

Metodi di Integrazione Numerica

Lo scopo di questi metodi e' di calcolare in modo approssimato un integrale definito di una funzione di una o piu' variabili

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad x \in [a, b]$$

Il calcolo approssimato di questo integrale e' necessario quando ad esempio:

- non si sa calcolare in modo analitico;
- la funzione integranda e' conosciuta solo per punti.

Esempi

$$\int_0^t e^{-x} dx = 1 - e^{-t}$$

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(t)$$

$$\int_0^t \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

?

Esempi

Se Q e' una variabile microscopica definita in ogni punto dello spazio delle fasi il valore medio di Q all'equilibrio e':

$$\langle Q \rangle = \frac{\int Q \exp(-E/kT) dx^{3N} dv^{3N}}{\int \exp(-E/kT) dx^{3N} dv^{3N}}$$

Dove dx^{3N} e dv^{3N} indicano che l'integrale e' sulle tre componenti della posizione e della velocita' delle N particelle.

Iniziamo dal caso piu' semplice...quello unidimensionale.

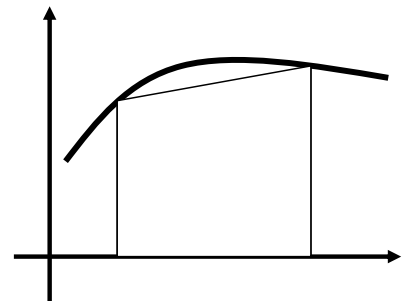
E. Vardaci

3

Integrazione Numerica

L'integrazione numerica si basa (quasi sempre) semplicemente sulla definizione di integrale definito e sull'approssimazione di una funzione in un certo intervallo con una polinomiale data.

Ad es. se il grado del polinomio è 1 si sta considerando la funzione lineare e si dovrà calcolare l'area di un trapezio.



Tutti i metodi di quadratura approssimano l'integrale con:

$$I \cong I_q = \sum_i w_i f(x_i)$$

E. Vardaci

4

Integrazione Numerica

Utilizzando la proprietà di additività dell'integrale si può suddividere l'intervallo $[a,b]$ in n intervalli di ampiezza $h = (b-a)/n$.

Quanti intervalli ?

Due approcci: il numero n è scelto

- all'inizio del calcolo;
- in base al grado di precisione

Metodo dei Trapezi (1/5)

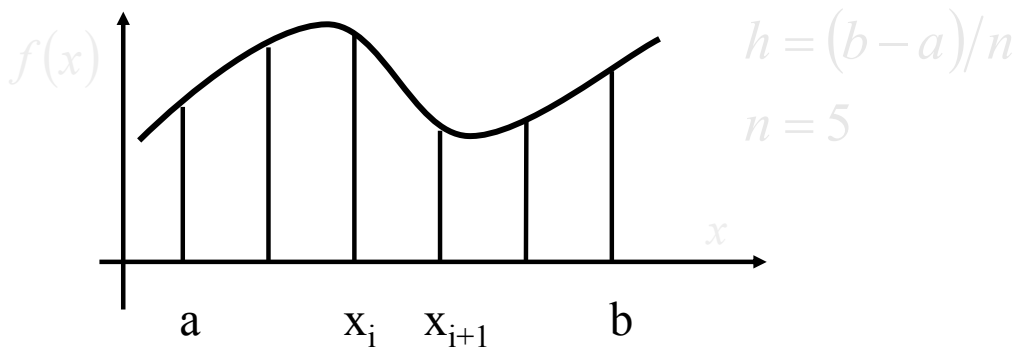
Con una approssimazione al primo ordine l'integrale definito di una generica funzione f si può scrivere:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2} (f(b) + f(a)) = I_1$$

L'approssimazione lineare può risultare troppo rozza: utilizzando l'additività dell'integrale si può suddividere l'intervallo $[a,b]$ in n intervalli di ampiezza $h = (b-a)/n$. Su ogni intervallo si avrà:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \approx \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_i + h)) = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$

Metodo dei Trapezi (2/5)



$$\int_a^b f(x) dx \approx I_n = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + f_n)$$

$$I_n = \frac{h}{2} (f_0 + f_n) + h \sum_{i=1}^{n-1} f_i$$

$$f_0 = f(x_0 = a)$$

$$f_n = f(x_n = b)$$

Metodo dei Trapezi (3/5)

Data la funzione f e l'intervallo $[a, b]$ un calcolo dell'integrale potrà essere fatto per via iterativa calcolando la stima I_n dell'integrale al crescere di n e fermandosi quando due stime successive sono entro una certa tolleranza.

Calcolo $I_{N_1}, I_{N_2}, I_{N_3} \dots$ e mi fermo quando

$$\left| \frac{I_{N_{i+1}} - I_{N_i}}{I_{N_i}} \right| < \varepsilon$$

Metodo dei Trapezi (4/5)

Il modo più efficiente di aumentare n è di raddoppiarlo ad ogni iterazione in modo da dover calcolare la funzione ogni volta solo su metà dei punti, avendola calcolata sull'altra metà nell'iterazione precedente:

$$\begin{aligned} N_{i+1} &= 2N_i \\ h &= \frac{b-a}{n}; & h_{NEW} &= \frac{b-a}{2n} = h/2 \\ I_n &= h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + \frac{f_n}{2} \right) \\ I_{2n} &= \frac{I_n}{2} + h_{NEW} \sum_{k \text{ dispari}}^{2n-1} f(a + k \cdot h_{NEW}) \end{aligned}$$

E. Vardaci

9

Metodo dei Trapezi: Errore di Troncamento

Valutiamo l'errore commesso nel calcolo dell'integrale usando, al solito, uno sviluppo in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx &= \int_0^h f(x_i + t) dt = \int_0^h \left(f(x_i) + tf'(x_i) + \frac{t^2}{2} f''(x_i) + \frac{t^3}{6} f'''(x_i) \right) dt = \\ &= f(x_i)h + f'(x_i) \frac{h^2}{2} + f''(x_i) \frac{h^3}{6} + O(h^4) = \\ &= \frac{h}{2} \left(2f(x_i) + f'(x_i)h + f''(x_i) \frac{h^2}{3} + O(h^3) \right) \end{aligned}$$

Da confrontare con la regola dei trapezi :

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx &\approx \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_i + h)) = \\ &\frac{h}{2} (2f(x_i) + f'(x_i)h + f''(x_i) \frac{h^2}{2} + O(h^3)) \end{aligned}$$

E. Vardaci

10

Metodo dei Trapezi: Errore di Troncamento

$$Err = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_i + h)) - f(x_i)h - f'(x_i)\frac{h^2}{2} - f''(x_i)\frac{h^3}{6} - O(h^4)$$

$$= \frac{h}{2}f(x_i) - f(x_i)h + f(x_i + h)\frac{h}{2} - f'(x_i)\frac{h^2}{2} - f''(x_i)\frac{h^3}{6} - O(h^4) =$$

$$= -\frac{h}{2}f(x_i) + f(x_i + h)\frac{h}{2} - f'(x_i)\frac{h^2}{2} - f''(x_i)\frac{h^3}{6} - O(h^4) =$$

$$= \frac{h}{2}(f(x_i + h) - f(x_i)) - f'(x_i)\frac{h^2}{2} - f''(x_i)\frac{h^3}{6} - O(h^4) =$$

$$= \frac{h^2}{2} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - f'(x_i)\frac{h^2}{2} - f''(x_i)\frac{h^3}{6} - O(h^4) =$$

Siccome: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \frac{1}{2}hf''(x) + O(h^2)$

E. Vardaci

11

Metodo dei Trapezi: Errore di Troncamento

$$= \frac{h^2}{2} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - f'(x_i)\frac{h^2}{2} - f''(x_i)\frac{h^3}{6} - O(h^4) =$$

$$= f'(x)\frac{h^2}{2} + f''(x_i)\frac{h^3}{4} + O(h^4) - f'(x_i)\frac{h^2}{2} - f''(x_i)\frac{h^3}{6} - O(h^4) =$$

$$= f''(x_i)\frac{h^3}{4} - f''(x_i)\frac{h^3}{6} =$$

$$= \frac{h^3}{12} f''(x_i)$$

E. Vardaci

12

Metodo dei Trapezi: Errore di Troncamento

L'errore su una singola striscia vale allora:

$$f''(x_i) \frac{h^3}{12}$$

L'errore sull'integrale è n volte quello su una singola striscia, e siccome $n = (b-a)/h$ si ottiene:

$$\Delta I_n = \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(x_i) = \frac{h^3}{12} n f''(\xi)$$

$$\sum_{i=1}^n f''(x_i) = n f''(\xi)$$

$$\Delta I_n \propto nh^3 = n \frac{(b-a)^3}{n^3} \approx O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O(h^2)$$

Metodo di Simpson 1

L'approssimazione successiva a quella di una retta è una polinomiale di secondo grado (parabola). Il metodo di Simpson usa questa approssimazione per calcolare l'integrale e, come prevedibile, a parità di numero di strisce n ha un errore di troncamento inferiore a quello del metodo dei trapezi e pari a **$O(1/n^4)$** .

Si arriva ad una formula:

- trovando l'eq. della parabola che passa tra i punti di due intervalli adiacenti;
- calcolando l'area sotto ogni parabola;
- sommando le aree

Metodo di Simpson 2

Usiamo un *numero pari di strisce* e consideriamo per ogni punto x_i quelli precedente x_{i-1} e successivo x_{i+1} . Si avrà:

$$I_n = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$\Delta I_n = \frac{h^4}{180}(b-a)f^{IV}(\xi) \approx O\left(\frac{1}{n^4}\right) = O(h^4)$$

Notiamo che l'errore va come la derivata quarta della funzione e quindi la formula dà un valore esatto per polinomi di terzo grado anche se il polinomio interpolante è di grado 2. Una particolarità importante di questa formula.

Metodo di Simpson 3

L'approssimazione successiva è quella di un polinomio di terzo grado. Il metodo di Simpson usa un numero di strisce divisibile per 3. L'errore di troncamento è pari a $O(1/n^4)$.

$$I_n = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + \dots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n)$$

$$\Delta I_n = \frac{h^4}{80}(b-a)f^{IV}(\xi) \approx O\left(\frac{1}{n^4}\right) = O(h^4)$$

Regola 1/3: n pari

Regola 3/8: $n/3$ intero

Quadratura Gaussiana 1

Finora il numero n di intervalli e' scelto liberamente. Anche la larghezza di tali intervalli è uguale. Potevano in principio sviluppare formule per intervalli di larghezza non uguale.

Se gli estremi degli intervalli non sono più scelti liberamente ma in base ad un criterio di massima accuratezza, avremo un beneficio?

L'idea di Gauss è che si possono ottenere delle formule esatte se la funzione e' valutata in punti scelti opportunamente. In particolare, l'integrale equivale all'integrale di un polinomio di terzo grado con l'uso di solo due punti.

Quadratura Gaussiana 2

Cambiamo i limiti $[a, b] \rightarrow [-1, 1]$ per semplificare l'analisi

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a) \quad x \in [a, b] \quad u \in [-1, 1]$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 \phi(u)du$$

$$\phi(u) = \frac{1}{2}(b-a) \cdot f\left(\frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)\right)$$

Quadratura Gaussiana 3

Proviamo a trovare una formula esatta in cui la funzione e' valutata in soli due punti, ovvero la curva che approssima l'integrale e' una retta.

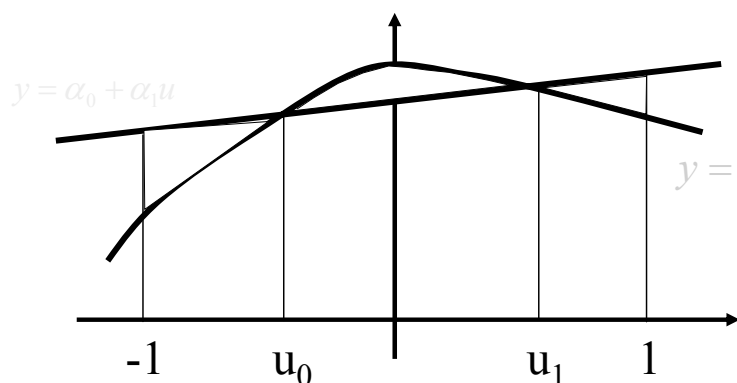
Dobbiamo trovare i coefficienti di una retta

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 u$$

tali che:

$$\int_{-1}^1 \phi(u) du = \int_{-1}^1 (\alpha_0 + \alpha_1 u) du$$

Quadratura Gaussiana 3



Scegliamo u_0 e u_1 in modo che:

$y = \phi(u)$ Area Rosa = Area Arancione

Poniamo: $I_G = A_0 \phi(u_0) + A_1 \phi(u_1)$ A_0, A_1, u_0, u_1 4 incognite

Ipotizziamo allora che $\phi(u)$ sia un polinomio di terzo grado:

$$\phi(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \text{ noti}$$

Quadratura Gaussiana 4

Dopo opportuna manipolazione si trova che

$$I = \int_{-1}^1 \phi(u) du = I_G + \varepsilon_T = \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \varepsilon_T$$

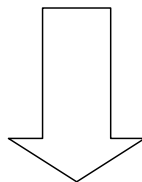
$$\varepsilon_T = k\phi^{IV}(\xi) \quad k = \text{cost} \quad -1 < \xi < 1$$

Ovvero, se $\phi(u)$ e' un polinomio di terzo grado l'espressione e' esatta.

Quadratura Gaussiana 5

Per incrementare l'ordine del polinomio che rappresenta $\phi(u)$:

$$I_G = A_0 \phi(u_0) + A_1 \phi(u_1)$$



$$I_G = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \phi(u_i)$$

Con n punti, si trova una formula esatta se $\phi(u)$ e' rappresentata da un polinomio di grado $2n-1$.

Quadratura Gaussiana 6

$$I_G = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \phi(u_i)$$

Si puo' dimostrare che i punti u_i sono le radici del polinomio di Legendre di grado n .

$$A_i = \frac{2}{(1-u_i^2)[P'_n(u_i)]^2}$$

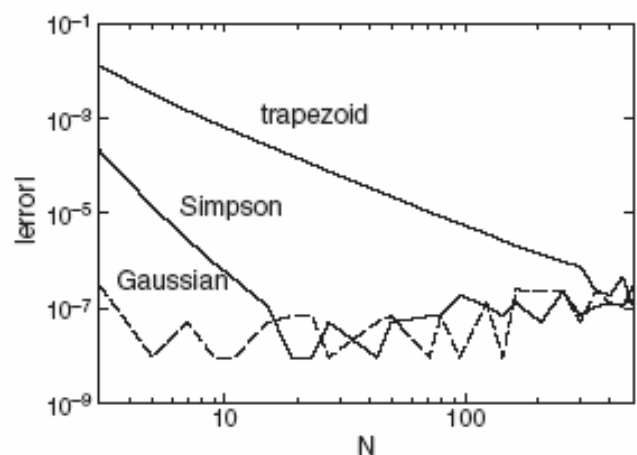
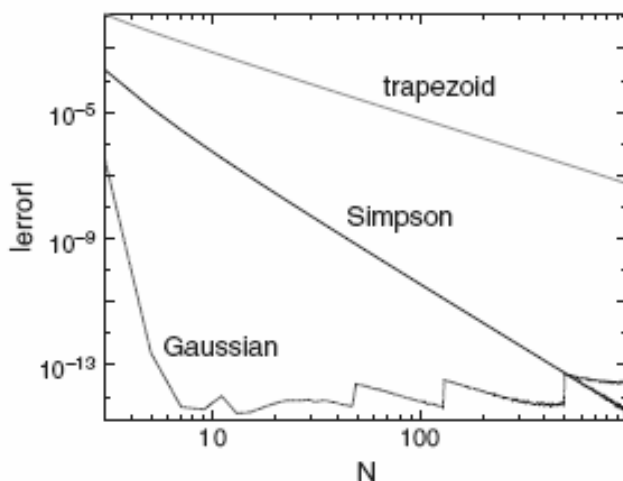
Questo implica che bisogna prima approssimare la curva $\phi(u)$ ad un polinomio di Legendre.

$$\mathcal{E}_T = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \phi^{(2n)}(\xi)$$

$$\mathcal{E}_T \approx n^{-(2n-1)}$$

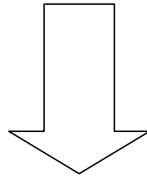
Confronto tra i metodi

$$\int_0^1 e^{-t} dt = 1 - e^{-1}$$



More than one dimension

$$I = \iint_R f(x, y) dx dy$$



$$I \cong I_q = \sum_i w_i f(x_i, y_i)$$

Es. midpoint approximation

$$I \cong h^2 \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f(x_i, y_j) H(x_i, y_j)$$

$$x_i = x_a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h$$
$$y_j = y_a + \left(j - \frac{1}{2}\right)h$$

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$n_x = (x_b - x_a)/h$$
$$n_y = (y_b - y_a)/h$$

Come si complica questo metodo se il dominio di integrazione non e' regolare o le variabili sono dipendenti?

Bisogna analizzare ogni caso singolarmente ed una soluzione generale non e' possibile.

More than one dimension

Se il dominio e' un rettangolo a d dimensioni, i metodi precedenti si possono estendere con il costo aggiuntivo di un numero esponenziale di valutazioni della funzione.

Es. $d=3$ implica n^3 calcoli della funzione

Questo rallenta la convergenza di un fattore $1/d$

Errore	1 - Dim	d - Dim
Trapezoide	n^{-2}	$n^{-2/d}$
Simpson	n^{-4}	$n^{-4/d}$
Gauss	$n^{-2(n-1)}$	$n^{-2(n-1)/d}$
M.C.	$n^{-1/2}$	$n^{-1/2}$

E. Vardaci

27

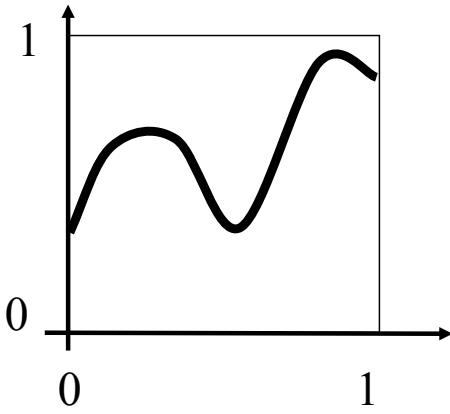
Integrazione alla Monte Carlo

- ① Hit or Miss;
- ② Teorema della media

E. Vardaci

28

Hit or Miss (1/2)



$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Generiamo uniformemente coppie (x_i, y_i) in $[0, 1]$

N_T = numero di coppie generate

N_S = numero di coppie generate con $y_i \leq f(x_i)$

$$\hat{I} \approx \frac{N_S}{N_T} \quad \frac{\Delta \hat{I}}{\hat{I}} = \frac{1}{\sqrt{N_T}} \sqrt{\frac{N_T - N_S}{N_S}} = \sqrt{\frac{1}{N_S} - \frac{1}{N_T}}$$

dalla distribuzione binomiale

Hit or Miss (2/2)

Il metodo si generalizza se $a \neq 0$ e $b \neq 1$

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

$$x = a + (b-a)z$$

$$dx = (b-a)dz$$

$$I = (b-a) \int_{z=0}^{z=1} f(a + (b-a)z) dz$$

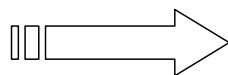
Ponendo

$$g(x) = \frac{f(x) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}$$

$$I = \underbrace{(f_{\max} - f_{\min})(b-a)}_{K_1} \int_0^1 g(x) dx + \underbrace{f_{\min}(b-a)}_{K_0} = K_1 I_0 + K_0$$

$$\hat{I} = K_1 \hat{I}_0 + K_0$$

$$\Delta \hat{I} = K_1 \Delta \hat{I}_0$$



$$\frac{\Delta \hat{I}}{\hat{I}} = \frac{K_1 \Delta \hat{I}_0}{K_1 \hat{I}_0 + K_0}$$

Teorema della Media (1/4)

$$I = \int_a^b f(x) dx = (b - a) \langle f \rangle$$

Generiamo uniformemente x in $[a, b]$: $x_i = a + (b - a)\eta_i$

$$\hat{I} = (b - a) \frac{1}{N} \sum_i f(x_i)$$

Come si calcola l'errore $\Delta \hat{I}$?

Teorema della Media (2/4)

Procediamo come in un campionamento.....

Si ripete K volte la estrazione di N elementi dalla popolazione.

Ovvero..... K esperimenti ognuno con N storie.

$$I_k(N) = (b - a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Valore dell'integrale al k -esimo esperimento

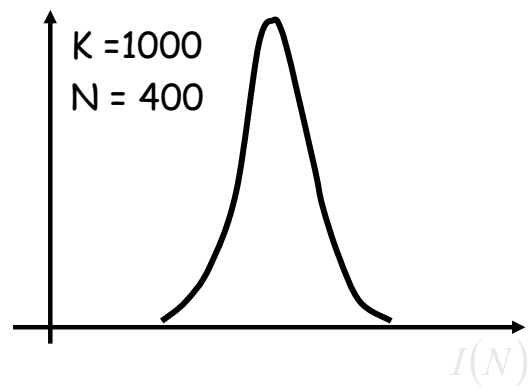
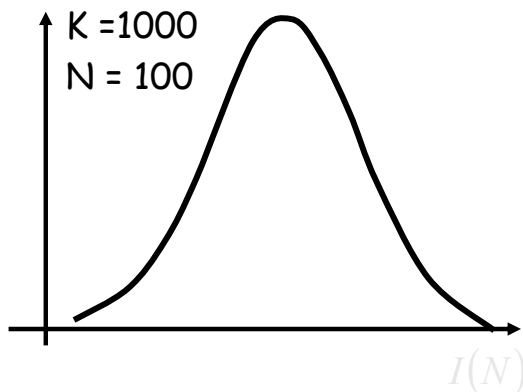
I valori di $I_k(N)$, essendo una media, sono distribuiti secondo una distribuzione Gaussiana. Vale comunque la relazione:

$$\sigma(N)^2 = \langle I(N)^2 \rangle - \langle I(N) \rangle^2$$

Teorema della Media (3/4)

$$\sigma(N)^2 = \langle I(N)^2 \rangle - \langle I(N) \rangle^2 \approx s_{\hat{I}}^2 = (\Delta \hat{I})^2$$

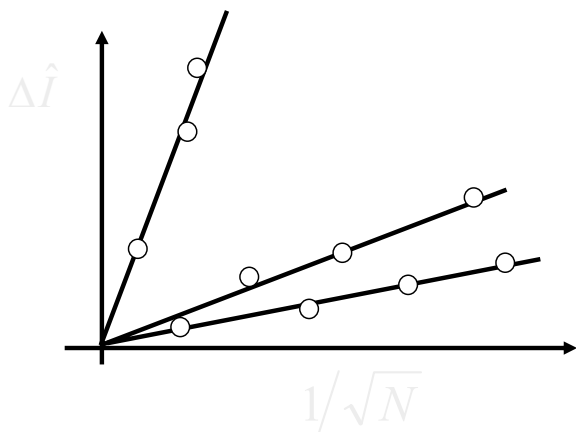
$$(\Delta \hat{I})^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_k(N)^2 - \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_k(N) \right)^2$$



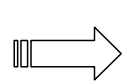
E. Vardaci

33

Teorema della Media (4/4)



La pendenza della retta non è universale e dipende sia dall'intervallo di integrazione $[a,b]$ che dalla funzione $f(x)$



$$\Delta \hat{I} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

N = dimensione del campione

Come si collega la precedente espressione per ΔI nel caso di un solo esperimento, ovvero un solo campionamento?

$$s_{\bar{f}} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \left\{ \sum_{i=1}^N f_i^2 - N \bar{f}^2 \right\}}$$

E. Vardaci

34

Metodo della Decomposizione

$$I = \int_a^b h(x) dx \quad x \in [a, b]$$

$$\int_a^b p_\eta(x) dx = 1 \quad p_\eta(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) p(x) dx = E_{p(x)}[f]$$

Valore di aspettazione della $f(x)$ sulla dpf $p(x)$

$$\int_a^b h(x) dx = E_{p(x)}[f] \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Dove x_i e' campionata secondo la $p(x)$

$$I \approx \hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

$$\Delta \hat{I} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \left\{ \sum_{i=1}^N f_i^2 - N \bar{f}^2 \right\}}$$

Confronto tra i due metodi: Efficienza

Si dimostra che

$$\left(\frac{\Delta \hat{I}}{\hat{I}} \right)_{Media} < \left(\frac{\Delta \hat{I}}{\hat{I}} \right)_{Hit}$$

Rubinstein p. 119

Importance Sampling (1)

Tecnica di riduzione della varianza:

Ha l'effetto di guidare il campionamento dei punti nelle regioni dove la funzione integranda è più "grande", più "importante".

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad x \in [a, b]$$

$$\int_a^b P_\eta(x) dx = 1 \quad P_\eta(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\frac{f(x)}{P_\eta(x)} \right) P_\eta(x) dx$$

$$\gamma(x) = \frac{f(x)}{P_\eta(x)}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \gamma(x) P_\eta(x) dx = E[\gamma] = \langle \gamma \rangle$$

E. Vardaci

37

Importance Sampling (2)

L'integrale I si calcola campionando η in $[a, b]$ secondo la $P_\eta(x)$, piuttosto che x uniformemente in $[a, b]$

$$\hat{I} = (b - a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(\eta_i)}{P_\eta(\eta_i)}$$

La varianza della stima dipende però dalla scelta specifica della $P_\eta(x)$

$$\sigma_\gamma^2 = \langle \gamma^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \int_a^b \frac{f^2(x)}{P_\eta(x)} dx - I^2$$

Si può dimostrare che σ_γ^2 è minima quando $P_\eta(x) \propto |f(x)|$

E. Vardaci

Rubinstein p. 123.

38

Integrazione alla Monte Carlo

1. a e b finiti, ma tramite opportuno cambiamento di variabili, anche per intervalli d'integrazione infiniti
2. Integrazione di funzioni che hanno punti di discontinuita' (in numero finito)
3. Integrazione di funzioni con singolarita' (ovviamente integrabili)
4. e' efficiente solo per funzioni che non variano molto sull'intervallo di integrazione.
5. Facile generalizzare a domini in piu' dimensioni
6. Errore $\propto \frac{1}{\sqrt{N}}$

E. Vardaci

39

Integrazione alla Monte Carlo a n-D (1)

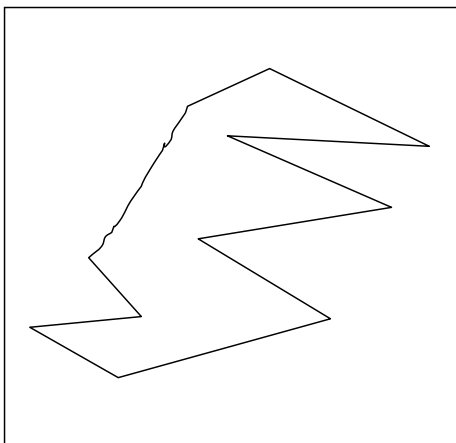
$$I = \iiint f(x_1 \dots x_d) dx_1 \dots dx_d \approx \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \sum_{j=1}^N f(x_1 \dots x_d)$$

Il problema sta ora nel dominio qualora non fosse regolare

Nel metodo Hit or Miss come si fa a decidere se il punto e' interno o esterno al dominio della funzione?

Si dovrebbe costruire una funzione del tipo:

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



E. Vardaci

40

Integrazione alla Monte Carlo a n-D (2)

Nel metodo della media solo i punti del dominio Ω devono essere utilizzati per il calcolo della media della $f(x_1, \dots, x_d)$.

Ad esempio, le dimensioni potrebbero essere correlate:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y(x_1)}^{y(x_2)} f(x, y) dy$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy dx$$

Una alternativa e' usare il metodo di $M(RT)^2$

Algoritmo di Metropolis (1)

L'algoritmo consente di campionare una v.a. con qualunque p.d.f. Ed e' utile per calcolare medie del tipo

$$\langle f \rangle = \frac{\int p(x) f(x) dx}{\int p(x) dx}$$

dove $p(x)$ e' un p.d.f. che non deve necessariamente essere normalizzata.

Algoritmo di Metropolis (2)

1. Si sceglie una posizione di partenza x_0 nel dominio della funzione $p(x)$
2. Si sceglie una nuova posizione $x_{\text{trial}} = x_i + \delta_i$, dove δ_i e' un numero random uniforme in $[-\delta, +\delta]$
3. Calcolare $\omega = p(x_{\text{trial}}) / p(x_i)$
4. Se $\omega \geq 1$ accetta la nuova posizione $x_{i+1} = x_{\text{trial}}$
5. Se $\omega < 1$ genera un numero r uniforme in $[0,1]$
6. Se $r \leq \omega$ poni $x_{i+1} = x_{\text{trial}}$, altrimenti $x_{i+1} = x_i$

Deviazione Standard della Media (1)

K campioni da una popolazione
N elementi per campione.

$N_T = N K \rightarrow$ numero totale
di estrazioni

Dato: $x_{k,n}$ Media del campione k-esimo $\Rightarrow \bar{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{k,n}$

Media totale $\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N x_{k,n}$

$\varepsilon_k = \bar{x}_k - \bar{x}$ $\Rightarrow \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \varepsilon_k^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\bar{x}_k - \bar{x})^2$

Deviazione Standard della Media (2)

Leghiamo ora questa varianza con quella di tutte le prove messe insieme

$$\sigma^2 = \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N (x_{k,n} - \bar{x})^2 \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\bar{x}_k - \bar{x})^2$$

Nell'ipotesi che le varie misure non siano correlate, sviluppando in quadrati si trova che

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{N}}$$