Introduzione
ai
Processi Stocastici

Processo Stocastico

La teoria dei processi stocastici riguarda lo studio dei sistemi che evolvono nel tempo e/o nello spazio secondo leggi probabilistiche.

1. La vibrazione di una struttura meccanica
2. La posizione di volo di un aereo
3. L'indice di borsa
4. Il numero di pacchetti circolanti in una rete
5. La richiesta di potenza elettrica in una casa
6. L'errore di misura di un sensore
7. Il moto Browniano
8. Il processo di fissione nucleare
9. La variazione delle quotazioni in borsa

Processo Stocastico (2)

Il generale il sistema viene descritto da un insieme di variabili aleatorie la cui sequenza di valori e' consequenza di fattori aleatori.

Un modello di un sistema parte quindi dallo specificare le v.a. e le associate densita' di probabilita'.

I processi stocastici sono modelli matematici utili per descrivere la "legge"probabilistica con cui un certo fenomeno fisico può evolvere nel tempo.

Processo Stocastico (3)

Le osservazioni disponibili (detta anche "la serie storica osservata") sono una *realizzazione* di un processo stocastico.

La serie storica osservata può cioè essere utilizzata per fare *inferenza* sul modello che ha generato i dati.

Variabile Aleatoria o Stocastica

- Una variabile stocastica *X* è definita da un insieme di valori Ω e da una distribuzione di densita' di probabilità p(x)

$$\int_a^b p(x)dx = 1 \quad x \in [a,b]$$

- *X = variabile stocastica, x = valore assunto dalla variabile*

Definizione di Processo Stocastico

Un *processo stocastico* e' indicato dalla notazione

$$\{X_t, t \in T\}$$

Un processo stocastico X_t e' una collezione di variabili aleatorie contraddistinte da un parametro t. Ad ogni valore di t corrisponde una successione, in generale diversa, di valori di X

L'insieme T, può essere l' insieme di numeri reali, coincidente, eventualmente, con l' asse dei tempi; oppure essere anche un insieme discreto di valori.

Definizione di Processo Stocastico (2)

$X_t \in \Omega$ Insieme dei valori di X ⇨ Spazio degli stati di X

Spazio degli stati discreto	⇨	Processo Stocastico <u>*Discreto*</u>
Spazio degli stati continuo	⇨	Processo Stocastico <u>*Continuo*</u>

Spesso l'indice t rappresenta il tempo:

$x(t)$ stato del processo al tempo t

Ad ogni istante t il valore assunto da X e' conseguenza di un processo aleatorio

Traiettorie di un Processo Stocastico

Una particolare successione s di stati di X

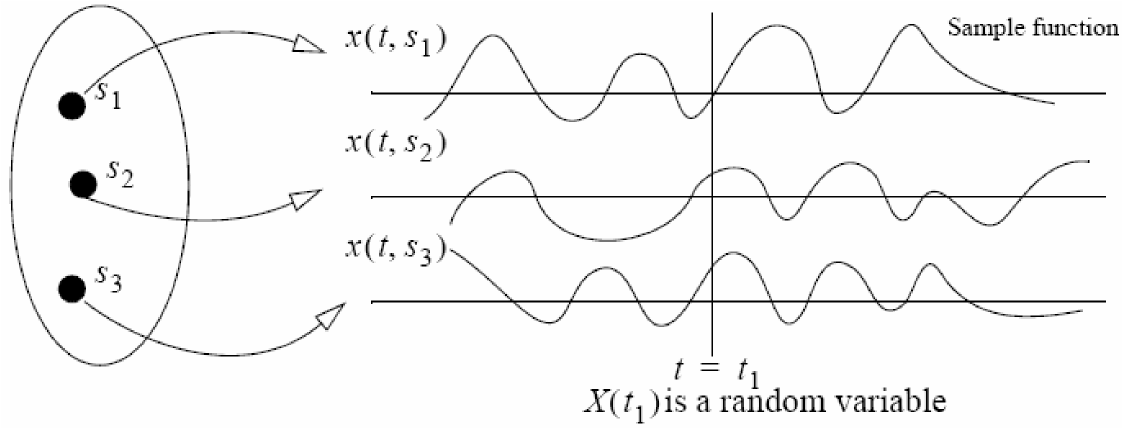
$$\{X_t(s), t \in [-\infty, +\infty]\}$$

e' detta una *realizzazione* o una *traiettoria* del processo.

Ovviamente, un processo stocastico può generare infinite traiettorie diverse (se le traiettorie risultassero tutte uguali, il processo sarebbe deterministico non stocastico).

Serie Storica $\rightarrow$ *t e' la variabile tempo*

Traiettorie di un Processo Stocastico (2)



Le varie traiettorie generabili dal processo non avranno però in generale tutte la stessa probabilità, ovvero, avremmo traiettorie più probabili e traiettorie meno probabili.

Inferenza su un Processo Stocastico

Una traiettoria osservata o simulata può essere utilizzata per fare inferenza sul modello che ha generato i dati.

Molto spesso e' sufficiente descrivere il processo solamente sulla base dei suoi momenti: media, varianza, covarianza...etc.

Caratterizzazione di un Processo Stocastico

Teorema (Kolmogorov) – Un processo stocastico X(t) e' caratterizzato o univocamente definito (come famiglia di traiettorie) quando e' assegnata la *densita' di probabilita' congiunta* $f(x_1 ... x_n)$ di un generico numero finito n di valori $x(t_i),\ i=1....n$ per ogni possibile scelta di $t_1 ... t_n$

Caratterizzazione di un Processo Stocastico (2)

Processo Indipendente

$$f\left(x(t_1),....,\ x(t_n)\right)=\prod_{i=1}^{n} P_X\left(x(t_i)\right)$$

Processo non Indipendente

$$f\left(x(t_1),....x(t_n)\right)=P(x_n,t_n\,|\cdots|\,x_{2,}t_2\,|\,x_1,t_1)$$

Processo Stocastico Stazionario

Una prima semplificazione dell'insieme dei processi stocastici la si ottiene con la definizione di stazionarieta'.

Un processo stocastico X(t) e' si dice stazionario *in senso forte* se per qualsiasi k e $t_1 ... t_n$ vale che:

$$f\left(x(t_1),....x(t_n)\right) = f\left(x(t_1+k),....x(t_n+k)\right)$$

In altri termini, il processo stocastico e' stazionario se le famiglie di densita' di probabilita' congiunte sono invarianti rispetto a traslazioni temporali

Conseguenza: Le v. a. di un processo stazionario hanno quindi la stessa densita' di probabilita' marginale.

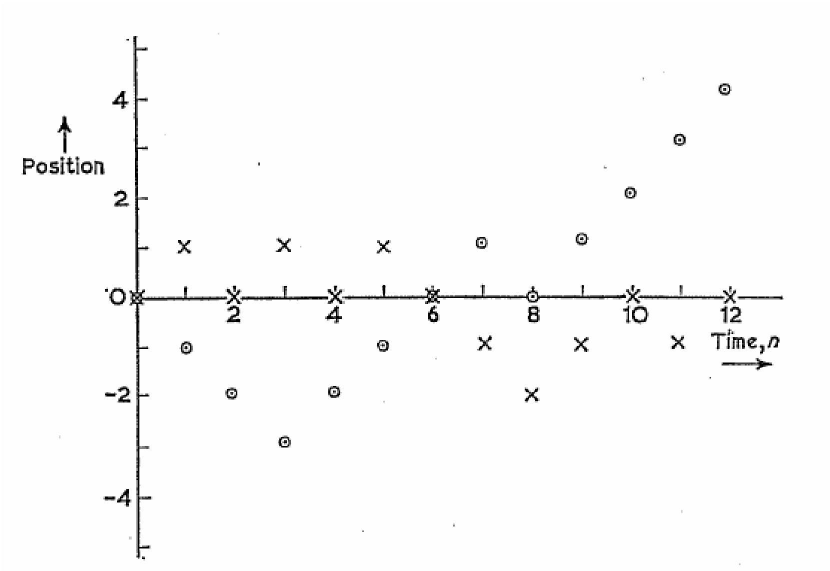
Processo Stocastico Stazionario (2)

Un processo stocastico X(t) e' si dice stazionario *in senso debole* se per i momenti delle distribuzioni vale che:

$$M_k\left(X(t_i)\right) = M_k\left(X(t_i+k)\right)$$

La stazionarietà in senso forte implica la stazionarietà in senso debole.

Esempio: 1-D Random Walk



X v.a. posizione al tempo n = 0, 1, 2

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad x_n = x_{n-1} + \eta_n$$

Dopo n passi la posizione e'

$$x_n = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_n$$

Qual e' la probabilita' che l'ubriaco si trovi in una data posizione X dopo un certo numero n di passi?

Esempio: Random Walk (2)

Nelle applicazioni si e' spesso interessati a stimare il tempo (ovvero il numero di passi N) necessario perche' avvenga il passaggio per la prima volta in una certa posizione, ad es. a :

$$x_N = a \;\; x_r \neq a \;\left(r < N\right)$$

N = first passage time

Si dice che in una posizione b c'e' una <u>barriera assorbente</u> se la passaggiata termina in b.

$$x_N = b \;\; x_r \neq b \;\left(r < N\right)$$

x_N = barriera assorbente

N = time absorption

Catena di Markov

Un processo stocastico a tempi discreti e' una Catena di Markov se per $t=1, 2, 3$... e per tutti gli stati (a valori finiti o numerabili), si ha che

$$P\left(X_{t+1}=i_{t+1} \mid X_t=i_t, X_{t-1}=i_{t-1}, \ldots, X_1=i_1, X_0=i_0\right) \\ = P\left(X_{t+1}=i_{t+1} \mid X_t=i_t\right)$$

La distribuzione condizionale di un qualunque stato futuro dipende solo dallo stato presente e non da quelli attraversati.

.....il passato non conta...

Catena di Markov (2)

Se la Catena di Markov e' indipendente dal tempo si definisce stazionaria o omogenea, ovvero:

$$P\left(X_{t+1}=j \mid X_t=i\right)=p_{ij} \quad \forall t$$

Probabilita' di transizione da i → j

p_{ij} = probabilita' (ad un passo) che al tempo $t+1$ il processo fara' una transizione nello stato j, essendo nello stato i al tempo t

Matrice di Transizione o Stocastica (1/2)

Se l'insieme Ω degli stati e' finito, le probabilita' p_{ij} costituiscono una matrice quadrata, il cui ordine e' pari alla cardinalita' dell'insieme Ω, e possiedono le seguenti proprieta':

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & .... & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & .... & p_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ p_{n1} & p_{n2} & .... & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \Omega \qquad \sum_{j \in \Omega} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in \Omega$$

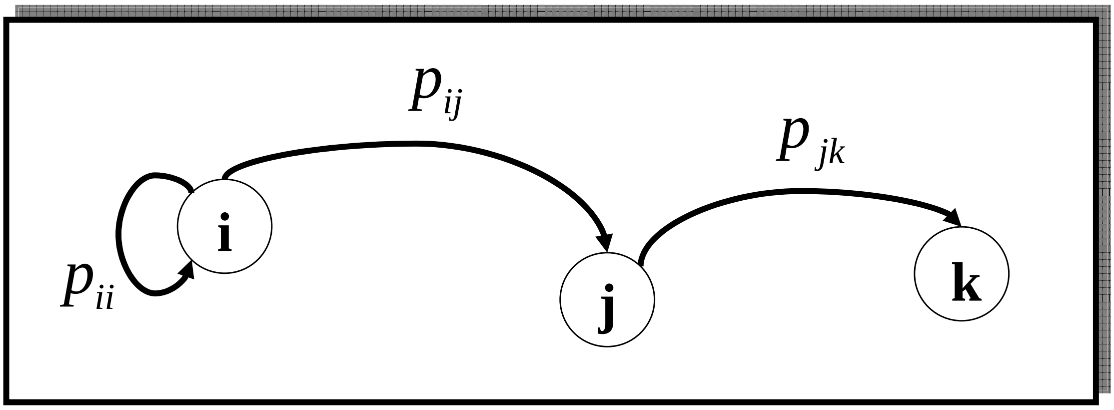
$p_{ij} =$ probabilita' di transizione ad un passo da i a j

Matrice di Transizione o Stocastica (2/2)

La matrice delle probabilita' di transizione π e' rappresentatible con un grafo fatto di archi e nodi.

Nodo = stato del processo

Arco = transizione



Catena di Markov omogenea a due stati

La matrice delle probabilita' di transizione P e' sempre del tipo:

$$P = \begin{array}{c} \\ i \downarrow \end{array} \begin{array}{c} j \longrightarrow \\ \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Omega = \{ x_1, x_2 \}$$

Esempio: Catena di Markov a due stati

Una ditta produce due bevande: *CC1* = 1, *CC2*=2

Chi ha comprato *CC1* la ricompra nel 90% dei casi
Chi ha comprato *CC2* la ricompra nell' 80% dei casi

$$P = \begin{array}{c} \\ CC1 \\ CC2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} CC1 & CC2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.20 & 0.80 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Omega = \{x_1, x_2\} = \{1, 2\}$$

Se una persona compra *CC2*, qual'e' la probabilita' che compri *CC1* dopo <u>due</u> acquisti?

Per rispondere a questa domanda dobbiamo trovare un modo per determinare la distribuzione di probabilita' p(x) data una matrice stocastica *P*

Probabilita' di transizione a n passi

Se un processo markoviano omogeneo e' nello stato ***i*** al tempo *m*, la probabilità che dopo *n* passi sarà in uno stato ***j*** e' data da:

$$P\left(X_{m+n} = j \mid X_m = i\right) = P\left(X_n = j \mid X_0 = i\right) = P_{ij}^{(n)}$$

Come si calcola questa matrice di transizione ?

$$\Downarrow$$

$\boxed{\text{Equazione di Chapman-Kolmogorov}}$

Chapman - Kolmogorov (1)

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_k P_{ik}^{n} P_{kj}^{m} = P_{ij}^{n+m}$$

$$\overline{P}^{(n+m)} = \overline{P}^{(n)} \cdot \overline{P}^{(m)}$$

Le equazioni di Chapman-Kolmogorov consentono di ricavare la matrice di transizione in n passi, la quale coincide con la potenza n-esima della matrice di stocastica

Chapman - Kolmogorov (2)

$$\overline{P}^{(2)} = \overline{P}^{(1+1)} = \overline{P}^{(1)} \cdot \overline{P}^{(1)} = \overline{P} \cdot \overline{P} = \overline{P}^{2}$$

$$\overline{P}^{(n)} = \overline{P}^{(n-1+1)} = \overline{P}^{n-1} \cdot \overline{P}^{1} = \overline{P}^{n}$$

Esempio: Catena di Markov a due stati (2)

Se una persona compra CC2, qual'e' la probabilita' che compri CC1 dopo <u>due</u> acquisti?

$$P(X_2 = 1 | X_0 = 2) = P_{21}^{2}$$

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.20 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.20 & 0.80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{pmatrix}$$

Esempio: Catena di Markov a due stati (3)

Se una persona compra CC1, qual'e' la probabilita' che compri ancora CC1 dopo <u>tre</u> acquisti?

$$P(X_3 = 1 | X_0 = 1) = P_{11}^3$$

$$P^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.20 & 0.80 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{pmatrix}}_{P^2} = \begin{pmatrix} 0.781 & 0.219 \\ 0.438 & 0.562 \end{pmatrix}$$

Esempio: Catena di Markov a due stati (4)

Dopo tre acquisti, qual è la percentuale delle persone che berranno CC1 ?

Bisogna conoscere la distribuzione iniziale, ovvero quale percentuale della popolazione beve CC1 e CC2

$\pi_1^{(0)}$ Probabilita' di essere nello stato 1 al tempo 0

$\pi_2^{(0)}$ Probabilita' di essere nello stato 2 al tempo 0

Esempio: Catena di Markov a due stati (5)

$\pi_1^{(0)}$ Probabilita' di essere nello stato 1 al tempo 0

$\pi_2^{(0)}$ Probabilita' di essere nello stato 2 al tempo 0

$$\pi_1^{(1)} = \pi_1^{(0)} p_{11} + \pi_2^{(0)} p_{21} \qquad \pi_1^{(1)} = \sum_{m=1}^{2} \pi_m^{(0)} p_{m1}$$

$$\pi_2^{(1)} = \pi_1^{(0)} p_{12} + \pi_2^{(0)} p_{22} \qquad \pi_2^{(1)} = \sum_{m=1}^{2} \pi_m^{(0)} p_{m2}$$

$$\pi_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{2} \pi_m^{(0)} p_{mn}$$

Esempio: Catena di Markov a due stati (6)

Per il secondo passo $$\pi_n^{(2)} = \sum_{m=1}^{2} \pi_m^{(1)} p_{mn}$$ $\Leftarrow$ Prodotto riga x colonna

Dopo t passi $$\pi_n^{(t+1)} = \sum_{m=1}^{2} \pi_m^{(t)} p_{mn}$$

In forma vettoriale $$\overline{\pi}^{(t+1)} = \overline{\pi}^{(t)} \overline{P}$$

Esempio: Catena di Markov a due stati (7)

$$P = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.30 & 0.70 \end{pmatrix} \qquad \left(\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}\right) = \left(0.5, 0.5\right)$$

$$\left(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}\right) = \left(0.5, 0.5\right) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \left(0.45, 0.55\right)$$

$$\left(\pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}\right) = \left(0.45, 0.55\right) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \left(0.435, 0.565\right)$$

Si trova che questi valori diventano stazionari

Catena di Markov a tre stati

$$P = \begin{array}{cc} & \text{stato finale} \longrightarrow \\ \text{stato iniziale} \downarrow & \begin{Bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix} \end{array}$$

$$\Omega = \left\{ x_1, x_2, x_3 \right\}$$

Classificazione degli Stati

- Uno stato j è **raggiungibile** da uno stato i se esiste un cammino che da i arriva a j.
- Due stati i e j si dice che **comunicano** se j è raggiungibile da i e viceversa.
- Un insieme di stati S in una catena di Markov è un **insieme chiuso** se nessuno stato fuori S è raggiungibile dagli stati in S.
- Uno stato i si definisce **stato assorbente** se $p_{ii} = 1$.
- Uno stato i si definisce **stato transiente** se esiste uno stato j raggiungibile da i, mentre i non è raggiungibile da j.

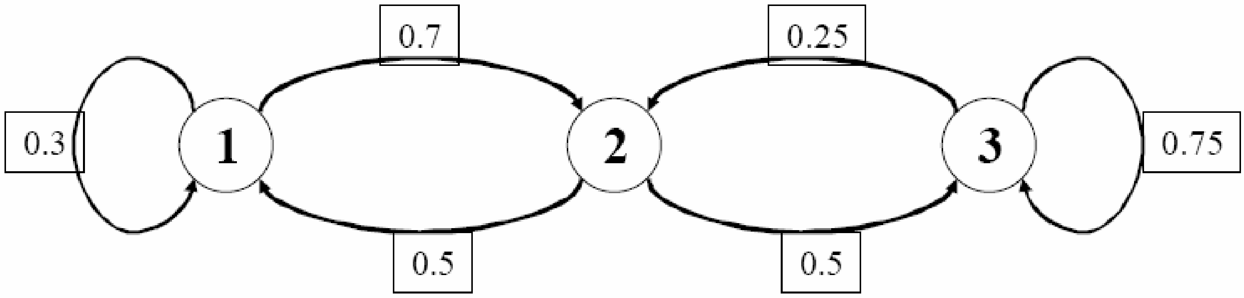
Classificazione degli Stati (2)

- Uno stato che non è transiente viene definito **stato ricorrente**.
- Uno stato i è **periodico** di periodo $k>1$ se k è il più piccolo numero tale che tutti i cammini che dallo stato i ritornano ad i hanno una lunghezza che è un multiplo di k.
  Se uno stato non è periodico si definisce **aperiodico**.
- Se tutti gli stati in una catena sono ricorrenti, aperiodici e comunicano l'uno con l'altro, la catena si definisce **ergodica**.

Esempio di catena ergodica

Una catena ergodica è, per esempio, la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$



Distribuzione di equilibrio

Sia $\boldsymbol{P}$ una matrice delle probabilità per una <u>*catena ergodica*</u> di s stati, vale che:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{P}_{ij}(n) = \pi_j}$$

$\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ldots \pi_s] \longrightarrow$ <u>vettore distribuzione d'equilibrio</u>

Dove:

$$\pi = \pi \cdot \boldsymbol{P}$$