

**P 2.10** *Se la fdu è Cobb-Douglas, la fdd è sempre un vettore interno di $\mathbb{R}^n_+$.*

**Dimostrazione.** Basta confrontare le condizioni di Kuhn-Tucker e osservare che, per una Cobb-Douglas:

$$\lim_{x_i \to 0} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = +\infty,$$

per $i = 1, .., n$. **Q.E.D.**

**E 2.3** *Si consideri la seguente fdu:*

$$u(x_1, x_2) = (1 + x_1)(1 + x_2)$$

*e si assuma che i prezzi siano tutti positivi.*

*Per calcolare la fdd si costruisca la funzione lagrangiana:*

$$L = (1 + x_1)(1 + x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) + \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2,$$

*dove $\lambda, eta_1, \eta_2$ sono dei moltiplicatori non negativi. I moltiplicatori $\eta_j$ "si prendono cura" dei vincoli di non negatività $x_j \geq 0$ $(j = 1, 2)$.*

*Le condizioni di Kuhn-Tucker possono essere scritte nel modo seguente:*

$$1 + x_2 = \lambda p_1 - \eta_1, \tag{2.2}$$

$$1 + x_1 = \lambda p_2 - \eta_2, \tag{2.3}$$

$$\lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) = 0, \qquad \eta_1 x_1 = 0, \qquad \eta_2 x_2 = 0. \tag{2.4}$$

*Si noti che, essendo $u(.)$ crescente in entrambi gli argomenti, deve essere necessariamente $\lambda > 0$ e:*

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \tag{2.5}$$

*Abbiamo tre possibili soluzioni.*

1. *La soluzione in cui nessun vincolo di non negatività è "stringente", ovvero $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Tale soluzione implica in generale $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$, ma può anche implicare $x_j = 0$ per qualche $j = 1, 2$ nel caso in cui tale soluzione fosse ottima anche se "trascurassimo" i vincoli di non negatività.*

2. *La soluzione in cui il vincolo di non negatività è stringente per il bene 1 ma non per il bene 2, ovvero $\eta_1 > 0$, $\eta_2 = 0$. Tale soluzione implica $x_1 = 0$ e $x_2 \geq 0$. Il fatto che il vincolo sia stringente significa che il consumatore sceglierebbe $x_1 < 0$ se il suo spazio di consumo ammettesse quantità negative del bene 1.*

3. *Infine, abbiamo la soluzione in cui il vincolo di non negatività è stringente per il bene 2 ma non per il bene 1, ovvero $\eta_1 > 0$, $\eta_2 = 0$.*

*Vediamo ora per quali valori di $p_1$, $p_2$ e $m$ prevale una delle soluzioni possibili.*

*Se fosse $\eta_1 = \eta_2 = 0$ le condizioni di KT 2.2, 2.3 ci darebbero:*

$$\lambda = \frac{1 + x_2}{p_1} = \frac{1 + x_1}{p_2}.$$

*Risolvendo per $x_2$ si ottiene $x_2 = (p_1/p_2)(1 + x_1) - 1$. Inserendo questo valore nell'equazione del vincolo di bilancio 2.5 e risolvendo poi di nuovo per $x_2$ otteniamo:*

$$x_1 = \frac{m - (p_1 - p_2)}{2p_1}, \qquad x_2 = \frac{m - (p_2 - p_1)}{2p_2}.$$

*Dunque, la soluzione con $\eta_1 = \eta_2 = 0$ è valida solo se:*

$$m \geq \max\{p_1 - p_2, p_2 - p_1\}.$$

*Se fosse $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 = 0$, le condizioni di KT ci darebbero:*

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = m/p_2, \qquad \lambda = 1/p_2.$$

*La prima condizione segue da $\eta_1 x_1 = 0$, la seconda dalla prima e dal vincolo di bilancio, la terza ancora dalla prima e dalla condizione di KT 2.3. Utilizzando tali condizioni insieme alla 2.2, si ottiene:*

$$\eta_1 = \frac{(p_1 - p_2) - m}{p_2}.$$

*Dunque, la soluzione con $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 = 0$ è valida solo se $m < p_1 - p_2$.*

*Per analogia, l'ultimo tipo di soluzione ($\eta_2 > 0$ e $\eta_1 = 0$) è caratterizzata da:*

$$x_2 = 0, \qquad x_1 = m/p_1, \qquad \lambda = 1/p_1,$$

*ed è valida solo se $m < p_2 - p_1$.*

*Riassumendo, possiamo caratterizzare la fdd nel modo seguente:*

$$\begin{array}{lll} x_1(p,m) = \frac{m-(p_1-p_2)}{2p_1}, & x_2(p,m) = \frac{m-(p_2-p_1)}{2p_2} & se \quad m \geq \max\{p_1 - p_2, p_2 - p_1\}; \\ x_1(p,m) = 0, & x_2 = m/p_2 & se \quad m < p_1 - p_2; \\ x_1(p,m) = m/p_1, & x_2 = 0 & se \quad m < p_2 - p_1. \end{array}$$

**E 2.4** *Determina le funzioni di domanda di un consumatore con funzione di utilità:*

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + x_2, \qquad \alpha \neq 1,\ \alpha > 0$$

*e vincolo di bilancio $p_1 x_1 + p_1 x_2 \leq m$.*

**E 2.5** *Considera due consumatori, Ada e Mario, e due beni, $x_1$ = "etti di pasta", $x_2$ = "ore di tempo libero". Le funzioni di utilità di Ada e Mario sono, rispettivamente,*

$$u^A(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1} + x_2, \qquad u^M(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1} + x_2,$$

*con $x_1 \geq 0$ e $x_2 \in [0, 20]$.*

1. *Sia $p_1 = 1$ e $p_2 = w > 0$ il salario orario. Ada e Mario non hanno altra fonte di reddito oltre il loro lavoro. Deriva la domanda di pasta e l'offerta di lavoro L di Ada e Mario. Qual'è il salario minimo al di sopra del quale decidono di lavorare tutte le 20 ore che hanno a disposizione?*

2. *Supponi ora che Ada disponga di una somma di denaro $m$ oltre al suo reddito da lavoro e che $w = 10$. Traccia la curva di Engel (relazione tra reddito monetario e domanda) per la domanda di pasta $x_1$ e l'offerta di lavoro $L$ (relazione tra $m$ e $x_1$, $L$ rispett.) di Ada per ogni $m > 0$.*

**E 2.6** *Continuando dall'eserciio 2.1, supponi che il consumatore abbia funzione di utilità*

$$u(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{3/4}$$

*e reddito monetario $m = 300$.*

1. *Determina la scelta di $x_1$ e $x_2$ del consumatore per tutti i diversi valori di $T$.*

2. *Se il consumatore avesse l'opportunità di rivendere il buono sul mercato cosi' da trasformarlo in moneta corrente, per quali valori di $T$ migliorerebbe il suo benessere?*

### 2.4.1 UTILITÀ INDIRETTA

**D 2.6 (Funzione di utilità indiretta)** *La funzione di utilità indiretta (fdui) è la funzione valore del problema PMU e si scrive $v(p, m)$. Dunque:*

$$v(p, m) = u(x^*), \qquad x^* \in \phi(p, m).$$

**P 2.11** *Sia $x(p, m) \gg 0$ e $\lambda$ il moltiplicatore di Lagrange associato al problema PMU. Allora $\lambda$ è uguale all'utilità marginale del reddito monetario. Ovvero:*

$$\lambda = \partial v(p, m)/\partial m.$$

**Dimostrazione.** Da $v(p, m) = u(x(p, m))$ segue:

$$\partial v(p, m)/\partial m = Du(x(p, m))D_m x(p, m) = \lambda p D_m x(p, m) = \lambda,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'implicazione:

$$px(p, m) = m \Rightarrow pD_m x(p, m) = 1.$$

**Q.E.D.**

Possiamo dire che $\lambda$ è uguale all'incremento di utilità che consegue dal disporre di una lira in più da spendere sul mercato.

**P 2.12** *La fdui è:*

- *omogenea di grado zero nei prezzi e nel reddito monetario;*
- *crescente nel reddito monetario e non crescente nei prezzi.*

**Dimostrazione.** L'omogeneità segue semplicemente dall'omogeneità della fdd. Che sia crescente in $m$ e non decrescente in $p$ segue dal fatto che $B(p, m) \subset B(p', m')$ tutte le volte che $p \leq p'$ e $m < m'$. **Q.E.D.**

**E 2.7** *Calcola la fdui per le seguenti funzioni di utilità:*

- $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$,
- $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1, x_2\}$,
- $u(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$,
- $u(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1} + x_2$.