APPUNTI SUGLI SPAZI AFFINI
Prof. L. A. Lomonaco

§1. SPAZI AFFINI, SOTTOSPAZI E TRASFORMAZIONI

Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\mathbb{A}$ un insieme non vuoto. Sia inoltre

$$\pi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$$

una applicazione.

Definizione. *La terna $(V, \mathbb{A}, \pi)$ si dice spazio affine, sul campo $\mathbb{K}$, se*
(i) Per ogni $P \in \mathbb{A}$ e per ogni $\mathbf{u} \in V$, esiste un unico $Q \in \mathbb{A}$ tale che $\pi(P, Q) = \mathbf{u}$;
(ii) Per ogni $P, Q, R \in \mathbb{A}$, si ha che $\pi(P, Q) + \pi(Q, R) = \pi(P, R)$.

L'insieme $\mathbb{A}$ è il sostegno di tale struttura e, con abuso di notazione, si scriverà spesso $\mathbb{A}$ in luogo di $(V, \mathbb{A}, \pi)$. L'assioma (ii) è noto come *relazione di Chasles*. E' d'uso comune indicare con il simbolo $\overrightarrow{PQ}$ il vettore $\pi(P, Q)$. Gli elementi di $\mathbb{A}$ si dicono *punti*, quelli di V *vettori liberi*. L'assioma (i) implica che l'applicazione π è suriettiva, ed in generale, per ogni $\mathbf{u} \in V$ la controimmagine $\pi^{-1}(\mathbf{u})$, che è un sottoinsieme di coppie in $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ si dice anch'esso vettore libero. Una coppia $(P, Q) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$, si dice talvolta segmento orientato di estremi P, Q, o anche *vettore applicato*, con punto di applicazione P e punto finale Q. Per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, l'applicazione indotta

$$\pi_P : \mathbb{A} \longrightarrow V$$

definita ponendo $\pi_P(Q) = \overrightarrow{PQ}$ è una biezione ed induce su $\mathbb{A}$ una struttura vettoriale isomorfa a quella di V, che prende il nome di spazio vettoriale dei vettori applicati in P. Se lo spazio V è finitamente generato, come sarà implicitamente assunto nel seguito, si pone $\dim \mathbb{A} =: \dim V$.

Esempio 1: Piano e spazio ordinari. *Sia $\mathbb{A}$ il piano (o anche lo spazio) della geometria elementare e sia V lo spazio vettoriale dei vettori liberi del piano (dello spazio rispettivamente). Definiamo*

$$\pi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$$

ponendo

$$\pi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

ovvero il vettore libero rappresentato dal segmento orientato (P, Q). E' facile verificare che sono soddisfatte le proprietà assiomatiche (i), (ii).

Esempio 2: Struttura affine naturale di uno spazio vettoriale. *Sia V uno spazio vettoriale. Definiamo*

$$\pi : V \times V \longrightarrow V$$

ponendo

$$\pi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{v}-\mathbf{u} \quad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v}\in V\ .$$

Anche in questo caso è immediata la verifica delle proprietà assiomatiche (i), (ii).

Sia ora $\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}$ e sia

$$U=\pi(\mathbb{B}\times\mathbb{B})=\left\{\ \mathbf{u}\in V \ \middle|\ \exists\ P,Q\in\mathbb{B}\ \middle|\ \pi(P,Q)=\mathbf{u}\ \right\}\ .$$

Consideriamo la restrizione $\bar\pi:\mathbb{B}\times\mathbb{B}\to U$ dell'applicazione π.

Definizione. *Se $U\le V$ e la terna $(U,\mathbb{B},\bar\pi)$ è uno spazio affine, si dice che $\mathbb{B}$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$; il sottospazio vettoriale U di V si dice sottospazio direttore di $\mathbb{B}$ e si indica anche con il simbolo $\overrightarrow{\mathbb{B}}$.*

Osservazioni. *Sia $\mathbb{B}$ un sottospazio affine dello spazio affine $\mathbb{A}$.*

(i) Fissato un qualunque punto $P\in\mathbb{B}$, l'applicazione indotta $\bar\pi_P$ è una biezione tra $\mathbb{B}$ e $\overrightarrow{\mathbb{B}}$. In altri termini

$$\mathbb{B}=\left\{\ Q\in\mathbb{A}\ \middle|\ \overrightarrow{PQ}\in\overrightarrow{\mathbb{B}}\right\}\ .$$

Se $\overrightarrow{PQ}=\mathbf{u}$, si scrive anche $Q=P+\mathbf{u}$. Si tratta di un simbolo formale di addizione, giustificato in seguito da questioni di coordinate e componenti. In modo analogo, si scrive talvolta $\mathbb{B}=P+\overrightarrow{\mathbb{B}}$, ovvero $\mathbb{B}=P+U$.

(ii) Per ogni punto $P\in\mathbb{A}$ e per ogni sottospazio vettoriale $U\le V$, l'insieme

$$P+U=\left\{\ Q\in\mathbb{A}\ \middle|\ \exists\ \mathbf{u}\in U\ \middle|\ Q=P+\mathbf{u}\ \right\}$$

è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$, ed U è il suo sottospazio direttore, ovvero $\overrightarrow{P+U}=U$.

(iii) Se $\dim\mathbb{B}=0$, $\mathbb{B}$ si riduce ad un unico punto ed il suo sottospazio direttore è lo spazio vettoriale banale.

(iv) Se $\dim\mathbb{B}=1$, $\mathbb{B}$ si dice retta (affine) e U ed il suo sottospazio direttore U si dice direttrice della retta. Essendo U uno spazio vettoriale di dimensione 1, ogni suo elemento non nullo è un generatore e si dice vettore direzionale della retta.

(v) Se $\dim\mathbb{B}=2$, $\mathbb{B}$ si dice piano (affine) ed il suo sottospazio direttore U si dice giacitura del piano.

(vi) Se $\dim\mathbb{B}=n-1$, $\mathbb{B}$ si dice iperpiano (affine).

Definizione. *Siano $\mathbb{B}=P+U$, $\mathbb{B}'=P'+U'$ due sottospazi affini di $\mathbb{A}$. Diremo che $\mathbb{B}$ e $\mathbb{B}'$ sono paralleli, e scriveremo $\mathbb{B}\parallel\mathbb{B}'$, se $U\le U'$ oppure $U'\le U$. Se, in particolare, si ha che $\dim\mathbb{B}=\dim\mathbb{B}'$, allora $\mathbb{B}\parallel\mathbb{B}'$ se e solo se $U=U'$.*

Osservazioni.

(i) La relazione di parallelismo tra sottospazi è simmetrica e riflessiva, ma non transitiva.

(ii) La relazione di parallelismo tra sottospazi di dimensione fissata è anche transitiva, e quindi è una equivalenza.

Consideriamo ora un vettore $\mathbf{u}\in V$ ed un sottospazio affine $\mathbb{B}=P+U$ di $\mathbb{A}$. Sottolineiamo il fatto che è d'uso comune dire che $\mathbf{u}$ è parallelo al sottospazio $\mathbb{B}$ quando $\mathbf{u}\in U$. Scriveremo allora $\mathbf{u}\parallel\mathbb{B}$.

Siano ora $(V, \mathbb{A}, \pi)$ e $(V', \mathbb{A}', \pi')$ due spazi affini sul campo $\mathbb{K}$, e sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una applicazione. Per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, posto $P' = f(P) \in \mathbb{A}'$, f induce un'altra applicazione

$$\overrightarrow{f_P} : V \longrightarrow V'$$

definita come segue. Per ogni $\mathbf{u} \in V$ esiste un unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{u}$. Si considera allora il punto $Q' = f(Q) \in \mathbb{A}'$ ed il vettore libero $\mathbf{u}' = \overrightarrow{P'Q'} \in V'$ e si pone $\overrightarrow{f_P}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$.

Definizione. *Se $\overrightarrow{f_P}$ è lineare e non dipende dalla scelta del punto P, si dice che f è una applicazione, o trasformazione, affine. Se poi $\overrightarrow{f_P}$ è un isomorfismo, f è una affinità.*

Teorema. *Per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, per ogni punto $P' \in \mathbb{A}'$ e per ogni applicazione lineare $\alpha : V \to V'$ esiste un'unica applicazione affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ tale che $f(P) = P'$ e $\overrightarrow{f_P} = \alpha$.*

Proposizione. *Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una applicazione affine e sia $\mathbb{B}$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}$. Allora $f(\mathbb{B})$ è anch'esso un sottospazio di $\mathbb{A}'$ e $\dim f(\mathbb{B}) \leq \dim \mathbb{B}$.*

§2. RIFERIMENTI AFFINI

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n, $O \in \mathbb{A}$, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ una base ordinata di V.

Definizione. *La coppia $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$, ovvero la $(n+1)$-pla $(O; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, si dice riferimento (affine) di $\mathbb{A}$, di origine O, associato a $\mathcal{B}$.*

Ricordiamo che in relazione alla base $\mathcal{B}$ di V possiamo considerare l'isomorfismo coordinato

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

definito ponendo, per ogni $\mathbf{u} \in V$,

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

dove $x_1, \ldots, x_n$ sono le componenti del vettore $\mathbf{u}$ nella base $\mathcal{B}$. In altri termini, si ha che

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \ .$$

In modo analogo definiamo una applicazione

$$c_{\mathcal{R}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

al modo seguente: Per ogni $P \in \mathbb{A}$ poniamo

$$c_{\mathcal{R}}(P) = \Phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) \ .$$

Osservazioni.

(i) $c_{\mathcal{R}}(O) = \mathbf{0}$.

(ii) *Se* $c_{\mathcal{R}}(P) = X$, $c_{\mathcal{R}}(Q) = Y$, *allora* $\Phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ}) = Y - X$. *Per tale motivo si scrive talvolta* $Q - P$ *invece di* $\overrightarrow{PQ}$.

(iii) *Se si considera la struttura affine standard di* $\mathbb{K}^n$, *l'applicazione* $c_{\mathcal{R}}$ *è una affinità.*

Se $c_{\mathcal{R}} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, scriveremo anche

$$P \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, \ldots, x_n)$$

ed ometteremo l'indicazione del riferimento se ciò non darà adito ad equivoci. Il vettore X prende il nome di vettore coordinato del punto P in $\mathcal{R}$.

Consideriamo ora $h+1$ punti $P_0, P_1, \ldots, P_h$ ordinati di $\mathbb{A}$, ovvero la $(h+1)$-pla $(P_0, P_1, \ldots, P_h) \in \mathbb{A}^{h+1}$.

Definizione. *I punti* $P_0, P_1, \ldots, P_h$ *sono indipendenti (in senso affine) se i corrispondenti vettori* $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_h}$ *risultano indipendenti (in senso vettoriale).*

Osserviamo esplicitamente che, come è facile verificare, tale definizione non dipende dall'ordine in cui i punti compaiono. Poiché, se $\dim V = n$, possiamo trovare al più n vettori indipendenti in V, esisteranno al più $n+1$ punti indipendenti in $\mathbb{A}$. Una $(n+1)$-pla $\bar{\mathcal{R}} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ di punti indipendenti di $\mathbb{A}$ prende il nome di *riferimento baricentrico*. Posto $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{P_0P_i}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, i vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ costituiscono una base $\mathcal{B}$ di V e il riferimento affine $\mathcal{R} = (P_0; \mathcal{B})$ si dice associato al riferimento baricentrico $\bar{\mathcal{R}}$.

Siano ora $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$, $\mathcal{R}' = (O'; \mathcal{B}')$ due riferimenti affini di $\mathbb{A}$. Abbiamo le affinità

$$c_{\mathcal{R}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{K}^n \ ; \quad c_{\mathcal{R}'} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{K}^n \ .$$

Pertanto, dato un punto $P \in \mathbb{A}$, abbiamo che

$$c_{\mathcal{R}}(P) = X \ ; \quad c_{\mathcal{R}'}(P) = X'$$

sono le coordinate di P in $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ rispettivamente. Quindi l'applicazione composta

$$\psi_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} =: c_{\mathcal{R}'} \circ (c_{\mathcal{R}})^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

trasforma il vettore coordinato X di P in $\mathcal{R}$ nel vettore coordinato X' di P in $\mathcal{R}'$ e per tale motivo prende il nome di *cambiamento di riferimento* da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$.

Proposizione. *Nella situazione sopra descritta, si ha che*

$$X' = AX + B$$

dove $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *è la matrice del cambiamento delle basi da* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{B}'$ *e* $B = c_{\mathcal{R}'}(O)$ *è il vettore coordinato dell'origine* O *del riferimento* $\mathcal{R}$ *nel riferimento* $\mathcal{R}'$*.*

§3. RAPPRESENTAZIONE DI SOTTOSPAZI

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$, $\mathcal{R} = (O; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ un suo riferimento e $\mathbb{B}$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ di dimensione h. Consideriamo un sistema lineare compatibile

$$AX = B \tag{1}$$

dove A è una matrice di tipo $m \times n$ e supponiamo che, posto $A' = (A|B)$, si abbia $\rho(A) = \rho(A') = n - h$. Indichiamo con il simbolo Sol(1) il sottoinsieme di $\mathbb{K}^n$ delle soluzioni del sistema. Come è noto esso dipende da h parametri. Diremo che il sistema (1) è una rappresentazione cartesiana del sottospazio $\mathbb{B}$ rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}$ se accade che

$$P \in \mathbb{B} \iff c_{\mathcal{R}}(P) \in \mathrm{Sol}(1)$$

ovvero se e solo se l'applicazione $c_{\mathcal{R}}$ si restringe ad una biezione

$$\bar{c}_{\mathcal{R}} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathrm{Sol}(1) \ .$$

Vale il seguente enunciato.

Proposizione. *Ogni sistema compatibile del tipo (1) rappresenta un sottospazio affine (di dimensione h). Inoltre il sistema omogeneo associato rappresenta il sottospazio direttore di tale sottospazio affine.*

In generale possiamo rappresentare un sottospazio affine in due modi:

(i) mediante la costruzione di un sistema del tipo (1) che rappresenti il sottospazio (rappresentazione cartesiana);

(ii) mediante la descrizione dell'insieme delle soluzioni di un tale sistema, utilizzando h parametri (rappresentazione parametrica).

Vediamo come si costruiscono tali rappresentazioni. Il sottospazio $\mathbb{B}$ è individuato, come abbiamo visto, da un suo punto P_0 e dal suo sottospazio direttore $U = \overrightarrow{\mathbb{B}}$. Sia $\mathcal{B}' = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h)$ una base ordinata di U. In tale situazione la coppia $\mathcal{R}' = (P_0; \mathcal{B}')$ è un riferimento di $\mathbb{B}$. Un punto $P \in \mathbb{A}$ appartiene al sottospazio $\mathbb{B}$ se e solo se il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ appartiene ad U, ovvero se e solo se $\overrightarrow{P_0P}$ dipende da $\mathcal{B}'$, e cioè esistono degli scalari $t_1, \ldots, t_h$ tali che

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{h} t_i \mathbf{e}_i \ . \tag{2}$$

Passando alle coordinate dei punti e dei vettori in questione, posto

$$c_{\mathcal{R}}(P_0) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \;;\; \Phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ \vdots \\ u_{n,1} \end{pmatrix} \;;\; \ldots \;;\; \Phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}_h) = \begin{pmatrix} u_{1,h} \\ \vdots \\ u_{n,h} \end{pmatrix}$$

ed indicate con $x_1, \ldots, x_n$ le coordinate del punto generico P, abbiamo che

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{P_0P}) = \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ \vdots \\ x_n - z_n \end{pmatrix}$$

e la relazione (2) equivale, mediante l'isomorfismo coordinato, alla relazione

$$\begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ \vdots \\ x_n - z_n \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ \vdots \\ u_{n,1} \end{pmatrix} + \ldots + t_h \begin{pmatrix} u_{1,h} \\ \vdots \\ u_{n,h} \end{pmatrix}$$

Tale relazione tra vettori numerici equivale alle relazioni scalari

$$\begin{cases} x_1 - z_1 = t_1 u_{1,1} + \ldots + t_h u_{1,h} \\ \qquad\vdots \\ x_n - z_n = t_1 u_{n,1} + \ldots + t_h u_{n,h} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + t_1 u_{1,1} + \ldots + t_h u_{1,h} \\ \quad\vdots \\ x_n = z_n + t_1 u_{n,1} + \ldots + t_h u_{n,h} \end{cases}$$

Si scrive allora

$$\mathbb{B} : \begin{cases} x_1 = z_1 + t_1 u_{1,1} + \ldots + t_h u_{1,h} \\ \quad\vdots \\ x_n = z_n + t_1 u_{n,1} + \ldots + t_h u_{n,h} \end{cases}$$

e si dice che questa è una rappresentazione parametrica del sottospazio $\mathbb{B}$ nel riferimento $\mathcal{R}$.

Torniamo ora al punto in cui si richiede che $\overrightarrow{P_0P}$ dipenda da $\mathcal{B}'$, ovvero che il sistema $\mathcal{S} = \left[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \overrightarrow{P_0P} \right]$ risulti dipendente. Ciò equivale a dire che sia dipendente il corrispondente sistema dei vettori numerici delle componenti dei vettori di $\mathcal{S}$, ovvero il sistema

$$\bar{\mathcal{S}} = [\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ \vdots \\ u_{n,1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} u_{1,h} \\ \vdots \\ u_{n,h} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ \vdots \\ x_n - z_n \end{pmatrix}] \,.$$

Poiché già sappiamo che i primi h vettori di $\bar{\mathcal{S}}$ sono indipendenti, la dipendenza di $\bar{\mathcal{S}}$ equivale al fatto che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,h} & z_1 - x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n,1} & \cdots & u_{n,h} & z_n - x_n \end{pmatrix}$$

(di tipo $n \times (h+1)$) abbia rango esattamente h. Poiché le prime h colonne di A sono indipendenti, in base al Teorema degli Orlati possiamo trovare un minore non nullo che coinvolge le prime h colonne, i cui orlati siano tutti nulli. Supponiamo, per semplicità, che il minore non nullo di A di ordine h sia individuato, oltre che dalle prime h colonne, anche dalle prime h righe, e cioè si abbia

$$\det A^{1,\ldots,h}_{1,\ldots,h} \neq 0 \ .$$

L'annullarsi di tutti i possibili orlati di tale minore descrive un sistema di $n-h$ equazioni nelle incognite $x_1, \ldots, x_n$, che è la rappresentazione cartesiana cercata del sottospazio $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{B} : \begin{cases} \det A^{1,\ldots,h,h+1}_{1,\ldots,h,h+1} = 0 \\ \det A^{1,\ldots,h,h+1}_{1,\ldots,h,h+2} = 0 \\ \qquad \vdots \\ \det A^{1,\ldots,h,h+1}_{1,\ldots,h,n} = 0 \end{cases}$$

La costruzione della rappresentazione parametrica o cartesiana di un sottospazio $\mathbb{B}$ di dimensione h si può effettuare anche se il sottospazio è individuato da $h+1$ suoi punti indipendenti $P_0, P_1, \ldots, P_h$; basta infatti considerare i vettori

$$\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{P_0P_1} \ ; \ \ldots \ ; \mathbf{u}_h = \overrightarrow{P_0P_h}$$

e procedere come sopra.

§4. RETTE ED IPERPIANI

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$, $\mathcal{R} = (O; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ un suo riferimento e $\mathbb{B}$ una retta affine. Per comodità e per tradizione, indichiamo tale retta con il simbolo r. Allora la sua direttrice $\overrightarrow{r} = U$ è un sottospazio di V di dimensione 1. Un qualunque vettore non nullo $\mathbf{u} \in U$ genera quindi U. Un tale vettore si dice *vettore direzionale* di r, e le sue componenti (ordinate) $\ell_1, \ldots, \ell_n$ si dicono *numeri (o parametri) direttori* di r. Essi sono definiti a meno di proporzionalità.

Ripercorriamo ora il ragionamento fatto in generale per i sottospazi affini, adattandolo al caso in esame: se $P_0 \in r$ e $\mathbf{u}$ un vettore non nullo di $\overrightarrow{r}$, un punto $P \in \mathbb{A}$ appartiene alla retta r se e solo se il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ appartiene ad $\overrightarrow{r}$; poiché $\mathbf{u}$ genera $\overrightarrow{r}$, ciò vuol dire che esiste uno scalare $t \in \mathbb{K}$ tale che $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{u}$. Passando alle componenti, posto

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \quad ; \quad c_{\mathcal{R}}(P) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad c_{\mathcal{R}}(P_0) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

abbiamo che

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{P_0P}) = \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ \vdots \\ x_n - z_n \end{pmatrix}$$

e quindi la relazione (vettoriale) $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{u}$ equivale alle relazioni scalari

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + \ell_1 t \\ \quad \vdots \\ x_n = z_n + \ell_n t \end{cases} \tag{3}$$

che prendono il nome di *rappresentazione paremetrica* della retta affine r. Se $\bar{t} \in \mathbb{R}$, indicheremo con $P_{\bar{t}}$ il punto di r relativo al valore $\bar{t}$ del parametro, ovvero

$$P_{\bar{t}} = (z_1 + \ell_1 \bar{t}, \ldots, z_n + \ell_n \bar{t}) \ .$$

Per ottenere una *rappresentazione cartesiana* (in cui non compaiono parametri), si può eliminare il parametro dalle (3). Altrimenti si procede come segue. Il fatto che il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ appartenga ad $\overrightarrow{r}$ equivale ad imporre che il sistema $\mathcal{S} = [\mathbf{u}, \overrightarrow{P_0P}]$ sia dipendente, ovvero, passando alle componenti, che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} x_1 - z_1 & \cdots & x_n - z_n \\ \ell_1 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix}$$

abbia rango 1. Si sceglie allora una componente non nulla di $\mathbf{u}$ (certamente esistente in quanto $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$), sia essa ad esempio ℓ_1, e si impone che tutti gli orlati della sottomatrice (ℓ_1) in A siano nulli, cioè

$$\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_n - z_n \\ \ell_1 & \ell_n \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Si tratta, come si vede, di $n-1$ equazioni di primo grado nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Esaminiamo ora il caso degli iperpiani di uno spazio affine. Sia $\mathbb{B}$ un iperpiano, ovvero un sottospazio di dimensione $n-1$. Per comodità e per tradizione, indichiamo tale sottospazio con il simbolo π. Sia P_0 un punto di π. Allora $\pi = P_0 + \overrightarrow{\pi}$. Una base ordinata di $\overrightarrow{\pi}$ è del tipo

$$\mathcal{B}' = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}) \ .$$

Ripercorrendo la costruzione della rappresentazione cartesiana di un sottospazio in questo caso particolare, otteniamo che gli orlati da studiare si riducono ad un solo orlato e la rappresentazione cartesiana dell'iperpiano π è costituita da un'unica equazione lineare, che sarà del tipo

$$\pi : a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a = 0 \ .$$

Osserviamo esplicitamente che se $n = 2$ gli iperpiani coincidono con le rette, se $n = 3$ essi sono proprio i piani.

Siano ora π', π'' due iperpiani di rappresentazione cartesiana

$$\pi' : a'_1 x_1 + \ldots + a'_n x_n + a' = 0 \quad ; \quad \pi'' : a''_1 x_1 + \ldots + a''_n x_n + a'' = 0 \ .$$

Proposizione. *Siano π', π'' due iperpiani distinti. Se π', π'' non sono paralleli, l'intersezione $\pi' \cap \pi''$ è un sottospazio affine di dimensione $n-2$ con rappresentazione cartesiana*

$$\pi' \cap \pi'' : \begin{cases} a'_1 x_1 + \ldots + a'_n x_n + a' = 0 \\ a''_1 x_1 + \ldots + a''_n x_n + a'' = 0 \end{cases}$$

Definizione. *Siano π', π'' due iperpiani distinti. Se π', π'' non sono paralleli, l'insieme $\mathcal{F}$ degli iperpiani che contengono $\pi' \cap \pi''$ si dice fascio (proprio) di iperpiani individuato da π', π'', ovvero di asse $\pi' \cap \pi''$. Se invece $\pi' || \pi''$, e cioè $\overrightarrow{\pi}' = \overrightarrow{\pi}''$, l'insieme $\mathcal{G}$ degli iperpiani paralleli a π' (nonché a π''), ovvero l'insieme degli iperpiani che ammettono $\overrightarrow{\pi}'$ come sottospazio direttore, si dice fascio improprio di iperpiani di giacitura $\overrightarrow{\pi}'$.*

Osserviamo che gli iperpiani che appartengono al fascio (proprio o improprio) individuato da π', π'' sono tutti e soli quelli del tipo

$$\bar{\pi} : \lambda(a'_1 x_1 + \ldots + a'_n x_n + a') + \mu(a''_1 x_1 + \ldots + a''_n x_n + a'') = 0$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sono non entrambi nulli.

Abbiamo inoltre che, se π', π'' non sono paralleli, gli iperpiani di $\mathcal{F}$ sono tutti e soli quelli che contengono il sottospazio $\pi' \cap \pi''$, che si dice asse del fascio. Se invece π', π'' sono paralleli, gli iperpiani di $\mathcal{G}$ sono tutti e soli quelli paralleli a π' e inoltre il generico iperpiano $\bar{\pi}$ del fascio $\mathcal{G}$ ammette una rappresentazione cartesiana del tipo

$$\bar{\pi} : a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + k = 0$$

dove k è un opportuno scalare.

§5. QUESTIONI METRICHE

Sia $(V, \mathbb{A}, \pi)$ uno spazio affine reale (ovvero sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Se V è uno spazio vettoriale euclideo e, dati due suoi vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ indichiamo con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ il loro prodotto scalare, diremo che anche $\mathbb{A}$ è uno spazio (affine) euclideo. Ricordiamo, in particolare, che due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ si dicono *ortogonali*, e si scrive $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$, se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$. A tal proposito ricordiamo che se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si definisce

$$\|\mathbf{u}\| = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad , \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

e si ha che

$$\left| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} \right| \leq 1 \ .$$

Lo scalare $\|\mathbf{u}\|$ si dice *norma* del vettore $\mathbf{u}$, mentre $|\mathbf{u}|$ è la *lunghezza*, o anche *modulo*, di $\mathbf{u}$. Si definisce quindi l'angolo (convesso) orientato $\widehat{\mathbf{uv}} \in [0, \pi]$ ponendo

$$\widehat{\mathbf{uv}} = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} \ .$$

Come conseguenza avremo che

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \widehat{\mathbf{uv}} \ .$$

Le nozioni di norma, lunghezza o modulo, angolo ed ortogonalità riguardanti i vettori di V si riportano ai punti ed i sottospazi di $\mathbb{A}$. Ad esempio, se $P, Q, R \in \mathbb{A}$, si definisce la distanza $d(P, Q)$ ponendo

$$d(P, Q) = \left| \overrightarrow{PQ} \right| \ ,$$

e l'angolo $\widehat{PQR}$ ponendo

$$\widehat{PQR} = \widehat{\overrightarrow{QP}\overrightarrow{QR}} \ .$$

Se poi $\mathbb{B}$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$, si pone

$$d(P, \mathbb{B}) = \min \left\{ d(P, Q) \mid Q \in \mathbb{B} \right\}$$

e, se $\mathbb{B}'$, $\mathbb{B}''$ sono due sottospazi affini di $\mathbb{A}$, si pone

$$d(\mathbb{B}', \mathbb{B}'') = \min \left\{ d(P, Q) \mid P \in \mathbb{B}', \ Q \in \mathbb{B}'' \right\} \ ,$$

potendosi infatti dimostrare l'esistenza di tali minimi. Sia ora $\mathbf{u}$ un vettore. Diremo che $\mathbf{u}$ è ortogonale al sottospazio affine $\mathbb{B}$, e scriveremo $\mathbf{u} \perp \mathbb{B}$, se $\mathbf{u} \perp \overrightarrow{\mathbb{B}}$, ovvero $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{w} \in \overrightarrow{\mathbb{B}}$.

§6. IL PIANO AFFINE ED EUCLIDEO REALE

Sia ora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ed $n = 2$. Osserviamo esplicitamente che il modello classico per il piano affine $(V, \mathbb{A}, \mathbb{R})$ con $\dim \mathbb{A} = 2$ è il piano euclideo della geometria elementare. In tale modello, gli elementi di $\mathbb{A}$ sono i punti del piano e V è lo spazio vettoriale dei vettori geometrici liberi del piano. Laddove occorre considerare questioni metriche, angolari o di ortogonalità, si assume che sia dato in V un prodotto scalare definito positivo. Indichiamo tale spazio affine euclideo con il simbolo $\mathbb{E}^2$. I sottospazi di $\mathbb{E}^2$ sono i singleton (o impropriamente i punti) che hanno dimensione 0, le rette, di dimensione 1, ed infine $\mathbb{E}^2$ stesso, di dimensione 2. Abbiamo già affrontato il problema di rappresentare, in forma cartesiana o parametrica, le rette in uno spazio affine di dimensione arbitraria. Vediamo cosa succede in dettaglio in $\mathbb{E}^2$. Come osservato in generale, una retta r ha direttrice $\overrightarrow{r} \leq V$ e per ogni $P_0 \in r$ si ha che

$$r = P_0 + \overrightarrow{r}$$

ovvero

$$r = \left\{ P \in \mathbb{E}^2 \;\middle|\; \overrightarrow{P_0P} \in \overrightarrow{r} \right\} .$$

Pertanto, fissato un vettore non nullo $\mathbf{u}_r \in \overrightarrow{r}$, ovvero un vettore $\mathbf{u}_r$ parallelo ad r, si ha che $\mathbf{u}_r$ genera $\overrightarrow{r}$ (più precisamente, il sistema $[\mathbf{u}_r]$ è una base di $\overrightarrow{r}$) e quindi

$$r = \left\{ P \in \mathbb{E}^2 \;\middle|\; \exists\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{u}_r \right\} \tag{1}$$

o anche

$$r = \left\{ P \in \mathbb{E}^2 \;\middle|\; \left[\mathbf{u}_r, \overrightarrow{P_0P}\right] \text{ è dipendente } \right\} . \tag{2}$$

Passando alle componenti, dalla (1) si deducono le equazioni parametriche di r, dalla (2) l'equazione cartesiana. Consideriamo infatti un riferimento $\mathcal{R} = \left(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\right)$, che per comodità assumiamo essere monometrico ortogonale (ovvero $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ ed $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2$) anche se in molte situazioni che affronteremo tale assunzione sarà superflua. Fissato un punto $P_0 \in \mathbb{E}^2$ e scelto un vettore non nullo $\mathbf{u}$, vogliamo descrivere la retta r tale che $P_0 \in r$ ed $\overrightarrow{r} = \mathcal{L}(\mathbf{u})$. Indicato con P il generico punto del piano, e posto $P \equiv (x, y)$, $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, $\mathbf{u} = (l, m)$, abbiamo che $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$ e quindi, in base alla (1),

$$P \in r \iff \exists\, t \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{u} ,$$

ovvero, passando alle componenti,

$$(x - x_0, y - y_0) = t(l, m) = (tl, tm) .$$

Si ottiene quindi la seguente rappresentazione parametrica di r

$$r : \begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \end{cases}$$

ovvero

$$r : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases} . \tag{3}$$

Osserviamo esplicitamente che nella rappresentazione (3) i coefficienti del parametro t sono le componenti di un vettore direzionale di r. Utilizzando invece la (2), deve risultare dipendente il sistema

$$[\,(l,m),(x-x_0,y-y_0)\,]$$

e quindi

$$P \in r \iff \rho\begin{pmatrix} l & m \\ x-x_0 & y-y_0 \end{pmatrix} = 1 \iff \det\begin{pmatrix} l & m \\ x-x_0 & y-y_0 \end{pmatrix} = 0 \; .$$

Una rappresentazione cartesiana della retta r è dunque la seguente:

$$r : -mx + ly + (mx_0 - ly_0) = 0 \; .$$

Riassumendo, una rappresentazione cartesiana (o anche *implicita*) di r è del tipo

$$(4) \qquad r : ax + by + c = 0$$

dove a, b non sono entrambi nulli. In una tale rappresentazione si riconosce immediatamente che un vettore direzionale di r è dato da $\mathbf{u}_r = (-b, a)$. Si potrebbe dimostrare che rappresentano r tutte e sole le equazioni di primo grado in x, y proporzionali alla (4).

Siamo quindi in grado di descrivere una retta nel piano a partire da un suo punto e da un vettore non nullo ad essa parallelo. Possiamo anche partire da due punti di una retta ed ottenere una analoga descrizione. In effetti nella geometria euclidea, che rappresenta il nostro modello, sappiamo che per due punti distinti passa una ed una sola retta. Nel nostro contesto possiamo procedere come segue. Dati due punti P_0, P_1 distinti, possiamo porre $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1}$ e descrivere la retta a partire dal punto P_0 e dal vettore $\mathbf{u}$.

Date ora due rette r', r'', vogliamo studiare le loro possibili posizioni reciproche. A tale scopo, siano esse rappresentate come segue:

$$(5) \qquad r' : a'x + b'y + c' = 0 \quad ; \quad r'' : a''x + b''y + c'' = 0 \; .$$

E' chiaro che l'intersezione $r' \cap r''$ è il luogo rappresentato dal sistema

$$(6) \qquad r' \cap r'' : \begin{cases} a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0 \end{cases}$$

Posto

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} -c' \\ -c'' \end{matrix} \right. \right)$$

il sistema (6), di cui A ed A' sono rispettivamente la matrice incompleta e quella completa, è di Cramer se e solo se $\det A \neq 0$. In tal caso esiste un'unica soluzione $(\bar{x}, \bar{y})$ ed il punto $\bar{P} \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ è l'unico punto in cui le due rette si intersecano. Si dice allora che r', r'' sono incidenti, e $\bar{P}$ è il punto d'incidenza. Supponiamo ora che $\det A = 0$; le due rette sono allora parallele (infatti $\mathbf{u}_{r'} = (-b', a')$ e $\mathbf{u}_{r''} = (-b'', a'')$ sono proporzionali e quindi generano la stessa direttrice). In particolare, se $\rho(A') = 2$ il sistema (6) è incompatibile e le due rette hanno intersezione vuota. Diremo allora che r', r'' sono propriamente parallele, e scriveremo $r' \parallel r''$. Se invece $\rho(A') = 1$ il sistema (6) è compatibile (ma non di Cramer) e ammette infinite soluzioni, e le due rette coincidono. Infatti la circostanza che $\rho(A') = 1$ ci dice che le equazioni cartesiane delle due rette sono tra loro proporzionali, e dunque descrivono lo stesso luogo geometrico.

Consideriamo ora due rette distinte r', r'', rappresentate come sopra. Si ha pertanto che $\rho(A') = 2$ e che

$$r' \parallel r'' \iff \rho(A) = 1 \iff \det A = 0 \ .$$

Definizione. *Se r', r'' non sono parallele, l'insieme $\mathcal{F}$ delle rette che contengono $r' \cap r''$ si dice fascio proprio di rette individuato da r', r'. Se invece $r' || r''$, l'insieme $\mathcal{G}$ delle rette parallele a r' (nonché a r''), ovvero l'insieme delle rette che ammettono $\overrightarrow{r'}$ come direttrice, si dice fascio improprio di rette di direttrice $\overrightarrow{r'}$.*

Osserviamo che le rette che appartengono al fascio (proprio o improprio) individuato da r', r'' sono tutte e sole quelle del tipo

$$\bar{r} : \lambda(a'x + b'y + c') + \mu(a''x + b''y + c'') = 0$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sono non entrambi nulli.

Nel caso del fascio proprio, detto $\bar{P} \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ il punto di incidenza di r', r'', la generica retta di $\mathcal{F}$ è del tipo

$$\bar{r} : a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) = 0 \ ,$$

dove a, b sono scalari arbitrari, non entrambi nulli. Nel caso del fascio improprio, la generica retta di $\mathcal{G}$ è del tipo

$$\bar{r} : a'x + b'y + k = 0 \ ,$$

dove k è un arbitrario scalare. Sia nel caso del fascio proprio che di quello improprio, la retta r rappresentata da

$$r : ax + by + c = 0$$

appartiene al fascio individuato da r', r'' se e solo se

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Siano ora r', r'' come in (5). Indicati con $\mathbf{u}_{r'}, \mathbf{u}_{r''}$ i loro rispettivi vettori direzionali, si è già osservato che

$$\mathbf{u}_{r'} = (-b', a') \ , \ \mathbf{u}_{r''} = (-b'', a'') \ .$$

Definizione. *Le rette r', r'' si dicono ortogonali, e si scrive $r' \perp r''$, se $\mathbf{u}_{r'} \perp \mathbf{u}_{r''}$, ovvero $\mathbf{u}_{r'} \cdot \mathbf{u}_{r''} = 0$, e cioè $a'a'' + b'b'' = 0$.*

Osserviamo che se $r' \perp r''$, sicuramente r', r'' sono incidenti. Si dice anche che r', r'' sono perpendicolari. Ricordiamo che se $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ sono due punti, la loro distanza $d(P_0, P_1)$ è definita ponendo

$$d(P_0, P_1) = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \ .$$

Se consideriamo la retta r rappresentata come in (4), si verifica agevolmente che esiste un unico punto $H \in r$ tale che

$$d(P_0, r) = d(P_0, H) \ .$$

Si osserva infatti che esiste un'unica retta r' tale che $P_0 \in r'$ e $r' \perp r$. Basta porre $\mathbf{u}_{r'} = (a, b)$ (e così $\mathbf{u}_r \perp \mathbf{u}_{r'}$) e scrivere r' in forma parametrica. Il punto H si trova allora come intersezione di r ed r'. Si verifica facilmente che

$$d(P_0, r) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ .$$

Sia ancora r come in (4) e consideriamo il vettore $\mathbf{n}_r = (a, b)$, che si dice *vettore normale* di r. Osserviamo che $\mathbf{n}_r \perp r$, ovvero $\mathbf{n}_r \perp \overrightarrow{r}$, e cioè $\mathbf{n}_r \perp \mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{w} \in \overrightarrow{r}$. Infatti, poiché $\mathbf{u}_r$ genera $\overrightarrow{r}$, ogni $\mathbf{w} \in \overrightarrow{r}$ è del tipo $\mathbf{w} = k\mathbf{u}_r$, dove $\mathbf{u}_r = (-b, a)$ è il vettore direzionale di r e k è un opportuno scalare, ed è chiaro che

$$\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{u}_r = (a, b) \cdot (-b, a) = -ab + ab = 0 \ ,$$

cioè $\mathbf{n}_r \perp \mathbf{u}_r$. Pertanto, considerate ancora le rette r', r'' come in (5) e i loro vettori normali $\mathbf{n}_{r'} = (a', b') \quad ; \quad \mathbf{n}_{r''} = (a'', b'')$, la condizione di parallelismo tra tali rette del piano può anche esprimersi come segue:

$$r' \parallel r'' \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{u}_{r'} \parallel \mathbf{u}_{r''} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{n}_{r'} \parallel \mathbf{n}_{r''} \quad \Longleftrightarrow \quad (a', b') \propto (a'', b'') \ ,$$

o anche

$$r' \parallel r'' \quad \Longleftrightarrow \quad \rho \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = 0 \ .$$

§7. LO SPAZIO AFFINE ED EUCLIDEO REALE

Sia ora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ed $n = 3$. Osserviamo esplicitamente che il modello classico per lo spazio affine $(V, \mathbb{A}, \mathbb{R})$ con $\dim \mathbb{A} = 3$ è lo spazio euclideo della geometria elementare. In tale modello, gli elementi di $\mathbb{A}$ sono i punti dello spazio e V è lo spazio vettoriale dei vettori geometrici liberi dello spazio. Laddove occorre considerare questioni metriche, angolari o di ortogonalità, si assume che sia dato in V un prodotto scalare definito positivo. Indichiamo tale spazio affine euclideo con il simbolo $\mathbb{E}^3$. I sottospazi di $\mathbb{E}^3$ sono i singleton (o impropriamente i punti) che hanno dimensione 0, le rette, di dimensione 1, i piani, di dimensione 2, ed infine $\mathbb{E}^3$ stesso, di dimensione 3.

In questo capitolo supponiamo di aver fissato un riferimento $\mathcal{R} = \big(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\big)$, che per comodità assumiamo essere monometrico ortogonale (ovvero $\mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_k = 0$ se $h, k = 1, 2, 3$ ed $h \neq k$, ed $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$) anche se in molte situazioni che affronteremo tale assunzione sarà superflua. In particolare, dati due vettori $\mathbf{u}' = (x', y', z')$; $\mathbf{u}'' = (x'', y'', z'')$ di V, il loro prodotto scalare è dato dalla formula

$$\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'' = x'x'' + y'y'' + z'z'' \ .$$

Vogliamo definire il prodotto vettoriale $\mathbf{w}$ di $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{u}''$, che sarà indicato con il simbolo $\mathbf{u}' \times \mathbf{u}''$ o anche $\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u}''$, ponendo $\mathbf{w} = (l, m, n)$, ovvero $\mathbf{w} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3$, dove

$$l = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} \quad ; \quad m = - \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix} \quad ; \quad n = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \ .$$

Osserviamo che l, m, n sono i minori di ordine 2, presi a segni alterni, della matrice

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \ .$$

Proposizione. *Valgono le seguenti proprietà del prodotto vettoriale:*
(i) $\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u}'' = -\mathbf{u}'' \wedge \mathbf{u}'$*;*
(ii) $\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u}'' = \mathbf{0} \iff \big[\mathbf{u}', \mathbf{u}''\big]$ *è un sistema dipendente;*
(iii) $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}'$ *e* $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}''$*.*

Poiché $\mathbf{w} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3$, risulta anche

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \ .$$

Vogliamo ora rappresentare, in forma cartesiana o parametrica, i piani in $\mathbb{E}^3$. Come osservato in generale, un piano π ha giacitura $\overrightarrow{\pi} \leq V$, un sottospazio vettoriale di dimensione 2, e per ogni $P_0 \in \pi$ si ha che

$$\pi = P_0 + \overrightarrow{\pi}$$

ovvero

$$\pi = \left\{ \, P \in \mathbb{E}^3 \ \middle| \ \overrightarrow{P_0P} \in \overrightarrow{\pi} \, \right\} \ .$$

Pertanto, fissati due vettori indipendenti $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in \overrightarrow{\pi}$, si ha che $\mathbf{u}', \mathbf{u}''$ generano $\overrightarrow{\pi}$ (più precisamente, il sistema $[\mathbf{u}', \mathbf{u}'']$ è una base di $\overrightarrow{\pi}$) e quindi

$$\pi = \left\{ P \in \mathbb{E}^3 \;\middle|\; \exists\, t', t'' \in \mathbb{R} \;\middle|\; \overrightarrow{P_0P} = t'\mathbf{u}' + t''\mathbf{u}'' \right\} \tag{7}$$

o anche

$$\pi = \left\{ P \in \mathbb{E}^3 \;\middle|\; \left[\mathbf{u}', \mathbf{u}'', \overrightarrow{P_0P}\right] \text{ è dipendente } \right\} . \tag{8}$$

Passando alle componenti, dalla (7) si deducono le equazioni parametriche di π, dalla (8) l'equazione cartesiana di π. Fissiamo dunque un punto $P_0 \in \mathbb{E}^3$ e, scelti due vettori indipendenti $\mathbf{u}', \mathbf{u}''$, descriviamo il piano π tale che $P_0 \in \pi$ e $\overrightarrow{\pi} = \mathcal{L}(\mathbf{u}', \mathbf{u}'')$, ovvero il piano passante per P_0 e parallelo ad $\mathbf{u}', \mathbf{u}''$. Indicato con P il generico punto dello spazio, e posto $P \equiv (x, y, z)$, $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{u}' = (l', m', n')$, $\mathbf{u}'' = (l'', m'', n'')$, abbiamo che $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e quindi, in base alla (7),

$$P \in \pi \iff \exists\, t', t'' \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{P_0P} = t'\mathbf{u}' + t''\mathbf{u}'' ,$$

ovvero, passando alle componenti,

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = t'(l', m', n') + t''(l'', m'', n'') = (t'l' + t''l'', t'm' + t''m'', t'n' + t''n'') .$$

Si ottiene quindi la seguente rappresentazione parametrica di π

$$\pi : \begin{cases} x - x_0 = t'l' + t''l'' \\ y - y_0 = t'm' + t''m'' \\ z - z_0 = t'n' + t''n'' \end{cases}$$

ovvero

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + t'l' + t''l'' \\ y = y_0 + t'm' + t''m'' \\ z = z_0 + t'n' + t''n'' \end{cases} \tag{9}$$

Osserviamo esplicitamente che nella rappresentazione (9) i coefficienti dei parametri t', t'' sono le componenti di due vettori che generano la giacitura di π. Utilizzando invece la (8), deve risultare dipendente il sistema

$$\left[\, (l', m', n'), (l'', m'', n''), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \,\right]$$

e quindi, posto

$$C = \begin{pmatrix} l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{pmatrix} ,$$

si ha che

$$(10) \qquad P \in \pi \iff \rho(C) = 2 \ ,$$

poiché già sappiamo che le prime due righe di C sono indipendenti. Pertanto l'uguaglianza al II membro della (10) equivale al fatto che

$$\det C = 0$$

e quindi, calcolando tale determinante con la regola di Laplace sulla terza riga, una rappresentazione cartesiana del piano π è data da

$$(11) \qquad \pi : ax + by + cz + d = 0$$

dove

$$a = \begin{vmatrix} m' & n' \\ m'' & n'' \end{vmatrix} \quad ; \quad b = - \begin{vmatrix} l' & n' \\ l'' & n'' \end{vmatrix} \quad ; \quad c = \begin{vmatrix} l' & m' \\ l'' & m'' \end{vmatrix} \quad ; \quad d = - \begin{vmatrix} l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix}$$

(e quindi, fra l'altro, a, b, c non sono tutti nulli). Si potrebbe facilmente verificare che ogni equazione del tipo (11), con a, b, c non sono tutti nulli, rappresenta un piano, ed è poi chiaro che equazioni proporzionali rappresentano lo stesso piano.

Siamo quindi in grado di descrivere un piano nello spazio a partire da un suo punto e da due vettori indipendenti ad esso paralleli (o, equivalentemente, appartenenti alla sua giacitura). Possiamo anche partire da tre punti non allineati di un piano (ovvero non appartenenti ad una stessa retta) ed ottenere una analoga descrizione. In effetti nella geometria euclidea, che rappresenta il nostro modello, sappiamo che per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano. Nel nostro contesto possiamo procedere come segue. Dati tre punti P_0, P_1, P_2 non allineati, possiamo porre $\mathbf{u}' = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\mathbf{u}'' = \overrightarrow{P_0P_2}$ e descrivere il piano a partire dal punto P_0 e dai vettori $\mathbf{u}', \mathbf{u}''$.

Sia π come in (11) e consideriamo il vettore $\mathbf{n}_\pi = (a, b, c)$, che si dice *vettore normale* di π. Osserviamo che $\mathbf{n}_\pi \perp \pi$, ovvero $\mathbf{n}_\pi \perp \overrightarrow{\pi}$, e cioè $\mathbf{n}_\pi \perp \mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{w} \in \overrightarrow{\pi}$. Si può provare ciò al modo seguente. Posto

$$(12) \qquad \mathbf{u} = (-b, a, 0) \quad ; \quad \mathbf{v} = (-c, 0, a) \quad ; \quad \mathbf{w} = (0, -c, b)$$

non è difficile verificare che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \overrightarrow{\pi}$, ovvero che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \parallel \pi$. Tenendo conto che a, b, c non possono annullarsi simultaneamente, vediamo che due di tali vettori costituiscono una base di $\overrightarrow{\pi}$. Ad esempio, se $a \neq 0$, $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ è una base di $\overrightarrow{\pi}$. In particolare, il sistema $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ genera $\overrightarrow{\pi}$. E' chiaro quindi che $\mathbf{n}_\pi \perp \pi$ se e solo se

$$\mathbf{n}_\pi \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n}_\pi \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n}_\pi \cdot \mathbf{w} = 0 \ ,$$

e ciò è immediato. Una rappresentazione della giacitura $\overrightarrow{\pi}$ del piano π, come sottospazio vettoriale di V nella base fissata, è data da

$$\overrightarrow{\pi} : ax + by + cz = 0 \ .$$

E' infatti chiaro che i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ della (12), che generano $\overrightarrow{\pi}$, hanno componenti che verificano tale equazione.

Consideriamo ora due piani

$$\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad , \quad \pi'' : a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \ , \tag{13}$$

ed indichiamo con $\mathbf{n}_{\pi'} = (a', b', c')$, $\mathbf{n}_{\pi''} = (a'', b'', c'')$ i loro vettori normali. Per definizione, sappiamo che $\pi' \parallel \pi''$ se e solo se $\overrightarrow{\pi'} = \overrightarrow{\pi''}$ e cioè se e solo se le equazioni

$$a'x + b'y + c'z = 0 \quad , \quad a''x + b''y + c''z = 0$$

rappresentano lo stesso sottospazio, ovvero sono proporzionali. Quindi

$$\pi' \parallel \pi'' \iff (a', b', c') \propto (a'', b'', c'') \iff \rho \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 1 \ ,$$

o anche

$$\pi' \parallel \pi'' \iff \mathbf{n}_{\pi'} \parallel \mathbf{n}_{\pi''} \iff \left[\mathbf{n}_{\pi'}, \mathbf{n}_{\pi''} \right] \text{ è dipendente} \ .$$

Se ciò accade, ed inoltre

$$\rho \begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 1 \ ,$$

le (13) risultano proporzionali, e quindi $\pi' = \pi''$. Si dice allora che π', π'' sono *impropriamente* paralleli o coincidenti. Se invece

$$\rho \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 1 \quad , \quad \rho \begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2 \ ,$$

il sistema

$$\begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases} \tag{14}$$

non è compatibile, si ha che $\pi' \cap \pi'' = \emptyset$ e i due piani si dicono *propriamente* paralleli. Se, infine, $\pi' \nparallel \pi''$, deve essere

$$\rho \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2 \ ,$$

ed il sistema (14) è compatibile e ridotto, ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro, e rappresenta, come vedremo in seguito, una retta.

Abbiamo già affrontato il problema di rappresentare, in forma cartesiana o parametrica, le rette in uno spazio affine di dimensione arbitraria e anche il caso particolare delle rette in un piano affine. Vediamo cosa succede in dettaglio in $\mathbb{E}^3$. Come osservato in generale, una retta r ha direttrice $\overrightarrow{r} \leq V$, un sottospazio vettoriale di dimensione 1, e per ogni $P_0 \in r$ si ha che

$$r = P_0 + \overrightarrow{r}$$

ovvero

$$r = \left\{ P \in \mathbb{E}^3 \;\middle|\; \exists\, \mathbf{v} \in V \;\middle|\; \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{v} \right\} .$$

Pertanto, fissato un vettore non nullo $\mathbf{u}_r \in \overrightarrow{r}$, si ha che $\mathbf{u}_r$ genera $\overrightarrow{r}$ (più precisamente, il sistema $[\mathbf{u}_r]$ è una base di $\overrightarrow{r}$) e quindi

$$r = \left\{ P \in \mathbb{E}^3 \;\middle|\; \exists\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{u}_r \right\} \tag{15}$$

o anche

$$r = \left\{ P \in \mathbb{E}^3 \;\middle|\; \left[\mathbf{u}_r, \overrightarrow{P_0P}\right] \text{ è dipendente } \right\} . \tag{16}$$

esattamente come nel caso delle rette in un piano affine. Passando alle componenti, dalla (15) si deducono le equazioni parametriche di r, dalla (16) le equazioni cartesiane (che in questo caso saranno due). Fissato un punto $P_0 \in \mathbb{E}^3$ e scelto un vettore non nullo $\mathbf{u}$, vogliamo descrivere la retta r tale che $P_0 \in r$ ed $\overrightarrow{r} = \mathcal{L}(\mathbf{u})$. Indicato con P il generico punto del piano, e posto $P \equiv (x, y, z)$, $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{u} = (l, m, n)$, abbiamo che $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e quindi, in base alla (15),

$$P \in r \iff \exists\, t \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{u} ,$$

ovvero, passando alle componenti,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(l, m, n) = (tl, tm, tn) .$$

Si ottiene quindi la seguente rappresentazione parametrica di r

$$r : \begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases}$$

ovvero

$$r : \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} . \tag{17}$$

Osserviamo esplicitamente che nella rappresentazione (17) i coefficienti del parametro t sono le componenti di un vettore direzionale di r. Utilizzando invece la (16), deve risultare dipendente il sistema

$$\big[\,(l,m,n),(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\,\big]$$

e quindi, posto

$$C=\begin{pmatrix} l & m & n \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{pmatrix} ,$$

si ha che

$$P\in r \iff \rho(C)=1\ . \tag{18}$$

Poiché $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, gli scalari l,m,n non sono tutti nulli. Supponiamo ad esempio che sia $l\neq 0$. Il Teorema degli Orlati ci dice che l'uguaglianza al II membro della (18) equivale al fatto che gli orlati dell'elemento l in C siano tutti degeneri, ovvero

$$\begin{vmatrix} l & m \\ x-x_0 & y-y_0 \end{vmatrix}=0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} l & n \\ x-x_0 & z-z_0 \end{vmatrix}=0\ ,$$

e quindi una rappresentazione cartesiana della retta r è data da

$$r:\begin{cases} -mx+ly+(mx_0-ly_0)=0 \\ -nx+lz+(nx_0-lz_0)=0 \end{cases}$$

Riassumendo, una rappresentazione cartesiana (o anche *implicita*) della retta r è del tipo

$$r:\begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases} \tag{19}$$

dove, posto

$$A'=\left(\underbrace{\begin{matrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} -d' \\ -d'' \end{matrix}\right.\right) ,$$

si ha che $\rho(A)=2$. In tale situazione è chiaro che le due equazioni (19) rappresentano due piani, diciamo π',π'', che risultano tra loro non paralleli, e si ha che

$$r=\pi'\cap\pi''\ .$$

Si potrebbe facilmente verificare che ogni sistema del tipo (19), con $\rho(A)=2$, rappresenta una retta r e che un vettore direzionale $\mathbf{u}_r=(l,m,n)$ di r si ottiene ponendo

$$l=\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} \quad ; \quad m=-\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} \quad ; \quad n=\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}\ , \tag{20}$$

(ovvero $\mathbf{u}_r = \mathbf{n}_{\pi'} \wedge \mathbf{n}_{\pi''}$, se il riferimento scelto è ortonormale).

Consideriamo ora due piani distinti π', π'', rappresentati come in (13). Si ha pertanto che $\rho(A') = 2$ e che

$$\pi' \parallel \pi'' \iff \rho(A) = 1 \ .$$

Definizione. *Se π', π'' non sono paralleli, l'insieme $\mathcal{F}$ dei piani che contengono $r = \pi' \cap \pi''$ si dice fascio proprio di piani individuato da π', π'', o anche di asse r. Se invece $\pi' \parallel \pi''$, l'insieme $\mathcal{G}$ dei piani paralleli a π' (nonché a π''), ovvero l'insieme dei piani che ammettono $\overrightarrow{\pi'}$ come giacitura, si dice fascio improprio di piani individuato da π', π'', o anche di giacitura $\overrightarrow{\pi'}$.*

Osserviamo che i piani che appartengono al fascio (proprio o improprio) individuato da π', π'' sono tutti e soli quelli del tipo

$$\bar{\pi} : \lambda(a'x + b'y + c'z + d') + \mu(a''x + b''y + c''z + d'') = 0$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sono non entrambi nulli. Nel caso del fascio improprio, il generico piano di $\mathcal{G}$ è del tipo

$$\bar{\pi} : a'x + b'y + c'z + k = 0 \ ,$$

dove k è un arbitrario scalare. In entrambi i casi, il piano π rappresentato da

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

appartiene al fascio individuato da π', π'' se e solo se

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2 \ .$$

Sia ora r una retta come in (17) o in (15) e π un piano come in (11), ed indichiamo con $\mathbf{u}_r = (l, m, n)$ il vettore direzionale di r e con $\mathbf{n}_\pi = (a, b, c)$ il vettore normale di π. Poniamo

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} d \\ d' \\ d'' \end{matrix} \end{array} \right) \ .$$

Sappiamo che, per definizione, r parallela a π se e solo se $\overrightarrow{r} \leq \overrightarrow{\pi}$, ovvero $\mathbf{u}_r \in \overrightarrow{\pi}$. Si vede che ciò equivale a dire che $\mathbf{u}_r \perp \mathbf{n}_\pi$. Pertanto

$$r \parallel \pi \iff \mathbf{u}_r \perp \mathbf{n}_\pi \iff \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n}_\pi = 0 \ .$$

Ricordando la descrizione (20) di $\mathbf{u}_r$ e calcolando $\det A$ con la regola di Laplace sulla I riga, vediamo che

$$\det A = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n}_\pi$$

e quindi

$$r \parallel \pi \iff \det A = 0$$

con $\rho(A) = 2$. Se r è parallela a π, distinguiamo due casi. Diremo che r e π sono *impropriamente paralleli* se $r \subset \pi$, e ciò equivale a dire che $\rho(A') = 2$. Altrimenti avremo che $\rho(A') = 3$, ma $\rho(A) = 2$ e quindi il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases} \tag{21}$$

che rappresenta $r \cap \pi$, è incompatibile. Pertanto $r \cap \pi = \emptyset$ e diremo che r e π sono *propriamente paralleli*. In sintesi

$$r \parallel \pi \iff \rho(A) = 2 \iff \det A = 0$$

e tale parallelismo è proprio, ovvero $r \cap \pi = \emptyset$, se e solo se $\rho(A') = 3$. Se invece $r \not\parallel \pi$, ovvero $\rho(A) = 3$ e $\det A \neq 0$, il sistema (21) è di Cramer. Se indichiamo con $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ l'unica soluzione di (21), e poniamo $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, si ha che

$$r \cap \pi = \{\bar{P}\}$$

e si dice che r e π sono incidenti. Se r è rappresentata come in (15), le coordinate del punto di incidenza si possono anche determinare sostituendo i secondi membri delle (15) al posto di x, y, z in (11), risolvendo la risultante equazione in t e sostituendo tale valore nelle (15).

POSIZIONE RECIPROCA TRA RETTE

Consideriamo due rette r, s, dove r è rappresentata come in (19) o (17) ed

$$s : \begin{cases} a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \\ a''''x + b''''y + c''''z + d'''' = 0 \end{cases} \tag{22}$$

dove

$$\rho \begin{pmatrix} a''' & b''' & c''' \\ a'''' & b'''' & c'''' \end{pmatrix} = 2 \ .$$

Ricordiamo che le rette r, s sono parallele quando le loro direttrici $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$ coincidono. Parleremo poi di parallelismo improprio se $r = s$ e di parallelismo proprio se $r \neq s$ (e quindi $r \cap s = \emptyset$). Diremo che r, s sono incidenti se si intersecano in un punto. Sia nel caso del parallelismo proprio che nel caso dell'incidenza è agevole verificare che esiste un unico piano π che contiene entrambe le rette. Pertanto diremo che r, s sono complanari. In caso contrario, r, s sono non complanari, o anche *sghembe*.

Vogliamo studiare le possibili posizioni reciproche di r, s. Indichiamo, come al solito, con π', π'' i piani rappresentati dalle (19) e con π''', π'''' quelli rappresentati dalle (22). Poniamo, per comodità,

$$A'_r = \left(\underbrace{\begin{matrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}}_{A_r} \left| \begin{matrix} -d' \\ -d'' \end{matrix} \right. \right) \quad ; \quad A'_s = \left(\underbrace{\begin{matrix} a''' & b''' & c''' \\ a'''' & b'''' & c'''' \end{matrix}}_{A_s} \left| \begin{matrix} -d''' \\ -d'''' \end{matrix} \right. \right)$$

e

$$A' = \begin{pmatrix} A'_r \\ \hline A'_s \end{pmatrix} = \left(\underbrace{\begin{matrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \\ a'''' & b'''' & c'''' \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} d' \\ d'' \\ d''' \\ d'''' \end{matrix} \right. \right) \tag{23}$$

Osserviamo che

$$\rho(A_r) = \rho(A_s) = \rho(A'_r) = \rho(A'_r) = 2$$

e quindi

$$2 \leq \rho(A) \leq \rho(A') \leq 4 \ .$$

Inoltre i piani π', π'' sono incidenti e si ha che $r = \pi' \cap \pi''$ ed analogamente piani π''', π'''' sono incidenti e si ha che $s = \pi''' \cap \pi''''$. Consideriamo il seguente sistema lineare, che rappresenta l'intersezione tra le due rette r, s ed ammette le matrici A, A' descritte dalla (23) come matrici associate, a meno del segno degli elementi dell'ultima colonna che non incide nel calcolo dei ranghi

$$r \cap s : \begin{cases} a'x + b'y + c'z = -d' \\ a''x + b''y + c''z = -d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = -d''' \\ a''''x + b''''y + c''''z = -d'''' \end{cases} \tag{24}$$

Caso 1. Supponiamo che sia $\rho(A) = \rho(A') = 2$. Allora il sistema (24) è compatibile, per il Teorema di Rouchè-Capelli, e si riduce al sistema (19), o equivalentemente al sistema (21), che rappresentano, rispettivamente, r ed s. Pertanto $r = r \cap s = s$, ovvero r ed s coincidono. Vale anche il viceversa, nel senso che se r, s sono rappresentate come sopra ed esse coincidono, allora $\rho(A) = \rho(A') = 2$.

Caso 2. Se $\rho(A) = 2$ e $\rho(A') = 3$, il sistema (24) è incompatibile e $r \cap s = \emptyset$. Consideriamo le rette

$$\bar{r} : \begin{cases} a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \bar{s} : \begin{cases} a'''x + b'''y + c'''z = 0 \\ a''''x + b''''y + c''''z = 0 \end{cases}$$

ed i piani

$$\bar{\pi}' : a'x + b'y + c'z = 0 \ ; \ \bar{\pi}'' : a''x + b''y + c''z = 0$$

$$\bar{\pi}''' : a'''x + b'''y + c'''z = 0 \ ; \quad \bar{\pi}'''' : a''''x + b''''y + c''''z = 0 \ .$$

Abbiamo che $\bar{r}, \bar{s}, \bar{\pi}', \bar{\pi}'', \bar{\pi}''', \bar{\pi}''''$ sono le rette ed i piani paralleli rispettivamente ad $r, s, \pi', \pi'', \pi''', \pi''''$, passanti per l'origine. Il fatto che $\rho(A) = 2$ ci dice che $\bar{\pi}''', \bar{\pi}''''$ appartengono al fascio individuato da $\bar{\pi}', \bar{\pi}''$, ovvero $\bar{r} = \bar{s}$, e quindi $r \parallel \bar{r} = \bar{s} \parallel s$. In definitiva, le rette r, s sono propriamente parallele. Vale anche il viceversa, nel senso che se $r \parallel s$ in senso proprio allora $\rho(A) = 2$ e $\rho(A') = 3$.

Caso 3. Sia ora $\rho(A) = 3$, $\rho(A') = 3$. Il sistema (24) è compatibile e si riduce, cancellando opportunamente una delle quattro equazioni, ad un sistema di Cramer che ammette come unica soluzione una terna $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Le rette r ed s sono allora incidenti e si incontrano nel punto $\bar{P} \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Vale anche il viceversa, nel senso che se sappiamo che r ed s si incontrano in un punto deduciamo che $\rho(A) = 3$, $\rho(A') = 3$.

Caso 4. Supponiamo infine che $\rho(A) = 3$, $\rho(A') = 4$, ovvero $\det(A') \neq 0$. Poiché se due rette sono complanari, ovvero esiste un piano che le contiene entrambe, esse risultano, come già noto, incidenti o parallele oppure coincidenti, e nel caso in esame nessuna di queste situazioni si verifica, le due rette r ed s saranno sghembe, ovvero non esiste alcun piano che le contiene entrambe. Anche in questo caso vale il viceversa.

Osserviamo che, nel *Caso 4*, il fatto che $\rho(A') = 4$ implica che $\rho(A) = 3$, e quindi r, s sono sghembe se e solo se $\det A' \neq 0$.

§8. QUESTIONI METRICHE NELLO SPAZIO

Definizione. *Due rette r', r'' sono ortogonali (e si scrive $r' \perp r''$) se $\mathbf{u}_{r'} \perp \mathbf{u}_{r''}$. Quando si verifica tale situazione, può avvenire che r' ed r'' siano incidenti oppure sghembe. Due rette ortogonali ed incidenti si dicono perpendicolari.*

Definizione. *Due piani π', π'' sono ortogonali (e si scrive $\pi' \perp \pi''$) se $\mathbf{n}_{\pi'} \perp \mathbf{n}_{\pi''}$.*

Definizione. *Si dice che r e π sono ortogonali se $\mathbf{u}_r$ è ortogonale a π, ovvero a $\overrightarrow{\pi}$. Scriveremo allora $r \perp \pi$.*

Osserviamo esplicitamente che ciò equivale a dire che $\mathbf{u}_r \parallel \mathbf{n}_\pi$, o, equivalentemente, che, posto $\mathbf{u}_r = (l, m, n)$ e $\mathbf{n}_\pi = (a, b, c)$, si abbia $(l, m, n) \propto (a, b, c)$, ovvero

$$\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1 \ .$$

Riassumendo, si ha che

$$r \perp \pi \iff \mathbf{u}_r \parallel \mathbf{n}_\pi \iff (l,m,n) \propto (a,b,c) \iff \rho \begin{pmatrix} l & m & n \\ a & b & c \end{pmatrix} = 1 \ .$$

Osserviamo anche che se $r \perp \pi$, allora r e π sono incidenti.

E' chiaro che tali definizioni non dipendono dalla scelta dei vettori direzionali delle rette r, r', r'' e dei vettori normali dei piani π, π', π''.

Possiamo definire l'angolo tra le due rette r', r'' e tra i due piani π', π'' ponendo

$$\widehat{r'r''} = \min \left\{ \widehat{\mathbf{u}_{r'}\mathbf{u}_{r''}}, \pi - \widehat{\mathbf{u}_{r'}\mathbf{u}_{r''}} \right\} \quad ; \quad \widehat{\pi'\pi''} = \min \left\{ \widehat{\mathbf{n}_{\pi'}\mathbf{n}_{\pi''}}, \pi - \widehat{\mathbf{n}_{\pi'}\mathbf{n}_{\pi''}} \right\} \ .$$

La definizione di angolo tra due rette appena data ha senso anche quando le rette in questione non sono incidenti, ovvero $r' \cap r'' = \emptyset$.

Consideriamo ora due punti $P_0 \equiv (x_0, y_0 =, z_0)$, $P_1 \equiv (x_1, y_1 =, z_1)$, due rette r', r'' e due piani π', π'' (come in (13)). Per quanto riguarda la distanza tra due punti, osserviamo che, per definizione,

$$d(P_0, P_1) = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}}$$

e quindi, poiché $\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$,

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \ .$$

Occupiamoci ora della distanza di un punto P_0 da un piano π'. Descritta la retta r passante per P_0 e tale che $\mathbf{u}_r = \mathbf{n}_{\pi'}$, abbiamo che $r \perp \pi'$. Posto $H = r \cap \pi'$ si verifica facilmente che

$$d(P_0, H) \leq d(P_0, P) \quad \forall\ P \in \pi' \ .$$

Pertanto

$$d(P_0, \pi') = d(P_0, H)$$

e si prova che

$$d(P_0, \pi') = \frac{|a'x + b'y + c'z + d'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \ .$$

Studiamo la distanza tra i due piani π', π''. Se essi non sono paralleli, la loro intersezione è non vuota (è una retta) e quindi $d(\pi', \pi'') = 0$. Se invece $\pi' \parallel \pi''$, si procede al modo seguente. Se r è una qualunque retta ortogonale a entrambi i piani, detti P', P'' i punti di intersezione di r con tali piani, si ha che

$$d(\pi', \pi'') = d(P', P'') \ .$$

Consideriamo ora i sottospazi r', π' e calcoliamo $d(r', \pi')$. Se r' e π' sono incidenti è chiaro che $d(r', \pi') = 0$. Se invece $r' \parallel \pi'$, è altrettanto chiaro che

$$d(r', \pi') = d(P', \pi') \quad \forall\ P' \in r' \ .$$

La distanza tra il punto P_0 e la retta r' si calcola invece come segue. Esiste un unico piano π passante per P_0 e ortogonale ad r'. Posto allora $H = r' \cap \pi$, si ha che

$$d(P_0, r') = d(P_0, H) \ .$$

Consideriamo ora due rette r, s. Se $r \parallel s$, scelto un piano π tale che $\mathbf{n}_\pi = \mathbf{u}_r$ e posto $H = \pi \cap r$, $K = \pi \cap s$, si ha che

$$d(r, s) = d(H, K) \ .$$

Se invece r ed s sono non parallele, vale il seguente importante teorema.

Teorema. *Siano r ed s due rette non parallele. Esiste allora un'unica retta p perpendicolare ad entrambe (che viene detta la comune perpendicolare di r ed s). Inoltre, posto $H = p \cap r$, $K = p \cap s$, si ha che $d(r, s) = d(H, K)$.*

Allo scopo di provare tale teorema, distinguiamo i due casi che possono presentarsi, ovvero che r, s siano incidenti oppure sghembe. Se r, s sono incidenti, e H è il loro punto comune, poiché un vettore ortogonale alle direzioni di r ed s è dato dal prodotto vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{u}_r \wedge \mathbf{u}_s$, la retta p passante per H con vettore direzionale $\mathbf{v}$ sarà certamente una perpendicolare comune ad r ed s. Essa è unica. Infatti ogni altra retta p' ortogonale sia ad r che ad s deve necessariamente essere parallela a p. Pertanto p' interseca il piano π che contiene r ed s in un unico punto, e tale punto non può che essere H, e quindi $p' = p$. E' poi chiaro che in tal caso la distanza tra le due rette è nulla. Supponiamo ora che le due rette siano sghembe e consideriamo una loro rappresentazione parametrica. Ad esempio, sia r come in (17) e sia

$$s : \begin{cases} x = x_1 + t'l' \\ y = y_1 + t'm' \\ z = z_1 + t'n' \end{cases}$$

I vettori direzionali delle due rette sono quindi $\mathbf{u}_r = (l, m, n)$ e $\mathbf{u}_s = (l', m', n')$ e si ha che

$$\rho \begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 2$$

essendo $r \nparallel s$. Indichiamo con P_t il generico punto di r ed analogamente sia $Q_{t'}$ il generico punto di s. Avremo che

$$P_t \equiv (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt) \quad ; \quad Q_{t'} \equiv (x_1 + l't', y_1 + m't', z_1 + n't') \ .$$

In particolare $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ e $Q_0 \equiv (x_1, y_1, z_1)$. Indichiamo con p la retta per P_t e $Q_{t'}$. Essa è, per costruzione, incidente con r ed s (nei punti P_t e $Q_{t'}$, rispettivamente) ed ha vettore direzionale $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_tQ_{t'}}$. Pertanto

$$\mathbf{v} = \big(-lt + l't' - x_0 + x_1 \ , \ -mt + m't' - y_0 + y_1 \ , \ -nt + n't' - z_0 + z_1 \big) \ .$$

La retta p risulterà quindi una comune perpendicolare ad r ed s se e solo se $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}_r$ e $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}_s$, ovvero

$$\begin{cases} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_s = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto dell'espressione di $\mathbf{v}, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_s$ ed effettuando i prodotti scalari su indicati, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} l(-lt + l't' - x_0 + x_1) + m(-mt + m't' - y_0 + y_1) + n(-nt + n't' - z_0 + z_1) = 0 \\ l'(-lt + l't' - x_0 + x_1) + m'(-mt + m't' - y_0 + y_1) + n'(-nt + n't' - z_0 + z_1) = 0 \end{cases}$$

e cioè

$$\begin{cases} -(l^2 + m^2 + n^2)t + (ll' + mm' + nn')t' + l(x_1 - x_0) + m(y_1 - y_0) + n(z_1 - z_0) = 0 \\ -(ll' + mm' + nn')t + (l'^2 + m'^2 + n'^2)t' + l'(x_1 - x_0) + m'(y_1 - y_0) + n'(z_1 - z_0) = 0 \end{cases}$$

Tale sistema, di due equazioni nelle due incognite t, t', può anche scriversi nella forma più compatta

$$\begin{cases} -(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r)t + (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s)t' + \mathbf{u}_r \cdot \overrightarrow{P_0Q_0} = 0 \\ -(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s)t + (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s)t' + \mathbf{u}_s \cdot \overrightarrow{P_0Q_0} = 0 \end{cases} \tag{25}$$

Le matrici del sistema (25) sono

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} -\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s \\ -\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s & \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_r \cdot \overrightarrow{P_0Q_0} \\ \mathbf{u}_s \cdot \overrightarrow{P_0Q_0} \end{matrix} \right. \right)$$

Poiché

$$\det A = -(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r)(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s) + (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s)^2 \ ,$$

tenuto conto che i vettori $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_s$ sono non paralleli, e quindi indipendenti, dalla disuguaglianza di Schwarz segue che $\det A \neq 0$ e quindi il sistema (25) è di Cramer nelle incognite t, t'. Sia dunque (t_0, t_1') la soluzione (unica) di tale sistema. Allora il punto $H = P_{t_0} \in r$ e il punto $K = Q_{t_1'} \in s$ sono tali che la retta p per H, K è perpendicolare ad r ed s. Dall'unicità della soluzione (t_0, t_1') si deduce che tale retta p (che per costruzione è una comune incidente) è l'unica comune perpendicolare di r, s. E' agevole poi la verifica del fatto che $d(r, s) = d(H, K)$. I punti $H \in r$ e $K \in s$ sono detti punti di minima distanza tra r ed s.