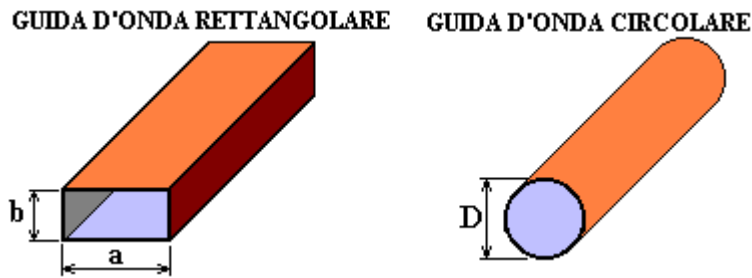


GUIDE D'ONDA



Una struttura guidante è in grado di costringere il campo elettromagnetico a propagarsi in una direzione prefissata. Fissiamo un sistema di riferimento con l'asse z coincidente con tale direzione: una guida d'onda è una struttura guidante la cui sezione trasversale è invariante con z . In base a questa definizione, le linee di trasmissione (cavo coassiale, stripline, ecc.) sono particolari guide d'onda la cui sezione trasversale è molteplicemente connessa. Tuttavia, comunemente l'espressione "guide d'onda" viene riservata alle guide d'onda a sezione trasversale semplicemente connessa: in questo senso, le guide d'onda metalliche sono tubi metallici cavi, mentre le guide d'onda dielettriche sono i cavi in fibra ottica. Nel seguito ci riferiremo a guide d'onda metalliche.

Componenti trasversali e longitudinali dei campi.

Consideriamo le equazioni di Maxwell nel dominio dei fasori in assenza di sorgenti e per mezzi lineari, isotropi, non dispersivi e omogenei:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu\underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon\underline{E} \end{cases}$$

ricordiamo che $\nabla \times \underline{E} = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{i}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{i}_z$

(il rotore di \underline{H} si calcola ovviamente in modo perfettamente analogo)

e poniamo $\underline{E} = \underline{E}_t + E_z \hat{i}_z$, $\underline{H} = \underline{H}_t + H_z \hat{i}_z$ e $\nabla = \nabla_t + \hat{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$, dove

$\underline{E}_t = E_x \hat{i}_x + E_y \hat{i}_y$, $\underline{H}_t = H_x \hat{i}_x + H_y \hat{i}_y$ e $\nabla_t = \hat{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{i}_y \frac{\partial}{\partial y}$ sono le componenti trasversali dei campi elettrico e magnetico e dell'operatore ∇ (operatore "nabla").

Proiettiamo le equazioni di Maxwell sull'asse z , cominciando dalla prima:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z$$

Il primo membro di questa equazione può essere scritto nel modo seguente:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \nabla_t \cdot (E_y \hat{i}_x - E_x \hat{i}_y) = \nabla_t \cdot (\underline{E}_t \times \hat{i}_z) = -\nabla_t \cdot (\hat{i}_z \times \underline{E}_t) ,$$

quindi la proiezione della prima equazione di Maxwell sull'asse z è:

$$\boxed{\nabla_t \cdot (\hat{i}_z \times \underline{E}_t) = j\omega\mu H_z} .$$

Con un procedimento analogo si ottiene che la proiezione della seconda equazione di Maxwell sull'asse z è:

$$\boxed{\nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \hat{i}_z) = j\omega\varepsilon E_z} .$$

Proiettiamo ora le equazioni di Maxwell sul piano trasversale (cioè sul piano xy). Ciò può essere fatto moltiplicando vettorialmente ambo i membri di ciascuna equazione per \hat{i}_z . Consideriamo la prima equazione:

$$(\nabla \times \underline{E}) \times \hat{i}_z = -j\omega\mu \underline{H} \times \hat{i}_z .$$

Poiché $\hat{i}_x \times \hat{i}_z = -\hat{i}_y$, $\hat{i}_y \times \hat{i}_z = \hat{i}_x$ e $\hat{i}_z \times \hat{i}_z = 0$, al primo membro abbiamo:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \underline{E}) \times \hat{i}_z &= -\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \hat{i}_y + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \hat{i}_x = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (E_x \hat{i}_x + E_y \hat{i}_y) - \frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{i}_x - \frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{i}_y = \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} - \nabla_t E_z \end{aligned}$$

Al secondo membro si ha

$$-j\omega\mu \underline{H} \times \hat{i}_z = -j\omega\mu \underline{H}_t \times \hat{i}_z .$$

In definitiva si ottiene che la proiezione della prima equazione di Maxwell sul piano trasversale è:

$$\boxed{-\frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = j\omega\mu \underline{H}_t \times \hat{i}_z - \nabla_t E_z} .$$

Con un procedimento analogo si ottiene che la proiezione della seconda equazione di Maxwell sul piano trasversale è:

$$\boxed{-\frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon \hat{i}_z \times \underline{E}_t - \nabla_t H_z} .$$

In conclusione, le equazioni di Maxwell possono essere riscritte nel modo seguente

$$\begin{cases} -\frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = j\omega\mu \underline{H}_t \times \hat{i}_z - \nabla_t E_z \\ -\frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon \hat{i}_z \times \underline{E}_t - \nabla_t H_z \\ \nabla_t \cdot (\hat{i}_z \times \underline{E}_t) = j\omega\mu H_z \\ \nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \hat{i}_z) = j\omega\varepsilon E_z \end{cases} \quad (1.a)$$

Alle equazioni di Maxwell va affiancata la condizione al contorno. Per guide ideali, ossia con pareti di conduttore elettrico perfetto, la condizione al contorno è:

$$\hat{i}_n \times \underline{E}|_C = 0$$

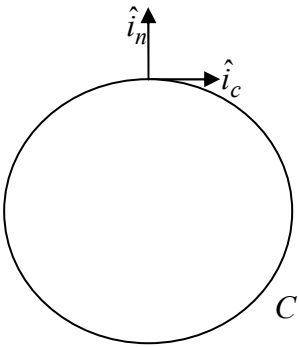


Fig.1: Versore normale e versore tangente al contorno C (guida circolare).

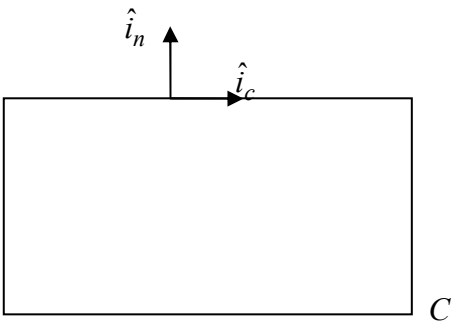


Fig.2: Versore normale e versore tangente al contorno C (guida rettangolare).

A questo punto, poniamo

$$\underline{E}_t(x, y, z) = V(z)\underline{e}(x, y)$$

$$\underline{H}_t(x, y, z) = I(z)\underline{h}(x, y)$$

Soluzioni espresse in questa forma fattorizzata vengono dette “modi”. V e I sono dette “funzioni scalari di modo”, mentre \underline{e} e \underline{h} sono dette “funzioni vettoriali di modo”. Usando queste relazioni e sostituendo la terza e la quarta delle equazioni (1.a) rispettivamente nella seconda e nella prima, le equazioni da risolvere diventano

$$\begin{cases} -\underline{e} \frac{dV}{dz} = j\omega\mu I \underline{h} \times \hat{i}_z - \frac{I}{j\omega\epsilon} \nabla_t \nabla_t \cdot (\underline{h} \times \hat{i}_z) \\ -\underline{h} \frac{dI}{dz} = j\omega\epsilon V \hat{i}_z \times \underline{e} - \frac{V}{j\omega\mu} \nabla_t \nabla_t \cdot (\hat{i}_z \times \underline{e}) \\ V \nabla_t \cdot (\hat{i}_z \times \underline{e}) = j\omega\mu H_z \\ I \nabla_t \cdot (\underline{h} \times \hat{i}_z) = j\omega\epsilon E_z \end{cases} \quad (1.b)$$

La terza e la quarta di queste equazioni mostrano che dalla fattorizzazione delle componenti trasversali dei campi consegue quella delle componenti longitudinali e quindi quella degli interi campi.

L'importanza delle soluzioni fattorizzate, ossia dei modi, risiede nel fatto che, come vedremo, un qualunque campo elettromagnetico all'interno della guida può essere espresso come sovrapposizione di modi.

Modi TEM

Cerchiamo le soluzioni delle equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti nel volume interno della guida con la condizione al contorno che la componente del campo elettrico tangente alle pareti sia nulla sulle pareti della guida.

Chiediamoci anzitutto se nelle guide può propagarsi un campo TEM. Supponiamo quindi che $E_z = H_z = 0$. In questo caso le equazioni (1.b) diventano

$$\begin{cases} -\underline{e} \frac{dV}{dz} = j\omega\mu I \underline{h} \times \hat{i}_z \\ -\underline{h} \frac{dI}{dz} = j\omega\varepsilon V \hat{i}_z \times \underline{e} \\ \nabla_t \cdot (\hat{i}_z \times \underline{e}) = 0 \\ \nabla_t \cdot (\underline{h} \times \hat{i}_z) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

La prima di queste equazioni può essere messa nella seguente forma:

$$\underline{e}(x, y) = \frac{j\omega\mu I(z)}{-\frac{dV(z)}{dz}} \underline{h}(x, y) \times \hat{i}_z \quad .$$

Il primo membro di questa equazione non dipende da z , quindi, affinché l'equazione sia soddisfatta, anche il secondo membro non deve dipendere da z : ne consegue che la quantità

$$\frac{j\omega\mu I(z)}{-\frac{dV(z)}{dz}}$$

è una costante. E' dunque possibile stabilire il seguente legame tra \underline{e} e \underline{h} :

$$\underline{e}(x, y) = A \underline{h}(x, y) \times \hat{i}_z \quad \text{ovvero} \quad \hat{i}_z \times \underline{e}(x, y) = A \underline{h}(x, y) \quad , \text{dove } A \text{ è una costante arbitraria.}$$

Tenendo conto di questo legame tra \underline{e} e \underline{h} , le prime due delle equazioni (2) diventano:

$$\boxed{-\frac{dV(z)}{dz} = j\omega \frac{\mu}{A} I(z)} \quad \text{e} \quad \boxed{-\frac{dI(z)}{dz} = j\omega\varepsilon A V(z)} \quad . \quad (2.a)$$

Osserviamo ora che per campi TEM il campo elettrico ha circuitazione nulla sulla sezione trasversale:

$$\oint_l \underline{E} \cdot \hat{i}_l dl = V \oint_l \underline{e} \cdot \hat{i}_l dl = -j\omega\mu \int_S \underline{H} \cdot \hat{i}_z dS = 0 \quad , \quad \text{dove } l \text{ è una curva chiusa giacente nel piano trasversale ed } S \text{ è la regione di tale piano delimitata da } l.$$

Quindi \underline{e} è un campo conservativo ed esiste una funzione scalare ϕ tale che

$$\underline{e} = -\nabla_t \phi \quad . \quad (3)$$

Sostituendo la relazione (3) nella terza delle equazioni (2) si ottiene una uguaglianza soddisfatta per qualunque funzione ϕ . Infatti,

$$\nabla_t \cdot (\hat{i}_z \times \underline{e}) = \underline{e} \cdot \nabla_t \times \hat{i}_z - \hat{i}_z \cdot \nabla_t \times \underline{e} = -\hat{i}_z \cdot \nabla_t \times \underline{e} = \hat{i}_z \cdot \nabla_t \times (\nabla_t \phi) \equiv 0$$

Sostituendo invece la (3) nella quarta delle equazioni (2) e tenendo conto del legame tra \underline{e} e \underline{h} si ha:

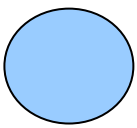
$$I \nabla_t \cdot (\underline{h} \times \hat{i}_z) = \frac{I}{A} \nabla_t \cdot \underline{e} = -\frac{I}{A} \nabla_t \cdot \nabla_t \phi = -\frac{I}{A} \nabla_t^2 \phi = 0 .$$

In conclusione, affinché i campi soddisfino le equazioni di Maxwell la funzione ϕ deve soddisfare l'equazione di Laplace $\nabla_t^2 \phi = 0$, ossia deve essere una funzione armonica. Una delle proprietà delle funzioni armoniche è che esse assumono i loro valori massimo e minimo sul contorno del dominio sul quale sono definite.

I campi devono soddisfare anche le condizioni al contorno, che nel caso TEM si possono scrivere:

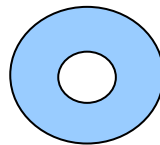
$$\underline{E} \cdot \hat{i}_c \Big|_C = 0 \quad , \quad \text{ossia} \quad V \underline{e} \cdot \hat{i}_c \Big|_C = -V \nabla_t \phi \cdot \hat{i}_c \Big|_C = -V \frac{\partial \phi}{\partial c} \Big|_C = 0 . \quad (4)$$

Dunque, affinché i campi soddisfino le condizioni al contorno la funzione ϕ deve essere costante sul contorno. Ricordando che essa assume i suoi valori massimo e minimo sul contorno, questo vuol dire che tali valori massimo e minimo coincidono se la sezione trasversale è semplicemente connessa, ossia ha un solo contorno, come per le usuali guide d'onda metalliche: in questo caso ϕ è dunque costante su tutta la sezione trasversale. Se ϕ è costante, allora per la (3) \underline{e} è identicamente nulla. Conseguentemente il campo elettromagnetico è identicamente nullo: la conclusione è che *in una guida d'onda metallica con sezione trasversale semplicemente connessa il modo TEM non può esistere.*



Guida circolare:

Sezione trasversale semplicemente connessa



Cavo coassiale:

Sezione trasversale doppiamente connessa

Se però la sezione trasversale è molteplicemente connessa (cioè, ci sono almeno due contorni), come avviene per le linee di trasmissione (ad esempio, il cavo coassiale), allora la (4) può essere soddisfatta da una funzioni armonica ϕ che assuma un valore costante su uno dei contorni, ed un valore costante diverso sull'altro contorno: i suoi valori minimo e massimo non coincidono, ed essa non è costante sulla sezione traversa. I campi sono quindi non nulli, ed il modo TEM esiste.

La costante arbitraria A e la differenza tra i valori assunti da ϕ sui contorni possono essere fissati in modo tale che le funzioni scalari di modo V ed I coincidano rispettivamente con la tensione e la corrente sulla linea di trasmissione (vedere libro di testo e appunti delle lezioni). Inoltre, è possibile verificare che (vedere libro di testo e appunti delle lezioni) $L = \mu/A$ e $C = \epsilon A$ sono rispettivamente l'induttanza per unità di lunghezza e la capacità per unità di lunghezza della linea. Le (2.a) possono essere dunque scritte come:

$$\begin{cases} -\frac{dV(z)}{dz} = j\omega L I(z) \\ -\frac{dI(z)}{dz} = j\omega C V(z) \end{cases} .$$

Queste ultime sono dette "equazioni delle linee" o "equazioni dei telegrafisti" e la loro soluzione può essere ottenuta derivando rispetto a z la prima equazione ed utilizzando quindi la seconda. Si ottiene:

$$V(z) = V^+ \exp(-jkz) + V^- \exp(jkz)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} [V^+ \exp(-jkz) - V^- \exp(jkz)] \quad ,$$

dove $k = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ è detta *costante di propagazione* e $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ è detta *impedenza caratteristica* della linea. V^+ e V^- sono costanti determinate una volta fissata l'alimentazione e la terminazione della linea.

Modi TE

Consideriamo ora i modi TE, per i quali $E_z=0$. In questo caso le equazioni (1.b) diventano

$$\begin{cases} -\underline{e} \frac{dV}{dz} = j\omega\mu I \underline{h} \times \hat{i}_z \\ -\underline{h} \frac{dI}{dz} = j\omega\varepsilon V \hat{i}_z \times \underline{e} - \frac{V}{j\omega\mu} \nabla_t \nabla_t \cdot (\hat{i}_z \times \underline{e}) \\ V \nabla_t \cdot (\hat{i}_z \times \underline{e}) = j\omega\mu H_z \\ I \nabla_t \cdot (\underline{h} \times \hat{i}_z) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

La prima delle (5) è uguale alla prima delle (2), quindi anche in questo caso si ha

$\underline{e}(x, y) = A \underline{h}(x, y) \times \hat{i}_z$ ovvero $\hat{i}_z \times \underline{e}(x, y) = A \underline{h}(x, y)$, dove A è una costante arbitraria che poniamo pari a 1. La prima delle (5) diventa dunque

$$\boxed{-\frac{dV}{dz} = j\omega\mu I} \quad ,$$

che coincide con la prima equazione delle linee se si pone $L=\mu$; la seconda delle (5) diventa invece

$$-\underline{h} \frac{dI}{dz} = j\omega\varepsilon V \underline{h} - \frac{V}{j\omega\mu} \nabla_t \nabla_t \cdot \underline{h} \quad (6)$$

Questa equazione può essere messa nella seguente forma:

$$\nabla_t \nabla_t \cdot \underline{h}(x, y) = \frac{j\omega\mu}{V(z)} \left(\frac{dI(z)}{dz} + j\omega\varepsilon V(z) \right) \underline{h}(x, y) \quad ,$$

dalla quale, con un ragionamento analogo a quello fatto in precedenza, deduciamo che

$$\nabla_t \nabla_t \cdot \underline{h}(x, y) = -k_t^2 \underline{h}(x, y) \quad , \quad (7)$$

con $-k_t^2$ costante. Tenendo conto di questa relazione, la (6) diventa

$$\boxed{-\frac{dI}{dz} = j\omega\varepsilon \left(1 - \frac{k_t^2}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right) V} \quad ,$$

che coincide con la seconda equazione delle linee se si pone $C = \varepsilon \left(1 - \frac{k_t^2}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right)$. Dunque,

l'andamento con z delle funzioni scalari di modo V e I è uguale a quello di tensioni e correnti su una "linea di trasmissione equivalente" avente costante di propagazione

$$k_z = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{1 - \frac{k_t^2}{\omega^2\varepsilon\mu}} = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - k_t^2} = \sqrt{k^2 - k_t^2} \quad (\text{dove } k^2 = \omega^2\varepsilon\mu)$$

e impedenza caratteristica

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu\omega^2\varepsilon\mu}{\varepsilon(k^2 - k_t^2)}} = \frac{\omega\mu}{k_z}$$

Rimane da calcolare l'andamento dei campi nel piano trasversale, ossia l'andamento delle funzioni vettoriali di modo \underline{e} ed \underline{h} . A questo scopo, notiamo che la (7) afferma che \underline{h} è proporzionale al gradiente trasversale della funzione divergenza trasversale di \underline{h} , ossia al gradiente trasversale di una funzione scalare: infatti, se poniamo

$$\nabla_t \cdot \underline{h}(x, y) = k_t \psi(x, y) \quad , \quad \text{dalla (7) si ha}$$

$$\underline{h}(x, y) = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \psi(x, y) \quad (8)$$

Ciò vuol dire che la circuitazione di \underline{h} su una curva chiusa giacente nel piano trasversale è nulla e che la quarta delle (5) è soddisfatta. Dalle ultime due relazioni scritte otteniamo

$$\nabla_t \cdot \left(-\frac{1}{k_t} \nabla_t \psi(x, y) \right) = -\frac{1}{k_t} \nabla_t^2 \psi(x, y) = k_t \psi(x, y) \quad \text{e quindi} \quad \boxed{\nabla_t^2 \psi(x, y) + k_t^2 \psi(x, y) = 0}$$

In conclusione, affinché i campi soddisfino le equazioni di Maxwell la funzione ψ deve soddisfare un'equazione di Helmholtz omogenea.

I campi devono soddisfare anche le condizioni al contorno, che nel caso TE si possono scrivere:

$$\underline{E} \cdot \hat{i}_c \Big|_C = 0 \quad , \quad \text{ossia} \quad V \underline{e} \cdot \hat{i}_c \Big|_C = -V \underline{h} \times \hat{i}_z \cdot \hat{i}_c \Big|_C = -V \hat{i}_z \times \hat{i}_c \cdot \underline{h} \Big|_C = \frac{V}{k_t} \nabla_t \psi \cdot \hat{i}_n \Big|_C = \frac{V}{k_t} \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_C = 0 \quad .$$

Dunque, affinché i campi soddisfino le condizioni al contorno, la funzione ψ deve avere sul contorno derivata direzionale nulla nella direzione normale al contorno stesso. Questa condizione al contorno è detta "condizione di Neumann".

In definitiva, per determinare ψ occorre risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \psi + k_t^2 \psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_C = 0 \end{cases} \quad .$$

E' possibile dimostrare (e lo verificheremo nel caso particolare di guida rettangolare) che tale problema ammette soluzione non identicamente nulla per una infinità numerabile di valori di k_t^2 reali e positivi, detti "autovalori". A ciascun autovalore corrisponde una soluzione (o al più un

numero finito di soluzioni indipendenti) non identicamente nulla ψ , detta “autofunzione”. Autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali, cioè, detta S la sezione trasversale della guida, $\iint_S \psi_n \psi_m^* dS = 0$ per $n \neq m$ (vedi libro di testo e appunti delle lezioni).

A ciascuna autofunzione corrisponde a sua volta, tramite la (8), un campo \underline{h} e quindi un campo $\underline{e} = \underline{h} \times \hat{i}_z$ ed una componente H_z data dalla terza delle (5):

$$H_z = \frac{V}{j\omega\mu} \nabla_t \cdot (\hat{i}_z \times \underline{e}) = \frac{V}{j\omega\mu} \nabla_t \cdot \underline{h} = \frac{Vk_t \psi}{j\omega\mu} \quad .$$

In definitiva, ad ogni autofunzione corrisponde un modo TE. Poiché autovalori ed autofunzioni sono una infinità numerabile, anche i modi TE sono una infinità numerabile. Inoltre, poiché a ciascun autovalore corrisponde una diversa costante di propagazione k_z ed una diversa impedenza caratteristica Z_0 , ad ogni modo TE corrisponde una diversa linea di trasmissione equivalente e quindi un diverso andamento con z di V ed I .

Infine, è possibile dimostrare che *un qualunque campo TE in guida può essere espresso come sovrapposizione di modi TE*:

$$\underline{E}_t(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(z) \underline{e}_i(x, y)$$

$$\underline{H}_t(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} I_i(z) \underline{h}_i(x, y)$$

Modi TM

Consideriamo ora i modi TM, per i quali $H_z=0$. Si può procedere in modo perfettamente analogo a quanto fatto in precedenza per i modi TE. Nel caso dei modi TM le equazioni (1.b) diventano

$$\begin{cases} -\underline{e} \frac{dV}{dz} = j\omega\mu I \underline{h} \times \hat{i}_z - \frac{I}{j\omega\epsilon} \nabla_t \nabla_t \cdot (\underline{h} \times \hat{i}_z) \\ -\underline{h} \frac{dI}{dz} = j\omega\epsilon V \hat{i}_z \times \underline{e} \\ V \nabla_t \cdot (\hat{i}_z \times \underline{e}) = 0 \\ I \nabla_t \cdot (\underline{h} \times \hat{i}_z) = j\omega\epsilon E_z \end{cases} \quad (9)$$

Dalla seconda delle (9) si ottiene

$\underline{h}(x, y) = \hat{i}_z \times \underline{e}(x, y)$ ovvero $\underline{e}(x, y) = \underline{h}(x, y) \times \hat{i}_z$, dove, come per i modi TE, abbiamo posto pari a 1 una costante arbitraria. La seconda delle (9) diventa dunque

$$\boxed{-\frac{dI}{dz} = j\omega\epsilon V} \quad ,$$

che coincide con la seconda equazione delle linee se si pone $C=\epsilon$; la prima delle (9) diventa invece

$$-\underline{e} \frac{dV}{dz} = j\omega\mu I \underline{e} - \frac{I}{j\omega\epsilon} \nabla_t \nabla_t \cdot \underline{e} \quad (10)$$

Questa equazione può essere messa nella seguente forma:

$$\nabla_t \nabla_t \cdot \underline{e}(x, y) = \frac{j\omega\epsilon}{I(z)} \left(\frac{dV(z)}{dz} + j\omega\mu I(z) \right) \underline{e}(x, y) \quad ,$$

dalla quale deduciamo che

$$\nabla_t \nabla_t \cdot \underline{e}(x, y) = -k_t^2 \underline{e}(x, y) \quad , \quad (11)$$

con $-k_t^2$ costante. Tenendo conto di questa relazione la (10) diventa

$$\boxed{-\frac{dV}{dz} = j\omega\mu \left(1 - \frac{k_t^2}{\omega^2 \epsilon \mu} \right) I} \quad ,$$

che coincide con la prima equazione delle linee se si pone $L = \mu \left(1 - \frac{k_t^2}{\omega^2 \epsilon \mu} \right)$. Dunque, l'andamento

con z delle funzioni scalari di modo V e I è uguale a quello di tensioni e correnti su una "linea di trasmissione equivalente" avente costante di propagazione

$$k_z = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{1 - \frac{k_t^2}{\omega^2\varepsilon\mu}} = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - k_t^2} = \sqrt{k^2 - k_t^2} \quad (\text{dove } k^2 = \omega^2\varepsilon\mu)$$

e impedenza caratteristica

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu(k^2 - k_t^2)}{\varepsilon\omega^2\varepsilon\mu}} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon}$$

Rimane da calcolare l'andamento dei campi nel piano trasversale, ossia l'andamento delle funzioni vettoriali di modo \underline{e} ed \underline{h} . A questo scopo, notiamo che la (11) afferma che \underline{e} è proporzionale al gradiente trasversale della funzione divergenza trasversale di \underline{e} , ossia al gradiente trasversale di una funzione scalare: infatti, se poniamo

$$\nabla_t \cdot \underline{e}(x, y) = k_t \phi(x, y) \quad , \quad \text{dalla (11) si ha}$$

$$\underline{e}(x, y) = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \phi(x, y) \quad (12)$$

Ciò vuol dire che la circuitazione di \underline{e} su una curva chiusa giacente nel piano trasversale è nulla e che la terza delle (9) è soddisfatta. Dalle ultime due relazioni scritte otteniamo

$$\nabla_t \cdot \left(-\frac{1}{k_t} \nabla_t \phi(x, y) \right) = -\frac{1}{k_t} \nabla_t^2 \phi(x, y) = k_t \phi(x, y) \quad \text{e quindi} \quad \boxed{\nabla_t^2 \phi(x, y) + k_t^2 \phi(x, y) = 0} \quad .$$

In conclusione, affinché i campi soddisfino le equazioni di Maxwell la funzione ϕ deve soddisfare un'equazione di Helmholtz omogenea.

I campi devono soddisfare anche le condizioni al contorno, che nel caso TM si possono scrivere:

$$\begin{cases} \underline{E} \cdot \hat{i}_c|_C = 0 \\ E_z|_C = 0 \end{cases} \quad .$$

La prima condizione si può scrivere $V \underline{e} \cdot \hat{i}_c|_C = -\frac{V}{k_t} \nabla_t \phi \cdot \hat{i}_c|_C = -\frac{V}{k_t} \frac{\partial \phi}{\partial c} \Big|_C = 0$;

mentre la seconda, considerando che $E_z = \frac{I}{j\omega\varepsilon} \nabla_t \cdot (\underline{h} \times \hat{i}_z) = \frac{I}{j\omega\varepsilon} \nabla_t \cdot \underline{e} = \frac{Ik_t \phi}{j\omega\varepsilon}$, diventa

$\phi|_C = 0$, e dunque è una condizione più forte della precedente.

In definitiva, affinché i campi soddisfino le condizioni al contorno, la funzione ϕ deve essere nulla sul contorno stesso. Questa condizione al contorno è detta "condizione di Dirichlet".

In conclusione, per determinare ϕ occorre risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \phi + k_t^2 \phi = 0 \\ \phi|_C = 0 \end{cases}$$

E' possibile dimostrare (e lo verificheremo nel caso particolare di guida rettangolare) che tale problema ammette soluzione non identicamente nulla per una infinità numerabile di valori di k_t^2 reali e positivi, detti "autovalori" (in generale, gli autovalori del caso TM sono diversi da quelli del caso TE). A ciascun autovalore corrisponde una soluzione (o al più un numero finito di soluzioni indipendenti) non identicamente nulla ϕ , detta "autofunzione". Autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali, cioè, detta S la sezione trasversale della guida, $\iint_S \phi_n \phi_m^* dS = 0$

per $n \neq m$ (vedi libro di testo e appunti delle lezioni). A ciascuna autofunzione corrisponde a sua volta, tramite la (12), un campo \underline{e} e quindi un campo $\underline{h} = \hat{i}_z \times \underline{e}$ ed una componente E_z calcolata in precedenza.

In definitiva, ad ogni autofunzione corrisponde un modo TM. Poiché autovalori ed autofunzioni sono una infinità numerabile, anche i modi TM sono una infinità numerabile. Inoltre, poiché a ciascun autovalore corrisponde una diversa costante di propagazione k_z ed una diversa impedenza caratteristica Z_0 , ad ogni modo TM corrisponde una diversa linea di trasmissione equivalente e quindi un diverso andamento con z di V ed I .

Infine, è possibile dimostrare che *un qualunque campo TM in guida può essere espresso come sovrapposizione di modi TM*:

$$\underline{E}_t(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(z) \underline{e}_i(x, y)$$

$$\underline{H}_t(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} I_i(z) \underline{h}_i(x, y)$$

Caso generale

È possibile dimostrare che *un qualunque campo elettromagnetico in una guida d'onda metallica può essere espresso come sovrapposizione di modi TE e TM*, ai quali va aggiunto il modo TEM se la sezione trasversa della guida è a sezione molteplicemente connessa (cioè se la struttura guidante è una linea di trasmissione):

$$\underline{E}_t(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i^{TE}(z) \underline{e}_i^{TE}(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} V_i^{TM}(z) \underline{e}_i^{TM}(x, y)$$

$$\underline{H}_t(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} I_i^{TE}(z) \underline{h}_i^{TE}(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} I_i^{TM}(z) \underline{h}_i^{TM}(x, y)$$

$$E_z(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_i^{TM}(z) k_{ti}^{TM} \phi_i(x, y)}{j\omega\epsilon}$$

$$H_z(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{V_i^{TE}(z) k_{ti}^{TE} \psi_i(x, y)}{j\omega\mu}$$

Il modo corrispondente all'autovalore più basso è detto "modo fondamentale".

Osserviamo che la costante di propagazione longitudinale k_z associata ad un modo TE o TM è funzione non lineare dalla pulsazione ω , quindi la propagazione lungo la guida è dispersiva (in altre parole, la linea di trasmissione equivalente del modo considerato è dispersiva). Inoltre, k_z è reale se $k > k_t$, ossia se $\omega > \frac{k_t}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \omega_c$, mentre è immaginaria pura se $k < k_t$, ossia se $\omega < \frac{k_t}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \omega_c$. La

pulsazione ω_c è detta pulsazione critica, o anche pulsazione di taglio (*cut-off*), del modo considerato: se la pulsazione di lavoro è superiore a quella critica il modo si propaga lungo la guida, altrimenti esso si attenua esponenzialmente. Nel secondo caso si dice che il modo è "sotto taglio", o anche "in *cut-off*". In definitiva, fissata la frequenza di lavoro, solo un numero finito di modi può propagarsi lungo la linea: quelli la cui pulsazione di taglio è inferiore alla pulsazione di lavoro. *Nelle normali condizioni di funzionamento di una guida d'onda metallica, solo il modo fondamentale si propaga, mentre tutti gli altri sono in cut-off.*

La relazione tra pulsazione e costante di propagazione, detta "relazione di dispersione", può essere rappresentata graficamente tramite il "diagramma di Brillouin", riportato nella figura della pagina seguente.

Infine, è possibile dimostrare (vedi libro di testo e appunti delle lezioni) che il flusso di potenza attraverso la sezione trasversale della guida è pari alla somma dei flussi di potenza associati a ciascun modo, e che ciascuno di questi ultimi può essere espresso come $P = 1/2 VI^*$ (come sulle linee di trasmissione) se le funzioni ϕ e ψ sono normalizzate nel seguente modo:

$$\iint_S |\phi|^2 dS = 1 \quad \text{e} \quad \iint_S |\psi|^2 dS = 1, \tag{13}$$

dove S è la sezione trasversale della guida.

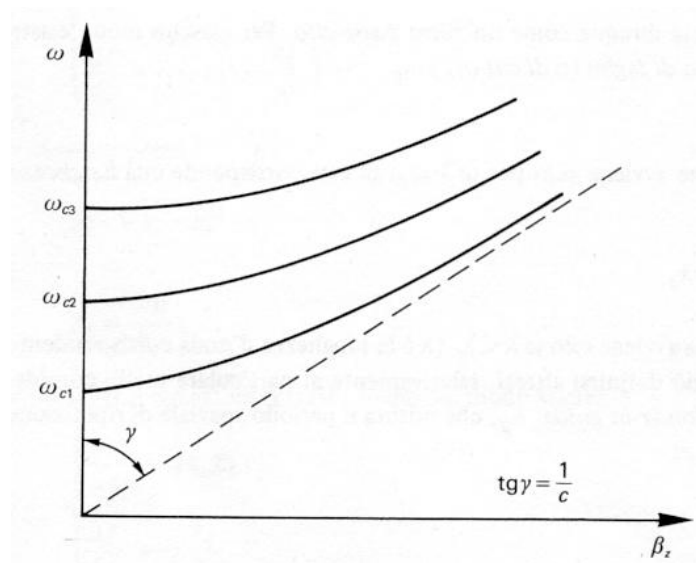


Diagramma di Brillouin per una guida d'onda; $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ è la velocità di propagazione per il modo TEM, uguale a quella di un'onda elettromagnetica nello spazio libero.

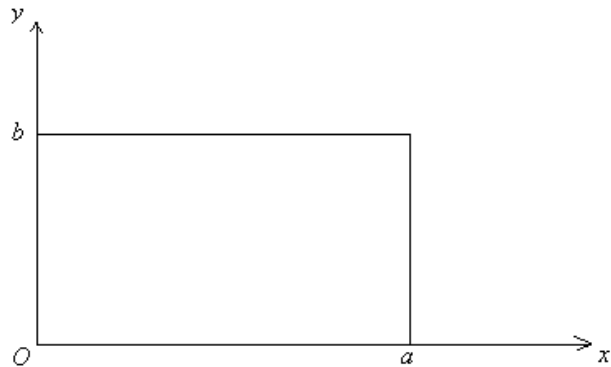
Guida d'onda rettangolare

Applichiamo i risultati trovati in precedenza al caso di una guida d'onda a sezione rettangolare di dimensioni $a \times b$, con $a > b$. Studiamo prima i modi TE. Il problema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \psi + k_t^2 \psi = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_C = 0 \end{cases} ,$$

dove il contorno C è costituito dai lati della sezione trasversale rettangolare. Scrivendo il Laplaciano trasversale in coordinate cartesiane e tenendo conto della orientazione del versore normale al contorno sui vari lati del rettangolo, il problema precedente può essere riformulato nel modo seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k_t^2 \psi = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \end{cases} .$$



L'equazione di Helmholtz può essere risolta per separazione di variabili: posto

$$\psi(x, y) = \psi_x(x)\psi_y(y)$$

e dividendo ambo i membri dell'equazione per $\psi_x\psi_y$, l'equazione diventa

$\frac{1}{\psi_x} \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} + \frac{1}{\psi_y} \frac{d^2 \psi_y}{dy^2} + k_t^2 = 0$, che, considerando che il primo termine è funzione della sola x mentre il secondo è funzione della sola y , è verificata se e solo se:

$$\begin{cases} \frac{1}{\psi_x} \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} = -k_x^2 \\ \frac{1}{\psi_y} \frac{d^2 \psi_y}{dy^2} = -k_y^2 \end{cases} \quad \text{con} \quad k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 .$$

La prima delle equazioni precedenti si può scrivere

$$\frac{d^2 \psi_x}{dx^2} + k_x^2 \psi_x = 0 ,$$

la cui soluzione generale è

$$\psi_x(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \quad .$$

Analogamente dalla seconda equazione si ottiene

$$\psi_y(y) = C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y) \quad .$$

Consideriamo ora le condizioni al contorno sui due lati minori del rettangolo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi_y \frac{d\psi_x}{dx} = \psi_y(y) [-Ak_x \sin(k_x x) + Bk_x \cos(k_x x)] \quad .$$

Imponendo che tale quantità si annulli per $x = 0$ otteniamo $B = 0$; imponendo poi che essa si annulli anche per $x = a$ otteniamo $\sin(k_x a) = 0$, ossia $k_x a = n\pi$, ossia ancora $k_x = n\pi/a$. In definitiva,

$$\psi_x(x) = A \cos\left(n \frac{\pi}{a} x\right) \quad .$$

Analogamente, utilizzando la condizione al contorno sui lati maggiori del rettangolo si ottiene $D = 0$ e $k_y = m\pi/b$. In definitiva,

$$\psi_y(y) = C \cos\left(m \frac{\pi}{b} y\right) \quad .$$

Dunque, per il generico modo TE_{nm} l'autovalore trasversale è $k_{t_{nm}}^2 = \left(n \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(m \frac{\pi}{b}\right)^2$ e

$$\text{l'autofunzione è } \psi_{nm}(x, y) = A_{nm} \cos\left(n \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(m \frac{\pi}{b} y\right) \quad .$$

Il modo fondamentale (quello con autovalore più basso) è il TE_{10} ($n=1, m=0$).

Consideriamo ora i modi TM. Il problema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \phi + k_t^2 \phi = 0 \\ \phi|_C = 0 \end{cases} \quad .$$

Scrivendo il Laplaciano trasversale in coordinate cartesiane e considerando la geometria del contorno si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_t^2 \phi = 0 \\ \phi(0, y) = 0 ; \phi(a, y) = 0 ; \phi(x, 0) = 0 ; \phi(x, b) = 0 \end{cases} \quad .$$

L'equazione di Helmholtz si può risolvere analogamente a quanto fatto nel caso TE, ottenendo:

$$\phi_x(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \quad , \quad \phi_y(y) = C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y) \quad \text{con } \phi(x, y) = \phi_x(x) \phi_y(y) \quad .$$

Utilizzando le condizioni al contorno otteniamo $A = C = 0$, $k_x = n\pi/a$, $k_y = m\pi/b$.

Dunque, per il generico modo TM_{nm} l'autovalore trasversale è $k_{nm}^2 = \left(n\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(m\frac{\pi}{b}\right)^2$ e

l'autofunzione è $\phi_{nm}(x,y) = B_{nm} \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(m\frac{\pi}{b}y\right)$.

Il modo fondamentale tra quelli TM è il TM_{11} ($n=1, m=1$). In questo caso infatti n ed m devono essere entrambi non nulli affinché l'autofunzione non sia identicamente nulla. Dunque, considerando l'insieme di tutti i modi TE e TM, riconosciamo che per la guida rettangolare il modo fondamentale è il modo TE_{10} .

Per il modo fondamentale TE_{10} si ha

$\psi_{10}(x,y) = A_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$; inoltre, usando la (8) otteniamo

$\underline{h} = A_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{i}_x$ e $\underline{e} = \underline{h} \times \hat{i}_z = -A_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{i}_y$. Infine,

$$H_z = \frac{V}{j\omega\mu} \nabla_t \cdot \underline{h} = \frac{Vk_t\psi}{j\omega\mu} = \frac{V(z)\frac{\pi}{a} A_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)}{j\omega\mu}.$$

La costante A_{10} si determina imponendo la condizione (13):

$$\iint_S |\psi_{10}|^2 dS = \int_0^a \int_0^b \left| A_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right|^2 dx dy = |A_{10}|^2 \frac{ab}{2} = 1, \text{ da cui } A_{10} = \sqrt{\frac{2}{ab}}.$$