Appendice sul moto circolare
Questa appendice è un'integrazione non sostituzione del libro di testo.

Il moto circolare è un moto piano la cui traiettoria è una circonferenza. Il moto può essere descritto in termini di spazio percorso sulla circonferenza s(t), oppure di angolo θ (t) sotteso all'arco s con s = θR (oltre che dal vettore posizione $\vec{r}$ (t) costante in modulo). Il vettore velocità essendo tangente alla circonferenza è sempre ortogonale al vettore posizione. Se $\hat{u}_T$ è un versore tangente alla traiettoria $\vec{v} = \hat{u}_T v$.
Si definisce:
Δθ = θ(t+Δt)- θ(t) spostamento angolare nell'intervallo di tempo Δt

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{dt}$$ velocità angolare media in Δt

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$ velocità angolare istantanea.

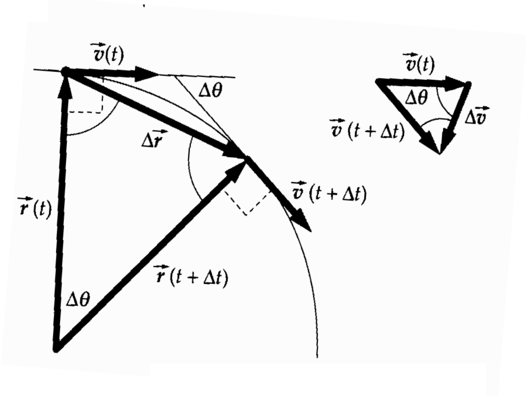
Δs = s(t+Δt)-s(t) è l'arco descritto nell'intervallo di tempo Δt
mentre $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ è lo spostamento nell'intervallo di tempo Δt.
Ricordiamo che la velocità è definita: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$|\Delta\vec{r}|$ è la corda che unisce gli estremi dell'arco di circonferenza descritto dal vettore posizione per cui $|\Delta\vec{r}| \cong \Delta s$
Quando Δt →0 lo spostamento infinitesimo diventa $d\vec{r} = \hat{u}_T ds$
per cui il modulo della velocità è $v = \frac{ds}{dt}$
Di conseguenza $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\theta R)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$

Il moto **circolare uniforme** è un moto periodico in cui la velocità è costante in modulo.
Nel moto circolare uniforme è presente un'accelerazione dovuta alla variazione della direzione e verso della velocità. Valutiamo l'accelerazione

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Nel triangolo isoscele costruito con $\vec{v}(t)$, $\vec{v}(t+\Delta t)$, e $\Delta\vec{v}$ l'angolo è Δθ. Quando Δt → 0 anche Δθ →0 e $\Delta\vec{v}$ diventa perpendicolare a $\vec{v}(t)$.



Poichè $\Delta\theta \to 0$ si può scrivere

$$\left|\Delta\vec{v}\right| \cong v\Delta\theta$$

$$\left|\vec{a}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta\vec{v}\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta\theta}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v\omega$$

Nel moto circolare uniforme l'accelerazione è centripeta cioè rivolta verso il centro della circonferenza. Se $\hat{u}_N$ è un versore rivolto verso il centro della circonferenza

$$\vec{a} = \hat{u}_N v^2 / R = \hat{u}_N \omega^2 R$$

Le leggi orarie del moto circolare uniforme con riferimento alle due variabili s(t) e θ(t) sono:

$s(t) = s_o + vt$ con $s = s_o$ per $t = 0$

$\theta(t) = \theta_o + \omega t$ con $\theta = \theta_o$ per $t = 0$

In componenti cartesiane

$x = R\cos(\omega t + \theta_o)$ $y = R\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_o)$

cioè due moti armonici di uguale ampiezza e fase iniziale, sfasati tra loro di $\pi/2$.

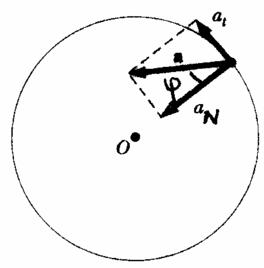
Nel **moto circolare non uniforme** anche il modulo di v è funzione del tempo e l'accelerazione risulta:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\,\hat{u}_T)}{dt} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + v\frac{d\,\hat{u}_T}{dt} = a_T\,\hat{u}_T + v\omega\hat{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

L'accelerazione è la somma di due termini: il primo, l'accelerazione tangenziale, parallelo alla velocità esprime la variazione del modulo della velocità; il secondo, accelerazione centripeta, ortogonale alla velocità dovuto alla variazione della direzione della velocità.

L'accelerazione è un vettore diretto verso la concavità della curva il cui modulo è:

$$a = (a_T^2 + a_N^2)^{1/2}$$



(b)

L'angolo ϕ (l'angolo che il vettore accelerazione forma la direzione radiale) si ottiene dalla relazione

$a_T = a_N \tan\phi$ oppure $a_T = a\,\mathrm{sen}\,\phi$

Anche ω è funzione del tempo ed è possibile definire l'accelerazione angolare α

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

L'accelerazione angolare è legata all'accelerazione tangenziale. Infatti

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Se è nota la legge oraria angolare θ(t) (oppure s(t)) con due derivazioni successive si ricava ω(t) e α(t) (oppure v e a_T). Viceversa se è nota α(t) (a_T) possiamo integrare ottenendo

$$\omega(t) = \omega_o + \int_0^t \alpha(t)dt \qquad \theta(t) = \theta_o + \int_0^t \omega(t)dt$$

$$v(t) = v_o + \int_0^t a_T(t)dt \qquad s(t) = s_o + \int_0^t a_T(t)dt$$

Se $\alpha(t)$=costante ovvero a_T = costante si ottiene:

$\omega = \omega_o + \alpha t$ $\qquad \theta = \theta_o + \omega_o t + \alpha t^2/2$

oppure

$v = v_o + a_T t$ $\qquad s = s_o + v_o t + a_T t^2/2$

L'accelerazione centripeta è $a_N = \omega^2 R = v^2/R$.

L'analogia tra queste formule e quelle del moto rettilineo sono dovute al fatto che con la scelta di $\theta(t)$ (o $s(t)$) abbiamo ridotto un problema bidimensionale a unidimensionale. Però nel moto rettilineo la descrizione unidimensionale è completa, mentre nel moto circolare con ω e α (v e a_T) descriviamo solo l'evoluzione temporale del moto e non rendiamo conto della variazione della direzione che portano all'accelerazione centripeta.