TRASMISSIONE DEL CALORE

La diffusione dell'energia, per quanto visto finora, avviene in due modi: lavoro e calore. Abbiamo già ampiamente parlato della diffusione nel modo lavoro, cerchiamo ora di approfondire la diffusione nel modo calore, ovvero, più in generale, la trasmissione del calore.
I meccanismi di trasmissione del calore sono classicamente tre: **conduzione**, **convezione**, e **irraggiamento**. Per iniziare, discutiamo questi tre meccanismi in modo qualitativo.

Conduzione

La conduzione del calore è un tipico fenomeno diffusivo, infatti è dovuta ai moti molecolari a livello microscopico. Questa modalità di trasmissione del calore è tipica dei corpi solidi, anzi, nei solidi essa rappresenta proprio il principale meccanismo di scambio dell'energia. Naturalmente, come per ogni mezzo continuo, la conduzione è presente anche nei fluidi, nei quali il meccanismo di diffusione si accoppia a quello convettivo.
Esiste una legge fondamentale che lega il flusso di calore per conduzione al gradiente di temperatura

$$\boxed{\underline{\dot{J}}_q = -k\underline{\nabla}T} \qquad \textbf{Legge di Fourier}$$

la quale ci dice che il flusso di calore ha la stessa direzione del gradiente di temperatura e verso opposto; essendo $k > 0$ (per il secondo principio della termodinamica) il calore si trasferisce dalle zone calde a quelle fredde. Il coefficiente k è detto coefficiente di scambio termico per conduzione o **conducibilità termica** e rappresenta una proprietà della materia, per cui può essere espresso in funzioni di due sole variabili di stato intensive, per esempio $k = k(p,T)$. L'analogo coefficiente per i flussi diffusivi di quantità di moto è μ, che rappresenta anch'esso una proprietà della materia.

Irraggiamento

L'energia in questo caso è trasferita attraverso onde elettromagnetiche.
Le onde elettromagnetiche sono classificate, oltre che per la fonte dalla quale sono emesse, soprattutto per la banda di lunghezze d'onda a cui appartengono (ultravioletto, visibile, infrarosso, ecc...).
Ogni corpo emette onde elettromagnetiche, diverse a seconda della temperatura alla quale esso si trova. La maggior parte dell'energia che fluisce tramite le onde, si concentra in una definita banda di lunghezze d'onda, detta **banda di radiazione termica** ($10^{-1} \div 10^{2}\,\mu m$).
La legge su cui ci si basa per determinare la quantità di energia per unità di tempo emessa da una superficie che è mantenuta ad una certa temperatura è la **legge di Planck**, che esprime il flusso di energia in termini scalari (non ha senso esprimere il flusso in termini vettoriali poiché un corpo emette radiazioni in tutte le direzioni). Per motivi storici non usiamo il simbolo usuale $\dot{Q}$ ma il simbolo E, che ha le dimensioni di un flusso di energia

$$[E] = \left[\frac{Energia}{Sup \cdot Tempo}\right]$$

E è detto **potere emissivo di una sorgente**.
La legge di Planck è

$$E = \frac{c_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)}$$ **Potere emissivo del corpo nero**

dove c_1 e c_2 sono due costanti universali che hanno quindi lo stesso valore per ogni corpo, T è la temperatura della superficie che emette onde e λ è la lunghezza d'onda alla quale viene emessa la radiazione

Il potere emissivo così definito è detto **monocromatico** e lo indicheremo con E_λ.

Dalla legge di Planck, si nota che il potere emissivo monocromatico dipende dalla lunghezza d'onda e dalla temperatura del corpo. In realtà E_λ dipende anche dalle caratteristiche fisiche della superficie del corpo che emette radiazioni. Il potere emissivo che si ottiene dalla legge di Planck è quello emesso (o assorbito) da un corpo ideale, avente caratteristiche superficiali tali da massimizzare la quantità di energia trasferibile per irraggiamento, **il corpo nero**. Il potere emissivo ottenuto dalla legge di Planck lo indicheremo quindi con $E_{n\lambda}$, per evidenziare che si riferisce a quello emesso (assorbito) da un corpo nero.

Quindi, in simboli, per un corpo una superficie reale è

$$E_\lambda = E_\lambda (T, superficie)$$

Per il corpo nero

$$E_{n\lambda} = E_{n\lambda}(T)$$

Poiché il maggiore interesse è concentrato sul potere emissivo totale, si può dare l'andamento qualitativo del potere emissivo monocromatico con λ a temperatura fissata (fig. 20).

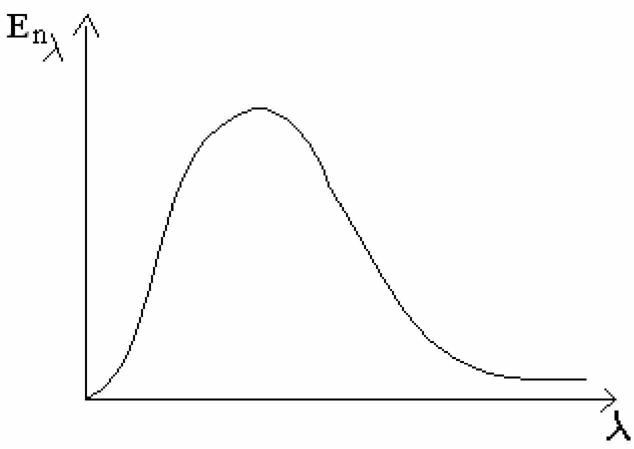

Figura 20

Il potere emissivo totale del corpo nero è

$$E_n = \int_0^{+\infty} E_{n\lambda} d\lambda$$

cioè l'area sottesa alla curva di figura 20. L'espressione finale dell'integrale è dato dalla **formula di Stefan – Boltzman**

$$\boxed{E_n = \sigma T^4}$$

che in questi termini è valida per trasferimento di energia nel vuoto.
Il potere emissivo totale del corpo nero è, perciò, proporzionale alla quarta potenza della temperatura, σ è detta **costante di Stefan – Boltzman**, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\, W/m^2 K$.

Convezione

La convezione è il meccanismo di scambio termico tra un corpo e una corrente fluida che lambisce la sua superficie. Per semplicità consideriamo una lastra piana su cui scorre un fluido.

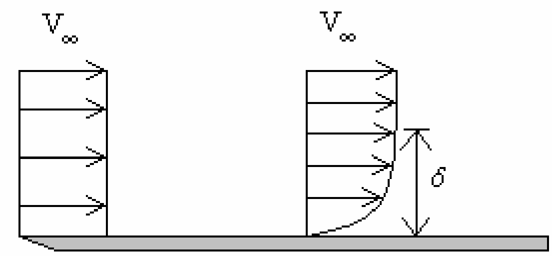

Figura 21

La lastra rappresenta un disturbo per la corrente, sia nei confronti della diffusione della quantità di moto che nei confronti di quella dell'energia. Da una preliminare analisi fisica del problema appare chiaro che lo scambio di energia tra fluido e parete dipende dalla differenza di temperatura tra quella indisturbata del fluido T_∞ e quella della superficie, nonché dal campo di moto (dipendente da V_∞) che si instaura sulla parete, e quindi dalla struttura dello strato limite e dalle caratteristiche del fluido (coefficiente di viscosità, coefficiente di conducibilità termica, ecc…) Il meccanismo di scambio è dunque alquanto complesso e in linea di principio la sua determinazione coinvolge la risoluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali.
Allo scopo di ricondurre il problema ad un approccio sintetico e ingegneristico appare conveniente esprimere il flusso termico incognito come

$$\dot{q} = h\left(T_p - T_\infty\right)$$

dove T_p è la temperatura di parete, T_∞ la temperatura statica della corrente, h **il coefficiente di scambio termico per convezione**. In realtà la relazione sopra scritta non è altro che un modo per spostare l'incognita sul coefficiente *h*, il quale è a sua volta funzione del campo di moto e quindi dalla geometria del corpo immerso nella corrente fluida. Praticamente, scrivendo quest'espressione per $\dot{q}$ abbiamo solo introdotto una legge di proporzionalità tra energia scambiata e differenza di temperatura, spostando tutte le altre dipendenze, tra le quali quella fondamentale dal campo di moto, nel coefficiente *h*. La convenienza è apprezzata attraverso l'analisi dimensionale perché verificheremo che il coefficiente *h*, opportunamente adimensionalizzato, può essere posto in relazione con altri parametri dimensionali caratterizzanti il campo di moto (quale, ad esempio, il numero di Reynolds). Utilizzando, quindi, il concetto della similitudine fluidodinamica, è possibile pervenire a relazioni tra parametri adimensionali che sono di validità "universale" e che perciò, sotto certe condizioni, possono essere determinate una volta per tutte.
Vedremo che il parametro adimensionale che caratterizza lo scambio termico è il **numero di Nusselt**

$$\boxed{Nu = \frac{hL}{k}}$$

in cui il coefficiente *k* è la conducibilità termica del fluido (attenzione, non confondere il numero di Nusselt con il numero di Biot). Dall'esame delle equazioni di Navier-Stokes (o dello strato limite) si può pervenire al risultato che il numero di Nusselt è funzione del numero di Reynolds

$$Nu = f(Re) \qquad \text{con } Re = \frac{\rho VL}{\mu}$$

e di altri parametri dimensionali, quale il numero di Prandtl.
Da un punto di vista pratico, noto il numero di Reynolds della corrente che lambisce la superficie, dalla relazione "universale" si può ricavare il numero di Nusselt e da qui il coefficiente *h*.

Analizziamo ora uno per uno, in modo più approfondito, i meccanismi di scambio appena visti.

- **CONDUZIONE**

Per studiare la conduzione prendiamo in considerazione l'equazione del bilancio dell'energia interna in forma differenziale, nella sua formulazione lagrangiana, in cui compaiono esplicitamente solo i flussi di tipo diffusivo. Supponiamo quindi di avere a che fare con un solido, l'equazione sopra menzionata si scrive nel modo

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{J}_u = \dot{u}^+$$

Per un solido $c_v = c_p = c \;\Rightarrow\; du = cdT$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{J}_u = \dot{u}^+$$

Questa è una equazione del bilancio in formulazione locale, cioè formalmente scritta per un intorno infinitesimo di un punto. Il primo termine è la variazione nel tempo dell'energia interna, il secondo è il termine di scambio per flusso diffusivo, il terzo è la produzione di energia interna.
E' da osservare che, anche utilizzando una formulazione di tipo euleriano il termine di scambio per flusso convettivo sarebbe nullo, poiché nei solidi, il flusso macroscopico di massa è nullo. Il termine $\dot{u}^+$ è stato portato in conto per l'eventuale presenza di produzioni dovute all'effetto Joule.
L'equazione del bilancio, considerando la legge di Fourier, si scrive

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \left(- k \underline{\nabla} T\right) = \dot{u}^+$$

Il coefficiente di conducibilità termica k in generale non è costante, essendo una proprietà della materia, e in condizioni di equilibrio termodinamico, è funzione di due grandezze termodinamiche. In pratica si può però considerare funzione della sola temperatura $k = k(T)$. Senza commettere errori molto gravi si può però considerare *k* costante; ciò significa che, in punti diversi a diversa temperatura, avremo la stessa conducibilità termica. Con questa ipotesi, l'equazione del bilancio diventa

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + \dot{u}^+}$$

dove $\nabla^2 T$ è l'operatore "laplaciano" che, in un sistema ortogonale cartesiano, è la somma delle tre derivate spaziali seconde della temperatura rispetto alle tre direzioni *x, y* e *z*. In altri sitemi di coordinate, l'espressione formale dell'operatore laplaciano è diversa.
L'equazione del bilancio così scritta, è un'equazione alle derivate parziali per la temperatura. Facendo opportune semplificazioni si possono studiare **casi particolari** di interesse notevole.

1.
   - Stazionarietà;
   - Assenza di produzioni.

   L'equazione diventa

   $$\nabla^2 T = 0$$

   che è l'equazione di Laplace.

2.
   - Stazionarietà;
   - Presenza di produzioni.

   Nell'equazione compare il termine di generazione

   $$k\nabla^2 T = -\dot{u}^+$$

   che è l'equazione di Poisson. In questo caso la produzione è un termine noto.

3.
   - Instazionarietà;
   - Assenza di produzioni.

   L'equazione diventa

   $$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T$$

   che è detta **equazione di Fourier**, equazione alle derivate parziali di tipo parabolico.

Vediamo ora nel caso generale come di può impostare il problema completo con le *condizioni al contorno*. L'equazione del bilancio nel caso generale è

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + \dot{u}^+$$

da risolvere in un determinato dominio spaziale.

Si può operare in tre modi

I. Assegnare una distribuzione di temperatura sul contorno (problema di Dirichlet);
II. Assegnare una distribuzione di flusso sul contorno (problema di Neumann);
III. Assegnare lo scambio termico superficiale con temperatura ambiente nota (problema di Robin con condizioni al contorno del tipo misto).

Il tipo di condizioni da assegnare non è dettato da nessuna legge, ma dalla convenienza rispetto al problema fisico in esame; in pratica l'assegnazione del tipo di condizioni dipende da ciò che è noto a priori e dal tipo di modello impiegato. Naturalmente non bisogna perdere di vista la matematica, poiché problemi di esistenza e di unicità della soluzione possono porre limitazioni alle condizioni al contorno da imporre per determinati tipi di equazioni..

Esempio di assegnazione di condizioni al contorno per l'equazione di Fourier

Supponiamo di voler studiare il campo di temperature instazionario che si instaura quando si pone una lastra inizialmente fredda in un fluido ambiente più caldo, in un instante iniziale in cui (necessariamente) la distribuzione di temperatura è una funzione nota dello spazio (condizione iniziale).

L'equazione di Fourier è

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T$$

da risolvere con le condizioni iniziali

$$T(x, y, z, t_0) = T_0(x, y, z)$$

e le condizioni al contorno, che ci dicono, in ogni istante $t > t_0$, cosa succede sul bordo del nostro dominio d'integrazione, nella fattispecie rappresentato dal bordo della lastra. In un problema di questo tipo, risulta difficile da un punto di vista fisico, pensare di assegnare una condizione alla Dirichlet, cioè imporre la distribuzione della temperatura sul bordo della lastra al variare del tempo. Facendo mente locale alla legge di scambio termico per convezione, ciò equivarrebbe a considerare un coefficiente di scambio termico convettivo infinito (che mantiene un flusso di calore finito con una differenza di temperatura nulla). Risulta più fisico imporre, invece, una condizione alla Neumann sulla derivata normale della temperatura sul bordo, imporre cioè una **condizione sul flusso termico** (che, come vedremo, può anche essere del tipo misto).

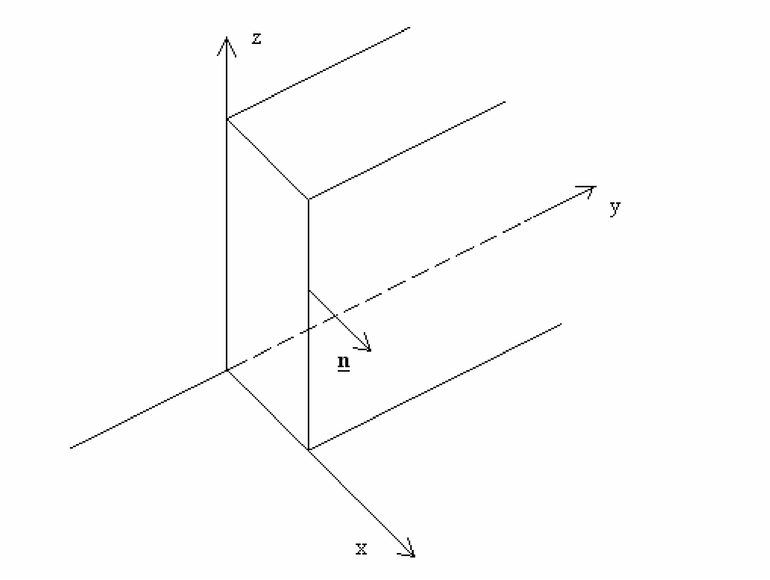

Figura 22

Supponiamo per esempio, inizialmente, che una faccia sia adiabatica, lo scambio di calore attraverso la superficie in questione sarà quindi nullo.
Poiché il flusso è $-k\underline{\nabla}T$, lo scambio attraverso la superficie piana di versore normale $\underline{n}$ sarà

$$-k\underline{\nabla}T\cdot\underline{n}=0$$

se *L* è lo spessore della lastra lungo *x* e il versore normale è parallelo all'asse *x*, risulta

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{x=L}=\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}=0$$

Abbiamo così assegnato una condizione sul flusso termico per mezzo di una derivata spaziale.
Più in generale, noto il flusso termico $\dot{q}$, la condizione da assegnare è

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}=\dot{q}$$

che rappresenta la condizione di Neumann nel caso generale. In presenza di un fluido ambiente che lambisce una superficie del solido, in assenza di generazioni superficiali, il calore ceduto per conduzione dalla lastra è pari a quello assorbito per convezione dal fluido, e la suddetta condizione può quindi essere posta anche nella forma

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}=h\left(T_p-T_{fl}\right);\qquad h=cost$$

dove T_{fl} è la temperatura del fluido che lambisce la parete e $T_p=T_{x=L}$ è la temperatura della parete.
Quest'ultima condizione, detta di tipo misto, può essere scritta anche nel seguente modo

$$hT_p-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}=hT_{fl}$$

che rende evidente la relazione lineare imposta tra temperatura e gradiente di temperatura alla parete.
Generalizzando, la condizione al contorno può essere sempre scritta come combinazione lineare della funzione incognita (*T* nel nostro caso) e della sua derivata spaziale in direzione normale al bordo *L*

$$aT_L + b\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_L = c$$

distinguendo poi i vari casi a seconda del valore delle tre costanti *a*, *b* e *c*.

CONDUZIONE STAZIONARIA

Studiamo ora la conduzione stazionaria senza generazioni. Distinguiamo i vari casi.

Caso unidimensionale piano
Utilizziamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale su una lastra. In realtà ogni sistema fisico ha geometria tridimensionale. Tuttavia, si può dire che, se due dimensioni sono prevalenti rispetto alla terza, trascurando gli effetti di bordo, i gradienti significativi solo lungo quest’ultima, che rappresenta la direzione lungo lo spessore.
Nelle ipotesi fatte, il bilancio di energia si riduce all’equazione di Laplace 1D

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,$$

equazione differenziale del secondo ordine la cui soluzione è

$$T(x) = c_1 x + c_2$$

Le costanti c_1 e c_2 vanno determinate dalle condizioni al contorno. Supponiamo di assegnare le due temperature, per *x*=0 e per *x*=L

$$T(0) = T_1; \qquad T(L) = T_2.$$

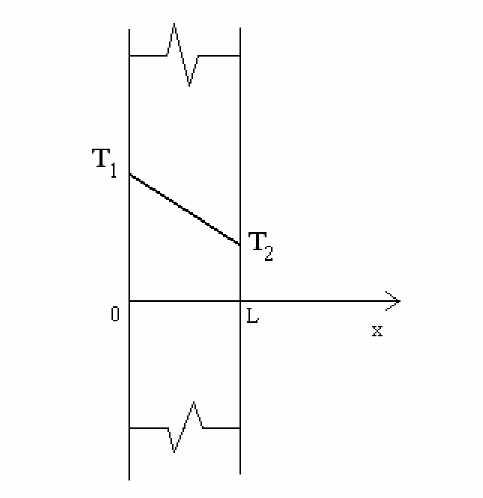

Figura 23

L'andamento della temperatura è lineare e il valore delle due costanti è così determinato

$$\begin{cases} c_2 = T(0) = T_1 \\ T(L) = T_2 = c_1 L + T_1 \Rightarrow c_1 = \dfrac{T_2 - T_1}{L} \end{cases}$$

Si ottiene

$$\boxed{T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1}$$

Poiché l'andamento delle temperature è lineare, il flusso termico è costante, cioè indipendente dall'ascissa *x*

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} = -k\left(\frac{T_2 - T_1}{L}\right) = \frac{k}{L}(T_1 - T_2)$$

Si nota che $\dot{q} > 0 \Leftrightarrow T_1 > T_2$, cioè nel nostro caso il flusso di calore è concorde col verso dell'asse *x*.
Per il calcolo della potenza termica scambiata, basta moltiplicare il flusso per l'area della superficie di scambio

$$\dot{Q} = \frac{kA}{L}(T_1 - T_2)$$

Si definisce **conduttanza termica** la quantità $K = \frac{kA}{L}$, che dipende dalla natura del materiale e dalla geometria. L'espressione del calore scambiato diventa

$$\dot{Q} = K \Delta T$$

La conduttanza termica viene introdotta per fare una analogia con la legge di Ohm; infatti, se la causa che può generare una corrente elettrica è la differenza di potenziale ΔV, quella che può generare un flusso di calore è una differenza di temperatura ΔT.
Si definisce una **resistenza termica** $R = 1/K$. In analogia con la legge di Ohm $\Delta V = RI$, si ha

$$\Delta T = R\dot{Q}$$

Problema a simmetria cilindrica
Vogliamo ora studiare la trasmissione del calore in un cilindro cavo le cui superfici interna ed esterna siano mantenute a temperature costanti assegnate.

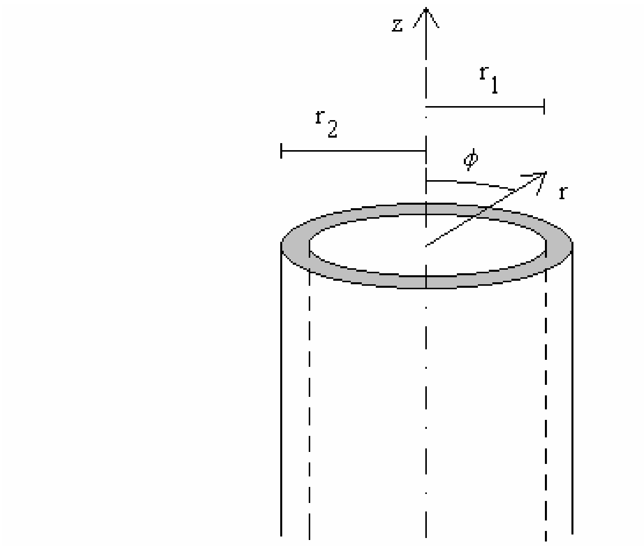

Figura 24

Studiamo il problema in coordinate cilindriche (r, ϕ, z), secondo le quali, la posizione di un punto, è univocamente determinata nel momento in cui si conoscono distanza dall'asse *r*, angolo azimutale ϕ (rispetto a una direzione radiale scelta d'arbitrio) e quota *z*. Se il cilindro è considerato molto lungo si può supporre che le proprietà termodinamiche del mezzo non dipendano dalla coordinata *z*, in quanto gli effetti di bordo alle estremità del cilindro possono ritenersi ivi confinati. Se, in aggiunta alla geometria, anche le condizioni al contorno sono tali da non spezzare la assialsimmetria del sistema, è lecito ipotizzare che il campo termico non dipende neanche da ϕ, e quindi, in definitiva, il sistema può considerarsi unidimensionale (**assialsimmetrico)**.
Assegniamo le condizioni al contorno sulle superfici di equazione $r = r_1$ e $r = r_2$.

$$\begin{cases} T(r_1) = T_1 \\ T(r_2) = T_2 \end{cases}$$

L'equazione da integrare è l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 T = 0$$

che, nel nostro sistema di riferimento si esplicita come

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

da cui

$$\left(r\frac{dT}{dr}\right) = cost$$

E' appena il caso di sottolineare che l'equazione della conduzione stazionaria senza generazione è sempre espressa dall'equazione di Laplace, ma l'espressione formale dell'operatore Laplaciano dipende dal sistema di riferimento scelto.

In questo caso, per le assegnate condizioni al contorno, è facile verificare che la distribuzione radiale di temperatura ha un andamento logaritmico, e di conseguenza il flusso termico non è costante lungo la direzione radiale. Integrando l'equazione differenziale si ottiene

$$T(r) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}$$

Il flusso di calore è

$$\dot{q} = k \frac{T_1 - T_2}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

La potenza termica scambiata attraverso una superficie cilindrica di raggio *r* sarà

$$\dot{Q} = \dot{q}A$$

Poiché $A = 2\pi r H$, H essendo l'altezza del cilindro, risulta

$$\dot{Q} = k 2\pi H \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

che evidentemente risulta essere costante.

E' conveniente "forzare" l'espressione della potenza termica nella forma $\dot{Q} = K\Delta T$, dove per questa geometria la conduttanza *K* può essere posta nella forma

$$\boxed{K = \frac{2\pi r_m kH}{r_2 - r_1}}$$

e $r_m = \dfrac{r_2 - r_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$ è il **raggio medio logaritmico**. Tale definizione di conduttanza è analoga a quella valida per il caso piano $K = kA/L$, laddove lo spessore L è sostituito dallo spessore del cilindro cavo $r_2 - r_1$ e la superficie di scambio è quella cilindrica $2\pi r_m H$, valutata in corrispondenza del cosiddetto raggio medio logaritmico.

I concetti di conduttanza e resistenza, utili perché *K* e *R* possono essere facilmente valutati per la maggior parte delle geometrie più semplici (e quindi sono disponibili sui manuali) sono utili anche per un altro motivo: spesso sistemi semplici possono essere messi in serie o in parallelo da un punto di vista termico, in completa analogia con quello che succede nello studio dei circuiti elettrici in elettromagnetismo.

SISTEMI TERMICI IN SERIE E IN PARALLELO

Un sistema termico è costituito da più corpi (ad esempio lastre) **in serie** se la differenza di temperatura esterna è tale da provocare (per la continuità del flusso) lo stesso flusso termico in ogni lastra. La differenza di temperatura ai capi di ogni lastra dipende evidentemente dalla conduttanza della lastra stessa.

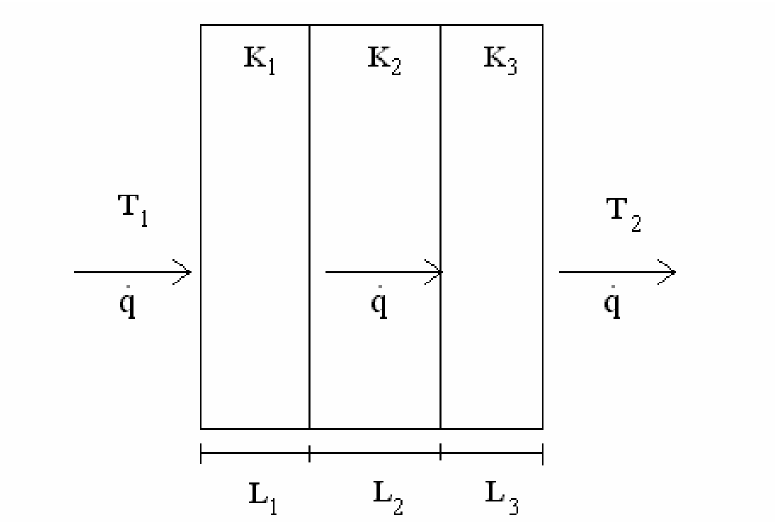

Figura 25

Un sistema termico è invece costituito da più corpi **in parallelo** se la differenza di temperatura esterna è la stessa per ogni singola lastra mentre i flussi termici sono tali che la loro somma dà il flusso termico totale.

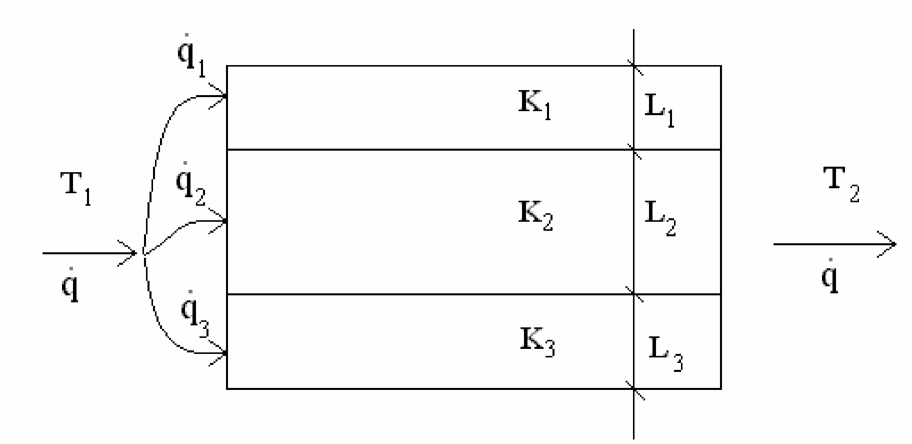

Figura 26

Nel caso di una serie di lastre di materiale diverso (fig. 25) e spessori differenti, con le stesse aree di scambio, $K = \frac{kA}{L}$ differisce a seconda del materiale e dello spessore. In piena analogia con l'elettrotecnica, per la serie

$$R_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

ed essendo

$$\dot{Q} = K_{TOT}\Delta T$$

si ha

$$\boxed{K_{TOT} = \frac{1}{R_{TOT}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{K_i}}} \qquad \textbf{SERIE}$$

Una volta determinata la potenza termica mediante l'espressione sopra riportata, è poi possibile calcolare la differenza di temperatura alle facce estreme di ogni lastra in quanto

$$\Delta T_i = \frac{\dot{Q}}{K_i}$$

Per il parallelo (fig. 26) vale invece

$$\boxed{K_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} K_i} \qquad \textbf{PARALLELO}$$

Infatti, per la lastra generica *i-ma* vale

$$\dot{Q}_i = K_i \Delta T$$

sommando su tutte le *i*, mettendo in evidenza ΔT, ed essendo $\dot{Q} = \sum_{i=1}^{n}\dot{Q}_i$, avremo

$$\dot{Q} = K_{TOT}\Delta T$$

e quindi l'asserto.

CONDUZIONE NON STAZIONARIA

Supponiamo di avere una lastra a temperatura relativamente elevata e di immergerla in un fluido in quiete a temperatura più bassa. Studiamo l'andamento della temperatura nello spazio e nel tempo durante il raffreddamento.

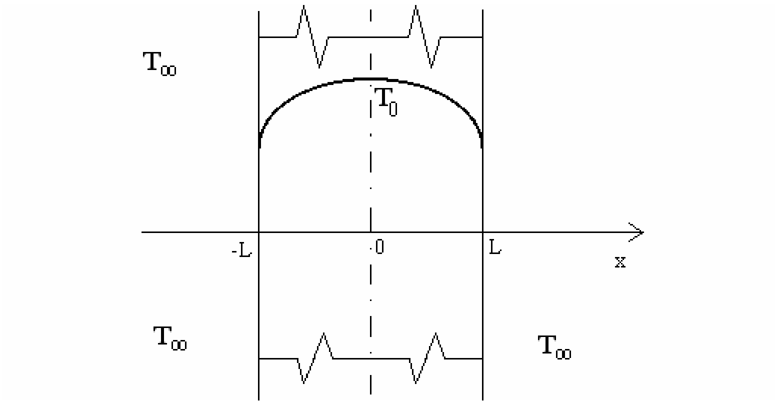

Figura 27

Il fenomeno sarà a simmetria assiale e la temperatura dipenderà sia dall'ascissa x che dal tempo t

$$T = T(x,t)$$

L'equazione da utilizzare per studiare il fenomeno è l'equazione di Fourier

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T$$

che si può scrivere, ponendo $\alpha = \frac{k}{\rho c}$, nella seguente forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

$\boxed{\alpha = \frac{k}{\rho c}}$ è una costante detta **diffusività termica** ed ha le stesse dimensioni del coefficiente di viscosità cinematica

$$[\nu] = [\alpha] = \frac{L^2}{T}$$

cioè quelle di una velocità per una lunghezza. La diffusività termica regola gli scambi di energia come il coefficiente di viscosità cinematica regola gli scambi di quantità di moto.
Vediamo di imporre le condizioni iniziali e al contorno.

- Condizione iniziale $T(x,t_0) = T_i = cost$
- Condizioni al contorno $\begin{cases} \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \\ h(T_L - T_\infty) = -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} \end{cases}$

La prima condizione al contorno (alla Neumann) esprime la simmetria geometrica e fisica. Possiamo quindi studiare il fenomeno prendendo in considerazione solo la metà della lastra, e per questa imponiamo la condizione di adiabaticità per $x=0$. La condizione al contorno (alla Robin)

esprime la continuità tra il flusso termico per conduzione nella lastra alla stazione <u>$x=L$</u> e quello per convezione, alla stessa interfaccia ma dal lato del fluido.
L'andamento di T che ci aspettiamo fisicamente è quello schematizzato in figura 28. Si noti che i piani più esterni, cioè più vicini alla superficie di separazione solido – fluido si raffreddano più velocemente rispetto a quelli prossimi alla mezzeria. Inoltre, poiché la "perturbazione" termica prodotta dal flusso quando la lastra è immessa nel fluido più freddo, viaggia con velocità finita, negli istanti iniziali i piani interni prossimi alla mezzeria si mantengono ancora alla temperatura iniziale. L'intervallo di tempo per il quale ciò accade è proprio dell'ordine $O(L^2/\alpha)$.
Per semplificare il problema adimensionalizziamo l'equazione

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

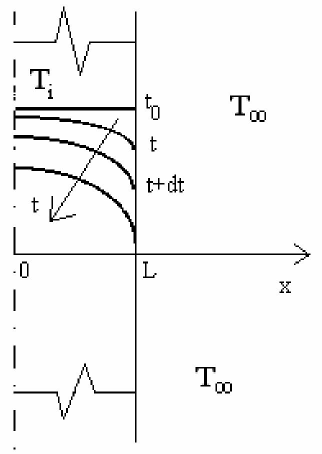

Figura 28

Per la temperatura, oltre ad una adimensionalizzazione, procediamo ad una normalizzazione

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

avendo scelto come riferimento la temperatura del fluido ambiente all'istante iniziale T_∞.
Prendendo come riferimento per le lunghezze il semispessore della lastra L si ha

$$x^* = \frac{x}{L}$$

Il tempo di riferimento lo valuteremo durante l'adimensionalizzazione. Formalmente

$$t^* = \frac{t}{t_r}$$

Procedendo con l'adimensionalizzazione si ha

$$\frac{1}{t_r}\frac{\partial T^*}{\partial t^*}=\frac{\alpha}{L^2}\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

e divedendo tutto per il termine $\frac{\alpha}{L^2}$ risulta

$$\frac{L^2}{\alpha t_r}\frac{\partial T^*}{\partial t^*}=\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

Se le grandezze di riferimento sono state scelte in modo opportuno, i termini adimensionali saranno di ordine uno. Inoltre, poiché l'equazione consta di soli due termini, ovvero in termini fisici, si bilanciano due soli effetti (la variazione nel tempo dell'energia è uguale agli scambi) "tutto" il primo membro dell'equazione sopra scritta deve essere dello stesso ordine del secondo, il che implica che il rapporto adimensionale

$$\boxed{Fo=\frac{\alpha t_r}{L^2}}$$

detto numero di Fourier, deve essere anch'esso di ordine unitario.
A questo punto è semplice trovare il tempo di riferimento

$$\frac{\alpha t_r}{L^2}=O(1)\Rightarrow \quad t_r=O(\frac{L^2}{\alpha}).$$

Da un punto di vista fisico, t_r è il tempo impiegato da una perturbazione termica imposta su una faccia per essere "sentita" ad una distanza *L*.
L'equazione adimensionalizzata sarà

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*}=\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \qquad \text{(a)}$$

Procediamo ora con l'adimensionalizzazione delle condizioni iniziali e delle condizioni al contorno.
Per la condizione iniziale

$$T(x,t_0)=T_i \Rightarrow T^*(x,t_0)=\frac{T_i-T_\infty}{T_i-T_\infty}=1$$

$$T^*(x,t_0)=1 \qquad \text{(b)}$$

Per la prima condizione al contorno è immediato verificare che

$$\left.\frac{\partial T^*}{\partial x^*}\right|_{x^*=0}=0 \qquad \text{(c)}$$

Per la seconda condizione

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}=h\left(T_L-T_\infty\right)\;\Rightarrow\;-k\left.\frac{\partial\left(T-T_\infty\right)}{\partial x}\right|_{x=L}=h\left(T_L-T_\infty\right)$$

essendo T_∞ =*cost*. Dividendo tutto per $\left(T_i-T_\infty\right)$ e considerando che $x=L$ equivale a dire $x^*=1$, si ottiene

$$-\frac{k}{L}\left.\frac{\partial T^*}{\partial x^*}\right|_{x^*=1}=hT^*\big|_{x^*=1}$$

Definendo ora il rapporto adimensionale

$$\boxed{Bi=\frac{hL}{k}}\qquad \textbf{NUMERO DI BIOT}$$

la seconda condizione al contorno in forma adimensionale diventa

$$\left.\frac{\partial T^*}{\partial x^*}\right|_{x^*=1}=-Bi\cdot T^*\big|_{x^*=1}\qquad\text{(d)}$$

Bisogna, in sintesi risolvere l'equazione (a) con la condizione iniziale (b) e le condizioni al contorno (c), (d).

Nel caso in cui si ha $Bi<<1$, e ciò si può avere per esempio quando *L* è molto piccolo rispetto a $\frac{k}{h}$, la seconda condizione al contorno diventa

$$\left.\frac{\partial T^*}{\partial x^*}\right|_{x^*=1}\approx 0$$

Ciò non vuol dire che non c'è flusso di calore, ma che il gradiente di temperatura nell'interno della lastra è così piccolo da poter ammettere un raffreddamento uniforme della lastra. Quindi, allorché $Bi<<1$, si può dire che la temperatura è funzione solo del tempo e non della coordinata spaziale *x*. Le considerazioni fatte però sembrano non essere congruenti con l'equazione di Fourier adimensionalizzata

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*}=\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

Infatti, per quanto detto, dovrebbe essere $\frac{\partial T^*}{\partial t^*}=\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}=0$. Questa incongruenza deriva dal fatto che per studiare problemi di questo tipo si deve prendere in considerazione la formulazione globale del bilancio dell'energia e non quella locale.

La domanda che può essere lecito porsi è: "facendo l'ipotesi che il gradiente di temperatura è nullo, come fa ad esserci un flusso termico $-k\,{\partial T}/{\partial x}$?". La risposta a questa domanda sta nel fatto che $Bi<<1$ implica $k>>1$, quindi il prodotto $-k\,{\partial T}/{\partial x}$ risulta una quantità finita e pari al flusso ceduto al fluido ambiente $h\Delta T$.

In un'ottica integrale, se *A* è la superficie di scambio, la variazione di energia nel tempo è data da

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho e dv = \rho c \frac{d}{dt}\int_0^L AT\, dx$$

essendo $e = u = cT$. Nell'ipotesi di $Bi << 1$, *T* non dipende da *x*, quindi

$$\rho c \frac{d}{dt}\int_0^L AT\, dx = \rho c A L \frac{dT}{dt}$$

Nelle ipotesi fatte la potenza termica scambiata è $-hA(T - T_\infty)$, col segno meno perché se il flusso è uscente la derivata temporale è negativa

$$\rho c A L \frac{dT}{dt} = -hA(T - T_\infty)$$

cioè

$$\rho c L \frac{dT}{dt} = -h(T - T_\infty).$$

Adimensionalizziamo ora questa nuova equazione. Si ha

$$\rho c L \frac{d}{dt}\left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right) = -h\frac{(T - T_\infty)}{(T_i - T_\infty)}$$

cioè

$$\rho c L \frac{\alpha}{L^2}\frac{dT^*}{dt^*} = -hT^*$$

essendo $t_r = \dfrac{L^2}{\alpha}$. In definitiva si ottiene l'equazione

$$\frac{dT^*}{dt^*} = -\frac{hL}{\rho c \alpha}T^*$$

che integrata dà

$$T^* = Ce^{-\frac{hL}{\rho c \alpha}t^*}$$

La costante *C* può essere determinata applicando la condizione iniziale $T^*(x, t_0) = 1 \;\Rightarrow\; C = 1$. Si ha infine

$$\boxed{T^* = e^{-\frac{hL}{\rho c \alpha}t^*}}$$

che è l'espressione della temperatura adimensionale rispetto al tempo nel caso in cui $Bi << 1$. Il gruppo adimensionale $-\frac{hL}{\rho c \alpha}$ rappresenta l'inverso di una sorta di costante tempo, cioè quanto più sarà grande il valore di questa costante tanto più rapidamente tenderà a zero il valore della temperatura adimensionale T^*.
In termini dimensionali

$$\boxed{T = T_\infty + (T_i - T_\infty) e^{-\frac{h}{\rho c L} t}}$$

Si vede bene da quest'espressione che più sarà piccolo lo spessore *L*, più sarà grande il termine $\frac{h}{\rho c L}$, e quindi più rapidamente *T* tenderà a T_∞.

- **IRRAGGIAMENTO**

Abbiamo già anticipato che questo meccanismo di scambio è legato alla capacità delle onde elettromagnetiche di trasportare energia.
La maggior parte delle onde elettromagnetiche per le quali il fenomeno dell'irraggiamento è importante ha lunghezze d'onda comprese tra 0.1 e 100 μm.
Abbiamo già introdotto la legge di Planck

$$E_{n\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5 \left(e^{C_2/\lambda T} - 1\right)}$$

che esprime il potere emissivo monocromatico del corpo nero in funzione della sua temperatura. La sorgente è considerata emisferica.
La lunghezza d'onda alla quale si ha il massimo potere emissivo monocromatico è data dalla **legge di Wien**, che si scrive

$$\lambda_{\max} T = c_3$$

Il valore di $\lambda_{\max}$ diminuisce all'aumentare della temperatura.
Per una sorgente nera, l'energia emessa si ottiene integrando la legge di Planck su tutte le lunghezze d'onda, si ottiene così il **potere emissivo** E_n

$$E_n = \int_0^{+\infty} E_{n\lambda} \, d\lambda$$

funzione della sola temperatura.
Il risultato dell'integrale è dato dalla **legge di Stefan – Boltzman**

$$E_n = \sigma T^4$$

In accordo con le ultime due leggi, il potere emissivo totale del corpo nero è l'integrale sotteso alla curva di fig. 29. I vari andamenti di $E_{n\lambda}$ saranno sempre maggiori all'aumentare della temperatura e il massimo si sposterà verso sinistra.

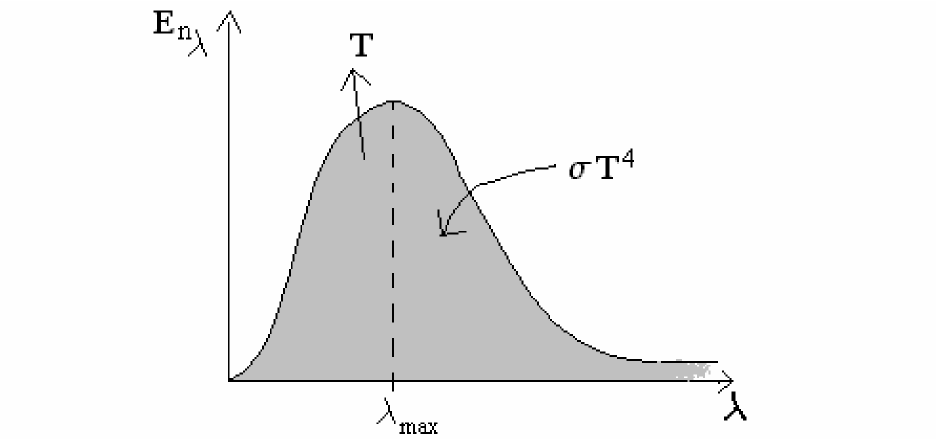

Figura 29

La legge espressa precedentemente vale nel vuoto. Se le onde viaggiano in un mezzo a indice di rifrazione *n* vale

$$E_n = n^2 \sigma T^4$$

Vediamo ora cosa accade quando una radiazione *G* incide sulla superficie di una lastra. *G* è l'energia che incide per unità di tempo e di superficie, la chiameremo **irradiazione**.

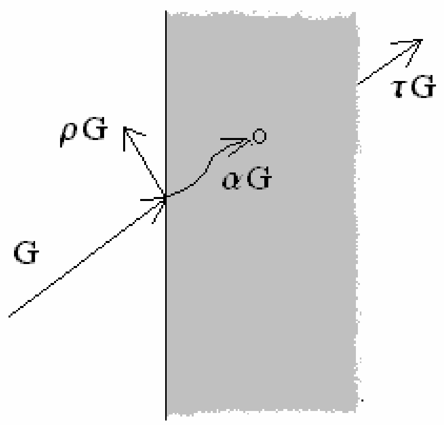

Figura 30

Una parte di questa energia, ρG, verrà riflessa, una parte αG assorbita e una parte τG attraverserà la lastra di materiale. L'energia assorbita contribuirà ad aumentare l'energia interna del sistema, innalzando il grado di eccitazione molecolare.
Le costanti α, ρ e τ dipendono dalla lunghezza d'onda nel caso in cui *G* sia monocromatica, scriveremo in questo caso α_λ, ρ_λ e τ_λ. Sia per sorgenti monocromatiche che per sorgenti operanti in un intervallo di lunghezze d'onda vale in modo ovvio

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

Una superficie si definirà **opaca** se $\tau = 0$. In questo caso $\alpha + \rho = 1 \Rightarrow \rho = 1 - \alpha$.

Realizzazione fisica di un corpo nero

Il corpo nero è quello che emette il massimo dell'energia ad una prefissata temperatura. E' da notare che due corpi a parità di materiale emettono quantità diverse di energia a seconda del loro stato superficiale.

Definiamo il corpo nero in modo operativo, supponiamo di avere una scatola su cui pratichiamo un minuscolo forellino e che **isoliamo termicamente** rendendo adiabatiche le pareti. Inoltre facciamo in modo che **la temperatura delle pareti resti costante** nel tempo. Questo si può fare per esempio con un bagno termostatico.

Dal piccolo forellino entrerà il raggio incidente, il quale, una volta che avrà inciso la parete interna (opaca), in parte verrà assorbito e in parte verrà riflesso. Se il raggio entrato nella scatola non ha più l'opportunità di uscire (foro molto piccolo), tutta l'energia in ingresso verrà assorbita. Il corpo nero così costruito è un **assorbitore perfetto**, e poiché la temperatura è costante, per l'equilibrio termico, tutta l'energia che entra deve anche uscire, quindi sarà anche un **emettitore perfetto**. Questo modello fisico si avvicina molto all'idealizzazione del corpo nero.

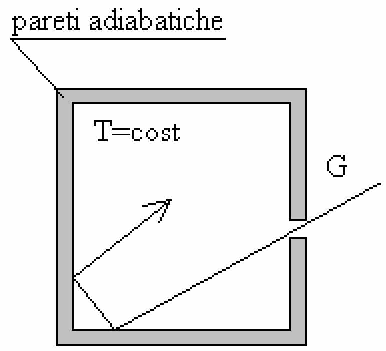

Figura 31

Emissione di un corpo di tipo qualsiasi

Supponiamo di avere un corpo la cui superficie, ad una temperatura *T*, emette una certa quantità *E* di energia nel modo calore data dalla legge di Stefan – Boltzman, più l'aliquota riflessa di una irradiazione incidente generica *G*. La presenza di *G* deriva dal fatto che il sistema, non isolato, sarà circondato da altri corpi che emettono radiazioni.

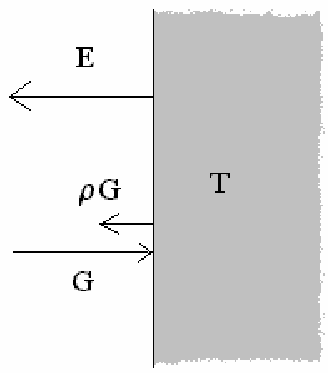

Figura 32

Come già detto

$$E_n = n^2 \sigma T^4$$

Il flusso termico netto q_s sarà dato da

$$q_s = \rho G + E - G = J - G \neq 0$$

dove la quantità $J = \rho G + E$ è detta **radiosità**.
Per la definizione stessa di corpo nero, se un corpo non è nero $E < n^2 \sigma T^4$. Vediamo di trovare una espressione per *E*.
Consideriamo una superficie ad una certa temperatura T. Il potere emissivo monocromatico (flusso termico emesso dalla superficie non nera) lo indicheremo con E_λ e sarà funzione della lunghezza d'onda e della temperatura. Definiamo il **coefficiente di emissività superficiale spettrale** come il rapporto

$$\varepsilon_\lambda(T, Superficie) = \frac{E_\lambda(T, Superficie)}{E_{n\lambda}(T)}$$

ε_λ può essere considerato costante, si può eliminare cioè la dipendenza dalla temperatura, se quest'ultima varia di poco.
Allo stesso modo si può definire un **coefficiente di emissività superficiale totale**, di maggiore interesse perché è più naturale riferirsi ad esso in sede sperimentale

$$\varepsilon(T, Superficie) = \frac{E(T, Superficie)}{E_n(T)}$$

Avremo quindi

$$E(T, Sup) = \varepsilon(T, Sup) E_n(T)$$

da cui, applicando la legge di Stefan – Boltzman nel vuoto e considerando $\varepsilon(T, Sup) = \varepsilon(Sup)$, per piccole variazioni di temperatura, si ha

$$E(T, Sup) = \varepsilon_{Sup} \sigma T^4$$

che rappresenta il potere emissivo totale e non tutta l'energia che lascia la superficie, in altri termini rappresenta solo l'energia emessa dal corpo in quanto sorgente; come già detto per ottenere tutta l'energia che lascia la superficie per unità di superficie e di tempo va sommata ad *E* l'aliquota riflessa della radiazione *G* incidente, ottenendo così la radiosità.
Se non siamo nel vuoto

$$E(T, Sup) = \varepsilon_{Sup} n^2 \sigma T^4$$

che è la legge più generale, contenente anche il caso in cui il corpo possa essere considerato come un corpo nero, ponendo semplicemente $\varepsilon_{Sup} = 1$.

Si ammette che il coefficiente di assorbimento α sia uguale a quello di emissività ε, sia a livello spettrale che totale
$\alpha = \varepsilon$

Rigorosamente ciò è vero solo se c'è equilibrio termico, ma l'esperienza insegna che questo risultato si può estendere anche ai casi in cui l'equilibrio non è verificato.
Abbiamo visto che per una superficie qualsiasi

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

se $\tau << 1$, il corpo può essere considerato opaco, si ha

$$\alpha = \varepsilon = 1 - \rho$$

si può dunque ricavare sperimentalmente ρ da ε.
Nel caso di un corpo nero: $\tau = 0$, $\rho = 0 \Rightarrow \alpha = \varepsilon = 1$.

Definizione di corpo grigio
Il coefficiente di emissività spettrale ε_λ, fattore di proporzionalità nella legge

$$\varepsilon_\lambda(T, Superficie)E_{n\lambda}(T) = E_\lambda(T, Superficie)$$

che ci dà il potere emissivo del corpo qualsiasi rispetto a quello di un corpo nero, è funzione della temperatura della superficie del corpo stesso.

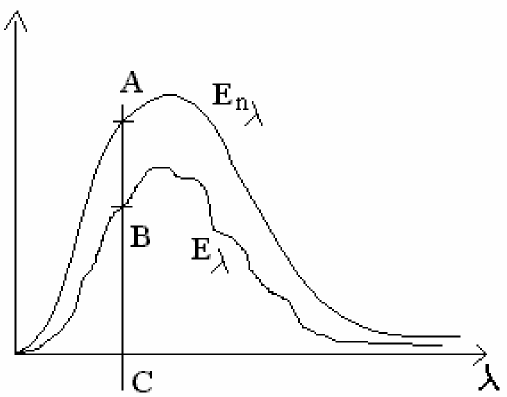

Figura 33

Si definisce **corpo grigio** un corpo per il quale $\varepsilon_\lambda = cost$.

Per un corpo grigio quindi il rapporto $\varepsilon_\lambda = \dfrac{BC}{AC} = cost$, si ottiene così un andamento del potere emissivo spettrale che segue "in scala" la legge di Planck.

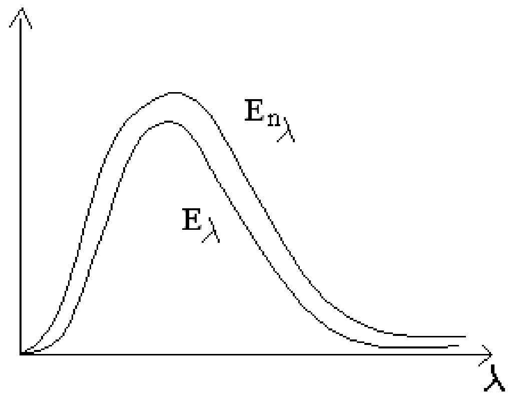

Figura 34

Fattore di vista o Fattore di configurazione

Questo nuovo concetto è di tipo meramente geometrico.

Consideriamo due superfici interessate ad uno scambio termico di tipo radiativo. Se le due superfici sono indefinite, tutta l'energia emessa da una superficie inciderà sull'altra; ciò non è naturalmente vero nel caso in cui, per esempio, una delle due superfici ha estensione finita, nel qual caso esisterà una frazione dell'energia emessa da una superficie che non inciderà sull'altra. Il fattore di vista dipende, oltre che dall'estensione spaziale, anche dall'orientamento relativo delle due superfici e dalla loro geometria.

Si definisce fattore di vista il rapporto

$$F_{ij} = \frac{E_{ij}}{E_i}$$

avendo indicato con E_{ij} l'energia emessa dalla (o per meglio dire che lascia la) generica superficie *i* e incidente direttamente sulla generica superficie *j* e con E_i tutta l'energia emessa dalla (che lascia la) superficie *i*.

$F_{ij} \leq 1$ e vale uno solo nel caso di due superfici piane parallele e indefinite.

E' da notare che F_{ij} non dipende né dalla temperatura né da nessun altro fattore, ma solo dalla geometria.

Si può definire anche un $F_{ii} \neq 0$, dipendente dalla geometria, come nel caso di superfici del tipo concavo

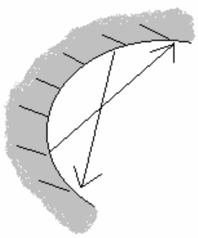

Figura 35

Banalmente, se la superficie è piana $F_{ii} = 0$.

F_{ij} soddisfa alcune proprietà e fra queste una può essere utilizzata per calcolare gli altri fattori di vista:

$$A_i F_{ij} = A_J F_{ji}$$

che è detta **proprietà di reciprocità dei fattori di vista**, A_i e A_j sono le aree delle due superfici, F_{ij} è il fattore di vista di *i* verso *j* e F_{ji} è il fattore di vista di *j* verso *i*.

SCAMBIO TERMICO RADIATIVO

Studieremo solo il caso di due superfici piane parallele e indefinite, per le quali

$$F_{12} = F_{21} = 1; \quad F_{11} = F_{22} = 0.$$

Supponiamo siano assegnate le temperature T_1 e T_2 delle due superfici, come dato del problema. Supponiamo cioè che i valori delle due temperature siano imposte "dall'esterno" e non risultino dall'equilibrio degli stessi scambi radiativi. Ci occuperemo solo dello scambio termico radiativo.

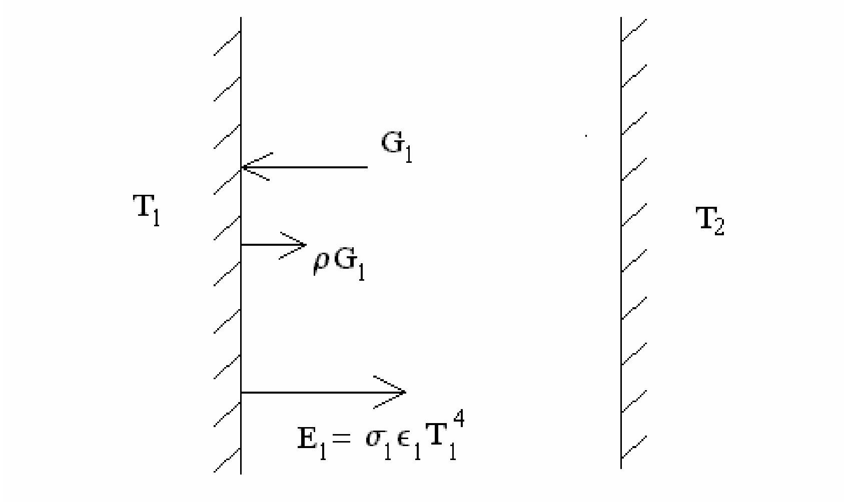

Figura 36

Come ulteriore ipotesi, consideriamo le superfici opache

$$\tau_1 = \tau_2 = 0; \quad \alpha = \varepsilon$$

Ne consegue

$$\alpha + \rho = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \rho \Rightarrow \varepsilon = 1 - \rho \Rightarrow \rho = 1 - \varepsilon$$

Per ogni superficie possiamo valutare la quantità di energia che incide su essa (l'irradiazione *G*) e l'ammontare di energia per unità di tempo che lascia la superficie stessa (la radiosità, somma di ρG ed *E*). Ricordando sempre che la temperatura T_1 è mantenuta costante, la radiosità della superficie 1 sarà

$$J_1 = \rho G_1 + E_1$$

dove, essendo nota la temperatura si può calcolare E_1 con la legge di Stefan - Boltzman.
Calcoliamo ora il flusso termico netto scambiato dalla superficie 1. Esso è dato da

$$q_1 = J_1 - G_1$$

Lo stesso discorso si può fare per la superficie 2, per la quale

$$J_2 = \rho G_2 + E_2 \, ; \qquad q_2 = J_2 - G_2 \, .$$

Per ogni superficie ci sono due incognite, *G* e *J*, essendo le temperature note e ρ e ε, proprietà del mezzo.
Per adesso abbiamo quindi due equazioni e quattro incognite.

$$\begin{cases} J_1 = \rho G_1 + \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \\ J_2 = \rho G_2 + \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \end{cases}$$

Abbiamo bisogno di due equazioni per chiudere il problema.
Poiché abbiamo solo due superfici che scambiano energia, deve necessariamente risultare

$$\begin{cases} J_1 = G_2 \\ J_2 = G_1 \end{cases}$$

che esprimono l'ovvia circostanza che tutta l'energia che lascia una superficie è pari a quella che incide sull'altra e viceversa. In situazioni più complesse le due relazioni sopra scritte vanno modificate per tenere in conto l'effetto dei fattori di vista, introdotti precedentemete. Occorrerà, inoltre, considerare che l'irradiazione di una certa superficie può risultare da contributi di più di una superficie circostante.
Risolvendo, si ottengono dapprima le espressione dell'irradiazione e della radiosità, e di conseguenza

$$\boxed{q_1 = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}}$$

che è il flusso netto scambiato sulla superficie 1. Per la superficie 2, per la quale si definisce $q_2 = J_2 - G_2$, risulterà naturalmente $q_2 = -q_1$, mentre, definito come $q_{1,2}$ il flusso termico netto tra le due superfici (diretto da sinistra verso destra, avendo ipotizzato la temperatura della superficie 1 maggiore di quella della superficie 2) è $q_{1,2} = q_1$.
Se le superfici sono entrambe nere

$$\boxed{q_{1,2} = \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) = E_1 - E_2}$$

E' da notare che se i coefficienti $\varepsilon_{1,2}$ sono di poco inferiori a 1 (0.8-0.9), $q_{1,2}$ diventa molto minore rispetto a quella che si avrebbe per corpi neri.

Schermi radiativi
Esaminiamo ora il caso in cui si ha una superficie di spessore infinitesimo interposta tra le superfici 1 e 2 (fig. 37). Si suppone che lo spessore della lastra 3 sia così piccolo da poter trascurare fenomeni legati alla conduzione. Per semplicità, ma senza che ciò leda le generalità, ipotizziamo inoltre che

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon = 1$$

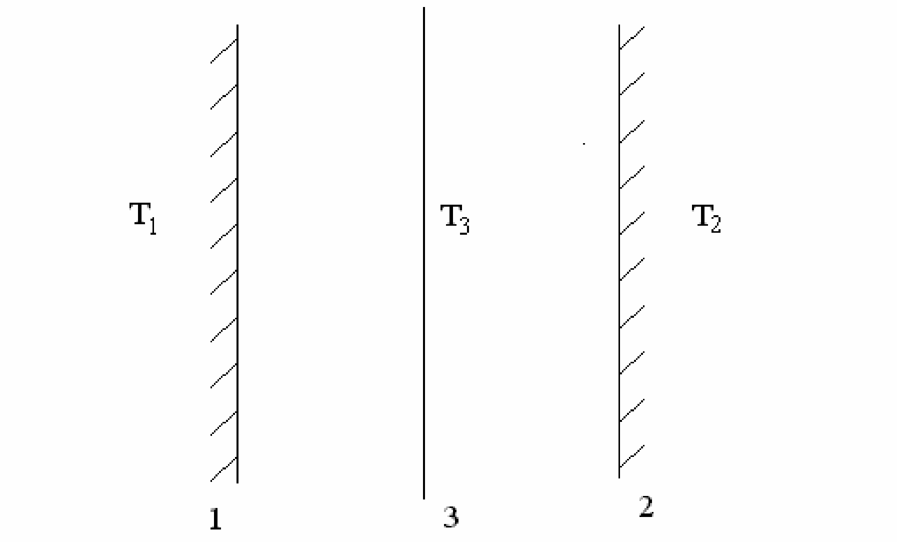

Figura 37

Vogliamo valutare lo scambio termico tra le superfici estreme (mantenute come sempre a temperature prefissate), nel momento in cui viene interposto lo schermo 3. In questo caso si noti che occorre valutare la temperatura T_3 che non è un dato del problema, ma è il valore che risulta dall'equilibrio termico dello schermo interposto. Si ha

$$q_{1,3} = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_3^4\right)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1}\;; \qquad q_{3,2} = \frac{\sigma\left(T_3^4 - T_2^4\right)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1}\;.$$

Una volta raggiunta la stazionarietà, in condizioni di equilibrio, se lo spessore della lastra 3 è sufficientemente sottile in modo che non si stabilisce un gradiente termico attraverso di esso, si ha

$$q_{1,3} = q_{3,2} \;\Rightarrow\; T_1^4 - T_3^4 = T_3^4 - T_2^4$$

da cui si ricava T_3

$$T_3^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}$$

e, poiché risulta $q_{1,2} = q_{1,3} = q_{3,2}$, si ricava il flusso termico netto

$$\boxed{q_{1,2} = \frac{\sigma\left(T_1^4 - \dfrac{T_2^4 + T_1^4}{2}\right)}{\dfrac{2}{\varepsilon} - 1} = \frac{1}{2}\sigma\left[\frac{T_1^4 - T_2^4}{\dfrac{2}{\varepsilon} - 1}\right]}$$

La conclusione è che se si inserisce una lastra fra le superfici 1 e 2, il flusso termico netto scambiato si dimezza rispetto a quello che si aveva precedentemente. La lastra 3 viene detta **schermo radiativo**. Naturalmente questo risultato quantitativamente è legato alla circostanza che le emissività superficiali delle tre superfici in esame sono tutte uguali tra di loro.