Metodo Monte Carlo

- Metodo Monte Carlo
- Applicazioni

Bibliografia

Metodo Monte Carlo

R. Y. Rubinstein; "**Simulation and the Monte Carlo Method**", Wiley &Sons (1981)

Yu. A. Shreider; "**Method of Statistical Testing**", Elsevier (1964)

F. James; "**Monte Carlo Theory and Practice**", Rep. Prog. Phys. Vol.43 (1980) 1145

L. Lyons; "**Statistics for nuclear and particle physicists**", Cambridge (1989)

Introduzione al Metodo Monte Carlo

- ➔ Concetti introduttivi e distribuzioni
- ➔ Metodi di Generazione di sequenze con distribuzioni assegnate
- ➔ Metodo *Pesato*
- ➔ Integrazione di Funzione
- ➔ Applicazioni

il Metodo Monte Carlo (I)

- un metodo numerico di risoluzione di problemi matematici attraverso il campionamento di variabili random
- insieme di metodi di simulazione di un qualsiasi processo la cui evoluzione e' condizionata da fattori stocastici (aleatori)
- cercare la soluzione di un problema rappresentandola quale parametro di una ipotetica popolazione e nello stimare tale parametro tramite l'esame di un campione della popolazione ottenuto mediante sequenze di numeri casuali.

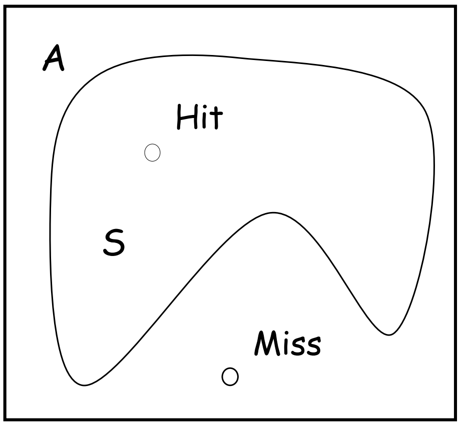
il Metodo Monte Carlo (II)

Nota storica

Il termine "Monte Carlo" fu introdotto da Metropolis durante il Manhattan Project.

Sequenze di numeri random furono usate da Fermi per studiare la diffusione di neutroni in materiali fissili.

Hit or Miss (I)



Selezioniamo N punti uniformemente e stocasticamente nel rettangolo

(hint: lanciamo dei sassi ad occhi chiusi)

N_s = numero di punti che cadono nella superficie S

$$S \approx \frac{N_S}{N} A$$

$p = \frac{S}{A}$ probabilita' che un sasso cada all'interno dell' area S

$\hat{p} = \frac{N_S}{N}$ stima di p

$\theta = \frac{N_S}{N} A$ stima di S

Una stima di S e' il valore atteso di θ

Hit or Miss: F. A. Q.

Quanti lanci?

Ovvero, qual e' l'errore ?

Che succede se l'area e' fuori dalla nostra gittata?

Il metodo e' di scarso aiuto se non conosciamo la precisione della stima!

Bernoulli Trials

Esperimenti in cui sono possibili solo due esiti (outcomes): *successo (1) o insuccesso (0)*

X	1	0
p	ρ	$1 - \rho$

X *variabile aleatoria* di Bernoulli

$0 < \rho < 1$

$$E(X) = 0\,(1-\rho) + 1\,\rho = \rho$$

$$E(X^2) = 0^2\,(1-\rho) + 1^2\,\rho = \rho$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \rho\,(1 - \rho)$$

Bernoulli Trials (II)

Ma noi siamo interessati al numero di successi su N tentativi

Dobbiamo quindi eseguire N esperimenti di Bernoulli statisticamente indipendenti con probabilita' di successo:

$$p = \frac{S}{A}$$

probabilita' che un sasso cada all'interno dell' area S

Distribuzione Binomiale

Dato un esperimento che può avere come esito un '*successo*' o un '*insuccesso*' (Variabile Bernoulliana) detta p la probabilità di avere un successo, la probabilità di avere k successi in n tentativi è data da:

$$P(k;N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

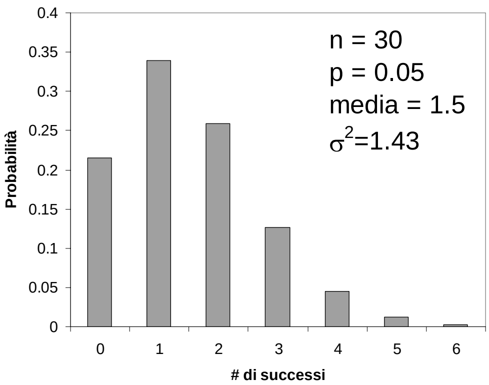
- La distribuzione binomiale accetta solo valori discreti
- L'ordine dei successi nella sequenza non e' importante
- La distribuzione binomiale <u>NON</u> è simmetrica

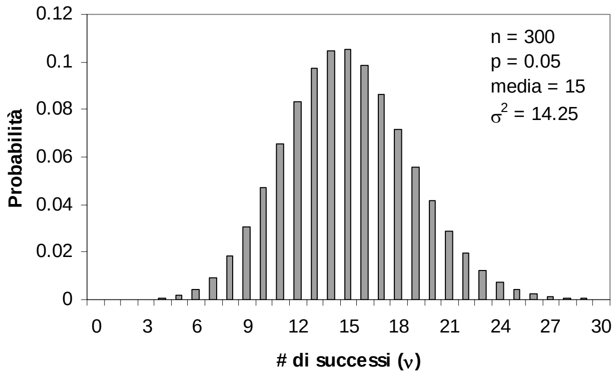
Binomiale vs. Bernoulli

Binomiale	Bernoulli
$E[X] = N p$	$E[X] = p$
$Var(X) = Np(1-p)$	$Var(X) = p(1-p)$

La distribuzione binomiale si riduce a quella di Bernoulli per N=1.

DistribuzioneBinomiale (II)





Per np >> 1 la distribuzione diventa simmetrica
Per np >> 1 la distribuzione è approssimata da una gaussiana

Hit or Miss (II)

X v.a. di Bernoulli $p = \frac{S}{A} \approx \frac{N_S}{N}$ $\theta = \frac{N_S}{N} A$ stimatore di S

$$E(\theta) = E\left(\frac{N_S}{N} A\right) = \frac{A}{N} \cdot E(N_S) = \frac{A}{N} \cdot E(X) = A \cdot p = S$$

$$Var[\theta] = Var\left(\frac{N_S}{N} A\right) = \frac{A^2}{N^2} \cdot Var(N_s) =$$

$$= \frac{A^2}{N^2} Np(1-p) = \frac{S}{N}(A-S)$$

$$\sigma_\theta = \sqrt{\frac{S}{N}(A-S)} \approx A\sqrt{\frac{p}{N}(1-p)} \propto \sqrt{D/N}$$

Hit or Miss (III)

n: numero medio di successi

$$n = < N_S > = < \sum_{i=1}^{N} x_i > = \sum_{i=1}^{N} < x_i > = Np$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\theta} = \frac{\sigma_n}{n} = \frac{\sqrt{Np(1-p)}}{Np} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{\frac{1-p}{p}}$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\theta} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{\frac{N-N_S}{N_S}}$$

Es. $S=A/2$, $n \approx N/2$, $\sigma_\theta/\theta \approx N^{-1/2}$,

Per stimare S con la precisione dell'1% occorre lanciare 10^4 sassi.

Disuguaglianza di Chebychev (I)

v.a. X con pdf qualsiasi   E[X] = μ momento primo della popolazione

V[X] = σ^2 varianza della popolazione

la probabilita' che una nuova estrazione x differisca da E[X] (in valore assoluto) piu' di una quantita' assegnata positiva e e' data da:

$$P\left(\left| x - E[X] \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V[X]}{\varepsilon^2} \qquad \frac{V[X]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

La relazione e' vera anche per i campioni e gli stimatori

Disuguaglianza di Chebychev (II)

$$\varepsilon = k\sigma \qquad P\left(\left| x - E[X] \right| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

Per k=3 $$P\left(\left| x - E[X] \right| \geq 3\sigma\right) \leq \frac{1}{9} = 0.111$$

$$\Downarrow$$

Nel 90% circa dei casi $$\left| x - E[X] \right| < 3\sigma$$

Disuguaglianza di Chebychev (III)

Dato un campione di dimensione N della v.a. X

$\overline{x}$ media del campione

$s = \frac{Var[\overline{x}]}{N}$ varianza del campione

$$P\left(\left|\,\overline{x} - E[\overline{x}]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var[\overline{x}]}{\varepsilon^2}$$

Siccome $E[\overline{x}] = E[X] = \mu$ $\quad V[\overline{x}] = \frac{\sigma^2}{N}$

$$\boxed{P\left(\left|\,\overline{x} - E[\overline{x}]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{N\varepsilon^2}}$$

Ma quante prove? (1/2)

Criterio generale: Ma quanti trials dobbiamo eseguire per avere una data precisione, ovvero

scelto un ε e un δ in $]0,1[$ dopo quante prove e'

$$P\left(\left|\theta - S\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \delta\,?$$

Applico la disuguaglianza di Chebychev

$$P\left(\left|\theta - S\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var[\theta]}{\varepsilon^2} \leq \delta \qquad Var[\theta] = \frac{A^2}{N}\, p(1-p)$$

$$\frac{A^2}{N\varepsilon^2}\, p(1-p) \leq \delta \qquad N \geq \frac{A^2}{\delta\varepsilon^2}\, p(1-p)$$

Ma quante prove? (2/2)

$$N \geq \frac{A^2}{\delta\varepsilon^2} p(1-p)$$

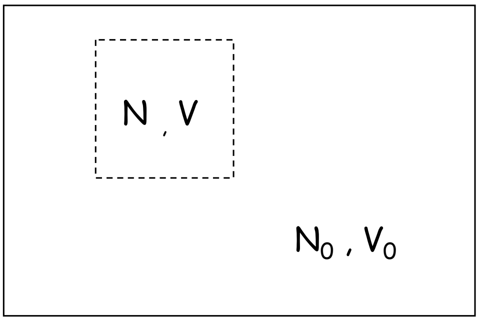
Ma dipende da p (non nota) ed *A*

Ma siccome, in ogni caso, p(1-p) e' massima per p=1/2, rinormalizzando l'area (*A*=1)

$$p(1-p) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{N \geq \frac{1}{4\delta\varepsilon^2}}$$

Es. Fluttuazione della densita' in un gas



$$\rho = \frac{N}{V}$$

Come quantificare le fluttuazioni di ρ all'equilibrio ?

Il numero *N* di molecole all'interno del volume *V* e' una *variabile random*

X_i v.a._di Bernoulli:

$$P(X_i = 1) = \frac{V}{V_0} = p$$

$$P(X_i = 0) = 1 - p$$

$$\Rightarrow \quad N = \sum_{i=1}^{N_0} x_i$$

$\langle X_i \rangle$; Var{Xi}; $\langle N \rangle$; Var{N} ?   R.: $\langle X_i \rangle$=p, Var{Xi}=p(1-p), $\langle N \rangle = N_0 p$, Var{N}= $N_0 p(1-p)$

Come usare un calcolatore per simulare le fluttuazioni in ρ?

DistribuzioneBinomiale (III)

In un processo di Bernoulli di parametro $p > 0$, con probabilita' 1 si avra' prima o poi un successo

Paradosso di Borel:

Una scimmia (o un automa) che batte a caso i tasti di una tastiera di un pc, prima o poi scrivera' il testo della Divina Commedia

Quanto prove bisogna eseguire per avere il primo successo?

R. $1/p$

Es. 1. Uno studente risponde a caso a 10 domande a risposta multipla. Se le risposte sono 4 per ogni domanda , qual e' la probabilita' di rispondere esattamente ad almeno 5 domande?

Es. 2. Riempiendo a caso una schedina di totocalcio, qual e' la probabilita' di fare almeno 12?

Es. 3. Calcolare la probabilita' che, alla prossima estrazione del lotto, esca il numero 22 sulla ruota di Napoli

Es. 4. Calcolare la probabilita' che, alla prossima estrazione del lotto, esca il numero 22 su almeno una delle 10 ruote del lotto.

Es. 1. Uno studente risponde a caso a 10 domande a risposta multipla. Se le risposte sono 4 per ogni domanda , qual e' la probabilita' di rispondere esattamente ad almeno 5 domande?

La probabilità di azzeccare una risposta esatta e' p=1/4

L'aver azzeccato o meno una risposta non modifica la capacita' di azzeccare le altre.

Possiamo quindi schematizzare il nostro esperimento aleatorio con una successione di N = 10 prove di Bernoulli, con probabilita' di successo nella singola prova p = 1/4.

Detto Y il numero delle risposte indovinate allora:

$$P(Y \geq 5) \;=\; \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} \approx 0.0078$$

Es. 2. Riempiendo a caso una schedina di totocalcio, qual e' la probabilita' di fare almeno 12?

Su una schedina del totocalcio sono elencate 14 partite e ogni partita puo' avere tre risultati "1", "2" o "X". La probabilita' di azzeccare una singola partita, scrivendo a caso uno dei simboli 1, 2 o X, e', almeno in prima approssimazione, uguale ad 1/3.
Inoltre l'aver azzeccato o meno il risultato di una certa partita non influenza la capacita' di azzeccare le altre.

Possiamo quindi schematizzare il nostro esperimento aleatorio con una successione di N = 14 prove di Bernoulli, con probabilita' di successo nella singola prova p= 1/3.
Detto Y il numero di partite azzeccate allora:

$$P(Y \geq 12) = \sum_{k=12}^{14} \binom{14}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{14-k} \approx 10^{-6}$$

Es. 3. Calcolare la probabilita' che, alla prossima estrazione del lotto, esca il numero 22 sulla ruota di Napoli

Assumendo che le estrazioni sulle varie ruote siano *statisticamente indipendenti*

P(esce il 22) = 1 – P(non esce il 22)

Considerando una sola ruota, lo spazio campione **S** consiste di tutte le possibili quintuple non ordinate di valori interi compresi tra 1 e 90 che sono in numero N dato da:

$$N = \binom{90}{5}$$

$$N' = \binom{89}{5}$$ Numero di quintuple che non contengono il 22

$$P(non\,esce\,il\;22) = \frac{N'}{N} = \frac{85}{90}$$

$$P(esce\,il\;22) = 1 - \frac{N'}{N} = 1 - \frac{85}{90} = \frac{5}{90} = 0.055$$ sulla ruota di Napoli

Es. 4. Calcolare la probabilita' che, alla prossima estrazione del lotto, esca il numero 22 su almeno una delle 10 ruote del lotto.

La probabilita' che non venga estratto il 22 su alcuna delle 10 ruote e'

$$\left(\frac{N'}{N}\right)^{10} = \left(\frac{85}{90}\right)^{10} \approx 0.565$$

La probabilita' che il 22 venga estratto su almeno una delle 10 ruote e'

$$1 - \left(\frac{N'}{N}\right)^{10} \approx 0.435$$

Relazione di Ricorrenza

$$Bin(k;N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$Bin(k+1;N,p) = \frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} \cdot Bin(k;N,p)$$

Dopo aver calcolato Bin(0;N,p) si possono ricorsivamente calcolare tutti gli altri valori della probabilita' senza calcolare direttamente i coefficienti binomiali

Hit or Miss: F. A. Q.

Che succede se l'area e' fuori dalla nostra gittata?

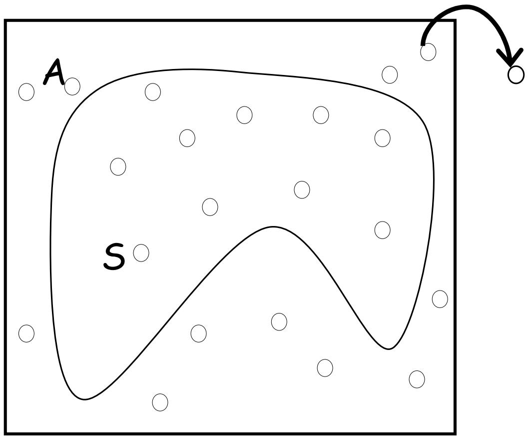
L'alternativa e' entrare nel campo e....

1. lanciare il sasso.
2. spostarsi nella posizione di arrivo del sasso
3. lanciare un altro sasso
4. andare al punto 2 finche' $|\theta - S| < \varepsilon$

In questo modo e' ancora possibile campionare tutta l'area (*Markov-chain sampling*)

....ma....

Hit or Miss: F. A. Q.



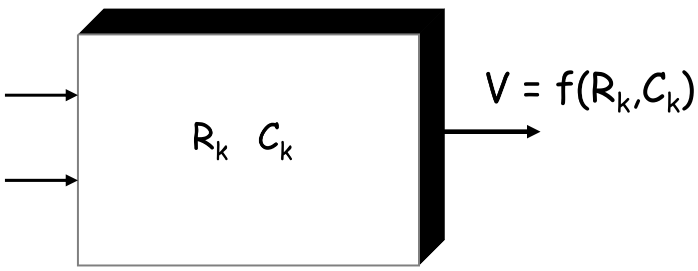
Che succede se un lancio finisce fuori?

1. Ripetere il lancio?
2. Spostarsi comunque?
3. ....

La risposta e' nel concetto di *bilancio dettagliato*

$$\boxed{\pi(a)\cdot p(a \to b) = \pi(b)\cdot p(b \to a)}$$

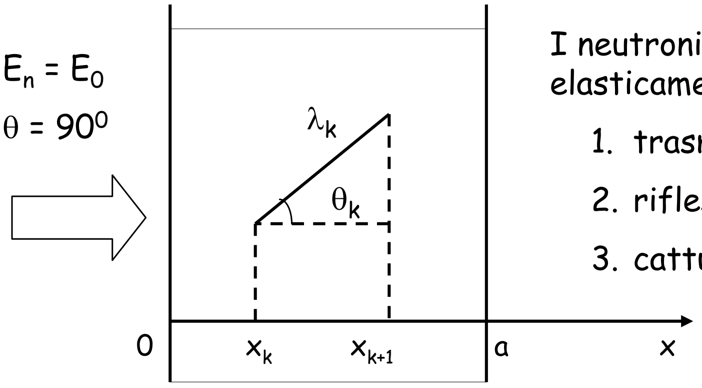
Controllo di Qualita'



I valori delle R_k e C_k sono noti con una data precisione e sono distribuiti intorno ai valori nominali.

Di quanto varia V a causa di queste deviazioni ?

Trasmissione di neutroni attraverso una piastra



I neutroni possono essere diffusi elasticamente o catturati:

1. trasmissione
2. riflessione
3. cattura

σ_{el} -> sezione d'urto elastica

σ_c -> sezione d'urto di cattura

$$\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_c$$

Come stimare:

probabilita' di trasmissione
probabilita' di riflessione
probabilita' di cattura

Esperimenti, Storie, Eventi

Esperimento	processo aleatorio, fisico o matematico
Evento Elementare	uno dei risultati (*outcomes*) possibili dell'esperimento ω
Spazio Campione Ω (Sample Space)	l'insieme di tutti gli eventi elementari $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$
Prova o Storia (trial)	una realizzazione dell'esperimento
Evento	Un qualunque sottoinsieme E Ω del quale e' possibile calcolare la probabilita'. Una caratteristica o conseguenza del risultato dell'esperimento. Ad ogni evento e' possibile assegnare una probabilita' data l'aleatorieta' dell'esperimento.

Es. lancio di un dado

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Lo spazio campione e' costituito da 6 eventi elementari (risultati possibili)

Ogni prova da come risultato una delle 6 facce.

Gli Eventi sono definiti in termini dei possibili risultati:

- **E1 = {2,4,6}; la faccia superiore ha un numero pari**
- **E2 = {5,6}; la faccia superiore ha un numero maggiore di 4**
- **E3 = {4}; la faccia superiore ha il numero 4 (l'evento e' uno dei risultati possibili)**

E2 ed E3 sono disgiunti

E1 ed E3 possono avere lo stesso risultato (intersezione non nulla)

Ma cos'e' una variabile aleatoria?

Una variabile aleatoria (v.a.) e' una variabile il cui valore e' determinato dall'esito di un esperimento stocastico (evento).

v.a. e' una funzione che associa un numero reale x ad un evento elementare:

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathrm{R}$$

Essendo associata una probabilita' ad ognuno degli esiti di un evento E, una v.a. e' completamente specificata dalla varieta' dei valori che puo' assumere e dalla probabilita' p(x) con cui ognuno di essi si puo' verificare.

Es. $\xi: \Omega \rightarrow 10n$ ξ assume il valore di x = 10n ad ogni lancio di un dato in cui si ottiene n

Variabili Aleatorie Discrete (I)

E' definita da una tabella del tipo:

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \ldots\ldots\ldots x_n \\ p_1 \ldots\ldots\ldots p_n \end{pmatrix}$$

$x_1 \ldots\ldots\ldots x_n$ ⇒ Valori possibili della variabile ξ

$p_1 \ldots\ldots\ldots p_n$ ⇒ Probabilita' con cui la variabile ξ assume uno dei possibili valori:

$$P\{\xi = x_i\} = p_i$$

Se assegnamo un valore numerico ad ogni possibile Evento insieme alla probabilita' che esso si verifichi, un Evento e' una variabile aleatoria.

Variabili Aleatorie Discrete (II)

Lancio di un dado:

$$\xi = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 1/6 \ldots\ldots 1/6 \end{pmatrix}$$

Estrazione di palline di diverso colore:

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

x_1 = rosso

x_2 = verde

x_3 = giallo

Le v.a. permettono una quantificazione dei processi random

Variabili Aleatorie Continue

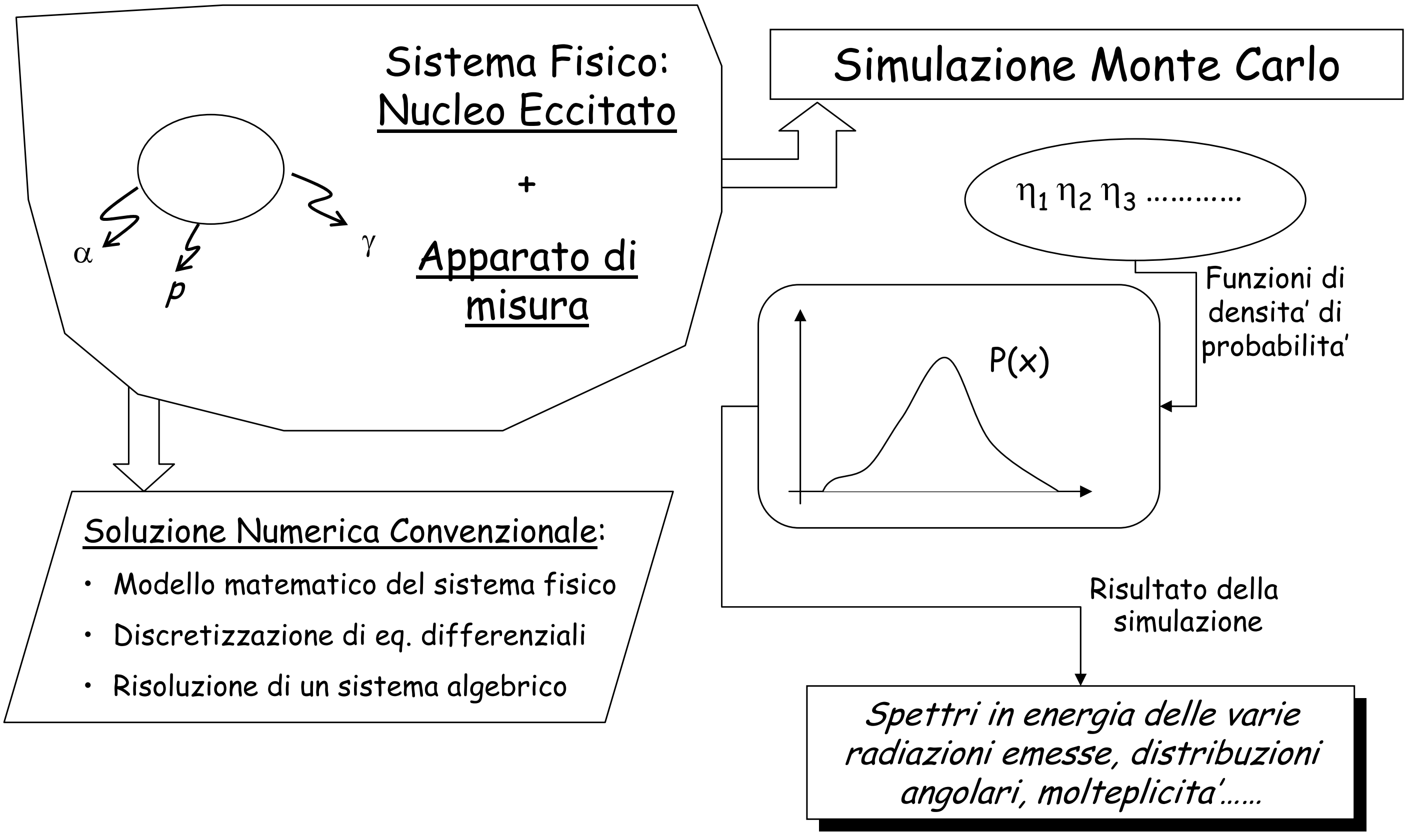
$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \ldots\ldots\ldots x_n \\ p_1 \ldots\ldots\ldots p_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \xi \in [a,b]$$

p(x) -> densita' di probabilita' (p.d.f.)

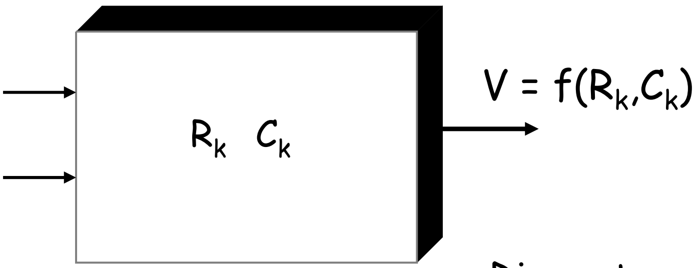
Esempi di Variabili Aleatorie

1. il primo estratto della ruota di Napoli
2. il tempo di vita di una lampadina
3. il peso di una persona scelta a caso in una certa popolazione
4. l'altezza media di un campione di persone al variare del campione
5. il numero di "teste" prima di una "croce" nel lancio di una moneta
6. la velocita' riscontrata da un autovelox
7. l'energia di uscita di una particella che attraversa un assorbitore
8. la misura di una grandezza fisica
9. il conteggio manuale di 10 kg di monetine di 1c
10. l'orario di arrivo di un napoletano ad un appuntamento
11. ....

il Metodo Monte Carlo (II)



Controllo di Qualita'



I valori delle R_k e C_k sono noti con una data precisione e sono distribuiti intorno ai valori nominali.

Di quanto varia V a causa di queste deviazioni ?

E' ragionevole considerare i parametri di tutti gli elementi e la stessa V come variabili random e stimare $\langle V\rangle$ e σ^2.

Schema Monte Carlo

Dati:

- le distribuzioni di tutti gli elementi
- la funzione f

1. Estrarre il valore di ogni elemento dalla sua distribuzione
2. Calcolare $V_i = f(k_i)$ N volte
3. Calcolare $\langle V\rangle$ e σ^2

$$\langle V\rangle = \frac{1}{N}\sum_i V_i \qquad V = \langle V\rangle \pm \frac{s}{\sqrt{N}}$$

$$s_V^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N} V_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} V_i\right)^2\right] = \langle V^2\rangle - \langle V\rangle^2$$

Ingredienti Pricipali di un Algoritmo Monte Carlo

- ✓ Distribuzioni di probabilita' – il sistema fisico o matematico e' rappresentato da un insieme di pdf;
- ✓ Un generatore di numeri random uniforme in [0,1];
- ✓ Sampling rules - Prescrizioni per il Campionamento delle variabili con pdf assegnate;
- ✓ Scoring -i risultati devono essere opportunamente accumulati (es.istogrammi);
- ✓ Stima degli errori – e' auspicabile una stima dell'errore statistico in funzione del numero di storie o altre quantita' di interesse del modello;
- ✓ Tecniche per ridurre la varianza – metodi per ridurre la varianza delle soluzioni stimate e il tempo di calcolo;
- ✓ Parallelizzazione e vettorizzazione

Pricipali Caratteristiche del Metodo Monte Carlo

Struttura di calcolo semplice

- ✓ Un programma e' scritto per eseguire una sola prova o storia (trial);
- ✓ la storia e' ripetuta N volte;
- ✓ ogni storia e' indipendente dalle altre;
- ✓ i risultati delle storie e degli eventi sono mediati;

Errore Statistico $\propto \sqrt{D/N}$

D = costante

N = numero di eventi

Per ridurre l'errore di un fattore 10 bisogna aumentare N di 100 volte.

Un dato problema puo' essere risolto attraverso varie versioni del MC, ognuna aventi un diverso valore di D $\Rightarrow$ La precisione puo' essere aumentata attraverso una scelta propria del metodo di calcolo avente valore di D piu' piccolo

Applicazioni Tipiche del Monte Carlo

- Disegno di esperimenti (apparato di misura, capacita' di distinguere tra le previsioni di diverse teorie)
- QCD
- Decadimento di Nuclei Eccitati (evaporazione, fissione…)
- Efficienza geometrica ed intrinseca
- Stima di contaminazioni (segnali validi vs. background)
- Evoluzione Stellare
- Controllo della qualita' ed affidabilita'
- Trasporto di radiazioni
- Traffic flow
- Economia
- ....

Schema Generale del Metodo Monte Carlo (I)

Soluzione di un problema rappresentandola quale parametro di una ipotetica popolazione.

Supponiamo di voler calcolare il valore m di una certa grandezza X:

$$v.a.\ \eta: \quad <\eta> \equiv m \quad \sigma_\eta^2 \equiv b^2$$

Consideriamo N variabili indipendenti $\eta_1, ..., \eta_N$ con distribuzioni identiche a quella di η.

Per N sufficientemente grande segue (teorema del limite centrale):

$$v.a.\ \rho_N = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_N$$

$$\mu = Nm \quad \sigma^2 = Nb^2$$

e' distribuita normalmente.

Schema Generale del Metodo Monte Carlo (II)

$$P\{\mu - 3\sigma < \rho_N < \mu + 3\sigma\} = P\{Nm - 3b\sqrt{N} < \rho_N < Nm + 3b\sqrt{N}\} \approx 0.997$$

$$P\left\{m - \frac{3b}{\sqrt{N}} < \frac{\rho_N}{N} < m + \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0.997$$

$$\boxed{P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_i - m\right| < \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0.997}$$

Questa relazione fornisce il metodo di calcolo m e del suo errore.

E. Vardaci

Campionamento di Variabili Aleatorie

La generazione di un campione di una variabile aleatoria costituisce un ingrediente essenziale di ogni esperimento Monte Carlo.

- Metodo della Trasformata Inversa
- Metodo del Rifiuto
- Metodo della Composizione

Densita' di Probabilita' Uniforme

v.a. U :

$$f_U(u) = \begin{cases} 1 & 0 \le u \le 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &< u > = 0.5 \\ &\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0.288 \end{aligned}}$$

La funzione di densita' di probabilita' uniforme e' la densita' da cui e' possibile la generazione delle altre distribuzioni di probabilita'.

Metodo della Trasformata Inversa (I)

$x \in [a,b]$: $p(x)$; $\quad F_X(\gamma) = \int_a^\gamma p(x)\,dx$

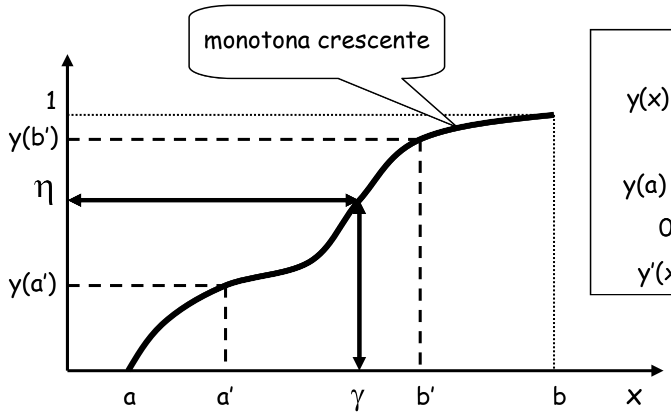
$\eta \in [0,1]$: $\mathbf{U}[0,1]$

la v.a. γ data da:

$$\eta = \int_a^\gamma p(x)\,dx = F_x(\gamma) \quad (1)$$

e' distribuita secondo p(x).

$$\gamma = F_X^{-1}(\eta)$$



$$y(x) = \int_a^x p(x')\,dx'$$

$y(a) = 0$; $y(b) = 1$

$0 < y(x) < 1$

$y'(x) = p(x) > 0$

$\forall \; y \in [0,1] \quad \exists \; x \in [a,b]$ unica soluzione della (1)

$$P\{a' < \gamma < b'\} = P\{y(a') < \eta < y(b')\}$$

$$P\{y(a') < \eta < y(b')\} = y(b') - y(a') = \int_{a'}^{b'} p(x)dx$$

$$P\{a' < \gamma < b'\} = \int_{a'}^{b'} p(x)dx$$

γ, radice della (1), ha densita' di probabilita' p(x) se η e' distribuita uniformemente, qualunque sia p(x).

Metodo della Trasformata Inversa (II)

- Il teorema non distingue tra p(x) continue e discrete: la distribuzione cumulativa puo' essere calcolata anche per una densita' di probabilita' discreta.
- Il metodo e' limitato alle funzioni p(x) in cui l'inversa $F^{-1}(x)$ puo' essere ottenuta analiticamente o attraverso una semplice approssimazione numerica.

Algoritmo

1. Generare η uniformemente in $\mathbf{U}(0,1)$
2. $X \leftarrow F_x^{-1}(\eta)$
3. Ritornare X

Questo metodo ha un'efficienza del 100% : ogni estrazione di η produce una x.

Applicazioni Metodo della Trasformata Inversa

1. v.a. distribuita *uniformemente* in [a,b]
2. v.a. distribuita *esponenzialmente*
3. Generazione di una direzione *isotropa* $\Omega(\theta,\varphi)$
4. v.a. distribuita *triangolarmente* (2J+1)
5. v.a. con densita' di probabilita' *costante a tratti*
6. Generazione di *vettori* random

Variabile Aleatoria γ Uniforme in [a,b]

$\gamma = F_x^{-1}(\eta)$

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$a = 0$ e $b = 1$

$< x > = 0.5$

$\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{12}} = 0.288$

$$\eta = \int_a^\gamma p(x)\,dx = \int_a^\gamma \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{\gamma - a}{b-a}$$

$$\boxed{\gamma = a + (b-a)\,\eta}$$

Variabile Aleatoria distribuita Esponenzialmente

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x \geq 0, a > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty p(x) = 1 \qquad F_x(\gamma) = \int_0^\gamma ae^{-ax}\, dx = \left[-e^{-ax}\right]_0^\gamma = 1 - e^{a\gamma}$$

$$\eta = 1 - e^{a\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma = -\frac{1}{a}\ln(1-\eta)$$ $(1-\eta)$ e' distribuita come η

$$\boxed{\gamma = -\frac{1}{a}\ln(\eta)}$$

Generazione di Direzione Isotropa $\Omega(\theta,\varphi)$ (I)

Vettore unitario distribuito isotropicamente nello spazio 3D.

Il vettore e' applicato all'origine del sistema di coordinate.

Direzione Isotropa: Tutte le direzioni sono equiprobabili

$\Updownarrow$

I punti di coordinate $(1, \theta, \varphi)$ sono distribuiti uniformemente sulla sfera di raggio unitario.

p.d.f. congiunta

$$p(\theta,\varphi)d\theta d\varphi = \frac{dS}{4\pi} = \frac{\mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi}{4\pi} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$p_\theta(\theta) = \int_0^{2\pi} p(\theta,\varphi)d\varphi = \frac{2\pi \mathrm{sen}\theta}{4\pi} = \frac{\mathrm{sen}\theta}{2}$$

$$p_\varphi(\varphi) = \int_0^{\pi} p(\theta,\varphi)\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{sen}\theta}{4\pi}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}$$

Generazione di Direzione Isotropa $\Omega(\theta,\varphi)$ (II)

Applicando il metodo della inversione:

$$\eta = \int_0^{\theta} p_\theta(\theta')\,d\theta' = \frac{1}{2}\int_0^{\theta} \operatorname{sen}\theta'\,d\theta' = \frac{1}{2}\left[-\cos\theta'\right]_0^{\theta} = \frac{1}{2}\left[1-\cos\theta\right]$$

$$\boxed{\cos\theta = 1-2\eta}$$

$$\gamma = \int_0^{\varphi} p_\varphi(\varphi')\,d\varphi' = \frac{1}{2\pi}\varphi$$

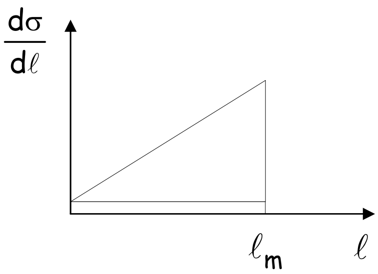
$$\boxed{\varphi = 2\pi\,\gamma}$$

Es. Angolo solido di un rivelatore a:

- sezione circolare o quadrata;
- corona circolare;

Variabile Aleatoria con Distribuzione Triangolare

$$\boxed{p(\ell) = \frac{2\ell+1}{\int_0^{\ell_m}(2\ell+1)\,d\ell}}$$



$$\int_0^{\ell_m}(2\ell+1)\,d\ell = \ell_m^2 + \ell_m$$

$$\eta = \int_0^{\ell} p(\ell')\,d\ell' = \frac{\ell^2+\ell}{\ell_m^2+\ell_m} \Rightarrow \begin{cases} \ell^2 + \ell - \eta\,(\ell_m^2+\ell_m) = 0 \\ \ell \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\ell = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+4\eta\,(\ell_m^2+\ell_m)}-1\right\}}$$

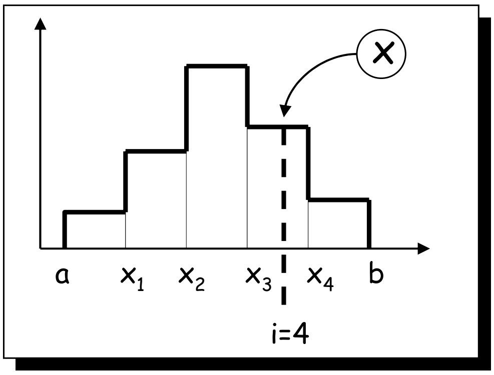
$\eta = 0 \qquad \ell = 0$

$\eta = 1 \qquad \ell = \ell_m$

Variabile Aleatoria con densita' *costante a tratti (I)*

$$p(x) = \begin{cases} C_i & x_{i-1} \le x \le x_i; \quad i = 1,2,\dots\dots n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$C_i \ge 0 \qquad a = x_0 < x_1 < \dots . < x_{n-1} < x_n = b$$



$$P_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx \qquad F_i = \sum_{j=1}^{i} P_j$$

$$F_x(x) = \sum_{j=1}^{i-1} P_j + \int_{x_{i-1}}^{x} C_i\,dx = F_{i-1} + C_i(x - x_{i-1}) = \eta$$

$$i = \max_j \{ j : x_{j-1} \le x \}$$

$$\boxed{\begin{gathered} F_{i-1} \le \eta \le F_i \\ x = x_{i-1} + \frac{\eta - F_{i-1}}{C_i} \end{gathered}}$$

E. Vardaci

Variabile Aleatoria con densita' *costante a tratti (II)*

<u>Algoritmo</u>

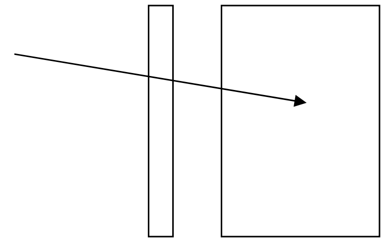
1. Generare η uniformemente in $\mathbf{U}(0,1)$
2. Determinare i dalla relazione

$$\sum_{j=1}^{i-1} P_j < \eta \le \sum_{j=1}^{i} P_j$$

3. Ritornare $\quad x \leftarrow x_{i-1} + \dfrac{\eta - F_{i-1}}{C_i}$

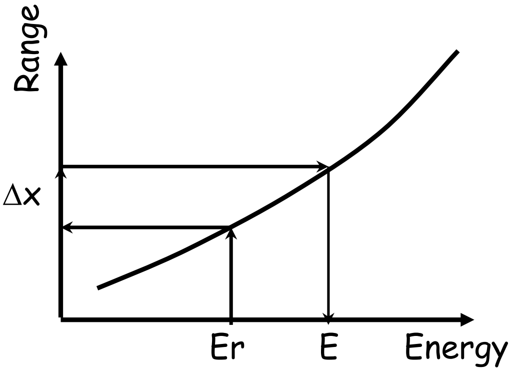
E. Vardaci

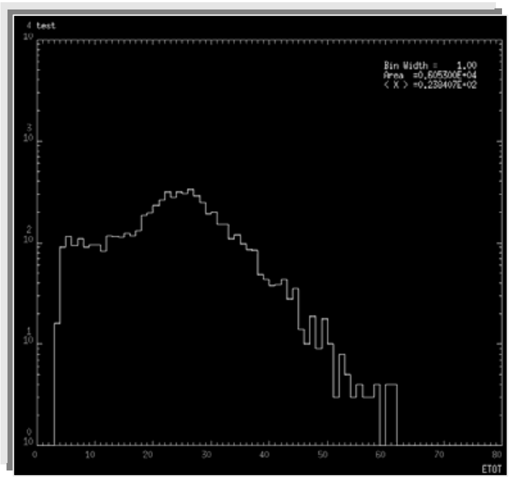
Correzione per la perdita di energia in strati passivi (I)



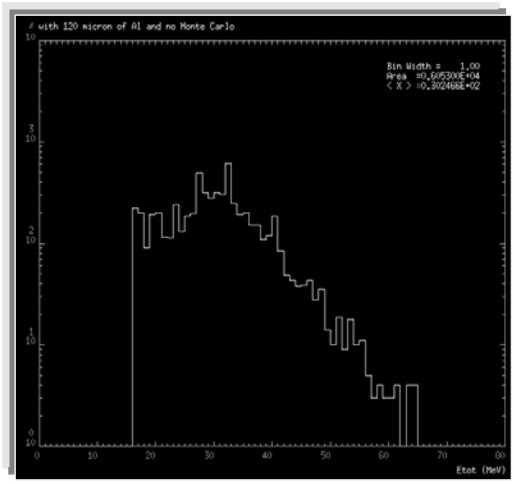
Er

Δx

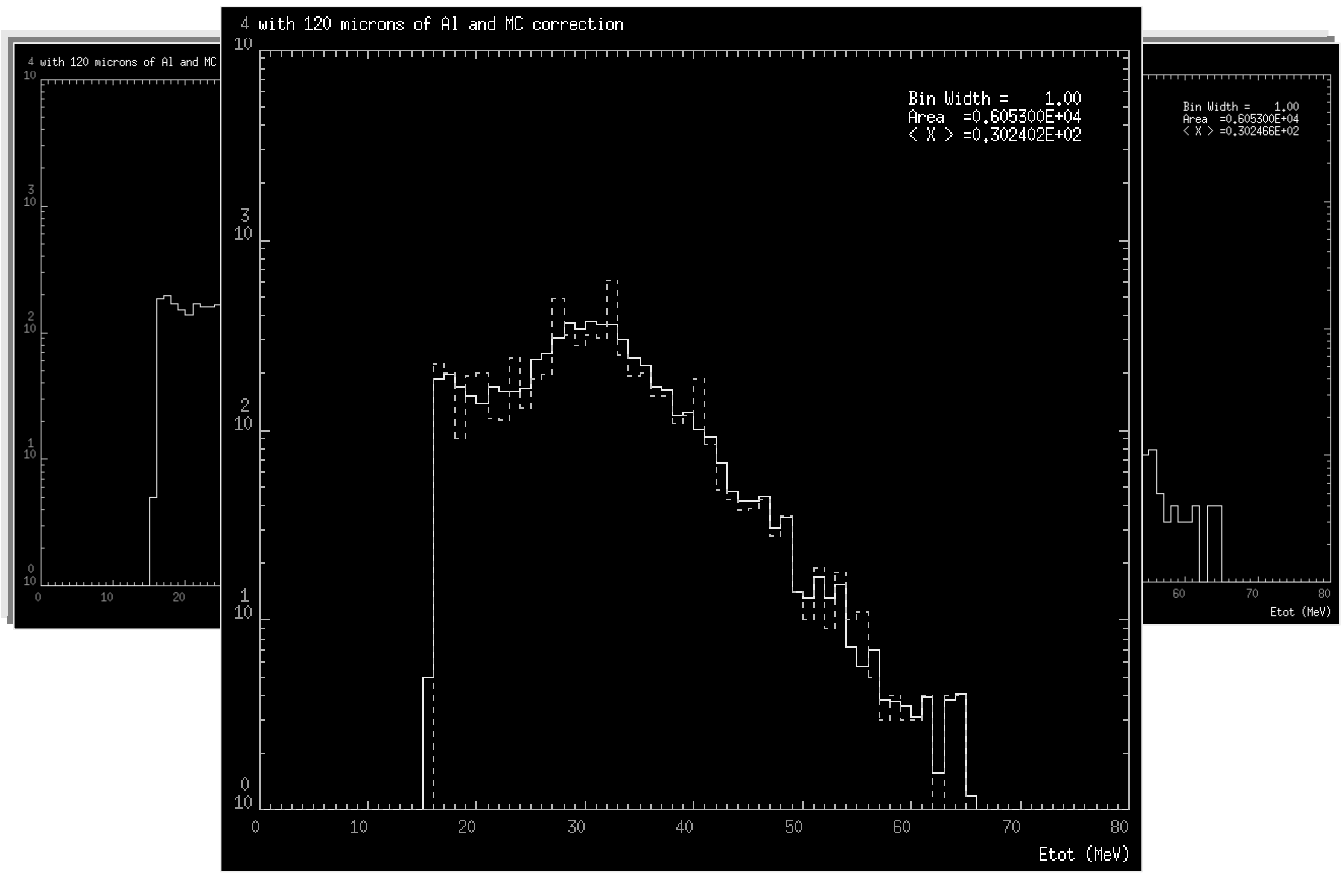




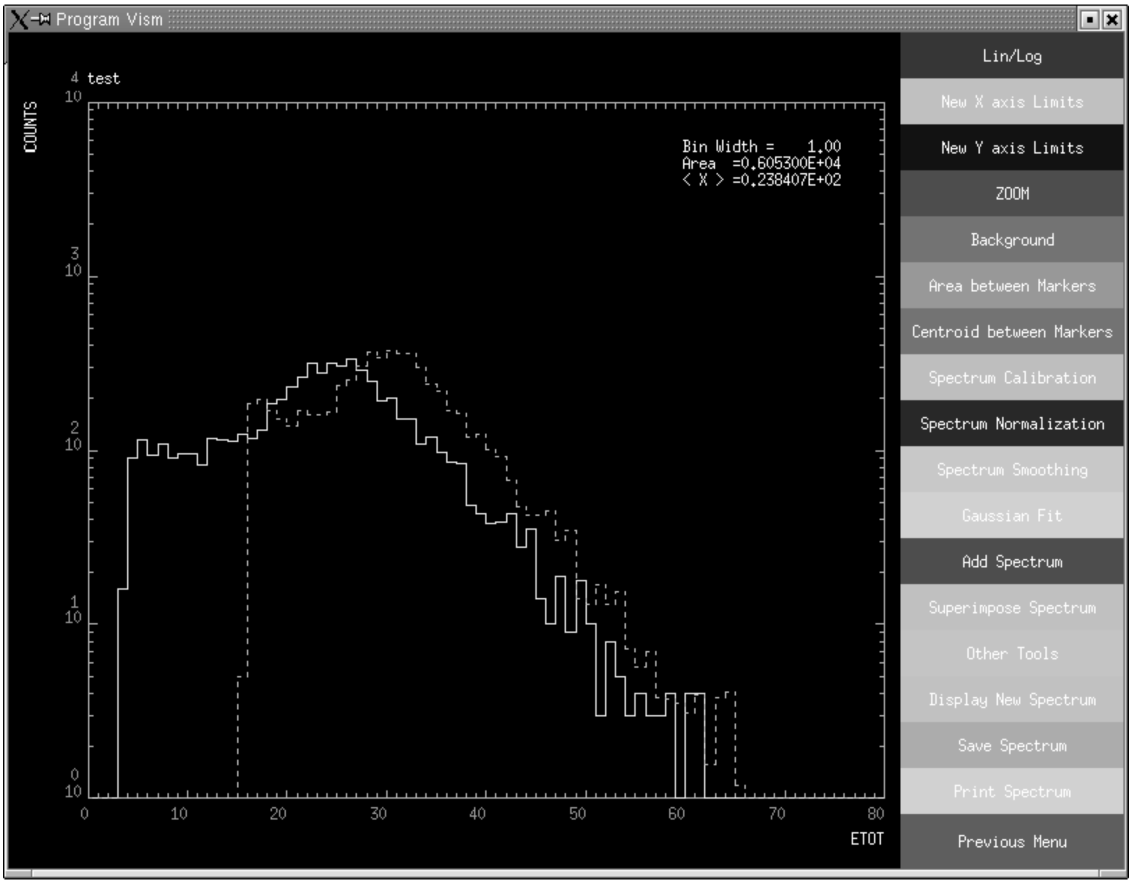
Er a centro bin



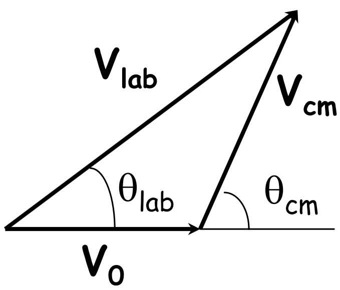
Correzione per la perdita di energia in strati passivi (II)



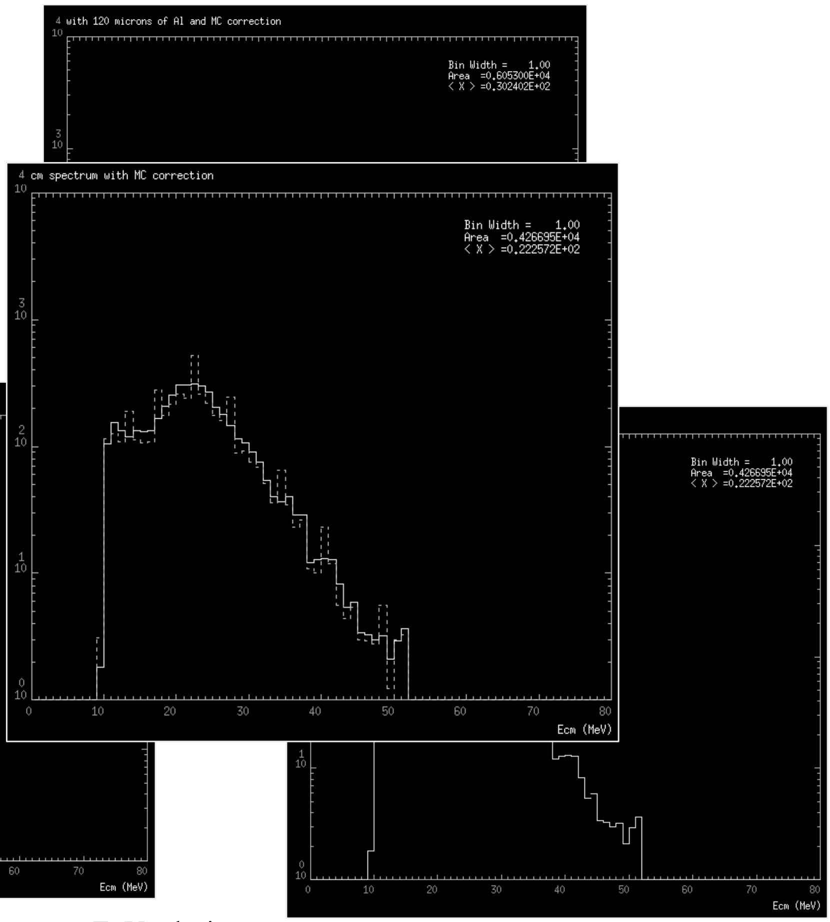
Correzione per la perdita di energia in strati passivi (III)

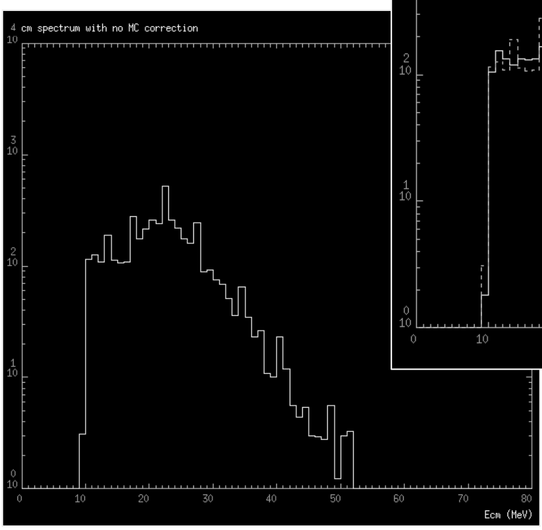


Trasformazione Lab-> CM



$$V_{lab} = V_0 + V_{cm}$$





Vettori random $\overline{x} = (x_1,\ldots\ldots, x_n);\quad F_x(x)$ (I)

CASO 1: le variabili random x_i sono *indipendenti*

distribuzione di probabilita' congiunta $\Rightarrow$ $p_x(x_1,\ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$

$p_i(x_i)$ marginale di x_i

$$x_i = F_i^{-1}(\eta_i) \qquad i = 1,\ldots\ldots,n$$

Vettori random $\overline{x} = (x_1,\ldots\ldots, x_n);\quad F_{\overline{x}}(x)$ (II)

CASO 2: le variabili random x_i sono *dipendenti*

distribuzione di probabilita' congiunta $\Rightarrow$

$p_x(x_1,\ldots x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2 \mid x_1)\ldots\ldots p_n(x_n \mid x_1 x_{n-1})$

$p_1(x_1)$ marginale di x_1

$p_k(x_k \mid x_1,\ldots\ldots,x_{k-1})$ condizionata di x_k

Teorema: il vettore **X** ottenuto risolvendo il sistema di equazioni seguente

$$\begin{cases} F_1(x_1) = \eta_1 \\ F_2(x_2 \mid x_1) = \eta_2 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_n(x_n \mid x_1,\ldots\ldots,x_{n-1}) = \eta_n \end{cases}$$

e' distribuito secondo la $F_{\overline{x}}(x)$

Warning!!

$p_{x_1,x_2}(x_1,x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2 \mid x_1)$

$p_{x_1,x_2}(x_1,x_2) = p_2(x_2)p_1(x_1 \mid x_2)$

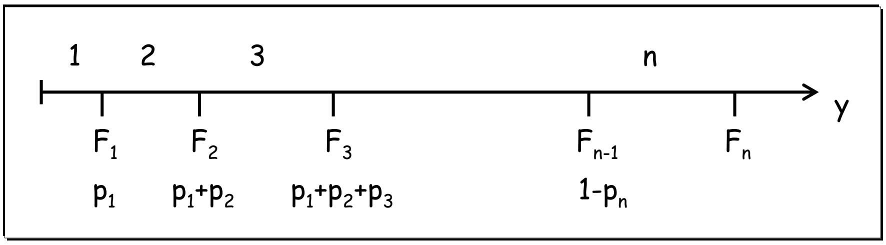
n! combinazioni

A seconda della scelta dell' ordine si puo' ottenere o meno un sistema di equazioni di semplice soluzione

Estrazione di v.a. con distribuzioni discrete (I)

proof

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & . & . & x_n \\ p_1 & p_2 & . & . & p_n \end{pmatrix}$$



$0 < y_1 < p_1 = F_1$

$F_1 < y_2 < p_1+p_2 = F_2$

....

$F_{n-1} < y_n < F_n$

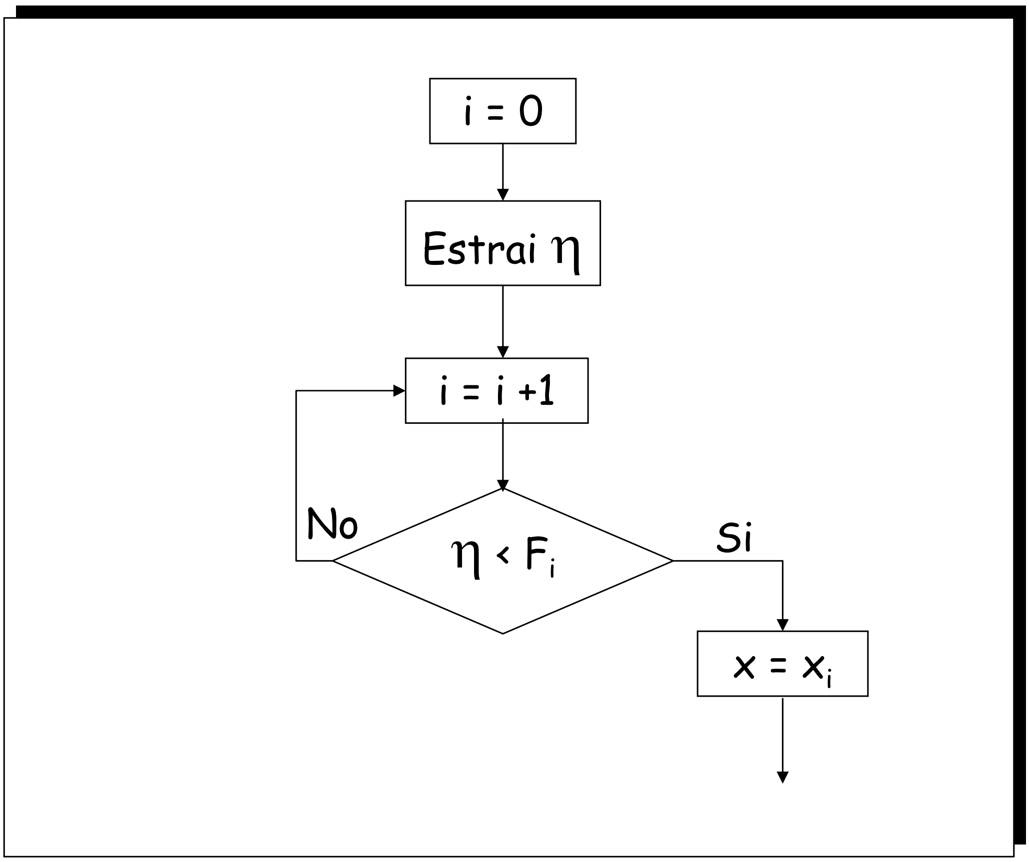
Estraiamo la v.a. η uniforme in [0,1]: se η cade nell'i-simo intervallo $x = x_i$

la probabilita' che $\eta \in [0,1]$ cada entro uno degli intervalli e' proporzionale alla lunghezza dell'intervallo.

$$P\{0 < \eta < F_1\} = p_1$$
$$P\{F_1 < \eta < F_2\} = p_2$$
....
$$P\{F_{n-1} < \eta < F_n\} = p_n$$

$$\boxed{x = x_i \quad \text{se} \quad F_{i-1} < \eta < F_i}$$

Estrazione di v.a. con distribuzioni discrete (II)



Interazione di neutroni termici con ^{235}U

$n + {}^{235}U \rightarrow$

- scattering elastico σ_{el} = 10 b
- fissione σ_{fiss} = 586 b
- assorbimento σ_{ass} = 107 b

σ_{tot} = 703 b

Si vuole conoscere la storia di N = 10000 neutroni. Il problema si risolve scrivendo la probabilita' dei vari processi ed estraendo gli eventi secondo le probabilita' discrete date.

$$P_{el} = \frac{\sigma_{el}}{\sigma_{tot}} = 0.0142 \qquad F_1 = 0.0142$$

$$P_{fiss} = \frac{\sigma_{fiss}}{\sigma_{tot}} = 0.8336 \qquad F_2 = P_{el} + P_{fiss} = 0.8478$$

$$P_{ass} = \frac{\sigma_{ass}}{\sigma_{tot}} = 0.1522 \qquad F_3 = F_2 + P_{ass} = 1.$$

F_1 F_2 F_3

Scattering elastico	$0 < \eta < 0.0142$
Fissione	$0.0142 < \eta < 0.8478$
Assorbimento	$0.8478 < \eta < 1$

Come si calcola l'errore statistico?

Step nel decadimento di un Nucleo Composto

In uno step del decadimento di un nucleo composto diverse vie di decadimento possono essere possibili: emissione di particelle leggere, fissione o emissione di fotoni.

Il modello statistico fornisce la probabilita' di ognuna di queste vie. Queste probabilita' sono espresse in termini della larghezza di decadimento Γ.

$$P_n = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_{tot}} = 0.2$$

$$P_p = \frac{\Gamma_p}{\Gamma_{tot}} = 0.6$$

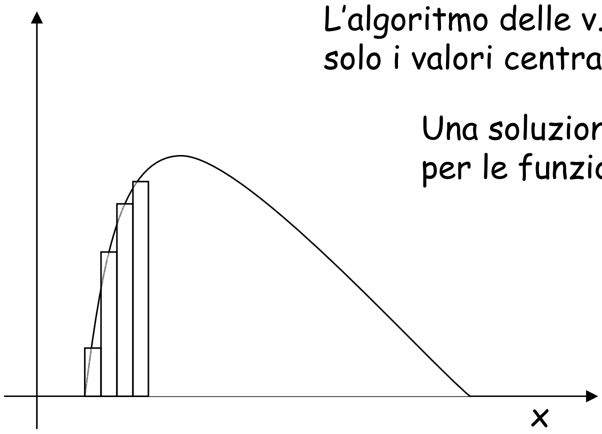
$$P_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_{tot}} = 0.2$$

$$\Gamma_{tot} = \Gamma_n + \Gamma_p + \Gamma_\alpha$$

La via di decadimento e' scelta estraendo tra queste probabilita' discrete.

Distribuzione continua non integrabile analiticamente (I)

Quando la funzione cumulativa non puo' essere valutata analiticamente, oppure la distribuzione di probabilita' e' nota solo tabularmente si puo' tentare la "discretizzazione" della distribuzione di probabilita'.



L'algoritmo delle v.a. discrete fornisce come valori possibili della x solo i valori centrali dei bins $\Rightarrow$ la v.a. x diventa discreta.

Una soluzione migliore e' quella di usare l'algoritmo per le funzioni costanti a tratti.

Il tempo di ricerca dipende dal numero di bins e la precisione del metodo dipende dalla forma della distribuzione e dalla larghezza del bin.

La larghezza del bin puo' essere variabile nel dominio di x.

$\Downarrow$

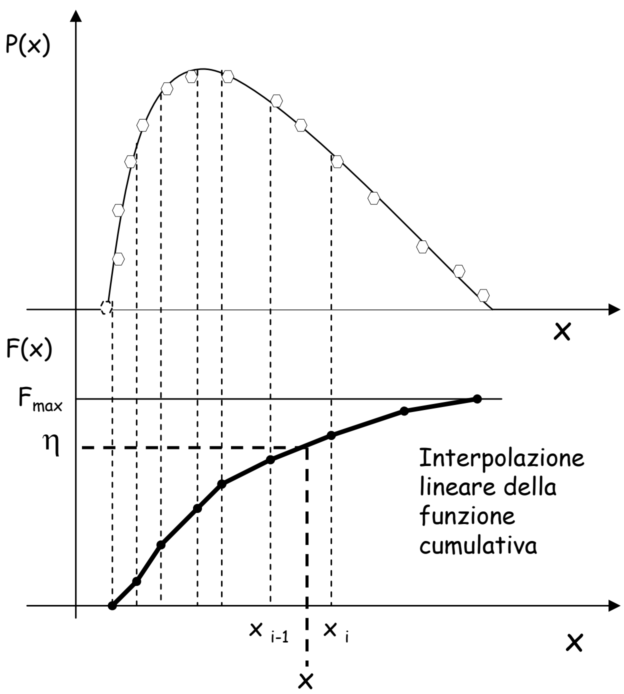
Precisione del metodo e tempo di calcolo non sono indipendenti

Distribuzione continua non integrabile analiticamente (II)

Metodo della Interpolazione della Cumulativa

$$x = \frac{x_i - x_{i-1}}{F_i - F_{i-1}}(\eta - F_{i-1}) + x_{i-1}$$

$$i = \max\{\, i : \eta < F_i \}$$



$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx$$

$$\eta = \frac{F_i - F_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) - F_{i-1}$$

Una soluzione alternativa e' quella di interpolare linearmente la p(x):

$$p_i(x) = \begin{cases} a_i(x - x_{i-1}) + C_{i-1} & a_i = \dfrac{C_i - C_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\eta = F_{i-1} + C_{i-1}(x - x_{i-1}) + \frac{1}{2}a_i(x - x_{i-1})^2$$

Una strada alternativa piu' interessante e' il metodo Monte Carlo Pesato.

Emissione Isotropa di neutroni da un Nucleo Eccitato nel sistema di riferimento solidale al nucleo

Lo spettro energetico dei neutroni emessi da un nucleo eccitato e' di forma Maxwelliana.

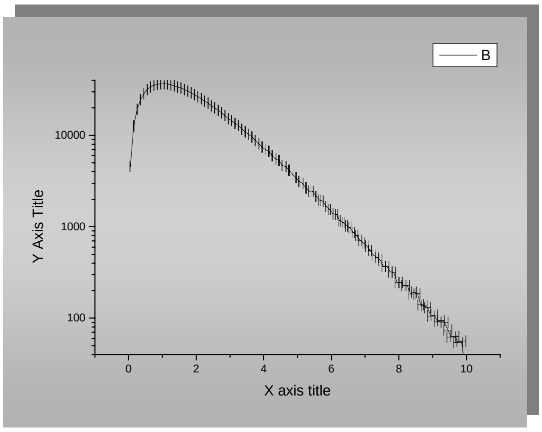
$$n(E) \propto \sqrt{\frac{E}{T}}\, e^{-E/T}$$

$$V = 0.98\sqrt{2E/A} \qquad A = 1$$

$$v_x = V\text{sen}\theta\cos\varphi$$

$$v_y = V\text{sen}\theta\text{sen}\varphi$$

$$v_z = V\cos\theta$$



Algoritmo

1. Generare direzione isotropa $\Omega(\theta,\varphi)$
2. Generare E dalla Maxwelliana
3. Calcolare V, v_x, v_y, v_z
4. Scoring: $\frac{d\sigma}{d\Omega}, \frac{d\sigma}{d\theta}$.....

v.a. con distribuzione Maxwelliana

$$n(E) \propto \sqrt{\frac{E}{T}}\, e^{-E/T}$$

```
void SetMaxwell(int N, double Estep, double T, double *Area)
{
   int i = 0;
   double Tot = 0.;
   NStep = N;
   En    = (double *) malloc((NStep + 1) * sizeof(double));
   A     = (double *) malloc((NStep + 1) * sizeof(double));
   C     = (double *) malloc((NStep + 1) * sizeof(double));
   F     = (double *) malloc((NStep + 1) * sizeof(double));
   P     = (double *) malloc((NStep + 1) * sizeof(double));
   En[0] = 0.;
   A[0]  = 0.;
   C[0]  = 0.;
   F[0]  = 0.;
   P[0]  = 0.;
    for(i = 1; i <= NStep; i++){
       En[i] = (double)(i * Estep);
       C[i] = Maxwell(En[i], T);
       A[i]  = (C[i]-C[i-1]) / (En[i]-En[i-1]);
       P[i]  = (C[i]+C[i-1]) * (En[i]-En[i-1])/2.0L;
       F[i]  = F[i-1] + P[i];
       Tot = Tot + P[i];
   }
  *Area = Tot;
}
```

```
double GetMaxwell(double eta)
{
   int i = 1;
   double x;

   while( eta > F[i] ) i++;
   x = En[i-1] - (En[i] - En[i-1])*(F[i-1] - eta)/(F[i]-F[i-1]);
   return x;
}
```

Campionamento di una v.a. distribuita Normalmente (I)

$$x \in (-\infty, \infty) \qquad p_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

se $x : \mu = 0 \quad \sigma = 1 \rightarrow \quad z = a + b \cdot x$, $a \neq 0$ o $b \neq 1$ — z e' *normale* con μ = a e σ = b

$$P\{ z_1 < z < z_2 \} = P\{ z_1 < a + bx < z_2 \} =$$

$$P\left\{ \frac{z_1 - a}{b} < x < \frac{z_2 - a}{b} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{z_1-a}{b}}^{\frac{z_2-a}{b}} e^{-\frac{z'^2}{2}} dz' =$$

$$P\{ z_1 < z < z_2 \} = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx$$

$\Rightarrow$ <u>z e' distribuita *normalmente*</u>

Campionamento di una v.a. distribuita Normalmente (II)

<u>Metodo di Box - Muller</u>

Questo metodo produce due v.a. normali e indipendenti da due v.a. uniformi in [0,1]

L'astuzia e' di partire dalla distribuzione normale in due dimensioni

$$p_{x,y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\left[\frac{(x^2+y^2)}{2}\right]}; \quad \sigma = 1 \quad \mu = 0$$

$$x = R\cos\theta \qquad y = R\,\text{sen}\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$R = \sqrt{(x^2 + y^2)} \qquad \theta = \text{arctang}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\rho = \frac{R^2}{2} \qquad x = \sqrt{2\rho}\cos\theta \qquad y = \sqrt{2\rho}\,\text{sen}\,\theta$$

$$p_{\rho,\theta}(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{2\pi} e^{-\rho}\, d\rho\, d\theta$$

$$p_\rho(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\rho} d\theta = e^{-\rho}$$

$$p_\theta(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\rho} d\rho = \frac{1}{2\pi}$$

$\Downarrow$

Se ρ e' generata esponenzialmente e θ uniformemente in [0, 2π], x e y costituiscono una coppia di un campione a distribuzione normale.

<u>Algoritmo</u>

1. Generare η_1 e η_2 uniformemente in U(0,1)
2. $\rho \leftarrow -\ln(\eta_1)$; $\theta \leftarrow 2\pi\,\eta_2$
3. $x \leftarrow \sqrt{2\rho}\cos\theta$; $y \leftarrow \sqrt{2\rho}\,\text{sen}\,\theta$
4. Ritornare x e y

Campionamento di una v.a. distribuita Normalmente (III)

Metodo di Box - Muller

$$\rho = \frac{R^2}{2} \quad x = \sqrt{2\rho}\cos\theta \quad y = \sqrt{2\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\rho = -\ln(\eta_1); \quad \theta = 2\pi\,\eta_2$$

```
void gauss1(double *g1, double *g2)
{
   double PI, Theta, R;

   PI = acos(-1.0L);
   Theta = 2.0L * PI * drand48();
   R = sqrt(-2.0L * log(drand48()));
   *g1 = R * cos(Theta);
   *g2 = R * sin(Theta);
}
```

Routine lenta a causa delle chiamate a funzioni trigonometriche

```
void gauss2(double *g1, double *g2)
{
   double x1, x2, R;

   do{
         x1 = 2.0L * drand48() – 1.0L;
         x2 = 2.0L * drand48() – 1.0L;

         R = x1 * x1 + x2 * x2;

   } while(R >= 1.0L)

   R = sqrt((-2.0L * log(R))/R);

   *g1 = x1 * R;
   *g2 = x2 * R;
}
```


Campionamento di una v.a. distribuita Normalmente (IV)

$$\rho = \frac{R^2}{2} \quad x = \sqrt{2\rho}\cos\theta \quad y = \sqrt{2\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \rho = -\ln(\eta_1); \quad \theta = 2\pi\,\eta_2$$

$$\gamma_1 = \sqrt{-2\ln(\eta_1)}\cos(2\pi\eta_2) \qquad \gamma_2 = \sqrt{-2\ln(\eta_1)}\,\mathrm{sen}(2\pi\eta_2)$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = -2\ln(\eta_1) \qquad \sum_1^N \gamma_i^2 = -2\ln\Big(\prod_{i=1}^{N/2} \eta_i\Big)$$

N pari

Campionamento di una v.a. con pdf Maxwelliana

$$x \in (-\infty, \infty) \qquad M(u)du = \pi^{-3/2}\, e^{-u^2} d^3\vec{u} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du$$

$$M(E) = \frac{4}{m\sqrt{\pi}} \sqrt{E/T}\, e^{-E/T} \qquad v = u/\sqrt{\alpha} \quad \alpha = m/2kT$$

$$M(u)du = \pi^{-3/2}\, e^{-u^2} d^3\vec{u} = \prod_{i=1}^{3} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u_i^2} du_i \right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{3} G(u_i, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})\, du_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_i = \eta_i/\sqrt{2} \qquad u = \sqrt{(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)/2}}$$

η e' normale

γ e' uniforme

$$\boxed{u = \sqrt{\left(\eta^2/2 - \ln\gamma\right)}}$$

Metodo Pesato

Classico

1. Si estrae la v.a. x con uno dei metodi dalla sua distribuzione p(x)
2. Score: HISTO(X) = HISTO(X) + 1

- Richiede l'uso di un metodo di estrazione
- L'area dell'istogramma e' uguale al numero di storie
- Di piu' facile interpretazione nel caso di piu' distribuzioni normalizzate

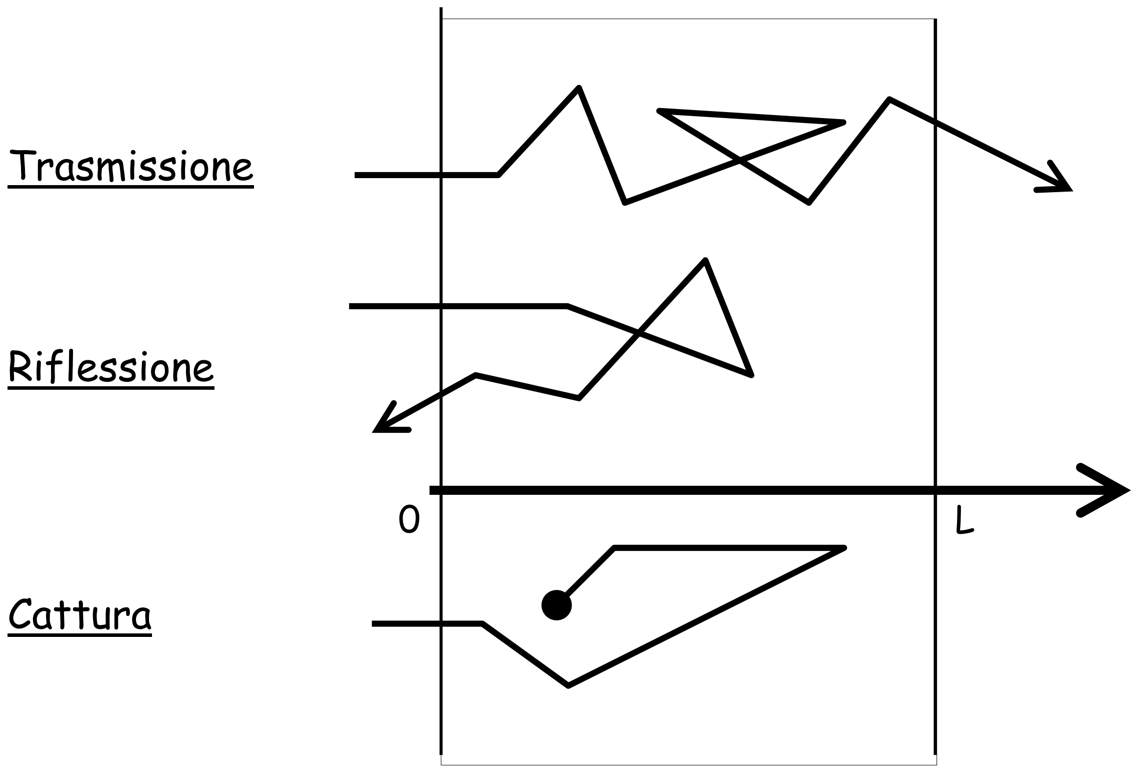
Pesato

1. Si estrae la v.a. x in [a,b] uniformemente
2. Score: HISTO(X) = HISTO(X) + p(x)

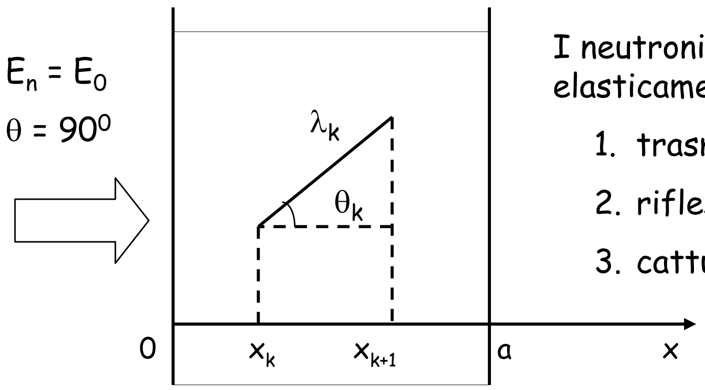
- Ogni storia viene considerata con un suo peso
- La pdf non deve necessariamente essere normalizzata
- Tutti i valori di X, anche quelli rari, sono campionati in egual misura
- L'effetto complessivo e' un minore errore statistico a parita' di storie
- Non richiede l'uso di un metodo di estrazione
- L'area dell'istogramma non e' uguale al numero di storie

J.M. Hammersley and D.C. Handscomb,
Monte Carlo Methods (Methuen, London, 1964).

Trasmissione di neutroni attraverso una piastra (1)



Trasmissione di neutroni attraverso una piastra (2)



I neutroni possono essere diffusi elasticamente o catturati:

1. trasmissione
2. riflessione
3. cattura

σ_{el} -> sezione d'urto elastica

σ_c -> sezione d'urto di cattura

$$\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_c$$

Supponiamo che:

- l'energia dei neutroni non cambia con la diffusione
- le direzioni di rinculo sono equiprobabili

Vogliamo stimare:

p^+ -> probabilita' di trasmissione

p^- -> probabilita' di riflessione

p^0 -> probabilita' di cattura

λ = libero cammino medio ⇨ λ e' una v. a. con $p(x) = \frac{\sigma_T}{N} e^{-\frac{\sigma_T}{N}x}$

(distanza percorsa tra una collisione e la successiva)

$$\boxed{\lambda = -\frac{1}{\sigma_T}\ln(\eta)}$$

Trasmissione di neutroni attraverso una piastra (3)

Qual'e' la probabilita' di non interagire entro una distanza x ?

P(x) -> probabilita' di non interagire dopo una distanza x

w dx -> probabilita' di interagire tra x e x+dx

$$P(x + dx) = P(x)(1 - w\,dx) \qquad P(x) + \frac{dP}{dx}dx = P - P\,w\,dx$$

$$dP = -wPdx$$

$$P(x) = C\exp(-w) \qquad P(0) = 1 \;\Rightarrow\; C = 1$$

La probabilita' di sopravvivere ad una collisione a distanza x
ha andamento esponenziale

Trasmissione di neutroni attraverso una piastra (4)

$$\lambda = -\frac{1}{\sigma_T}\ln(\eta)$$

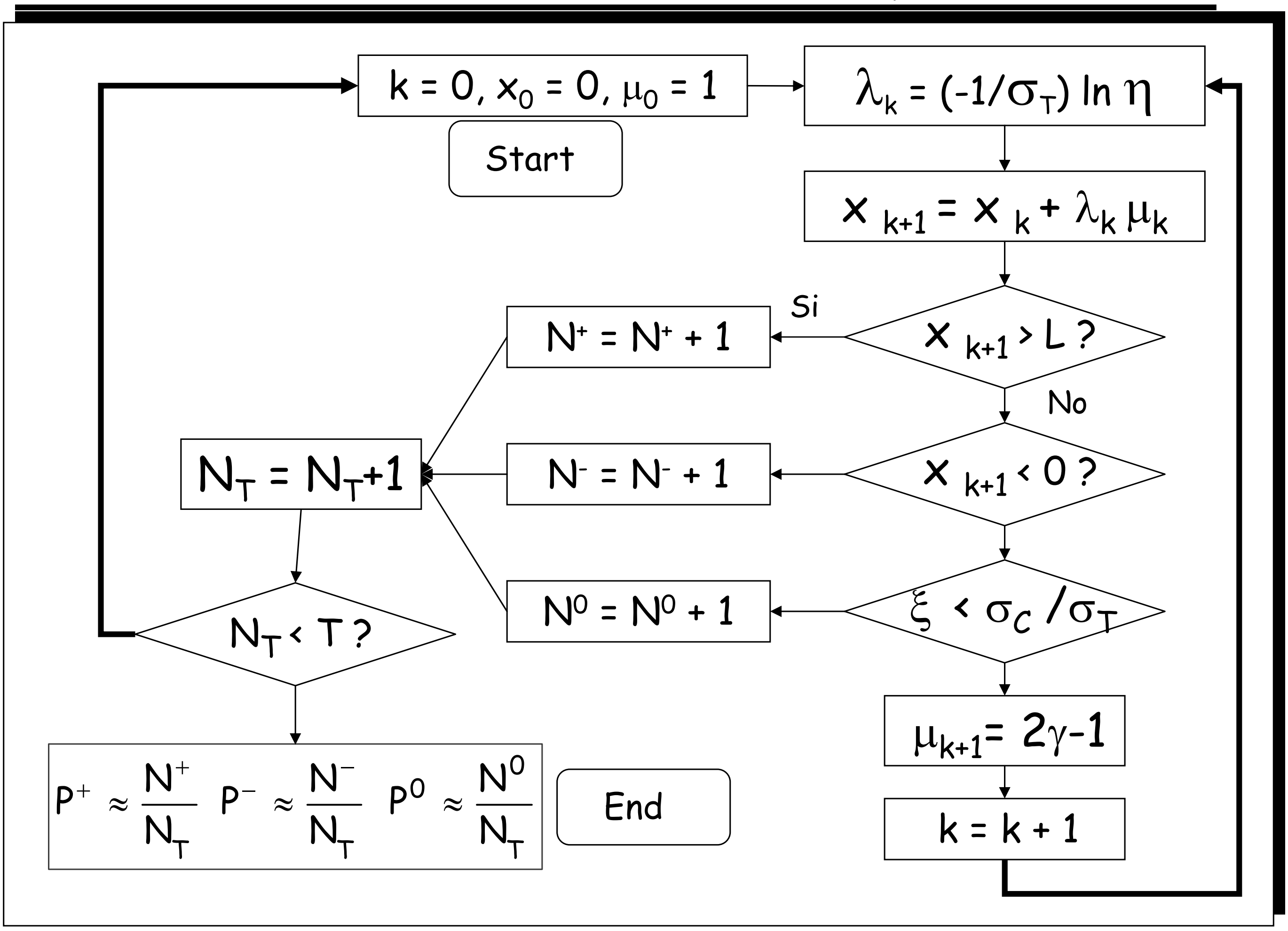
$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \mu_k$$

$$\mu_k = \cos\theta_k \Longrightarrow \mu_k = 2\gamma - 1$$

<u>Metodo di calcolo</u>

1. Generare η e γ uniformemente in U(0,1)
2. Determinare il tipo di reazione ed incrementare l'eventuale contatore

Trasmissione di neutroni attraverso una piastra (5)



Trasmissione di neutroni attraverso una piastra (7)

<u>Problema</u>: dopo avere eseguito il calcolo si scopre che le tre probabilita' risultano avere un errore relativo molto diverso tra loro. In particolare, la probabilita' di valore assoluto minore avra' un errore maggiore.

Come si calcola l'errore sulle stime di p^+, p^- e p^0 ?

Si usa la distribuzione binomiale

Trasmissione di neutroni attraverso una piastra (8)

$$\eta^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^+ & 1-p^+ \end{pmatrix} \qquad \eta^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^- & 1-p^- \end{pmatrix} \qquad \eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^0 & 1-p^0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{s_{\hat{p}^+}}{\hat{p}^+} = \frac{1}{\sqrt{N_T}} \cdot \sqrt{\frac{N_T - N_+}{N_+}}$$

Trasmissione di neutroni attraverso una piastra (9)

Problema: dopo avere eseguito il calcolo si scopre che le tre probabilita' risultano avere un errore relativo molto diverso tra loro. In particolare, la probabilita' di valore assoluto minore avra' un errore maggiore.

Ad esempio potrebbe essere $\Rightarrow$ $$\frac{s_{\hat{p}^+}}{\hat{p}^+} >> \frac{s_{\hat{p}^0}}{\hat{p}^0}$$

$\Downarrow$

Metodo Monte Carlo Pesato.

Trasmissione di neutroni attraverso una piastra (10)

Metodo Monte Carlo Pesato

⇩

Piuttosto che “sommare 1” ad ogni storia, si somma il peso relativo di quella storia ottenuto dalle probabilita’ relative.

⇩

E’ come se piuttosto che un neutrone alla volta, si considerasse un “pacchetto” di un grande numero ω_0 di neutroni che si muovono lungo la stessa traiettoria.

Trasmissione di neutroni attraverso una piastra (11)

ω_0 : numero di neutroni nel pacchetto

$\langle\omega_o\rangle_C = \omega_0 \, \sigma_C / \sigma_T$: numero medio di neutroni catturati dal pacchetto

$\langle\omega_o\rangle_S = \omega_0 \, \sigma_S / \sigma_T$: numero medio di neutroni diffusi

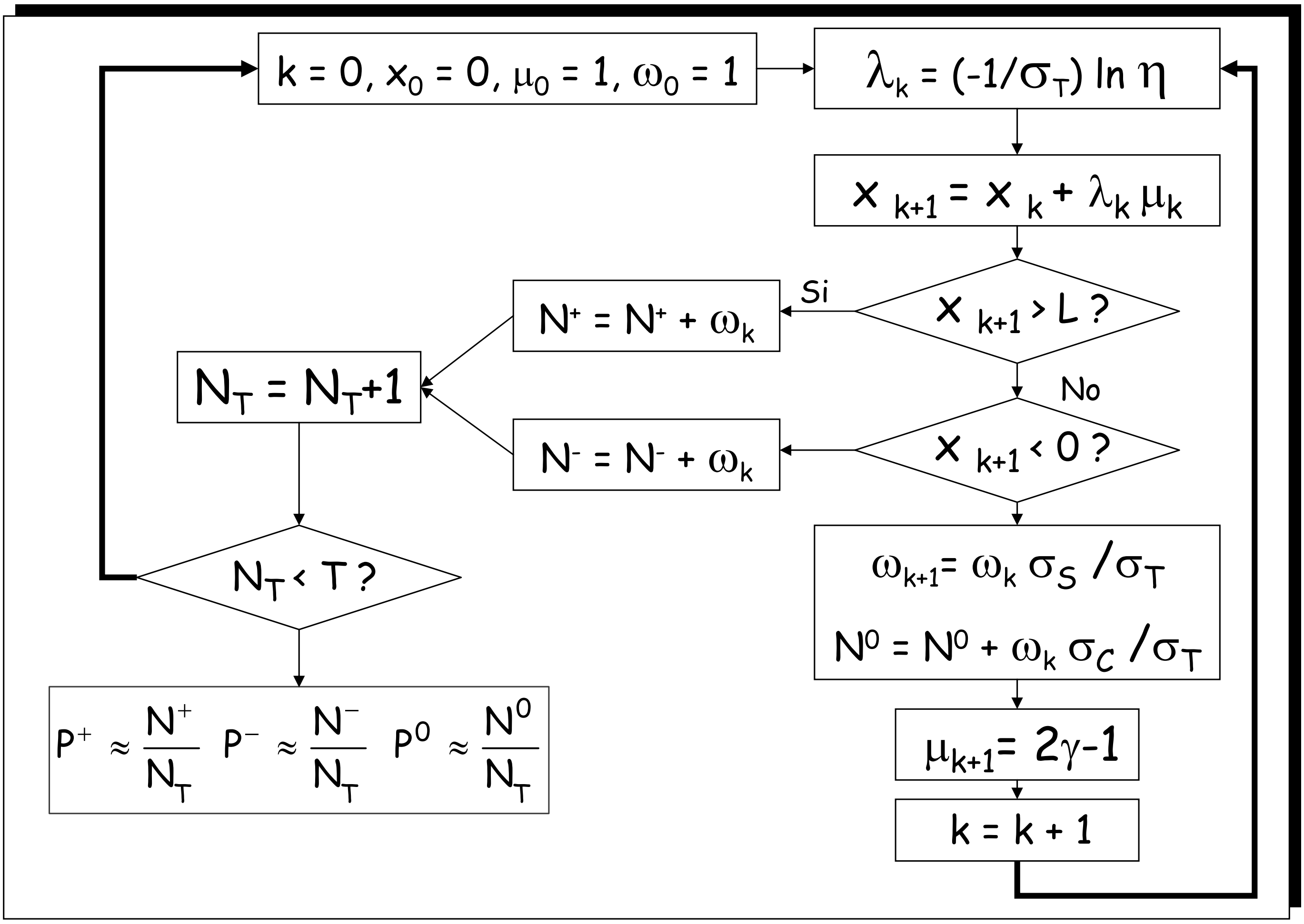
Metodo di calcolo

1. Generare η e γ uniformemente in **U**(0,1)
2. Determinare il tipo di reazione
3. Aggiungere $\omega_0 \, \sigma_C / \sigma_T$ al contatore dei neutroni catturati
4. Seguire la frazione rimanente del pacchetto diffuso

Tutte le formule rimangono le stesse. Ad ogni collisione il numero di neutroni e’ ridotto a:

$\omega_{k+1} = \omega_k \, \sigma_S / \sigma_T$ numero di neutroni catturati = $\omega_k \, \sigma_C / \sigma_T$

Trasmissione *pesata* di neutroni attraverso una piastra (12)



Vantaggio dell'uso dei pesi (13)

Consideriamo due v.a. rappresentanti il numero ed il peso di neutroni trasmessi in una storia dai due rispettivi metodi.

<u>Metodo Classico</u> | <u>Metodo Pesato</u>

η in media : $\langle \eta \rangle = \langle \eta' \rangle = p^+$ η'

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^+ & 1-p^+ \end{pmatrix} \qquad \eta' = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 \ldots\omega_k & 0 \\ q_0 & q_1 \ldots q_k & q \end{pmatrix}$$

$$\sigma_\eta^2 = \langle \eta^2 \rangle - \langle \eta \rangle^2 = p^+ - (p^+)^2$$

$$\langle \eta' \rangle = p^+ = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \omega_k$$

$$\sigma_{\eta'}^2 = \sum q_k \omega_k^2 - (p^+)^2$$

$$\sigma_\eta^2 = \sum q_k \omega_k - (p^+)^2$$

Essendo $\omega_k \leq 1 \Longrightarrow \sum q_k \omega_k^2 \leq \sum q_k \omega_k$

$$\sigma_{\eta'}^2 = \sum q_k \omega_k^2 - (p^+)^2$$

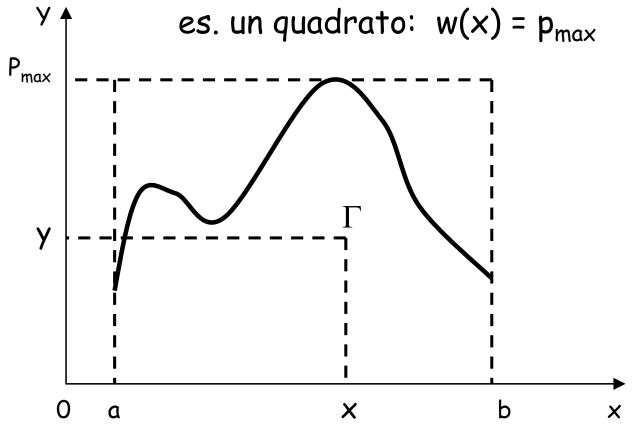
$$\sigma_{\eta'} \leq \sigma_\eta$$

Metodo di estrazione basato sul rifiuto (I) by von Nuemann

Generalizzazione del metodo "hit or miss"

$$\exists\ w(x) \text{ limitata} : p(x) \leq w(x) \quad \forall x$$

es. un quadrato: $w(x) = p_{max}$



1. Estrarre uniformemente η' in [a,b] e η'' in $[0, p_{max}]$:

   $x = a + \eta' (b-a) \qquad y = \eta'' p_{max}$

2. Se $\Gamma(x,y)$ e' tale che:

   $$y \leq p(x)$$

   si accetta x, altrimenti si estrae una nuova coppia.

$\Gamma(x,y)$ generato nel quadrato di area
$A = p_{max}(b-a)$

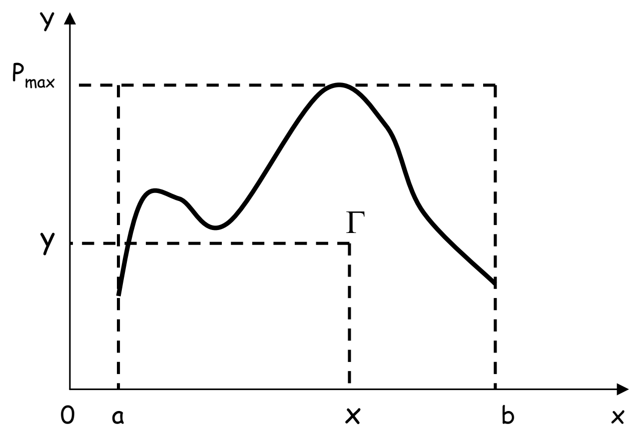
Metodo di estrazione basato sul rifiuto (II)

$\Gamma(x,y)$ generato nel quadrato di area
$A = p_{max}(b-a)$

La probabilita' che Γ cada al di sotto di p(x) e' uguale al rapporto tra l'area A e quella S sottesa da p(x):

$$P\{\Gamma \in S\} = \frac{\int_a^b p(x)dx}{p_{max}(b-a)} = \frac{1}{p_{max}(b-a)} \qquad (1)$$

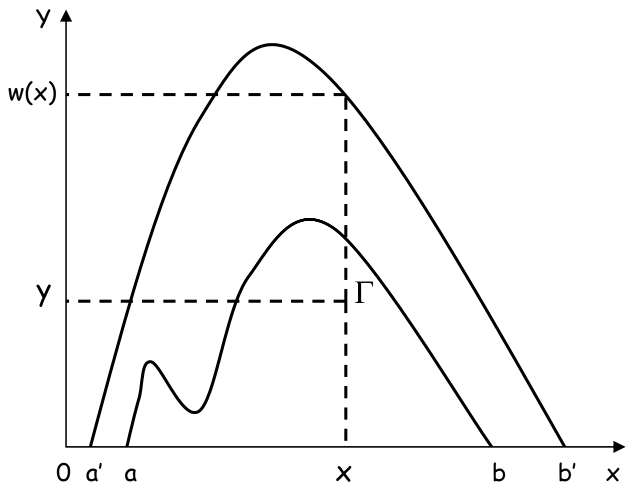
$$P\{\Gamma \in S \, ; a' \leq x \leq b'\} = \frac{\int_{a'}^{b'} p(x)dx}{p_{max}(b-a)} \qquad (2)$$



$$P\{a' \leq x \leq b'\} = \frac{(2)}{(1)} = \frac{\int_{a'}^{b'} p(x)dx}{A} \bullet \frac{A}{1} = \int_{a'}^{b'} p(x)dx$$

Metodo di estrazione basato sul rifiuto (III)

<u>Importance Sampling:</u> $w(x) \neq cost$ con $w(x) \geq p(x) \ \forall x$



1. Estrarre uniformemente η' in [a,b]
   $x' = a' + \eta' (b'-a')$
   e η'' in [0, w(x')] $\quad y = \eta'' w(x')$
2. Se $\Gamma(x,y)$ e' tale che:
   $y \leq p(x')$
   si accetta x, altrimenti si estrae una nuova coppia

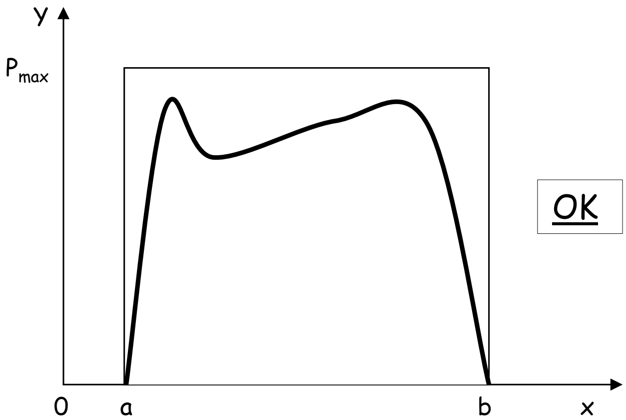
Questa tecnica e' efficiente solo se la w(x) e' "vicina" alla p(x) nell'intervallo [a,b].

$$\text{Efficienza} = \frac{1}{A} \qquad A = \int_a^b w(x)\,dx$$

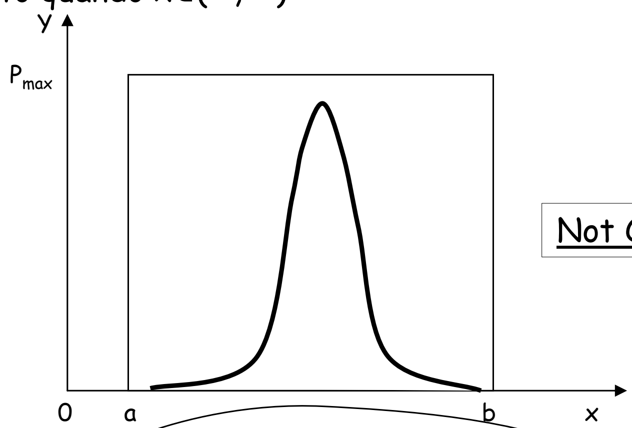
percentuale di numeri estratti rispetto a quelli calcolati

Metodo di estrazione basato sul rifiuto (IV)

- L'efficienza di questo metodo dipende fortemente dalla forma della p(x).
- L'algoritmo non potrebbe essere applicato quando $x \in (-\infty, +\infty)$



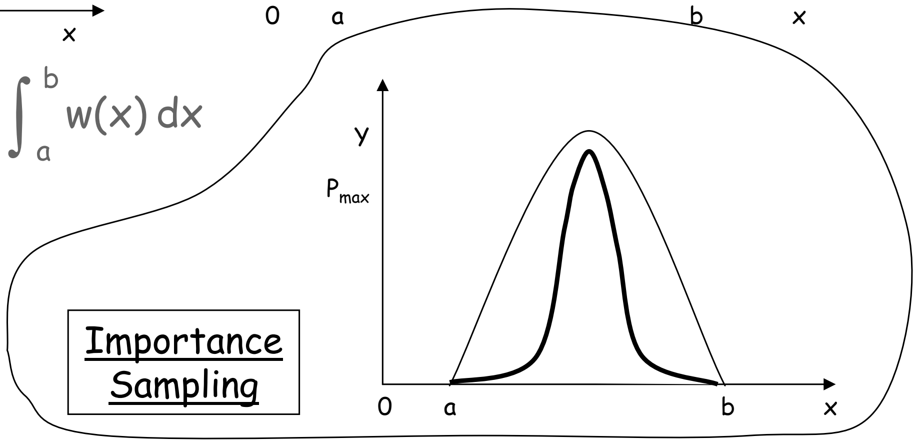
OK



Not OK

$$\text{Efficienza} = \frac{1}{A} \qquad A = \int_a^b w(x)\,dx$$

percentuale di numeri estratti rispetto a quelli calcolati



Campionamento di una v.a. distribuita Normalmente (V)

Metodo del Rifiuto

Siccome il dominio di N(0,1) non e' limitato, consideriamo $x \in [-3\sigma, 3\sigma]$ e $P_{max} = P(0)$.

```
double gauss3(void)
{
   double x;

   x = -3.0L + 6.0L * drand48();

   while(drand48() > exp(-x * x/2.0L));
   return x;

}
```

$$\text{Efficienza} = \frac{1}{A} = \frac{1}{P_{max}(b-a)} = \frac{2\pi}{12} = 0.52$$

Esercizio

$$p(x,y)dxdy = (x+y)dxdy$$

$$x \in [a,b] \qquad y \in [a,b]$$

Come campionare x e y ?

Stimare <x>, <y> e Cov(x,y)