

EQUAZIONI DEL BILANCIO E TRASFORMAZIONI

Per risolvere il campo di moto, per determinare quindi le incognite termodinamiche e cinematiche, è necessario impostare un sistema di equazioni. Le incognite termodinamiche sono due, come i gradi di libertà specifici o intensivi, in più c'è l'incognita cinematica vettoriale che è la velocità. Il totale delle incognite scalari, nel caso di un sistema semplice, è cinque, ci servono dunque cinque equazioni scalari, in generale di tipo differenziale. I principi base della fisica da cui partiremo per ricavare tali equazioni sono:

- Principio di conservazione della massa totale;
- Principio di conservazione dell'energia totale;
- La seconda legge di Newton, che esprime, in forma vettoriale, il bilancio della quantità di moto.

Date queste tre equazioni, due scalari e una vettoriale, il sistema è chiuso e si può passare in linea di principio, assegnate le condizioni iniziali e al contorno, alla risoluzione del campo di moto.

Passiamo ora a formulare l'equazione generale del bilancio per poi particolarizzarla per ogni grandezza (massa, quantità di moto, energia). Per scrivere il bilancio di una grandezza bisogna che essa sia estensiva, perché bisogna che sia garantita la sommabilità. Formulare il bilancio di una grandezza G significa, definito il sistema di controllo, individuare un intervallo di tempo in cui valutare le variazioni di G all'interno del sistema e le cause di tali variazioni. Da un punto di vista logico-matematico può essere conveniente stimare la variazione di G nel tempo come

$$\frac{dG}{dt} = \text{scambi} + \text{produzioni}$$

dove gli scambi e le produzioni di G sono definiti nell'unità di tempo. Per quantificare gli scambi introduciamo il concetto di **flusso**, ovvero la quantità di G che si muove attraverso l'unità di superficie nell'unità di tempo.

Una analisi dimensionale conduce a

$$[\varphi_G] = \frac{[G]}{[L^2][T]} = \frac{[G][L]}{[L^3][T]} = [g^+][\frac{[L]}{[T]}] = [g^+][V]$$

da cui si può porre formalmente

$$\underline{\varphi}_G = \rho g \underline{V}$$

avendo indicato il flusso con il simbolo φ . Naturalmente per il flusso di massa è $\underline{\varphi}_m = \rho \underline{V}$, essendo $g=1$. Quindi il flusso $\underline{\varphi}_G$ si può interpretare come un flusso di massa che trasporta con sé (convette) la quantità di G . Tale meccanismo esprime il concetto del trasporto convettivo, cioè del trasporto di una grandezza associato al trasporto della massa. Il flusso così scritto è detto **flusso convettivo**, e la grandezza G è convetta dalla massa. Oltre a questo esiste un altro tipo di flusso, non legato al trasporto di massa, il **flusso diffusivo**. Il concetto del trasporto diffusivo è legato strettamente a meccanismi di tipo microscopico, cioè all'attività molecolare. Il flusso totale lo potremo quindi scrivere come

$$\underline{\varphi}_G = \rho g \underline{V} + \underline{j}_G$$

avendo indicato con \underline{j}_G il flusso diffusivo.

Naturalmente se $G = m\underline{V}$, il flusso di G è una diade $\underline{\underline{\varphi}}_G = \rho\underline{V}\underline{V}$.

Vediamo come possiamo esprimere gli **scambi**.

Sia V un volume di controllo individuato da una superficie S . Lo scambio va valutato su S , perché è la superficie che separa il nostro sistema dall'ambiente esterno. Individuiamo un punto sulla frontiera sul quale sia definito il flusso. Prendiamo la normale alla superficie nello stesso punto e orientiamola (per una convenzione adottata abbastanza universalmente) in modo che sia positiva verso l'esterno (normale uscente), l'ammontare di G scambiato dal sistema attraverso la superficie S nell'unità di tempo è l'integrale della componente normale del flusso, vale a dire:

$$scambio = -\int_S \underline{\underline{\varphi}}_G \cdot \underline{n} dS$$

da cui si ricava

$$\frac{dG}{dt} = -\int_S \underline{\underline{\varphi}}_G \cdot \underline{n} dS + produzioni.$$

E' stato introdotto il segno meno perché il contributo allo scambio è positivo se il flusso $\underline{\underline{\varphi}}_G$ ha verso uscente dalla superficie e in tale caso fisicamente l'ammontare di G nel sistema diminuisce. Per quanto concerne la **produzione**, essa va controllata punto per punto all'interno del volume V poiché è una funzione del punto. La si definisce come la quantità di G che si produce per unità di volume e di tempo

$$[\dot{g}^+] = \frac{[G]}{[L^3][T]} = [\rho\dot{g}]$$

Allo stesso modo si può definire la produzione per unità di massa e di tempo

$$[\dot{g}] = \frac{[G]}{[T][m]}$$

Possiamo scrivere a questo punto la forma generale dell'equazione del bilancio

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V \rho g dV = -\int_S \underline{\underline{\varphi}}_G \cdot \underline{n} dS + \int_V \rho \dot{g} dV}$$

dove l'ammontare di G nel volume di controllo è valutato come $G = \int_V \rho g dV$, essendo in generale sia la densità di massa che la stessa g non distribuiti uniformemente nel volume di controllo.

• APPLICAZIONI

Bilancio della massa totale

Essendo nulli i flussi diffusivi e le produzioni di massa si ha (si ricordi anche che $g=1$):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dv + \int_S \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0$$

Il flusso di massa è puramente convettivo: la diffusione di massa è presente solo in sistemi a più specie quando a diffondere è una singola specie sotto gradienti non nulli di concentrazione. La produzione è invece nulla perché la massa è una grandezza conservativa. Naturalmente, nel caso di sistemi a più componenti in cui si prevede la possibilità di reazioni chimiche, si può formulare un bilancio di massa per ogni singola specie e in tal caso la produzione di una singola specie non è necessariamente nulla.

Il bilancio di una grandezza conservativa in genere viene anche detta **equazione di conservazione**. Per una grandezza conservativa si può dire

$$\text{Variazione di una grandezza conservativa} = \text{scambi}$$

Consideriamo ora il moto di un fluido in un condotto con sezioni rette ad area non costante (vedi figura sotto). Supponiamo che la superficie laterale sia impermeabile, il flusso così entra dalla sezione 1 e esce dalla sezione 2. Siano \underline{n}_1 e \underline{n}_2 le normali (per convenzione uscenti) alle superfici S_1 e S_2 , la velocità della corrente sarà parallela alle normali delle sezioni di ingresso e di uscita.

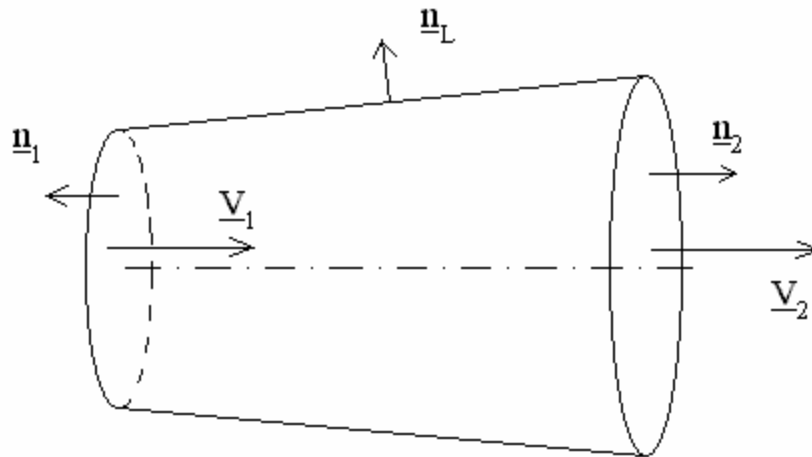


Figura 6

Ipotizziamo il moto **stazionario**. Allora, se non sono presenti variazioni nel tempo, l'equazione di conservazione è

$$\int_S \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0$$

Essendo la superficie laterale impermeabile, il flusso di massa attraverso questa superficie è nullo, pertanto, valutando separatamente i contributi attraverso le superfici di ingresso e di uscita, si ha

$$\int_{S_1} \rho_1 \underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 dS + \int_{S_2} \rho_2 \underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 dS = 0$$

Il primo termine rappresenta la massa che entra da S_1 per unità di tempo, il secondo la massa che esce da S_2 per unità di tempo. A rigori l'integrando non è costante, infatti la velocità varia punto per punto in ogni sezione, dovendo, per la presenza della viscosità, essere nulla sulla parete e massima in corrispondenza dell'asse del condotto; il profilo di velocità avrà la forma di un paraboloide. In

opportune condizioni però si possono trascurare fenomeni di tipo dissipativo e considerare la velocità costante in ogni sezione. Il modello di moto in cui tutte le grandezze sono ritenute costanti in una stessa sezione viene detto **unidimensionale**. Le grandezze varieranno solo in una direzione, in questo caso lungo l'asse del condotto.

Nel caso di moto unidimensionale la conservazione della massa si scrive

$$-\rho_1 V_1 S_1 + \rho_2 V_2 S_2 = 0$$

con il segno meno al primo termine poiché i vettori \underline{n}_1 e \underline{V}_1 hanno verso opposto. Dal momento che le sezioni 1 e 2 sono generiche, segue che

$$\rho VS = \text{cost}$$

cioè la portata massica $\dot{m} = \rho VS$ è costante in ogni sezione. Nel caso in cui il moto sia anche **incomprimibile** ($\rho = \text{cost}$), avremo

$$VS = \text{cost},$$

varrà, dunque, la costanza della portata volumetrica.

Bilancio dell'energia totale

Poiché la produzione di energia totale è identicamente nulla, si tratta di un'equazione di conservazione. L'energia totale di un sistema non è univocamente definita nel senso che a seconda del tipo di sistema in oggetto e del tipo di fenomenologie in studio, essa può includere di volta in volta diverse forme di energia. Si potrebbe, quindi, considerare l'energia elettromagnetica, l'energia in gioco durante le reazioni chimiche, e via dicendo. Occorre anche osservare che quando una determinata forma di energia non è presa in considerazione nel definire l'energia totale, non è detto che il suo valore è identicamente nullo, bensì che le sue variazioni nel corso della trasformazione vissuta dal sistema sono nulle.

Nel caso dei sistemi semplici ad un componente che rappresentano attualmente l'oggetto del nostro studio si pone

$$E_{TOT} = \frac{1}{2} m V^2 + mgz + U = \text{cost}$$

o, in termini specifici

$$e_{TOT} = \frac{1}{2} V^2 + gz + u = \text{cost}$$

L'energia cinetica è associata a fenomeni di tipo macroscopico e viene anche detta **energia cinetica ordinata**, mentre l'energia interna, dovuta al moto caotico delle molecole e quindi associata a fenomeni di tipo microscopico, viene anche detta **energia cinetica disordinata**. Mentre l'energia totale si conserva, una particolare forma di energia può crearsi e distruggersi, in realtà si ha la trasformazione di un tipo di energia in un altro. In forma integrale il bilancio o la conservazione dell'energia totale si scrive

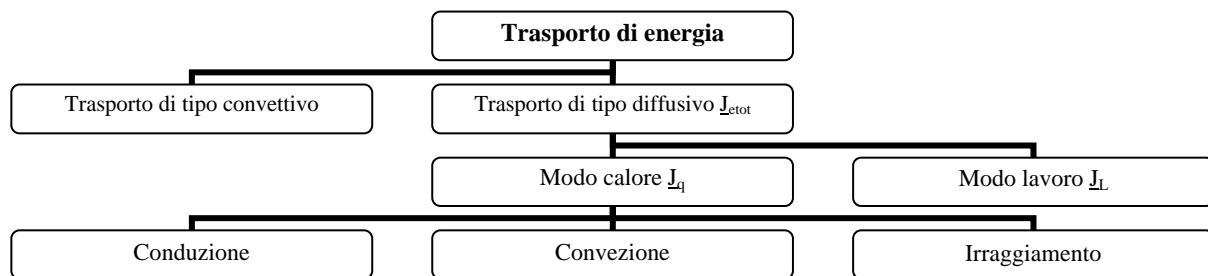
$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e_{TOT} dv + \int_S (\rho \underline{V}) e_{TOT} \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{J}_{e_{TOT}} \cdot \underline{n} dS = 0$$

Gli scambi avvengono per mezzo di flussi di tipo convettivo e diffusivo, cioè associati sia a scambi di massa (in direzione normale alla superficie di controllo) che a meccanismi a livello molecolare. L'espressione di $\underline{J}_{e_{TOT}}$ la si può ricavare in generale grazie alla termodinamica dei processi irreversibili, che è una parte della termodinamica che esula dagli scopi del presente corso.

Nel nostro ambito cominciamo a osservare che l'energia può essere scambiata a livello diffusivo in due modi, nel modo **lavoro** e nel modo **calore**. Quando lo scambio è causato da una differenza di temperatura, si tratta di calore, e i meccanismi possono essere di tipo diverso, si può avere uno scambio o un trasferimento di calore per **conduzione**, **convezione** o **irraggiamento**. La trasmissione di energia nel modo calore è argomento così vasto che spesso costituisce argomento di corsi specifici, e sarà comunque oggetto dell'ultima parte del presente corso.

In generale si pone

$$\underline{J}_{e_{TOT}} = \underline{J}_L + \underline{J}_q$$



Possiamo a questo punto dare una formulazione integrale abbastanza generale dell'equazione dell'energia

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e_{TOT} dv + \int_S (\rho V e_{TOT}) \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{J}_L \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{n} dS = 0$$

- **UNA FORMULAZIONE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE DELL'ENERGIA: IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA**

Facendo l'ipotesi che il sistema sia chiuso si ottiene, dall'equazione dell'energia, il primo principio della termodinamica; in questo caso, non essendoci scambi di massa, i flussi convettivi saranno identicamente nulli sulla superficie di controllo. Per un sistema chiuso si può ipotizzare che l'energia cinetica ordinata sia trascurabile rispetto alle altre e che le variazioni di energia potenziale gravitazionale siano trascurabili.

L'unica forma di energia che ci interessa (perché l'unica che varia in modo significativo nel corso dell'evoluzione del sistema, cioè delle trasformazioni) è l'energia interna. Si può assumere quindi

$$E_{TOT} = U$$

Dunque per sistemi chiusi vale

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u dV + \int_S \underline{J}_L \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{n} dS = 0$$

e moltiplicando tutto per dt si ha

$$dU = - \left(\int_S \underline{J}_L \cdot \underline{n} dS \right) dt - \left(\int_S \underline{J}_q \cdot \underline{n} dS \right) dt ,$$

dove al solito $U = \int_V \rho u dV$ rappresenta l'ammontare dell'energia interna del sistema.

Il primo termine a secondo membro rappresenta l'energia scambiata nel modo lavoro δL . Il secondo termine del secondo membro è la quantità di energia scambiata per unità di tempo nel modo calore (potenza termica scambiata) moltiplicata per dt . Avrà quindi le dimensioni di un'energia e rappresenta il calore scambiato δQ .

L'equazione di conservazione dell'energia per sistemi chiusi diventa quindi

$$\boxed{dU = \delta Q - \delta L}$$

I segni dipendono dalle convenzioni adottate. Se seguiamo la convenzione prima adottata nel corso della discussione generale sull'equazione del bilancio, in base alla quale tutti i termini di scambio sono positivi se uscenti, occorrerebbe in effetti adottare un segno meno sia davanti al termine δQ che davanti al termine δL . In realtà, in base ad un'altra storica convenzione, il calore è considerato positivo quando viene ceduto al sistema (entra cioè nel sistema) e il lavoro positivo se compiuto dal sistema (quando cioè esce dal sistema). Quest'ultima convenzione prevede il segno meno davanti al termine δQ , cosa che effettivamente è stata fatta nell'equazione sopra riportata.

Abbiamo definito operativamente δQ e δL come integrali superficiali moltiplicati per dt . Questi termini, dunque, non sono quindi dei differenziali esatti ma solo delle piccole quantità di energia scambiata definite attraverso degli integrali superficiali (moltiplicati per l'intervallo di tempo infinitesimo).

Consideriamo ora un gas piuccheperfetto ($c_v = \text{cost}$) e applichiamo il primo principio ad alcune semplici trasformazioni.

I. Isoterma ($T = \text{cost}$)

Questa condizione si può ottenere se si mette il sistema in contatto con un serbatoio a capacità termica infinita. Il sistema, durante la trasformazione, può scambiare calore e lavoro. Per l'ipotesi di gas piuccheperfetto

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$$

il primo principio assume la forma

$$Q - L = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = L}$$

Il calore fornito al sistema è uguale al lavoro che il sistema compie, oppure il lavoro che si compie sul sistema è uguale al calore ceduto dal sistema all'ambiente. Determiniamo ora le variazioni di volume in seguito a scambi di calore, scriviamo cioè una relazione funzionale tra variazioni di volume e scambi di calore.

Consideriamo un sistema chiuso al quale somministriamo una certa quantità di calore Q . Il lavoro elementare è

$$dL = pAdx$$

Il lavoro totale è

$$L = \int_{x_1}^{x_2} pAdx = \int_{V_1}^{V_2} p dv$$

(Naturalmente nel caso $p=cost$, si avrebbe $L=p\Delta V$). Ricorrendo all'equazione di stato per i gas perfetti, ed essendo T costante avremo

$$L = mRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dv}{v} = mRT \ln \frac{v_2}{v_1}$$

Se la trasformazione è **isoterma** vale la relazione

$$Q = mRT \ln \frac{v_2}{v_1}$$

si può quindi calcolare il calore scambiato conoscendo esclusivamente temperatura, volume iniziale e finale del sistema.

II. Isocora ($V=cost$)

Questo tipo di trasformazione si può ottenere con un sistema cilindro-pistone a pistone bloccato. Avremo

$$\Delta V = 0 \Rightarrow L = 0 \Rightarrow \Delta U = Q$$

La variazione di energia interna è dovuta unicamente al calore scambiato. Se il gas è piuccheperfetto

$$Q = mc_v(T_2 - T_1)$$

Questa espressione poteva anche essere data come definizione per il calore specifico a volume costante, ma nella termodinamica postulativa la definizione si dà considerando le derivate di stabilità e questa espressione si ricava come applicazione del primo principio nell'ipotesi che $v=cost$.

III. Isobara ($p=cost$)

Sfruttiamo l'espressione dell'entalpia e la relazione di Gibbs

$$h = u + pv; \quad dh = Tds + vdp .$$

Nel caso di trasformazione a pressione costante

$$dp = 0 \Rightarrow dh = Tds .$$

Supponendo che la trasformazione sia **reversibile**

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow TdS = \delta Q$$

cioè

$$dh = \delta Q$$

da cui

$$mc_p(T_2 - T_1) = Q$$

nel caso di gas piuccheperfetto. La variazione di entalpia coincide con il calore scambiato in un processo reversibile isobaro.

Un'altra trasformazione elementare molto utile nella pratica è la cosiddetta isoentropica. Questa sarà discussa più avanti dopo l'introduzione del secondo principio della termodinamica.

• SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA E BILANCIO ENTROPICO

Il secondo principio tratta due aspetti delle trasformazione termodinamiche:

1. La **spontaneità** di una trasformazione, ovvero la “direzione” spontanea secondo cui determinate trasformazioni avvengono;
2. La **reversibilità**, legata alla possibilità che esista una trasformazione inversa che riporti il sistema (e l'ambiente) nello stato di partenza.

Il primo aspetto è legato alla formulazione del secondo principio data da Lord Kelvin, o alternativamente a quella di Clausius. Si noti che tali formulazioni non sono fornite in termini matematici e sono espressioni di osservazioni sperimentali. Il calore fluisce dalle zone ad alta temperatura verso quelle a bassa temperatura, un fluido scorre da una regione di alta pressione verso una regione di bassa pressione: queste sono comuni osservazioni sperimentali sulla direzione spontanea di processi fisici.

Formulazione di Lord Kelvin

“Non è possibile realizzare una macchina termica che trasformi, nel corso di una trasformazione ciclica, integralmente in lavoro l'energia assorbita nel modo calore”. Tale macchina è di impossibile costruzione a prescindere dall'efficienza pratica e dal progetto ingegneristico, poiché tale trasformazione è impossibile.

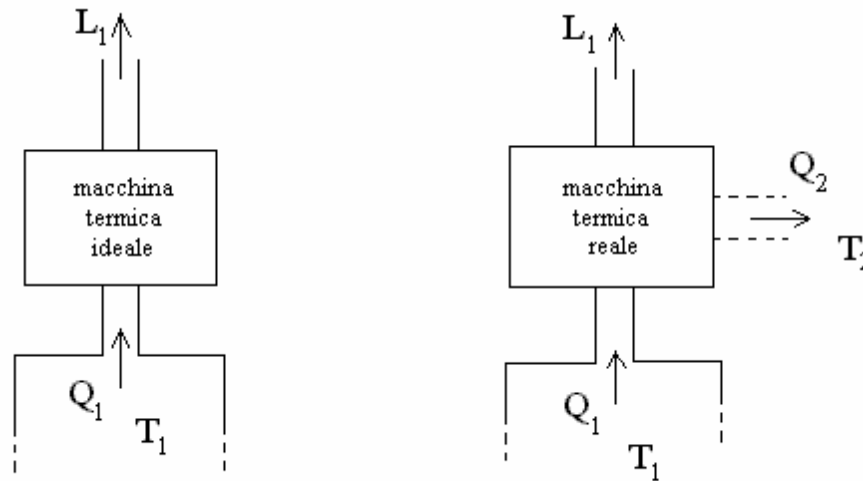


Figura 7

La sorgente che somministra calore è un **serbatoio**, ossia un sistema ideale in grado di scambiare energia nel modo calore (e quindi entropia) senza che la sua temperatura vari (ha capacità termica infinita). In genere una sorgente è un sistema in grado di scambiare una certa quantità di una grandezza estensiva mantenendo costante l'intensiva coniugata. La macchina, a sua volta, cede energia ad un altro ambiente nel modo lavoro. Se tutto il calore non può trasformarsi in lavoro, per il principio di conservazione dell'energia totale una parte di energia (Q_2) sarà ceduta ad un'altra sorgente nel modo calore. Tale sorgente è a temperatura più bassa della prima.

$$Q_2 = Q_1 - L; \quad T_1 > T_2.$$

Possiamo definire il **rendimento** della macchina termica come il rapporto

$$\eta = \frac{L}{Q_1}$$

che, per il secondo principio, è sempre minore di uno. Infatti

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad Q_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \eta < 1$$

Non esiste quindi una macchina termica a rendimento unitario.

Formulazione di Clausius

“E' impossibile che una macchina frigorifera trasferisca in una trasformazione ciclica l'energia nel modo calore da una sorgente a temperatura minore ad una sorgente a temperatura maggiore”. Il secondo principio dice che, per realizzare questa trasformazione è necessario spendere una certa quantità di energia, ossia compiere lavoro.

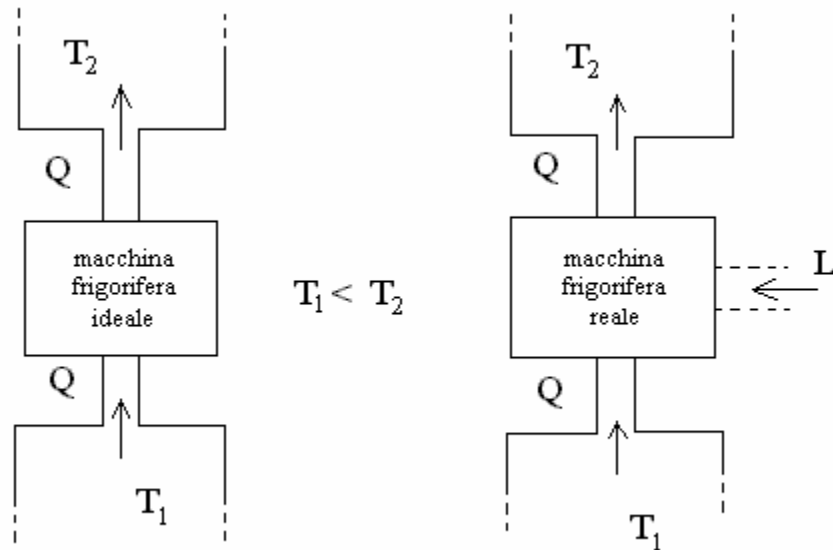


Figura 8

Per il principio di conservazione

$$Q_1 + L = Q_2;$$

per le macchine frigorifere si può definire un coefficiente di prestazione

$$\eta = \frac{Q_1}{L} \quad \left(\frac{Q_1}{L} > 1 \right)$$

Minore è il lavoro da spendere, maggiore è il valore del coefficiente di prestazione.

Con questi due enunciati, che sono equivalenti, si affronta “l’aspetto della direzione spontanea” dei processi; il secondo principio, però, può essere affrontato anche sotto un altro punto di vista. Ci sono formulazioni del secondo principio che mettono in risalto la caratteristica di **irreversibilità** di alcune trasformazioni.

L’entropia e il secondo principio: l’IRREVERSIBILITÀ

Una trasformazione si dice reversibile se, una volta avvenuta, si possono riportare allo stato iniziale sia il sistema che l’ambiente (che avevano interagito durante la trasformazione modificando il loro stato).

Facciamo un esempio di trasformazione irreversibile. Supponiamo di avere due corpi, uno a temperatura T_1 e l’altro a temperatura T_2 . Sia $T_1 > T_2$. Supponiamo di mettere a contatto i due corpi, avverrà un trasferimento spontaneo di energia nel modo calore dal corpo a temperatura T_1 al corpo a temperatura T_2 fino a che non si raggiungerà una condizione di equilibrio per cui le temperature dei due corpi coincideranno ed avranno un valore compreso tra T_1 e T_2 (T_m).

Se ora voglio tornare alle condizioni iniziali con una trasformazione spontanea non posso farlo. Si potrà portare il corpo a temperatura inizialmente più alta dalla temperatura T_m al valore iniziale T_1 con una trasformazione spontanea, ma questo non sarà possibile per l’altro corpo che aveva una temperatura $T_2 < T_m$. In base al secondo principio, per raffreddare il corpo a temperatura maggiore occorrerà spendere del lavoro e questo comporta una nuova variazione dell’ambiente che, pertanto,

non farà ritorno alle condizioni di partenza. Il secondo principio caratterizza quantitativamente l'irreversibilità di alcune trasformazioni. Passiamo ora alla formulazione quantitativa. Supponiamo di avere una sorgente a temperatura $T=const$ che cede una quantità di energia nel modo calore δQ .

E' lecito definire la quantità $\frac{\delta Q}{T}$. δQ è una energia scambiata e non è sempre la stessa qualunque sia la trasformazione (è stato definito operativamente come un integrale superficiale moltiplicato per dt). Supponiamo di avere un **ciclo**, una trasformazione tale che il sistema parta da un certo stato e dopo n trasformazioni ritorni allo stato iniziale. Si può dimostrare che, se le trasformazioni sono tutte reversibili, l'integrale lungo il ciclo di $\frac{\delta Q}{T}$ è sempre nullo.

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow \frac{\delta Q}{T} \text{ è un differenziale esatto.}$$

In tali ipotesi tale differenziale verrà definito quale il differenziale esatto di una grandezza di stato detta **entropia**

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Questa definizione della variazione di entropia vale solo se la trasformazione è reversibile, la quantità $\frac{\delta Q}{T}$ verrà detta quindi parte reversibile nell'espressione della variazione dell'entropia.

Se la trasformazione è irreversibile si introduce il concetto di produzione di entropia. Quindi la variazione di entropia è

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_{irr.}$$

con $\delta S_{irr.} > 0$. Questa è una delle prime formulazioni quantitative del secondo principio. In realtà il secondo principio può essere enunciato formalmente attraverso l'equazione di bilancio dell'entropia.

• EQUAZIONE DEL BILANCIO DELL'ENTROPIA

L'equazione del bilancio nel caso generale è

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dv + \int_A \rho s \underline{V} \cdot \underline{n} dA + \int_A \underline{J}_s \cdot \underline{n} dA = \int_V \rho \dot{s} dv$$

Nell'ipotesi che il sistema sia chiuso, la componente normale del flusso di massa è nulla

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dv + \int_A \underline{J}_s \cdot \underline{n} dA = \int_V \rho \dot{s} dv$$

Per definizione il flusso diffusivo di entropia è in relazione con il flusso di energia nel modo calore secondo la relazione

$$\underline{J}_S = \frac{J_q}{T};$$

si può dire, inoltre, che la produzione di entropia non è mai negativa $\dot{s} \geq 0$.

Per un sistema chiuso quindi

$$dS = - \left[\int_A \frac{J_q}{T} \cdot \underline{n} dA \right] dt + \left[\int_A \rho \dot{s} dv \right] dt$$

Le cause di variazione di entropia possono essere due: scambi diffusivi con l'ambiente e produzioni di entropia nel sistema. Si può quindi scrivere

$$\boxed{dS = \delta S_{est} + \delta S_{int}}$$

Se $\delta S_{int} = 0 \Rightarrow \dot{s} = 0$, la trasformazione sarà reversibile. In questo caso δS_{est} , che coincide con la variazione dell'entropia, è un differenziale esatto.

Trasformazione isoentropica

Una trasformazione si dice isoentropica se avviene ad entropia costante. Per una trasformazione isoentropica infinitesima, dunque, $dS = 0$. Una trasformazione adiabatica e reversibile, per il secondo principio è anche isoentropica. Non vale però il contrario, ossia una trasformazione isoentropica non è detto che sia adiabatica e reversibile. Per la relazione di Gibbs per l'energia interna, nel caso di $ds=0$ si ha

$$du = -pdv$$

se il gas è piuccheperfetto valgono le relazioni di stato

$$\begin{cases} pv = RT \\ du = c_v dT \end{cases}$$

l'equazione di Gibbs può quindi essere scritta così

$$c_v dT = -RT \frac{dv}{v};$$

separando le variabili e integrando fra lo stato 1 e lo stato 2

$$c_v \int_1^2 \frac{dT}{T} = -R \int_1^2 \frac{dv}{v}$$

$$c_v \ln \frac{T_2}{T_1} = -R \ln \frac{v_2}{v_1}$$

da cui

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{R}{c_v}}$$

per la relazione di Mayer $\frac{R}{c_v} = \gamma - 1$, si ottiene

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow T v^{\gamma-1} = cost$$

Si possono ricavare anche le relazioni

$$p v^\gamma = cost; \quad p T^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = cost.$$

• EQUAZIONE DEL BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

L'equazione della quantità di moto ci serve per poter chiudere il sistema di equazioni, in generale allo scopo di determinare l'incognita cinematica. Per ottenere quest'equazione partiamo dalla legge di Newton

$$\underline{F} = m \underline{a} = \frac{d}{dt}(m \underline{V})$$

In questa equazione, se esprimiamo il secondo membro come prodotto tra massa e accelerazione facciamo l'ipotesi di massa costante. Nella formulazione più generale appare la derivata, rispetto alla variabile tempo, della quantità di moto. \underline{F} è la risultante di tutte le forze applicate, superficiali e di campo. Poiché nel campo, in generale, le distribuzioni di \underline{V} e di ρ non sono uniformi, la quantità di moto va espressa per la singola particella e poi integrata nell'intero volume di controllo. L'espressione della legge di Newton diventa

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dv = \underline{F}$$

A questo punto non ci resta che distinguere in \underline{F} le forze superficiali e quelle di campo. Per quanto riguarda le forze superficiali, lo sforzo è $\underline{n} \cdot \underline{\tau} = \underline{\tau} \cdot \underline{n}$ per la simmetria del tensore degli sforzi, e la risultante delle forze superficiali che agiscono sul sistema è pertanto l'integrale: $\int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS$. Per le forze di campo, trascurando fenomeni di tipo elettromagnetico, dobbiamo considerare la sola forza gravitazionale $\int_V \rho \underline{g} dv$. In definitiva l'equazione che esprime la legge di Newton, bilancio della quantità di moto, è

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dv = \int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS + \int_V \rho \underline{g} dv}$$

Nella logica dell'equazione del bilancio, l'integrale superficiale è il termine di scambio di tipo diffusivo e quello di volume il termine di produzione. In questa schematizzazione l'accelerazione gravitazionale g è da considerarsi la produzione di quantità di moto.

La mancanza del termine di tipo convettivo negli scambi è giustificata dalla natura lagrangiana dell'equazione di Newton. Introducendo il concetto della derivata sostanziale ed il suo legame con la derivata locale, si può far comunque comparire un termine di scambio convettivo.

Derivata sostanziale e teorema del trasporto

Le definizioni formali matematiche delle due derivate sono le stesse ma il significato fisico è profondamente diverso. La derivata lagrangiana o sostanziale rappresenta la variazione nel tempo di una grandezza misurata da un osservatore che si muove solidale con la particella, mentre quella euleriana o locale rappresenta la variazione misurata in un punto fisso dello spazio.

Per chiarire questo concetto facciamo un esempio. Consideriamo un condotto a sezione variabile in cui ci sia un flusso unidimensionale stazionario ed incomprimibile per il quale l'equazione di continuità fornisce $V S = cost$, dove S è la sezione locale che varia con l'ascissa longitudinale x .

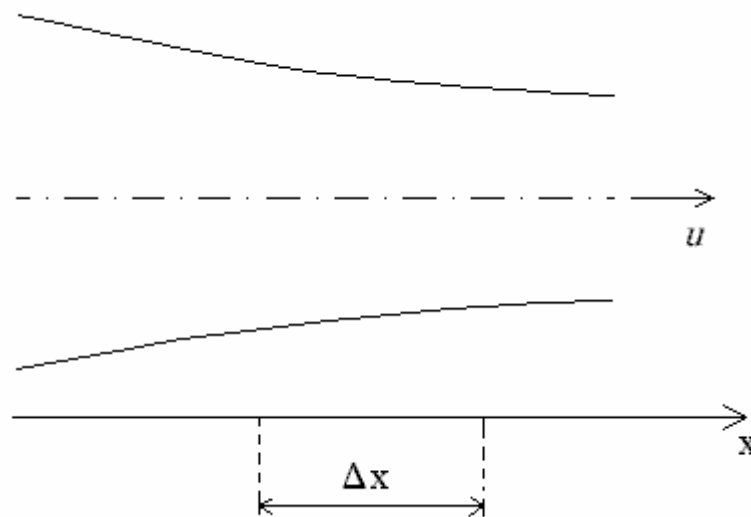


Figura 9

Poiché il moto è stazionario, in un punto fissato lungo l'asse del condotto la velocità u non varia nel tempo. La derivata locale sarà in ogni punto identicamente nulla, cioè

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = 0 \quad \forall x$$

Se invece desideriamo misurare la derivata sostanziale dobbiamo stimare la u della stessa particella in due istanti diversi (e quindi in due stazioni diverse); formalmente è

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

D'altra parte, gli incrementi Δt e Δx non sono indipendenti tra loro, ma legati dalla relazione $\Delta t = \Delta x / u$, dove la velocità u può essere quella valutata (approssimativamente) nella stazione x (e al tempo t). La precedente relazione si può riscrivere

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta x} u = u \frac{du}{dx}$$

Il primo membro rappresenta la definizione della derivata sostanziale e per essa viene usualmente impiegato il simbolo della D maiuscola per distinguerla dalla derivata euleriana, cioè quella misurata a punto fisso. Si ha dunque

$$\frac{Du}{Dt} = u \frac{du}{dx}$$

Appare abbastanza evidente che fisicamente la derivata sostanziale della velocità è l'accelerazione, che non è dunque legata ad una derivata euleriana, bensì ad una derivata lagrangiana. D'altra parte, essendo il moto stazionario, a punto fisso la derivata temporale della velocità è zero, ma un osservatore che si muovesse nel condotto solidale col flusso rileverebbe una velocità variabile (per l'osservatore medesimo, temporalmente) e dunque avvertirebbe il classico effetto della accelerazione.

Occorre adesso fornire una espressione generale e più rigorosa della derivata sostanziale.

In una visione lagrangiana si definisce la traiettoria come il luogo di punti occupati dalla particella al variare del tempo. In formula, la traiettoria di una determinata particella è definita dalla funzione

$$\underline{r} = \underline{r}(\underline{r}_0, t)$$

dove \underline{r}_0 è la particella (individuata dalla sua posizione all'istante iniziale) ed \underline{r} il vettore posizione che assume la particella al variare del tempo.

Nella visione euleriana, è da definirsi la funzione

$$\underline{r}_0 = \underline{r}_0(\underline{r}, t)$$

dove \underline{r} è un punto fisso per il quale, istante per istante, passerà una nuova particella di nome \underline{r}_0 .

Le due formulazioni non sono indipendenti, si può passare dalla formulazione euleriana a quella lagrangiana e viceversa. In questa sede non ci occuperemo di tale trasformazione.

Relazione tra le due formulazioni. Teorema del trasporto di Reynolds

Sia g una grandezza funzione del tempo e dello spazio.

$$g = g(x, y, z, t)$$

A loro volta, x, y e z dipendono dalla particella e dal tempo ($\underline{r} = \underline{r}(\underline{r}_0, t)$), quindi si può scrivere

$$g = g(x(x_0, y_0, z_0, t), y(x_0, y_0, z_0, t), z(x_0, y_0, z_0, t), t)$$

dove come al solito $\underline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ individua la particella. Deriviamo nel tempo questa funzione.

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{x,y,z} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{x_0, y_0, z_0} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{x_0, y_0, z_0} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{x_0, y_0, z_0}$$

dove $\left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{x,y,z}$ è la derivata di g nel tempo, fissato un punto nello spazio, $\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{x_0,y_0,z_0}$, $\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{x_0,y_0,z_0}$, $\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{x_0,y_0,z_0}$ sono le velocità u, v, w fissata una particella di nome \underline{r}_0 .

Ricordando la definizione del gradiente ∇g di una funzione g , segue la relazione tra le due derivate

$$\frac{Dg}{Dt} = \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{x,y,z} + \underline{V} \cdot \nabla g$$

La derivata sostanziale è uguale alla somma della derivata locale più un termine dovuto al fatto che l'osservatore che misura la derivata sostanziale si muove in un campo in cui è presente un gradiente della grandezza g .

Se le variazioni spaziali sono perpendicolari alla velocità si ha

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t}$$

in questo caso le derivate lagrangiana e euleriana coincidono.

Nel caso della **quantità di moto**

$$\frac{DV}{Dt} = \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{x,y,z} + \underline{V} \cdot \nabla V = \underline{a}$$

che, per definizione, è proprio l'accelerazione.

Questo legame tra le derivate vale anche per volumi finiti, e viene espresso dal teorema del trasporto o teorema di Reynolds

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{dG}{dt} + \int_{S_{\underline{n}}} \rho g \underline{V} \cdot \underline{n} dS$$

Ritorniamo ora all'equazione di bilancio della quantità di moto, prima ottenuta dalla legge di Newton (formulazione lagrangiana). Possiamo ottenere, con l'ausilio del teorema del trasporto, ovvero facendo comparire un contributo al flusso di tipo **convettivo**, una formulazione di tipo euleriano del bilancio della quantità di moto.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dv + \int_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS = \int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS + \int_V \rho \underline{g} dv}$$

Fisicamente, il termine $\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dv + \int_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS$ è la **forza d'inerzia** definita in senso lagrangiano. Se il moto è stazionario la forza d'inerzia è $\int_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS$. Il termine $-\int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS$ rappresenta lo scambio dovuto al flusso **diffusivo** che formalmente è $-\underline{\tau}$.

Per chiudere il sistema abbiamo quindi scritto una nuova equazione vettoriale, l'equazione del bilancio della quantità di moto, che in questa forma però introduce una nuova incognita, $\underline{\tau}$, ossia

altre nove incognite scalari. Per chiudere definitivamente il sistema occorre legare il tensore degli sforzi alle altre incognite principali, il che sarà realizzato introducendo le relazioni fenomenologiche esprimenti il legame tensione-deformazione tipico di un mezzo continuo.

Caratterizzazione delle deformazioni del mezzo

Un mezzo continuo, sia esso solido o liquido, se soggetto a sollecitazioni esterne, si deforma. Il sistema reagisce a tali deformazioni sviluppando nel proprio interno degli sforzi interni, o tensioni, che garantiscono l'equilibrio del sistema stesso, insieme con le sollecitazioni esterne che le hanno generate. In un regime di comportamento elastico le tensioni sono proporzionali alle deformazioni.

Allo scopo di caratterizzare inizialmente lo stato della deformazione, scegliamo un punto P interno al mezzo e consideriamo un suo intorno a forma di cubetto (l'intorno non è detto che debba essere necessariamente un cubetto, se la geometria e il tipo di sollecitazioni suggeriscono una simmetria sferica, l'intorno potrà essere una piccola sferetta). Studiamo la deformazione del cubetto a causa di sollecitazioni esterne. Il punto P può essere scelto come baricentro del cubetto o come uno dei vertici, e sia \underline{r} il vettore posizione del generico punto P di coordinate (x, y, z) prima della deformazione.

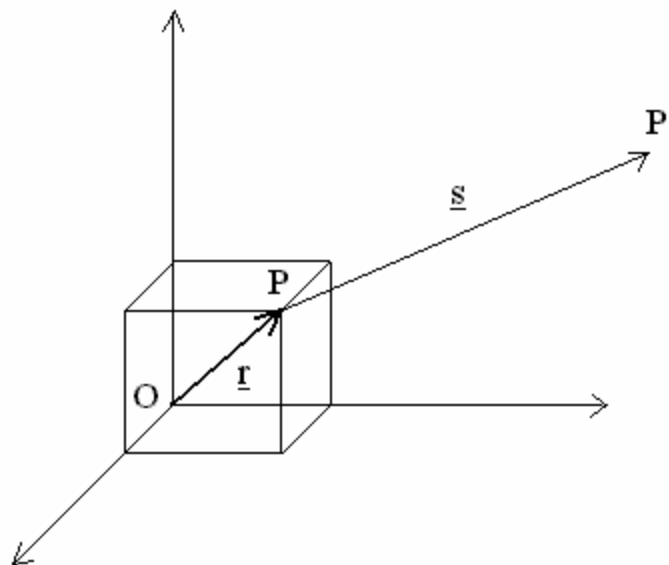


Figura 10

Dopo la deformazione, se riesco a valutare lo spostamento di ogni punto dell'intorno (interno e di frontiera), posso ricostruire l'intorno del punto a trasformazione avvenuta. Sia \underline{s} il vettore spostamento di P a seguito della trasformazione e P' la posizione occupata da P a trasformazione avvenuta. Lo spostamento \underline{s} è funzione del punto

$$\underline{s} = \underline{s}(x, y, z) = (u, v, w)$$

e lo studio della deformazione non può prescindere dalla conoscenza di tale funzione. Se lo spostamento è piccolo possiamo pensare di sviluppare \underline{s} in serie di Taylor intorno all'origine degli assi e fermarci al primo ordine.

Ricordiamo lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione $f(x)$ intorno ad un punto $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \varepsilon_3(x).$$

Se x è vicino a x_0 (lo spostamento è piccolo), possiamo approssimare f ai soli primi due termini della serie di Taylor, commettendo un errore di ordine $(x - x_0)^2$, linearizzando così la funzione f .

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Linearizziamo, dunque, le funzioni scalari

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z)$$

componenti dello spostamento \underline{s} . Come punto iniziale dello sviluppo consideriamo l'origine degli assi $\underline{0} \equiv (0,0,0)$.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(\underline{0}) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 x + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 y + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_0 z \\ v(x, y, z) &= v(\underline{0}) + \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_0 x + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_0 y + \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_0 z \\ w(x, y, z) &= w(\underline{0}) + \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_0 x + \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_0 y + \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_0 z \end{aligned}$$

Avendo linearizzato le funzioni scalari, in modo compatto, per \underline{s} si può scrivere

$$\underline{s}(\underline{r}) = \underline{s}(\underline{0}) + \underline{r} \cdot \underline{\nabla s}|_0$$

dove $\underline{\nabla s}|_0$ è la diade

$$\underline{\nabla s}|_0 = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 & \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_0 & \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 & \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_0 & \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_0 & \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_0 & \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_0 \end{bmatrix}$$

Lo spostamento di un generico intorno di P è somma quindi di due contributi. Se l'intorno subisse uno spostamento puramente traslatorio basterebbe assegnare solo lo spostamento di un punto per conoscere come si muove tutto l'intorno: $\underline{s}(\underline{0})$ è lo spostamento dovuto alla **traslazione rigida**.

Tutti gli altri contributi allo spostamento, rotazione rigida e deformazione, sono contenuti nell'altro termine: $\underline{r} \cdot \underline{\nabla s}|_0$ (è possibile separare e sovrapporre i vari contributi dello spostamento grazie alla linearizzazione del sistema). Le tensioni nascono quindi a causa del secondo termine, o più precisamente, a causa della parte del secondo termine che è responsabile delle deformazioni. Cerchiamo quindi di separare da $\underline{r} \cdot \underline{\nabla s}|_0$ la parte dovuta alla deformazione, isolando il termine

dovuto alla rotazione rigida. Per fare ciò decomponiamo la matrice $\underline{\nabla s}$ (da qui in avanti ometteremo il pedice per indicare che la diade è calcolata in O) nella sue parti simmetrica e antisimmetrica

$$\underline{\nabla s} = (\underline{\nabla s})^a + (\underline{\nabla s})^s$$

dove

$$\begin{cases} (\underline{\nabla s})^a = \frac{\underline{\nabla s} - (\underline{\nabla s})^T}{2} \\ (\underline{\nabla s})^s = \frac{\underline{\nabla s} + (\underline{\nabla s})^T}{2} \end{cases}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\underline{s}(r) = \underline{s}(0) + \underline{r} \cdot (\underline{\nabla s})^a + \underline{r} \cdot (\underline{\nabla s})^s$$

Vediamo quale è il contributo di questi due nuovi termini, contributi allo spostamento del punto P. Per quanto riguarda la parte antisimmetrica, si ha

$$(\underline{\nabla s})^a = \begin{bmatrix} 0 & \frac{v_x - u_y}{2} & \frac{w_x - u_z}{2} \\ \frac{u_y - v_x}{2} & 0 & \frac{w_y - v_z}{2} \\ \frac{u_z - w_x}{2} & \frac{v_z - w_y}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

I tre numeri significativi sono $\frac{1}{2}$ delle componenti del rotore di \underline{s} , $\frac{1}{2} \underline{\nabla} \wedge \underline{s} = \underline{\Omega}$ che si dimostra essere proprio lo spostamento angolare. Dunque il termine $\underline{r} \cdot (\underline{\nabla s})^a$ è lo spostamento che un corpo subisce quando esso ruota rigidamente attorno ad un asse definito da $\underline{\Omega}$ (per caratterizzare un moto rigido rotatorio è sufficiente conoscere $\underline{\Omega}$). Abbiamo individuato così l'atto di moto della rotazione rigida; questo contributo, come la traslazione rigida, non genera tensioni.

Veniamo ora al termine $\underline{r} \cdot (\underline{\nabla s})^s$, contributo allo spostamento di P, a causa del quale si genererà una deformazione, con conseguente nascita di una tensione. Avremo

$$(\underline{\nabla s})^s = \begin{bmatrix} u_x & \frac{v_x + u_y}{2} & \frac{w_x + u_z}{2} \\ \frac{v_x + u_y}{2} & v_y & \frac{w_y + v_z}{2} \\ \frac{w_x + u_z}{2} & \frac{w_y + v_z}{2} & w_z \end{bmatrix}$$

Questo termine può essere a sua volta scomposto in altri due termini:

- La deformazione di volume (ad esempio la dilatazione termica, isotropa);
- La deformazione di sola forma, che altera gli angoli del cubetto elementare.

Per individuare i due nuovi termini procediamo ad una nuova decomposizione di $(\underline{\nabla s})^s$: estraiamo da questo la traccia e scriviamo la matrice come somma di una matrice a traccia nulla simmetrica e di un'altra isotropa la cui traccia sia uguale a quella della matrice di partenza.

$$(\underline{\nabla s})^s = (\underline{\nabla s})_0^s + \frac{\theta}{3} \underline{\underline{U}}$$

dove θ è la traccia della matrice di partenza (la traccia, per definizione, è la somma degli elementi della diagonale principale) e $\underline{\underline{U}}$ è la matrice unitaria. In forma matriciale

$$(\underline{\nabla s})^s = \begin{bmatrix} u_x - \frac{\theta}{3} & \frac{v_x + u_y}{2} & \frac{w_x + u_z}{2} \\ \frac{v_x + u_y}{2} & v_y - \frac{\theta}{3} & \frac{w_y + v_z}{2} \\ \frac{w_x + u_z}{2} & \frac{w_y + v_z}{2} & w_z - \frac{\theta}{3} \end{bmatrix} + \frac{\theta}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi

$$\underline{s}(\underline{r}) = \underline{s}(0) + \underline{r} \cdot (\underline{\nabla s})^a + \underline{r} \cdot (\underline{\nabla s})_0^s + \frac{\theta}{3} (\underline{r} \cdot \underline{\underline{U}}).$$

Concentriamo la nostra attenzione sugli ultimi due termini. Essendo $\underline{r} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{r}$, l'ultimo termine, $\frac{\theta}{3} \underline{r}$, ci indica che il punto si sposta nella direzione di \underline{r} (vettore posizione di P prima dello spostamento) di una quantità $\frac{\theta}{3}$. Ciò avviene per ogni \underline{r} , cioè per ogni punto, quindi la trasformazione è isotropa: $\frac{\theta}{3} \underline{r}$ è rappresentativo della **deformazione di solo volume**. Si noti che la quantità θ è per definizione $\theta = u_x + v_y + w_z$, cioè coincide con la divergenza del vettore velocità $\theta = \underline{\nabla} \cdot \underline{V}$.

La stessa interpretazione fisica, cioè che la divergenza della velocità rappresenta una deformazione di volume, può essere ottenuta partendo dall'equazione di continuità in forma locale

$$\frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} = \underline{\nabla} \cdot \underline{V}$$

Tutto quello che è stato detto finora circa la caratterizzazione della deformazione di un intorno vale in linea di principio per un mezzo continuo, quindi sia per un solido che per un fluido. In realtà, mentre per i solidi la situazione fisica è prevalentemente statica, e quindi effettivamente la deformazione può essere caratterizzata dal gradiente degli spostamenti, per i fluidi si è in generale interessati alla velocità di deformazione, intesa come derivata temporale dello spostamento. La precedente trattazione vale, pertanto, per i fluidi a patto di parlare di velocità di deformazione in luogo della deformazione stessa. In altri termini, la trattazione formale è identica andando a sostituire al vettore \underline{s} il vettore velocità \underline{V} .

Si ha

$$\frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} = \theta$$

cioè la variazione relativa di volume per unità di tempo è misurata proprio da θ , divergenza del vettore velocità.

Il termine $\underline{r} \cdot (\underline{\nabla} V)_0^s$ rappresenta (per esclusione) **la velocità di deformazione di sola forma**. In definitiva, il contributo alle deformazioni, di sola forma e di solo volume, nel caso in cui si parla di fluidi sono

$$\underline{r} \cdot (\underline{\nabla} V)_0^s + \frac{\theta}{3} \underline{r} \quad \text{con } \theta = \underline{\nabla} \cdot \underline{V}.$$

Cerchiamo ora un'espressione per il **tensore degli sforzi** $\underline{\underline{\tau}}$

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Innanzitutto osserviamo che quando non ci sono coppie interne al mezzo di natura magnetica, come è nel nostro caso, il tensore degli sforzi è simmetrico. Definiamo lo **sforzo normale medio**

$$\pi = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

cioè lo sforzo normale medio è un terzo della traccia

Il tensore $\underline{\underline{\tau}}$ può essere così decomposto

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \pi & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \pi & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

cioè

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}_0 + \pi \underline{\underline{U}}$$

Il nostro scopo è di definire una relazione tra lo sforzo e la deformazione, ossia una relazione tra causa ed effetto, che stabilisca un legame, in particolare, tra $\underline{\underline{\tau}}_0$ e $(\underline{\nabla} V)_0^s$, e tra π e θ .

Dobbiamo tenere presente che tra gli sforzi normali è presente la pressione termodinamica, che non è certamente definita come effetto conseguente delle deformazioni. La pressione termodinamica è un'aliquota "non dissipativa" del tensore degli sforzi, in pratica è l'aliquota dello sforzo normale che non determina produzione di entropia. La pressione termodinamica p è uno sforzo intrinsecamente di compressione, noi per convenzione abbiamo considerato gli sforzi positivi se di trazione, quindi nell'espressione di $\underline{\underline{\tau}}$ davanti a p dovremo mettere il segno meno. Poiché lo sforzo normale di pressione termodinamica è isotropo, ovvero uguale in tutte le direzioni, avremo

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}_0 + (\pi + p)\underline{\underline{U}} - p\underline{\underline{U}}$$

La parte di $\underline{\underline{\tau}}$ che si origina a seguito delle deformazioni è $\underline{\underline{\tau}}_0 + (\pi + p)\underline{\underline{U}}$, la parte dovuta all'agitazione molecolare è $-p\underline{\underline{U}}$ (la pressione termodinamica). La quantità

$$\underline{\underline{\tau}}_d = \underline{\underline{\tau}}_0 + (\pi + p)\underline{\underline{U}}$$

viene anche detta **parte dissipativa** del tensore degli sforzi.

Esistono delle relazioni che esprimono un legame tra deformazioni (causa) e tensioni (effetto), e nel caso di piccole deformazioni tali relazioni sono lineari; un fluido che ha un comportamento elastico di questo tipo viene detto **newtoniano**. Seguendo questo modello, avremo le relazioni fenomenologiche sforzo-deformazione

$$\begin{cases} \underline{\underline{\tau}}_0 = 2\mu(\nabla V)_0^s \\ \pi + p = \lambda \nabla \cdot V \end{cases}$$

secondo le quali $\underline{\underline{\tau}}_0$ è proporzionale alla deformazione di sola forma per il tramite del coefficiente 2μ , e la somma dello sforzo normale medio e della pressione termodinamica è proporzionale alla deformazione di volume per il tramite del coefficiente λ . μ e λ sono detti rispettivamente **primo e secondo coefficiente di viscosità dinamica**.

In definitiva

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{U}} + 2\mu(\nabla V)_0^s + \lambda(\nabla \cdot V)\underline{\underline{U}}$$

L'espressione del singolo **sforzo normale**, per esempio quello lungo l'asse x è

$$\sigma_x = -p + \lambda \nabla \cdot V + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \nabla \cdot V \right)$$

cioè

$$\sigma_x = -p + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot V + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = -p + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot V + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_z = -p + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot V + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

Se $\nabla \cdot V = 0$, moto incomprimibile, il secondo termine sarà nullo, non avremo cioè deformazioni di volume. Inoltre avremo

$$\pi + p = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi = -p}$$

per moti incomprimibili lo sforzo normale medio di tipo viscoso è proprio uguale, a meno del segno, alla pressione termodinamica.

Per la maggior parte dei fluidi di interesse accade che $\lambda \ll \mu$. Nei casi in cui λ sia trascurabile possiamo considerare valida la relazione $\pi = -p$ anche per moti compressibili. Per l'aria tale approssimazione è abbastanza ragionevole.

E' doveroso fare una considerazione: λ e μ , per regimi di moto laminare, sono proprietà della materia e non del moto e si possono ricavare grazie alla termodinamica, in particolare utilizzando la teoria cinetica dei gas. In regime turbolento è possibile adottare una modellistica che introduce gli stessi coefficienti i quali, però, vanno a dipendere, oltre che dal fluido, anche dal moto e il discorso si fa alquanto più complesso (il regime turbolento è caratterizzato da macrostrutture vorticosi che hanno un moto non regolare nel tempo e nello spazio).

Ricaviamo ora l'**espressione del generico sforzo tangenziale**. Lo sforzo tangenziale è legato alla esclusivamente alla deformazione di sola forma, avremo

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Supponiamo di avere un moto piano (piano xy), e consideriamo lo sforzo τ_{xy} . Nel caso in cui non c'è variazione rispetto a y della componente lungo x della velocità $\left(\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \right)$ si ottiene la **legge di**

Newton:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Consideriamo, ad esempio, il moto bidimensionale piano di un fluido viscoso che scorre in un canale. Supponiamo che il canale sia molto stretto (v. fig. 11).

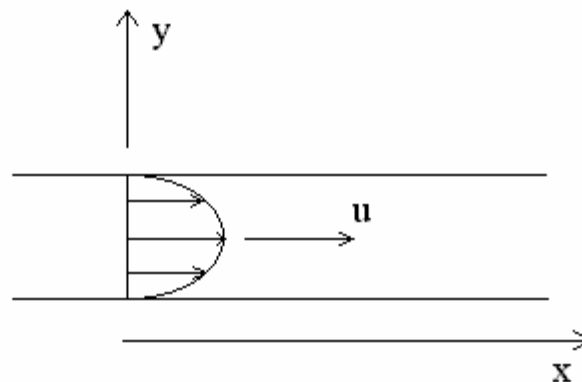


Figura 11

Per la continuità, non c'è moto relativo tra fluido e parete solida. Ci aspettiamo sicuramente una forma simmetrica del profilo di velocità lungo y , con un andamento non lineare, dovendo essere una funzione regolare. La componente della velocità in direzione y sarà nulla, il moto sarà laminare, cioè il fluido sarà schematizzabile come un insieme di lamine di spessore infinitesimo, ognuna con

una velocità diversa da quelle adiacenti. Si avrà quindi uno scorrimento relativo delle diverse lamine, tra le quali nascerà uno sforzo tangenziale τ . L'attrito tra il fluido e la parete è dato dalla τ della legge di Newton valutata per $y=0$.

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

La quantità di moto diffonde quindi nella direzione perpendicolare al moto tramite il coefficiente μ , che è una proprietà del fluido.

• ESPRESSIONE DEL LAVORO, BILANCIO DI ENERGIA PER SISTEMI APERTI

Abbiamo già dato una espressione alla forza superficiale, in relazione all'equazione del bilancio della quantità di moto. Ora, in relazione all'equazione del bilancio o della conservazione dell'energia totale, cerchiamo una espressione per i flussi di energia. Quello nel modo calore ci sarà dato dalla legge di Fourier, cerchiamo quindi di dare un'espressione al flusso nel modo lavoro.

L'equazione dell'energia totale è

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e_{TOT} dv + \int_S (\rho \underline{V} e_{TOT}) \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{J}_L \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{n} dS = 0$$

Poiché l'energia è uno scalare, il suo flusso sarà un vettore. Diamo un'espressione a \underline{J}_L . Il lavoro è definito come il prodotto scalare di una forza per uno spostamento, indicando con \underline{f} la forza per unità di superficie avremo

$$\frac{L}{S} = \underline{f} \cdot \underline{s}$$

Poiché a noi interessano le velocità e non gli spostamenti, dividiamo per il tempo t

$$\frac{L}{S \cdot t} = \underline{f} \cdot \underline{V}$$

Si noti che a primo membro si ha un'energia per unità di tempo e di superficie, ovvero un flusso di energia. Essendo

$$\underline{f} = \underline{\tau} \cdot \underline{n}$$

avremo

$$\frac{E}{S \cdot t} = (\underline{\tau} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{V} = (\underline{\tau} \cdot \underline{V}) \cdot \underline{n}$$

L'ultimo passaggio è lecito perché, nelle nostre ipotesi, $\underline{\tau}$ è un tensore simmetrico. Questo è il lavoro per unità di tempo fatto nell'intorno di un punto, ovvero è la componente del flusso d'energia in direzione normale all'elemento di superficie considerato. Se vogliamo tutto il lavoro

per unità di tempo dobbiamo integrare su tutta la superficie, la quantità ottenuta sarà un lavoro per unità di tempo, ossia una potenza e coinciderà con l'ultimo termine dell'equazione del bilancio dell'energia

$$- \int_S \underline{J}_L \cdot \underline{ndS} .$$

Tenendo conto che \underline{J}_L è positivo se l'energia esce dal sistema (lavoro compiuto dal sistema) e che $\underline{\tau}$ è il tensore degli sforzi applicati sul sistema si ha

$$\boxed{\underline{J}_L = -(\underline{\tau} \cdot \underline{V})}$$

Questa relazione ha carattere locale e vale per ogni punto della superficie del sistema.

Decomposizione di \underline{J}_L

Possiamo decomporre il termine di flusso diffusivo di energia nel modo lavoro come abbiamo già fatto per $\underline{\tau}$. Il bilancio di energia si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e_{TOT} dv + \int_S (\rho V e_{TOT}) \cdot \underline{ndS} - \int_S (\underline{\tau} \cdot \underline{V}) \cdot \underline{ndS} + \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{ndS} = 0$$

essendo

$$\underline{\tau} = -p \underline{U} + \underline{\tau}_d$$

si ha

$$\underline{\tau} \cdot \underline{V} = (-p \underline{U} + \underline{\tau}_d) \cdot \underline{V} = -p \underline{V} + \underline{\tau}_d \cdot \underline{V}$$

sostituendo nell'equazione del bilancio

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e_{TOT} dv + \int_S (\rho V e_{TOT}) \cdot \underline{ndS} + \int_S p \underline{V} \cdot \underline{ndS} - \int_S (\underline{\tau}_d \cdot \underline{V}) \cdot \underline{ndS} + \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{ndS} = 0$$

Analizziamo ora i termini

- $\int_S p \underline{V} \cdot \underline{ndS}$: è il lavoro compiuto dallo sforzo di pressione ed è detto **lavoro di pulsione**;
- $-\int_S (\underline{\tau}_d \cdot \underline{V}) \cdot \underline{ndS}$: è il lavoro legato allo sforzo viscoso e, in generale, esso coincide con quello che convenzionalmente viene chiamato **lavoro di elica**.

E' stato scelto il termine "lavoro di elica" perché, nelle nostre ipotesi, in un condotto a pareti rigide in cui si abbia il moto di un fluido unidimensionale, questa aliquota del lavoro è non nulla solo nel caso in cui ci sia un dispositivo (come un'elica, o una turbomacchina in generale) che inneschi un processo di scambio di energia nel modo lavoro con il fluido in moto. Per le superfici rigide è facile rendersi conto di ciò, in quanto nel continuo la velocità relativa fluido-superficie è nulla alla parete e dunque il lavoro scambiato è nullo. Per le superfici permeabili il lavoro scambiato nel caso di moto unidimensionale incomprimibile è nullo perché su tali superfici $\underline{\tau}_d = 0$ se solo $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Consideriamo ora il termine convettivo dell'equazione del bilancio dell'energia. Si ha

$$\int_S (\rho V \underline{e}_{TOT}) \cdot \underline{ndS} = \int_S \rho V \left(u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \cdot \underline{ndS}$$

Se combiniamo questo termine a quello diffusivo dovuto al lavoro di pulsione, si ottiene la quantità

$$\int_S \rho \left(u + \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \underline{V} \cdot \underline{ndS} = \int_S \rho \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \underline{V} \cdot \underline{ndS}$$

ricordando l'espressione dell'entalpia specifica $h = u + \frac{p}{\rho}$.

Introduciamo ora una nuova grandezza

$$H = h + \frac{V^2}{2} + gz$$

H è detta **entalpia totale** ed è una misura dell'energia totale.

In definitiva l'equazione di bilancio dell'energia totale si può scrivere

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V \rho e_{TOT} dv + \int_S (\rho V H) \cdot \underline{ndS} + \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{ndS} + L_{elica} = 0}$$

- **APPLICAZIONE DELL'EQUAZIONE DELL'ENERGIA: TEOREMA DI BERNOULLI**

Supponiamo di avere il moto **non viscoso** di un fluido all'interno di un condotto (vedi figura 12); in questo caso il lavoro di elica sarà nullo. Supponiamo che il moto sia unidimensionale, senza scambio di lavoro e di calore, ossia le trasformazioni siano anergodiche e adiabatiche.

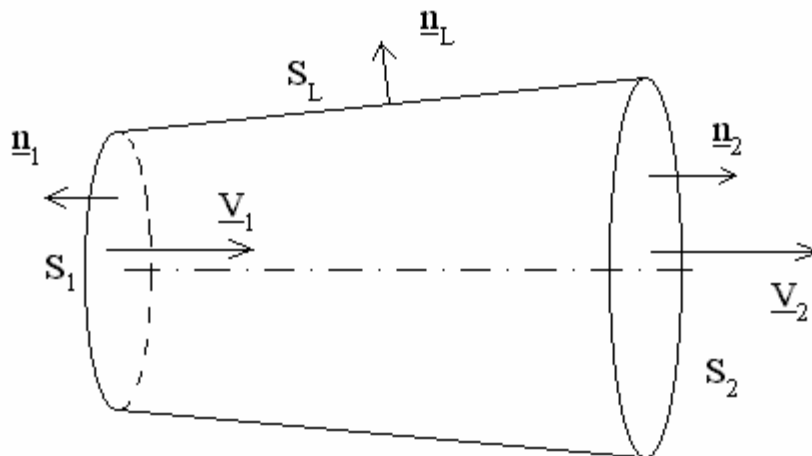


Figura 12

Facendo l'ulteriore ipotesi di stazionarietà dall'equazione dell'energia si ha

$$\int_S (\rho \underline{V} H) \cdot \underline{n} dS = 0$$

essendo $S = S_1 + S_2 + S_L$ e $\underline{V} \cdot \underline{n}_L = 0$, si ottiene

$$\int_{S_1} (\rho \underline{V} H) \cdot \underline{n}_1 dS + \int_{S_2} (\rho \underline{V} H) \cdot \underline{n}_2 dS = 0$$

cioè

$$-\rho_1 V_1 S_1 H_1 + \rho_2 V_2 S_2 H_2 = 0$$

e poiché, nelle stesse condizioni di moto, la continuità fornisce

$$\dot{m} = \rho V S = \text{cost}$$

si ha

$$\boxed{\Delta H = 0} \Leftrightarrow H = h + \frac{V^2}{2} + gz = \text{cost}$$

Sotto queste ipotesi, cioè, il moto è omoenergetico, l'entalpia totale si conserva. Quest'ultima è l'**espressione generalizzata dell'equazione di Bernoulli** e vale per moti isoentropici e stazionari. Si può dimostrare che l'ipotesi di moto unidimensionale non è essenziale, poiché questa equazione vale lungo ogni linea di corrente e la costante a secondo membro, se le condizioni iniziali non sono uniformi, può variare da linea di corrente a linea di corrente (moto isoentalpico). Nel caso di moto unidimensionale, la costante è la stessa per ogni linea di corrente e il moto è detto omoentalpico. Si potrebbe anche discutere che la stazionarietà del moto non è neanche essa una assunzione essenziale, per cui la vera unica ipotesi irrinunciabile per la validità dell'equazione di Bernoulli è la isoentropicità, ovvero la trascurabilità degli effetti dissipativi. Nel seguito saranno discusse le condizioni per le quali il moto di un fluido può essere studiato come non viscoso.

• CONFRONTO DEI BILANCI DI ENERGIA PER SISTEMI CHIUSI E APERTI

Abbiamo visto che, se il moto è non dissipativo e non ci sono scambi di energia nei modi di calore e lavoro (di elica), l'entalpia è costante lungo una linea di corrente. Inoltre se il moto è unidimensionale e stazionario avremo $H = h + \frac{V^2}{2} + gz = \text{cost}$ in tutto il campo e $\dot{m} = \rho V S = \text{cost}$.

Se gli scambi nei modi calore e lavoro sono non nulli l'equazione dell'energia si scrive (riferendoci allo schema di figura 12)

$$\dot{m} (H_2 - H_1) = - \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{n} dS - \dot{L}_{elica}$$

cioè

$$\boxed{\dot{m} (H_2 - H_1) = \dot{Q} - \dot{L}_{elica}}$$

Ricordiamo che il punto posto sopra i simboli Q e L indica che si tratta di energie scambiate per unità di tempo e non di produzioni. L'espressione del primo principio della termodinamica è

$$\boxed{m(u_2 - u_1) = Q - L}$$

Si possono fare le seguenti considerazioni, evidenziando le **differenze**

- Il primo principio deriva dall'equazione del bilancio dell'energia quando il sistema è chiuso e non ci sono termini convettivi di scambio. L'altra relazione vale invece per sistemi aperti.
- Il primo principio è stato ottenuto prescindendo dall'ipotesi di stazionarietà, anzi le variazioni Δu sono da intendersi temporalmente, mentre nella prima espressione è stata fatta l'ipotesi di stazionarietà.
- Nell'espressione del primo principio sono state trascurate le forme di energia cinetica e potenziale.
- $(u_2 - u_1)$ rappresenta la differenza di energia interna in due tempi diversi, $(H_2 - H_1)$ è invece la variazione temporale lagrangiana, ossia seguendo la particella in un moto stazionario.

e le **analogie**

- Entrambe le equazioni individuano come causa di variazione dell'energia gli scambi nei modi lavoro e di calore, anche se in un caso ci si riferisce all'energia totale, nell'altro alla sola energia interna.

Per quanto riguarda la relazione

$$\dot{m}(H_2 - H_1) = \dot{Q} - \dot{L}_{elica}$$

potremo dire che $\dot{L}_{elica} \neq 0$ solo se all'interno del condotto ci sono organi mobili come ad esempio il **compressore**, che compie lavoro sul sistema, o la **turbina** che assorbe lavoro dal sistema. Scambi di calore possono invece essere presenti sia per la presenza di **scambiatori di calore** che per la presenza di combustioni interne, in quest'ultimo caso si parla di **adduzione di calore**. In ogni caso lo studio energetico di un condotto, nelle ipotesi fatte, può essere affrontato con l'equazione trovata.

• BILANCIO DI QUANTITA' DI MOTO PER MOTI STAZIONARI E UNIDIMENSIONALI

Si può ricavare l'equazione di Bernoulli anche dall'equazione del bilancio della quantità di moto facendo l'ipotesi di moto stazionario, non dissipativo e incomprimibile.

Noi, invece, partiamo dall'equazione di Bernoulli in forma generalizzata

$$h + \frac{V^2}{2} + gz = cost$$

$$u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cost$$

Poiché il moto è isoentropico ($s=cost$) e incomprimibile ($v=cost$), l'energia interna $u(s,v)$ è costante e potrà essere portata a secondo membro. L'equazione diventa

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cost$$

che è l'**equazione di Bernoulli nella forma classica**. Questa relazione è del tipo energetico, ma può avere una interpretazione dinamica se moltiplicata per ρ .

$$p + \rho \frac{V^2}{2} + \rho gz = cost$$

La somma della pressione termodinamica, di quella dinamica e di quella idrostatica, è costante lungo una linea di corrente. E' da notare che, come detto, è possibile ricavare l'equazione di Bernoulli dall'equazione della quantità di moto. Ciò sembra essere sintomo di una perdita di efficacia informativa, in realtà, ipotizzando $\rho = cost$, le incognite diminuiscono in numero. L'ipotesi di incomprimibilità è necessaria quanto quella di moto non viscoso. Nel caso di un moto stazionario in un condotto orizzontale, $z = cost$, si ha quindi

$$p + \rho \frac{V^2}{2} = cost$$

Quest'equazione, in regime incomprimibile e non viscoso (vedremo che la seconda assunzione è legata a quella di alto numero di Reynolds) può essere impiegata anche per spiegare la generazione della portanza su un profilo alare (che è essenzialmente un effetto non viscoso). Quando un corpo, come un profilo (campo di moto bidimensionale), viene investito da una corrente, fa sì che si generino scorrimenti sul dorso e sul ventre a velocità differente. In particolare, se il corpo è ricurvo verso l'alto (vedi fig. 13), avremo velocità maggiori sul dorso rispetto al ventre. Questa differenza di velocità, per l'equazione di Bernoulli, si traduce in una differenza di pressione che genera una forza aerodinamica verso l'alto. In effetti, si definisce **portanza** la componente della forza aerodinamica perpendicolare alla velocità a monte.

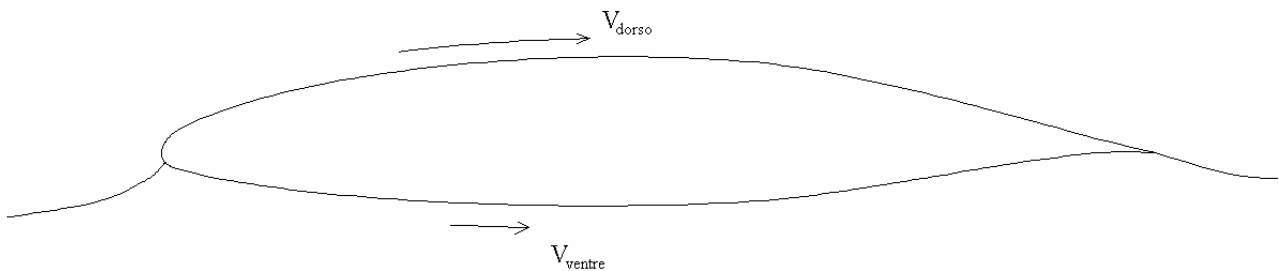


Figura 13

Facciamo cadere ora le ipotesi di moto incomprimibile e non viscoso. Consideriamo il condotto di figura 12, l'equazione della quantità di moto nella sua forma generale è

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dv + \int_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS + \int_S p \underline{n} dS - \int_S \underline{\tau}_d \cdot \underline{n} dS = m \underline{g}$$

dove

- $\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dv + \int_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS$ è la **forza d'inerzia**;
- $\int_S p \underline{n} dS$ è il termine **diffusivo non dissipativo**, fisicamente è la risultante delle forze di pressione;
- $-\int_{S=d} \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS$ è il termine **diffusivo dovuto all'attrito** del fluido sulla superficie;
- $m \underline{g}$ è la **forza peso**.

Se il moto è stazionario il primo termine della forza d'inerzia sarà nullo. L'equazione diventa

$$\int_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS + \int_S p \underline{n} dS - \int_{S=d} \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS = m \underline{g}$$

Poiché il moto è unidimensionale, se la superficie laterale è impermeabile, il primo termine diventa

$$-\rho_1 V_1 \underline{V}_1 S_1 + \rho_2 V_2 \underline{V}_2 S_2 = \dot{m}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1)$$

cioè la forza d'inerzia è uguale alla portata massica per la variazione di velocità.

Il secondo termine si può scrivere

$$\int_S p \underline{n} dS = p_1 \underline{n}_1 S_1 + p_2 \underline{n}_2 S_2 + \int_{S_L} p \underline{n} dS$$

Poiché $\underline{\tau}_d = 0$ sulle superfici S_1 e S_2 , in quanto V è costante su tutti i punti di una stessa sezione trasversale (in effetti occorre anche fare l'ipotesi di moto che varia lentamente nella direzione assiale), l'equazione del bilancio diventa

$$\dot{m}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + p_1 \underline{n}_1 S_1 + p_2 \underline{n}_2 S_2 + \int_{S_L} p \underline{n} dS - \int_{S_L} \underline{\tau}_d \cdot \underline{n} dS = m \underline{g}$$

Chiamiamo **spinta** l'azione del fluido sulla superficie impermeabile, che evidentemente è la risultante delle forze di pressione e degli sforzi viscosi. Si ha, per definizione

$$\underline{S} = \int_{S_L} p \underline{n} dS - \int_{S_L} \underline{\tau}_d \cdot \underline{n} dS$$

per cui l'equazione del bilancio si scrive

$$\boxed{\dot{m}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + p_1 S_1 \underline{n}_1 + p_2 S_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = m \underline{g}}$$

Definiamo ora una nuova grandezza: l'**impulso**. Poiché

$$\underline{V}_1 = -V_1 \underline{n}_1; \quad \underline{V}_2 = V_2 \underline{n}_2; \quad \dot{m} = \rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2;$$

Il bilancio di quantità moto si può scrivere

$$(p_1 + \rho_1 V_1^2) S_1 \underline{n}_1 + (p_2 + \rho_2 V_2^2) S_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = m \underline{g}$$

Si definisce impulso I la quantità

$$I = p + \rho V^2$$

l'equazione diventa

$$I_1 S_1 n_1 + I_2 S_2 n_2 + \underline{S} = m \underline{g}$$

Supponiamo di avere un moto per il quale $m \underline{g}$ può essere trascurato, supponiamo inoltre che il moto sia non viscoso e simmetrico. Sotto queste ipotesi la spinta è nulla. L'equazione, nel caso di condotto a sezione costante diventa

$$I_1 - I_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I = p + \rho V^2 = \text{cost}$$

Ritorniamo ora all'equazione scritta in precedenza, prima di introdurre la definizione di impulso. Applichiamo tale equazione al calcolo della spinta generata da un turboreattore, nell'ipotesi che questo sia montato al banco di una sala prova. Gli effetti gravitazionali sono trascurabili perché il banco è orizzontale e, una volta proiettata lungo la direzione orizzontale, l'equazione diventa

$$\dot{m}(V_2 - V_1) - p_1 S_1 + p_2 S_2 + S_x = 0$$

Se il termine derivante dalla variazione di velocità è relativamente grande, è possibile trascurare il contributo delle pressioni e, di conseguenza, si ottiene

$$S_x = -\dot{m}(V_2 - V_1)$$

dove il segno meno sta a significare che la spinta del fluido sulle pareti è diretta verso l'asse negativo delle x, cioè verso sinistra con riferimento alla figura 12.

Nella pratica il flusso è accelerato alla velocità di uscita V_2 attraverso il processo di combustione che adduce energia al flusso stesso e mediante l'impiego di un condotto di uscita a sezione variabile, detto ugello, che consente di utilizzare tale incremento di energia sotto forma di energia cinetica.