ANALISI SPETTRALE NUMERICA

(*Aspetti teorici*)

ARGOMENTI

- **Elaborazione numerica dei segnali di misura**
- **Aspetti teorici**
  - *Discrete Fourier Transform* (DFT)
  - *Fast Fourier Transform* (FFT)
- **Misurazioni con la FFT**

ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI DI MISURA

Elaborare segnali di misura significa…..

- 1° passo: campionamento (segnale discreto nel tempo, ma ancora continuo nelle ampiezze).
  - È svolto da dispositivi *Sample&Hold*.

- 2° passo: quantizzazione (segnale discreto nel tempo e nelle ampiezze).
  - È svolto da convertitori analogico/digitali (*A/D*).

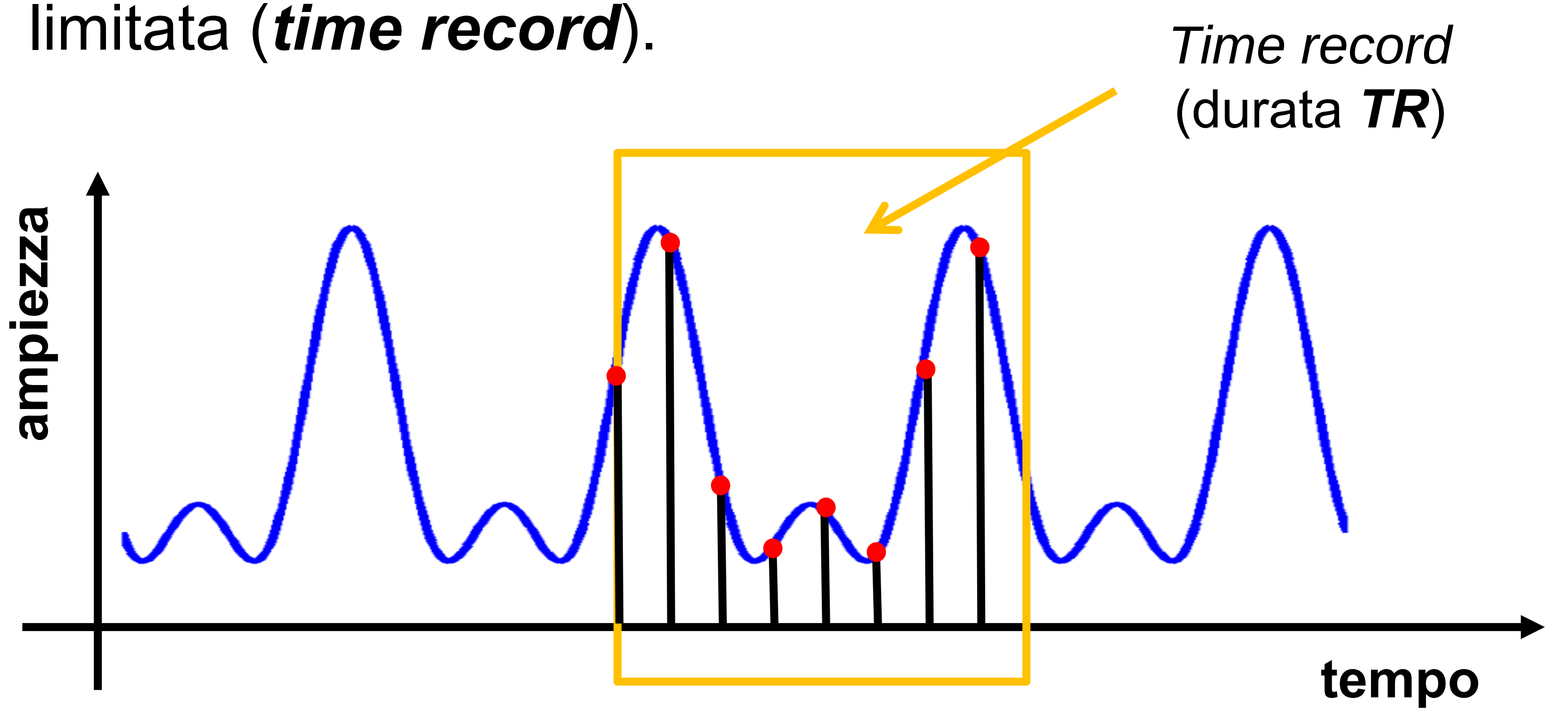
Elaborare segnali di misura significa.....

- 3° passo: elaborazione (applicazione di determinati algoritmi sui campioni in forma numerica).
  - È generalmente svolto da *Digital Signal Processor*.

- 4° passo: estrazione delle informazioni (target dell'elaborazione).
  - Applicazione di appropriate *procedure di misura*.

Elaborare segnali di misura significa…..

- ….operare con una sequenza di campioni di durata limitata (***time record***).



f_c : frequenza di campionamento
N : numero di campioni

$$TR = N / f_c = N \cdot T_c$$

ASPETTI TEORICI

(*Discrete Fourier Transform* - DFT)

DFT: relazioni fondamentali

***s*(*n*)** a tempo discreto e durata limitata

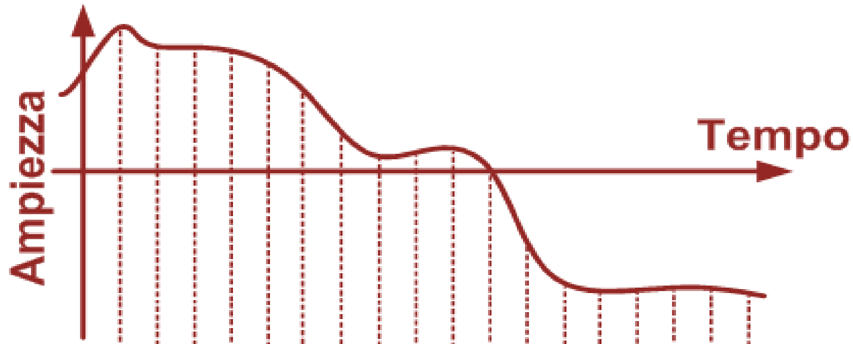
- analisi: $S(k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & altrove \end{cases}$

- sintesi: $s(n) = \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & altrove \end{cases}$

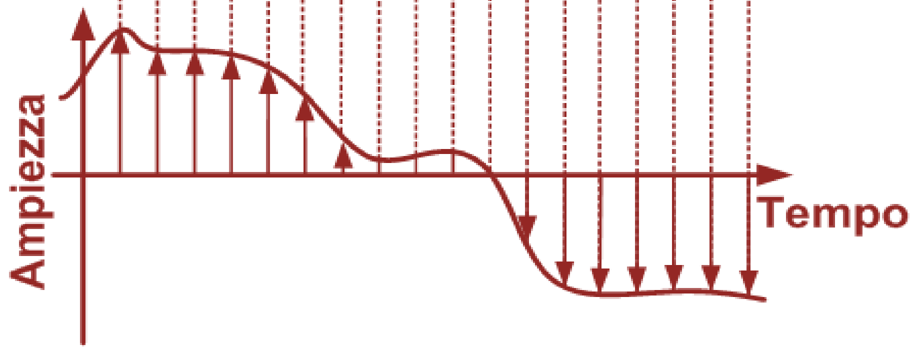
N : numero di campioni del segnale

Come lavora la DFT ?

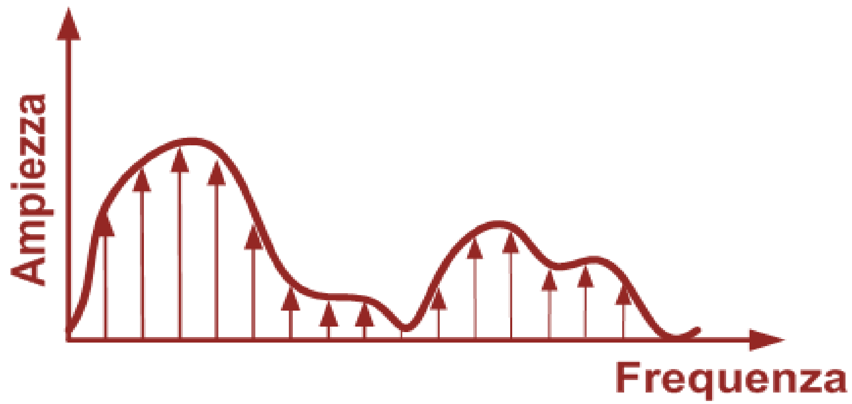
Ingresso: segnale continuo nel tempo



Discretizzazione nel tempo e nelle ampiezze

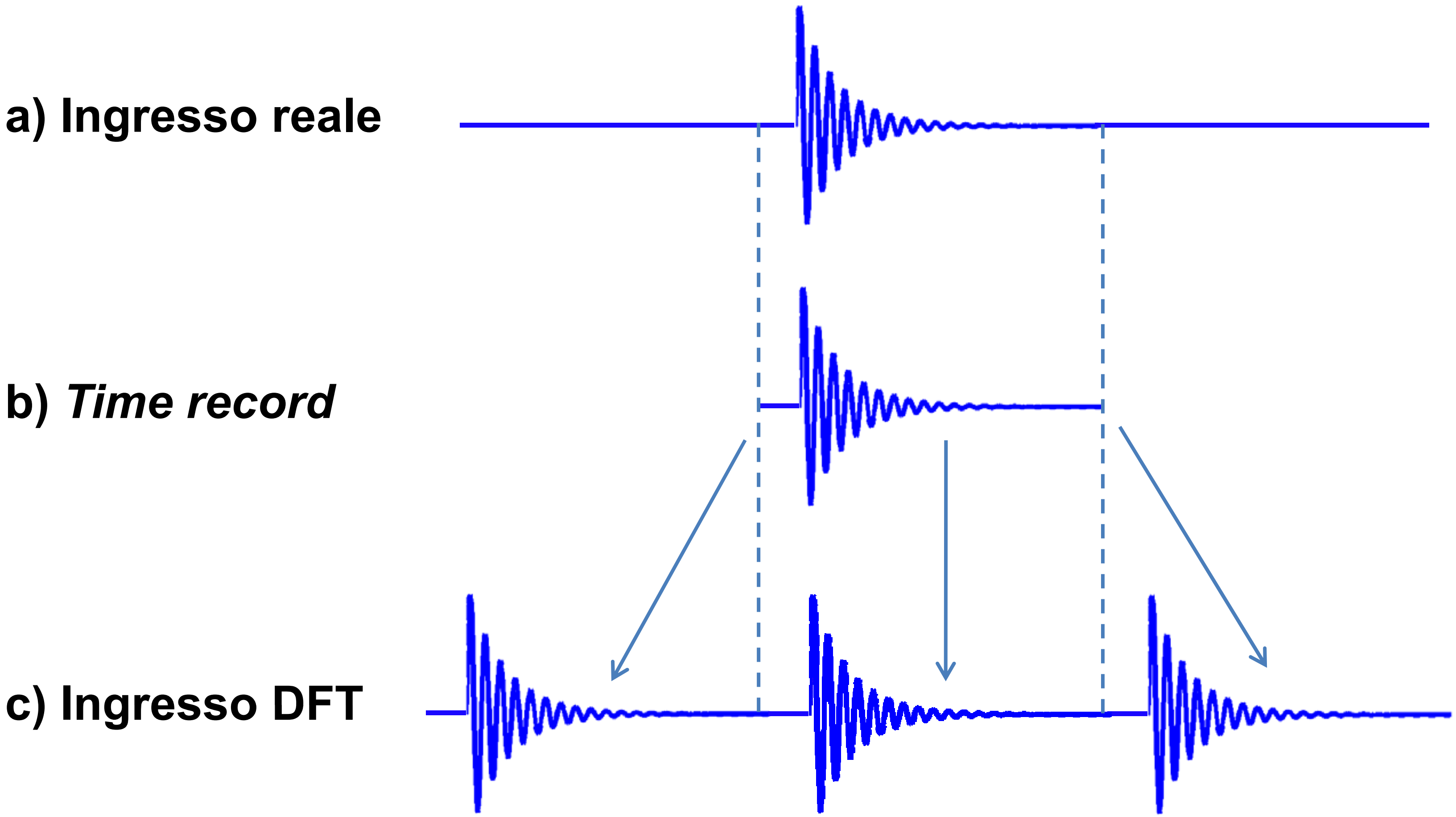


Uscita: campioni dello spettro (*bin*) del *segnale in ingresso*



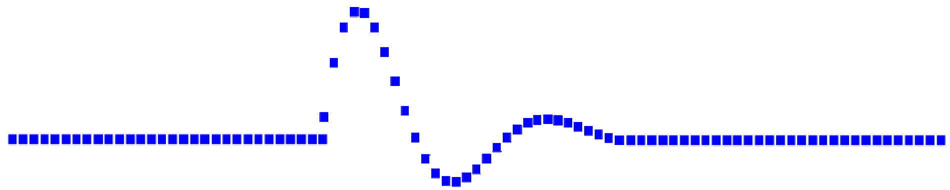
Principale assunzione della DFT

- Il segnale di cui la DFT fornisce i *bin* deriva dalla replica del *time record* lungo tutto l'asse temporale.

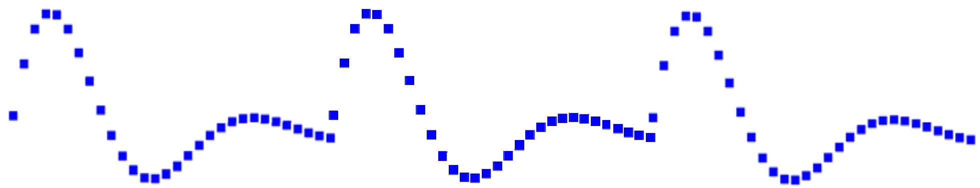


DFT e Trasformata di Fourier a Tempo Discreto

Trasformata di Fourier a Tempo Discreto
Segnali a tempo discreto ed aperiodici



DFT
Segnali a tempo discreto e periodici.



ASPETTI TEORICI

(*Fast Fourier Transform* - FFT)

Fast Fourier Transform (FFT)

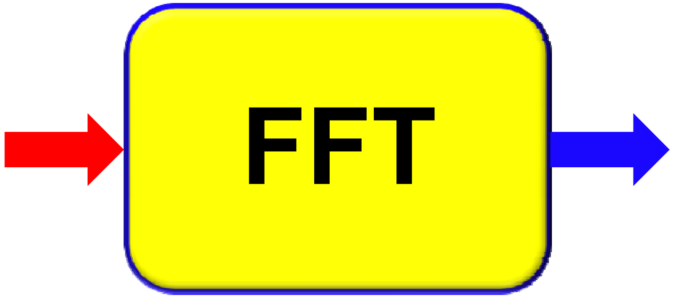
- E' un algoritmo per la valutazione veloce della DFT, denominato anche "**algoritmo a farfalla**".

- E' caratterizzata da carico computazionale estremamente ridotto (***N·logN***) se confrontato con quello derivante dall'applicazione diretta della relazione fondamentale (N^2).

- *N* deve essere una **potenza di due**.

Risultati della FFT

N campioni reali



N valori complessi
(*N* parti reali, *N* parti immaginarie)

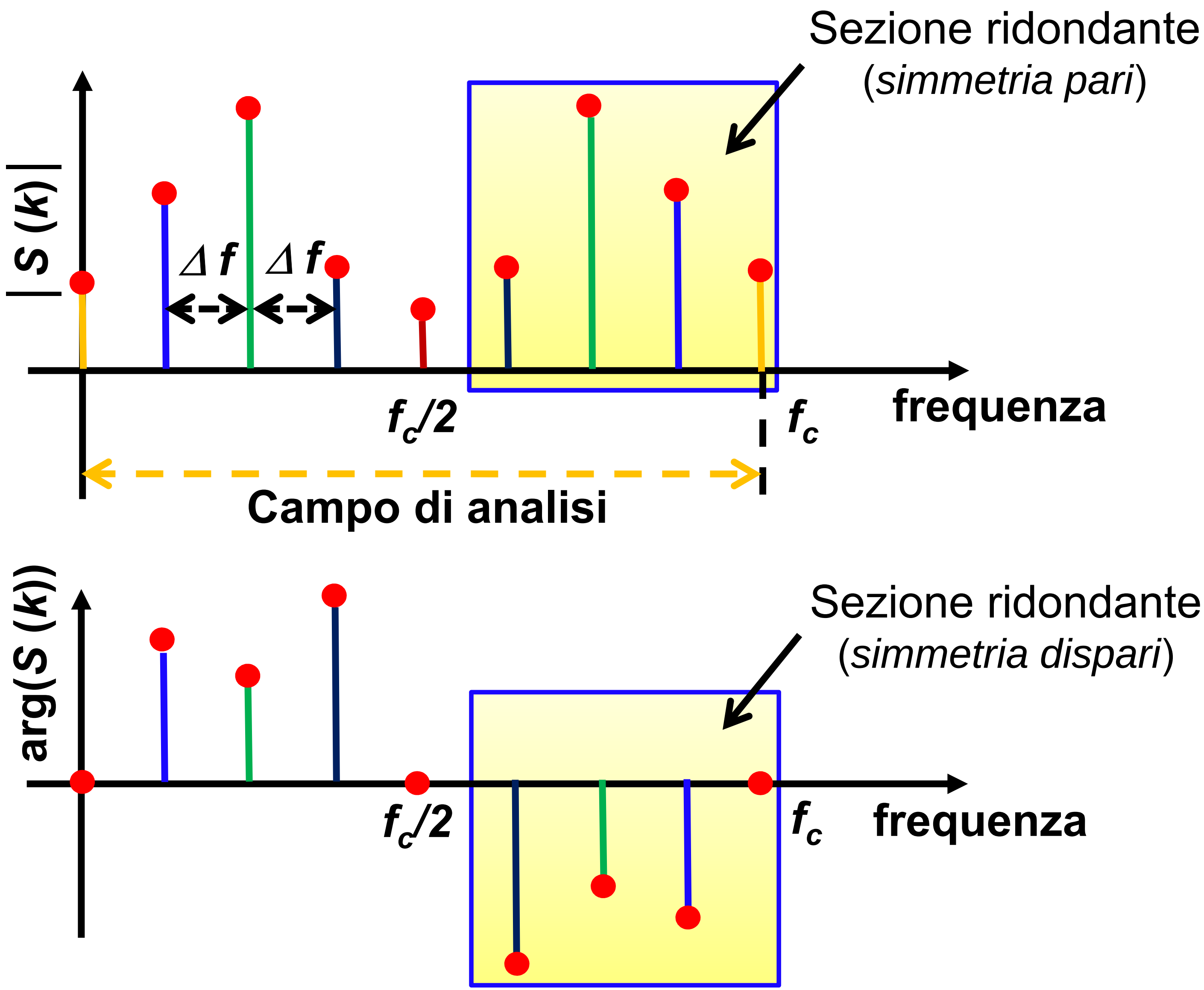
- I risultati (***bin***) sono generalmente espressi con un numero d'ordine, ***k* da 0 ad *N* - 1**, e presentati in forma polare (ampiezza e fase)
  - **Spettro di ampiezza: modulo di *S* (*k*), $|S(k)|$,**
  - **Spettro di fase: fase di *S* (*k*), arg(*S* (*k*))**

Risultati della FFT

***N* = 8**

Spettro di ampiezza

Spettro di fase



Risultati della FFT

- Il campo di frequenze analizzate si estende dalla continua (**0Hz**) fino alla metà della frequenza di campionamento (f_c **/ 2**).

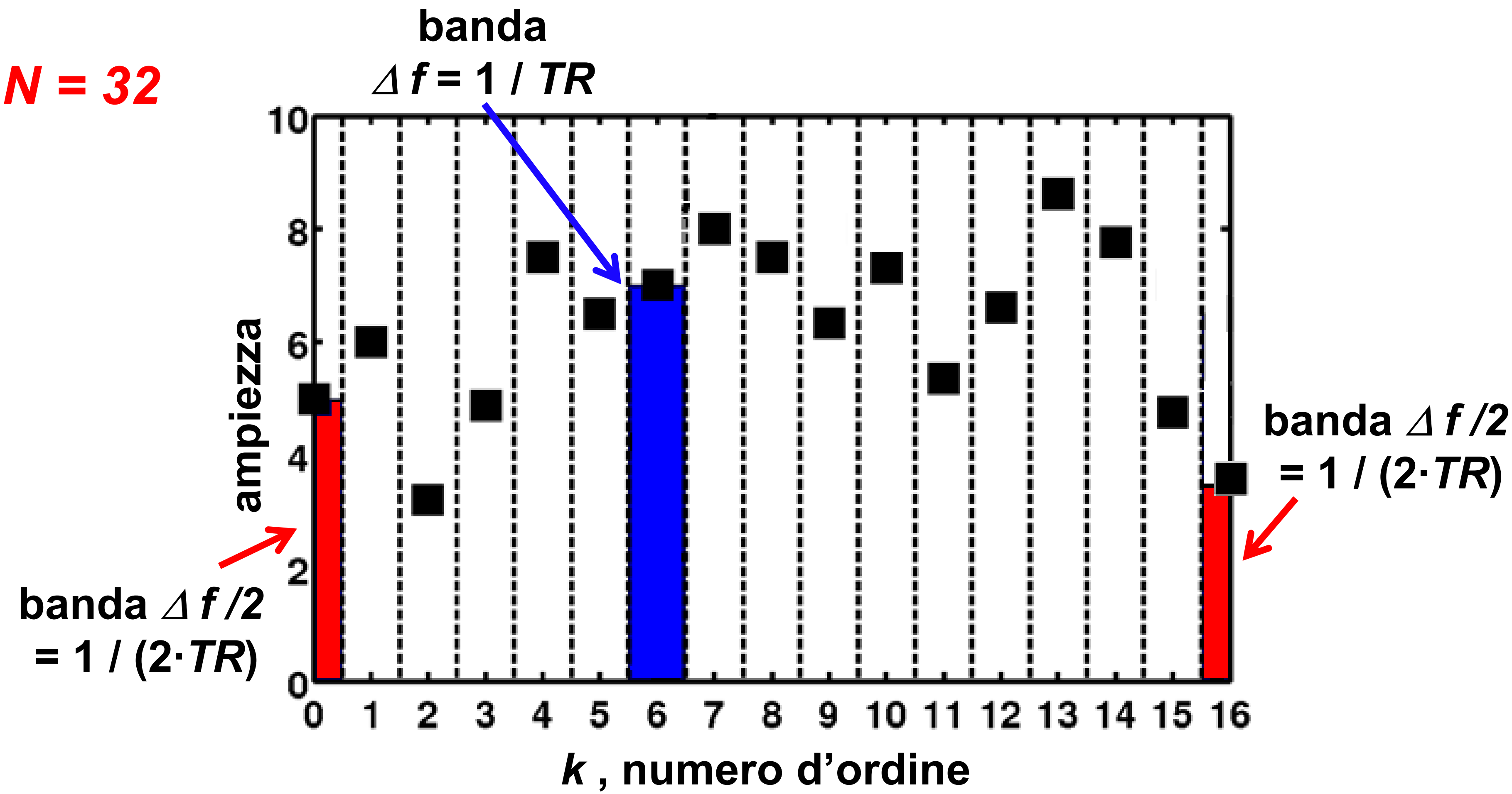
- Per la proprietà di *hermitianità*, se ***N*** è la lunghezza del *time record*, la FFT fornisce (***N*** **/ 2**) **+ 1** righe spettrali:

  - ***hermitianità***: $s(t) \in \mathrm{R} \rightarrow X(f) = X^*(-f)$

- Le righe spettrali sono equidistanziate di Δf = (**1 /** ***TR***) = (f_c / ***N***), dove ***TR*** è la durata del *time record*.

- Δf è detta risoluzione in frequenza nominale.

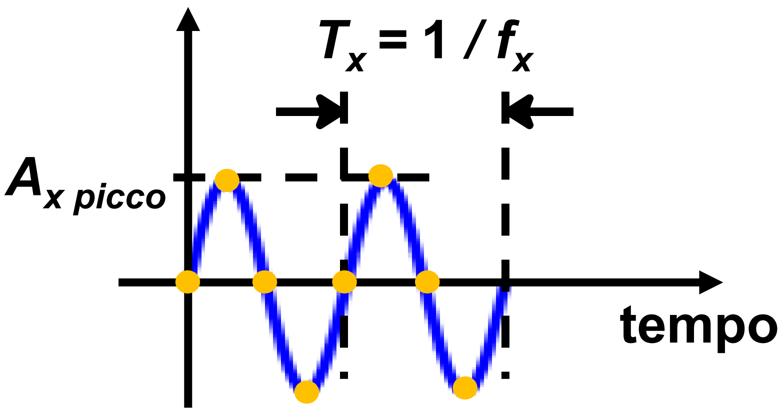
Altra interpretazione della FFT



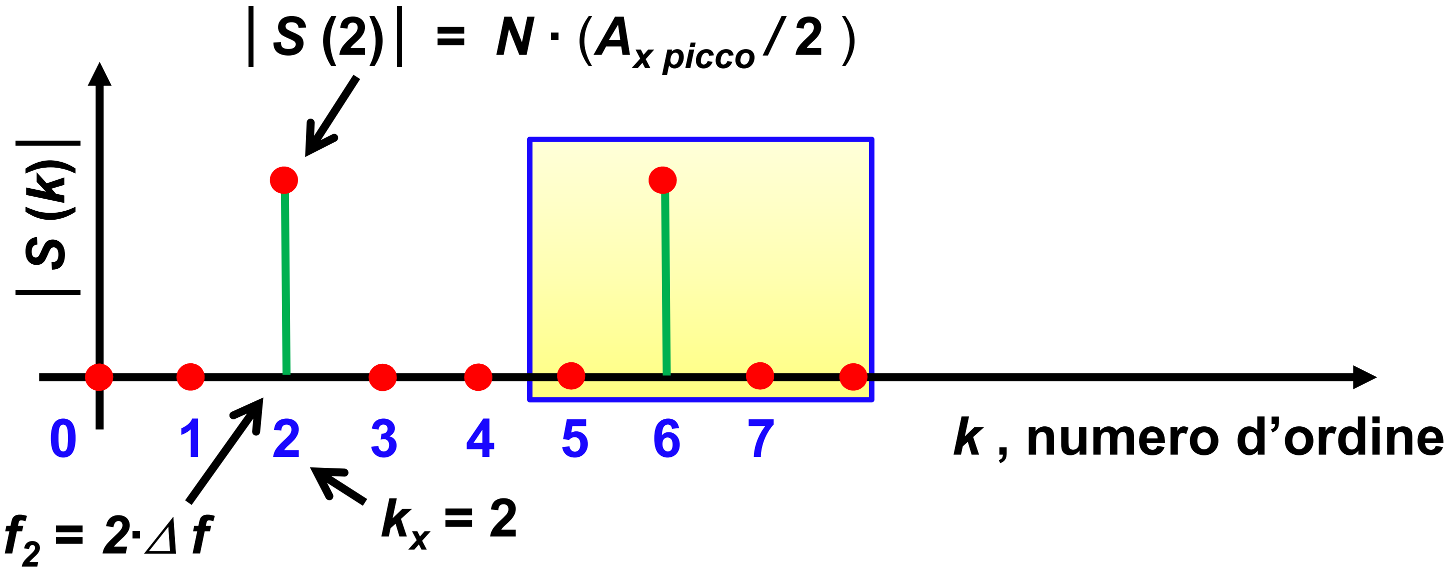
Banco di filtri di larghezza uniforme $\Delta f = 1 / TR$, ad eccezione del primo e ultimo bin, cui è associata solo metà della banda.

MISURAZIONI CON LA FFT

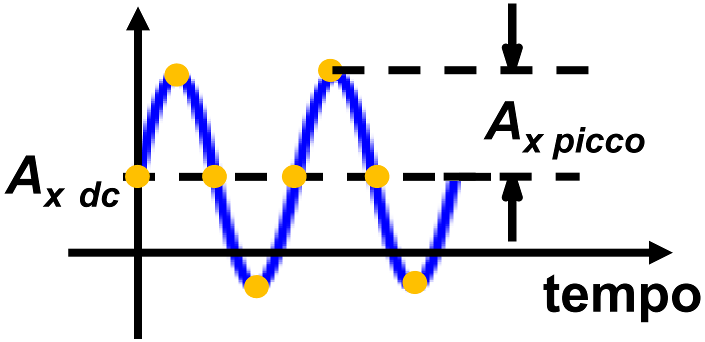
Misurazioni con la FFT



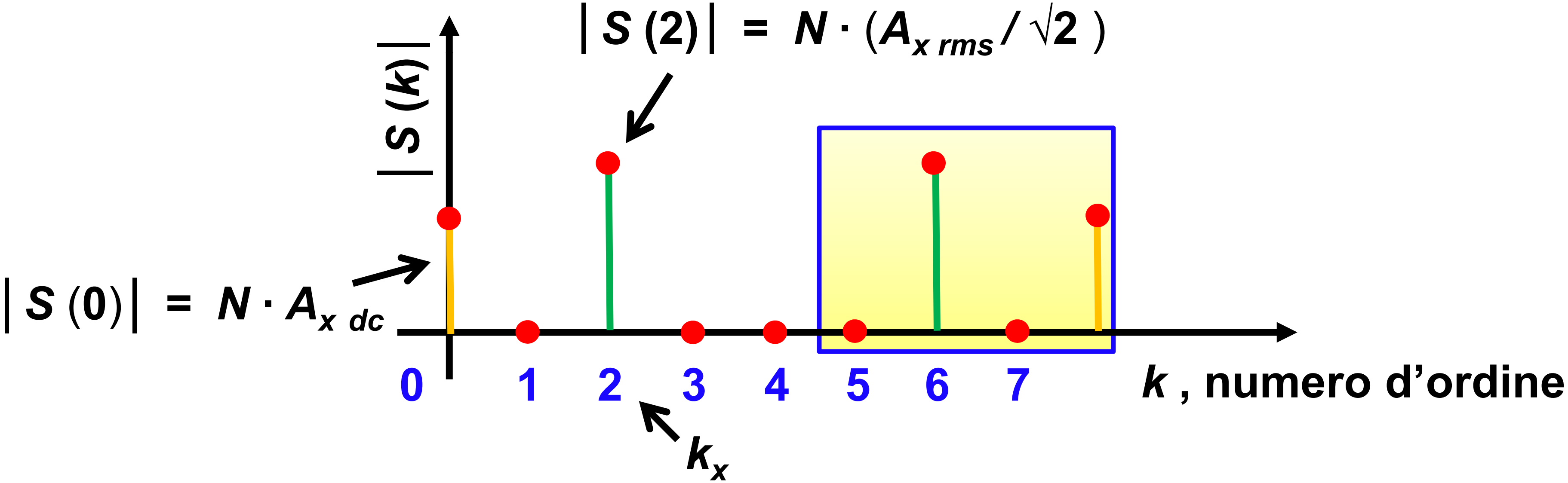
- Misurazione della frequenza:
  - $f_x = k_x \cdot \Delta f = k_x \cdot (1 / TR)$
- Misurazione dell'ampiezza:
  - $A_{x\,picco} = (|S(k_x)| \cdot 2) / N$ con $k_x \neq 0$ e $k_x \neq N/2$



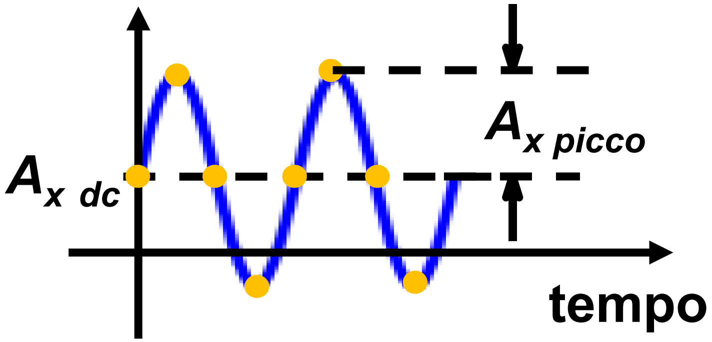
Misurazioni con la FFT



- Misurazione della continua:
  - $A_{x\ dc} = |S(0)|\ /\ N$
- Misurazione del valore efficace:
  - $A_{x\ rms} = (\sqrt{2} \cdot |S(k_x)|)\ /\ N$
    con $k_x \neq 0$ e $k_x \neq N/2$



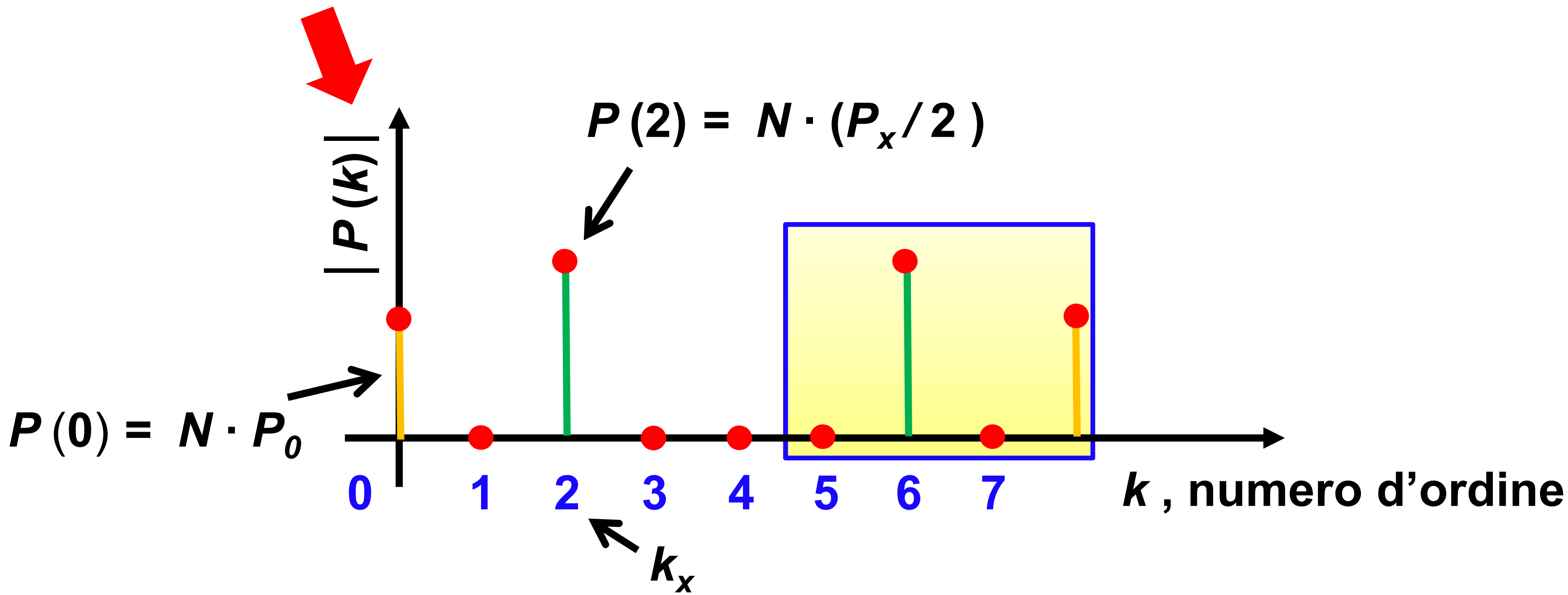
Misurazioni con la FFT



Spettro di potenza

$P(k) = (S(k) \cdot S^*(k)) / N$

- Misurazione della potenza:
  - $P_x = (2 \cdot P(k_x)) / N$
    con $k_x \neq 0$ e $k_x \neq N/2$
  - $P_0 = P(0) / N$



Ricapitolando…

- Misurazione della frequenza:
  - $f_x = k_x \cdot \Delta f = k_x \cdot (1 / TR)$

- Misurazione dell'ampiezza:
  - $A_{x\ picco} = (|S(k_x)| \cdot 2) / N$

    con $k_x \neq 0$ e $k_x \neq N/2$

- Misurazione della componente continua:
  - $A_{x\ dc} = |S(0)| / N$

Ricapitolando…

- Misurazione del valore efficace:
  - $A_{x\,rms} = (\sqrt{2} \cdot |S(k_x)|)\,/\,N$

    con $k_x \neq 0$ e $k_x \neq N/2$

- Misurazione della potenza:
  - $P_x = (2 \cdot P(k_x))\,/\,N$

    con $k_x \neq 0$ e $k_x \neq N/2$

- Misurazione della potenza associata alla componente continua:
  - $P_0 = P(0)\,/\,N$