Pietro Baldi

Equazioni differenziali

Testo di riferimento: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica Due*, Liguori Editore.

1 Introduzione

Un'equazione differenziale è un'equazione in cui le incognite da trovare sono una funzione e il suo dominio, ed esprime una relazione tra la funzione incognita e alcune sue derivate.

Se la funzione incognita è una funzione $u(t)$ di una variabile reale $t \in \mathbb{R}$, l'equazione si dice *equazione differenziale ordinaria* (ODE), e, in generale, contiene termini in $u(t)$, $u'(t)$, $u''(t)$, $\dots$; se invece l'incognita è una funzione di più variabili reali, cioè del tipo $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, l'equazione contiene, in generale, termini nelle sue derivate parziali, $u(x), \partial_{x_1} u(x), \partial_{x_2} u(x), \dots, \partial_{x_n} u(x), \partial_{x_1 x_1} u(x), \partial_{x_1 x_2} u(x), \dots$, e si dice *equazione differenziale alle derivate parziali* (PDE). Qui trattiamo equazioni ordinarie.

Si dice *grado* di un'equazione differenziale il massimo grado di derivazione che compare nell'equazione: per esempio,

$$u'''(t) + \cos(u(t)) = (u'(t))^2 - t^2$$

è un'equazione di 3$^{\text{o}}$ grado.

Un'equazione differenziale ordinaria si dice *in forma normale* se è della forma

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)),$$

cioè se è della forma (derivata di ordine massimo) = (un'espressione in cui compaiono le derivate di ordine minore). Per esempio, l'equazione di 3$^{\text{o}}$ grado scritta sopra è in forma normale, mentre

$$u''(t)u(t) = t^2 - u'(t) + \cos(u''(t))$$

non è in forma normale.

Se $f \colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione continua definita su un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$, risolvere l'equazione differenziale di 1$^{\text{o}}$ grado

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

significa trovare (i) un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ (intervallo che può essere sia limitato che una semiretta o tutto $\mathbb{R}$) e (ii) una funzione $u \colon I \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che

$$\begin{cases} (t, u(t)) \in D \quad \forall t \in I, \\ u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

Se $f \colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una funzione continua definita su un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^3$, risolvere l'equazione differenziale di 2$^{\text{o}}$ grado

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$$

significa trovare un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione $u \colon I \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tali che

$$\begin{cases} (t, u(t), u'(t)) \in D \quad \forall t \in I, \\ u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

In generale, se $f \colon D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua definita su un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^{n+1}$, risolvere l'equazione differenziale di n^{o} grado

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$$

significa trovare un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione $u\colon I \to \mathbb{R}$ di classe C^n tali che

$$\begin{cases} (t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) \in D \quad \forall t \in I, \\ u^{(n)}(t) = f\big(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)\big) \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

Se $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ è una funzione (vettoriale) continua definita su un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^{m+1}$ a valori in $\mathbb{R}^m$, allora l'incognita è una funzione $u(t)$ a valori in $\mathbb{R}^m$; risolvere l'equazione differenziale vettoriale di 1° grado

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

significa trovare un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione vettoriale $u\colon I \to \mathbb{R}^m$ di classe C^1 (una curva in $\mathbb{R}^m$) tali che

$$\begin{cases} (t, u(t)) \in D \quad \forall t \in I, \\ u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

Se indichiamo le funzioni componenti

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}, \quad f(t,x) = f(t, x_1, x_2 \dots, x_m) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2 \dots, x_m) \\ f_2(t, x_1, x_2 \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_m(t, x_1, x_2 \dots, x_m) \end{pmatrix}, \quad (t,x) \in D,$$

l'equazione $u'(t) = f(t, u(t))$ si riscrive

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ f_2(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ f_m(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{pmatrix},$$

che è un sistema di m equazioni differenziali (scalari) in m incognite (scalari),

$$\begin{cases} u_1'(t) = f_1(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ u_2'(t) = f_2(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \qquad \dots \\ u_m'(t) = f_m(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)). \end{cases}$$

Se pensiamo a t come al tempo e a $u(t)$ come alla curva che descrive, istante per istante, la posizione di una particella, l'equazione differenziale di 1° grado $u'(t) = f(t, u(t))$ si interpreta come la richiesta che ad ogni istante di tempo $t \in I$ la particella abbia velocità $u'(t)$ uguale a quella $f(t, u(t))$ indicata dalla funzione f, dipendente sia dall'istante t che dalla posizione $u(t)$ in cui si trova, in quell'istante, la particella.

L'equazione differenziale di 2° grado $u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$ si interpreta come la richiesta che ad ogni istante di tempo $t \in I$ la particella abbia accelerazione $u''(t)$ uguale a quella indicata dalla funzione f, dipendente sia dall'istante t che dalla posizione $u(t)$ in cui si trova la particella, che dalla sua velocità istantanea $u'(t)$.[1]

Se esiste $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tale che $f(t, \bar{y}) = 0$ per ogni t tale che $(t, \bar{y}) \in D$, allora la funzione costante

$$u(t) = \bar{y} \quad \forall t \in I,$$

con I intervallo contenuto nell'insieme $\{t \in \mathbb{R} : \ (t, \bar{y}) \in D\}$, è soluzione dell'equazione $u' = f(t, u)$, perché $u'(t) = 0$ e $f(t, u(t)) = f(t, \bar{y}) = 0$ per ogni $t \in I$. Una soluzione costante si dice *equilibrio*. Per esempio, le funzioni $u(t) = 0$, $v(t) = \pi$, $w(t) = 2\pi$, sono equilibri dell'equazione

$$u' = \sin u.$$

Lo stesso vale per equazioni vettoriali: se $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ è un vettore per cui $f(t, \bar{y}) = 0$ per ogni t, allora la funzione costante $u(t) = \bar{y}$ è un'equilibrio dell'equazione vettoriale $u' = f(t, u)$.

[1] L'interpretazione di $u(t)$ come posizione di una particella all'istante t è indubbiamente utile e naturale, ma non è l'unica: $u(t)$ può descrivere l'intensità di un segnale, la concentrazione di una sostanza, la densità e la temperatura di un materiale, ecc. I contesti in cui il comportamento di certe quantità osservabili è modellizzato tramite equazioni differenziali sono i più vari, dall'elettromagnetismo, alla termodinamica, l'acustica, l'ottica, la sismologia, la fluidodinamica, l'astrofisica, l'andamento dei mercati finanziari, l'evoluzione di popolazioni di cellule, ecc.

1.1 Problema di Cauchy

Se $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, e (t_0, y_0) è un punto del dominio D di f, risolvere il *problema di Cauchy* di 1° grado

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

significa trovare un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ che contiene t_0 e una funzione $u\colon I \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che

$$\begin{cases} (t, u(t)) \in D \quad \forall t \in I, \\ u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in I, \\ u(t_0) = y_0. \end{cases}$$

La condizione $u(t_0) = y_0$ si dice *condizione iniziale.* Pensando a t come al tempo, la condizione iniziale si interpreta come la richiesta che all'istante t_0 la soluzione u si trovi nel punto y_0.

In modo simile, un problema di Cauchy di 2° grado è un problema del tipo

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) \\ u(t_0) = y_0 \\ u'(t_0) = y_1, \end{cases}$$

con $(t_0, y_0, y_1) \in D$. La condizione iniziale si interpreta come la richiesta che all'istante t_0 la soluzione u si trovi nel punto y_0 con velocità y_1.

Un problema di Cauchy di 3° grado è un problema del tipo

$$\begin{cases} u'''(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t)) \\ u(t_0) = y_0 \\ u'(t_0) = y_1 \\ u''(t_0) = y_2, \end{cases}$$

con $(t_0, y_0, y_1, y_2) \in D$, e, in generale, un problema di Cauchy di n° grado è un problema del tipo

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) \\ u(t_0) = y_0 \\ u'(t_0) = y_1 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

con $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$.

1.2 Equivalenza tra equazioni di grado n in $\mathbb{R}$ ed equazioni di grado 1 in $\mathbb{R}^n$

Proposizione 1.1. *Ogni equazione scalare di grado n si può scrivere come un'equazione vettoriale di 1° grado in $\mathbb{R}^n$. Ogni problema di Cauchy scalare di grado n si può scrivere come un problema di Cauchy vettoriale di 1° grado in $\mathbb{R}^n$.*

Dimostriamolo per $n = 2$. Consideriamo il problema di Cauchy scalare di 2° grado

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) \\ u(t_0) = y_0 \\ u'(t_0) = y_1, \end{cases} \tag{1}$$

con $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $(t_0, y_0, y_1) \in D$, in cui l'incognita è una funzione scalare $u\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definiamo la funzione a valori in $\mathbb{R}^2$

$$F\colon D \to \mathbb{R}^2, \quad F(t, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ f(t, y, z) \end{pmatrix}$$

e il vettore $Y_0 = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, e consideriamo il problema di Cauchy vettoriale di 1° grado in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} U'(t) = F(t, U(t)) \\ U(t_0) = Y_0, \end{cases} \tag{2}$$

la cui incognita è una funzione a valori vettoriali $U\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Mostriamo che (1) e (2) sono equivalenti.

1) Supponiamo che $u(t)$ sia una soluzione di (1). Allora la funzione

$$U(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$$

soddisfa:

$$U'(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(t) \\ f(t, u(t), u'(t)) \end{pmatrix} = F(t, u(t), u'(t)) = F(t, U(t))$$

perché $u'' = f(t, u, u')$, e

$$U(t_0) = \begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = Y_0,$$

quindi $U = (u, u')$ è soluzione del problema (2).

2) Sia $U(t)$ soluzione di (2). Indichiamo u, v le funzioni componenti di U, cioè $U(t) = (u(t), v(t))$. L'equazione $U' = F(t, U)$ scritta con le componenti è

$$U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = F(t, U) = \begin{pmatrix} v(t) \\ f(t, u(t), v(t)) \end{pmatrix},$$

quindi $u'(t) = v(t)$ e $v'(t) = f(t, u(t), v(t))$. Derivando l'uguaglianza $u' = v$ si ha $u'' = v'$. Sostituendo $u' = v$ nell'argomento di f si ottiene dunque:

$$u''(t) = v'(t) = f(t, u(t), v(t)) = f(t, u(t), u'(t)).$$

La condizione iniziale $U(t_0) = Y_0$, scritta nelle componenti, diventa

$$u(t_0) = y_0, \quad v(t_0) = y_1,$$

e poi $v(t_0) = u'(t_0)$. Quindi $u(t)$, la prima componente di $U(t)$, è soluzione del problema (1). Questo mostra l'equivalenza dei problemi (1) e (2).

In pratica, il sistema (2) si costruisce a partire da (1) ponendo $u' = v$, cosicché u'' diventa v':

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = f(t, u(t), v(t)) \\ u(t_0) = y_0 \\ v(t_0) = y_1. \end{cases}$$

In modo analogo, il problema scalare di grado 3

$$\begin{cases} u'''(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t)) \\ u(t_0) = y_0 \\ u'(t_0) = y_1 \\ u''(t_0) = y_2 \end{cases}$$

equivale al problema che si ottiene ponendo $u' = v$, $v' = w$:

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = w(t) \\ w'(t) = f(t, u(t), v(t), w(t)) \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t_0) = y_0 \\ v(t_0) = y_1 \\ w(t_0) = y_2, \end{cases}$$

cioè il problema vettoriale di grado 1 in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} U'(t) = F(t, U(t)) \\ U(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

dove $U = (u, v, w)$,

$$F(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ f(t, x, y, z) \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

In generale, il problema di Cauchy di grado n

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) \\ u(t_0) = y_0 \\ u'(t_0) = y_1 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

equivale al problema

$$\begin{cases} u'(t) = u_1(t) \\ u_1'(t) = u_2(t) \\ \quad \dots \\ u_{n-2}'(t) = u_{n-1}(t) \\ u_{n-1}'(t) = f(t, u(t), u_1(t), \dots, u_{n-1}(t)) \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t_0) = y_0 \\ u_1(t_0) = y_1 \\ \quad \dots \\ u_{n-1}(t_0) = y_{n-1} \end{cases},$$

cioè il problema vettoriale di grado 1 in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} U'(t) = F(t, U(t)) \\ U(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

dove l'incognita $U\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ha componenti $U = (u, u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$, e

$$F(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2 Teoremi di esistenza e unicità per il problema di Cauchy

2.1 Esistenza e unicità locale

Lemma 2.1 (Formulazione integrale del problema di Cauchy)**.** *Sia $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $(t_0, y_0) \in D$. Sia $\mathcal{A}$ l'intervallo $\mathcal{A} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, con $\delta > 0$. Sono equivalenti:*

(i) esiste una funzione $u\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $(t, u(t)) \in D$ per ogni $t \in \mathcal{A}$ e

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in \mathcal{A} \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

(ii) esiste una funzione $u\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ continua tale che $(t, u(t)) \in D$ per ogni $t \in \mathcal{A}$ e

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \quad \forall t \in \mathcal{A}.$$

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$. u è di classe C^1, quindi è continua. $(t, u(t)) \in D$ per ogni $t \in \mathcal{A}$ per ipotesi. u' è continua, quindi vale il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} u'(s)\, ds.$$

Sostituendo $u'(s) = f(s, u(s))$ nell'integrale e $u(t_0) = y_0$, si ha

$$u(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds,$$

cioè (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. $(t, u(t)) \in D$ per ogni $t \in \mathcal{A}$ per ipotesi. u è continua, quindi la funzione vettoriale

$$g\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2, \quad g(s) = \big(s,\, u(s)\big)$$

è continua perché ha entrambe le funzioni componenti continue. f è continua per ipotesi, quindi la funzione $f(s, u(s)) = f(g(s))$ è continua, in quanto composizione di due funzioni continue. Dunque la funzione

$$F\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

è derivabile, e la sua derivata è

$$F'(t) = f(t, u(t)).$$

Perciò F' è una funzione continua, quindi F è di classe C^1 in $\mathcal{A}$. Ora, $u(t) = y_0 + F(t)$ per ipotesi, quindi u è di classe C^1. Inoltre $u'(t) = F'(t) = f(t, u(t))$ e $u(t_0) = y_0$. Dunque vale (i). □

Teorema 2.2 (Teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy)**.** *Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ una funzione su un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$, e sia $(t_0, y_0) \in D$. Siano $a > 0, b > 0$, $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ e $J = [y_0 - b, y_0 + b]$, e sia $I \times J \subseteq D$. Supponiamo che f nel rettangolo $I \times J$ soddisfi:*

- *f è continua in $I \times J$;*
- *f è lipschitziana in y, uniformemente in x, su $I \times J$, cioè esiste $L > 0$ tale che*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \forall x \in I,\ \forall y_1, y_2 \in J.$$

Allora esiste $\delta > 0$ ed esiste una funzione $u\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che

$$\begin{cases} (t, u(t)) \in I \times J & \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ u'(t) = f(t, u(t)) & \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ u(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

La soluzione $u(t)$ è unica, nel senso che, se $\delta_1 > 0$, $v\colon [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \to \mathbb{R}$ è un'altra soluzione dello stesso problema di Cauchy, allora $u(t) = v(t)$ per ogni t nell'intervallo in cui sono definite entrambe, cioè per ogni $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$, con $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1\}$.

Dimostrazione. Grazie al lemma 2.1, cerchiamo un numero $\delta > 0$ e una funzione continua $u\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ tale che

$$(t, u(t)) \in D, \quad u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \tag{4}$$

Per brevità, indichiamo

$$\mathcal{A} := [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Innanzitutto, osserviamo che se $\delta \le a$ allora $\mathcal{A} \subseteq I$, cosicché $t \in I$ per ogni $t \in \mathcal{A}$; quindi cerchiamo $\delta > 0$ tale che

$$\delta \le a. \tag{5}$$

1) Costruzione della successione. Costruiamo la soluzione u per approssimazione, secondo un procedimento detto *iterazione di Picard*. Vogliamo dimostrare per induzione che:

Si può costruire una successione $\{u_n\}$ di funzioni continue $u_n\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, definita per induzione ponendo

$$u_0(t) = y_0, \qquad u_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-1}(s))\, ds, \quad n = 1, 2, \dots,$$

tale che $u_n(t) \in J$ per ogni $t \in \mathcal{A}$, per ogni $n \geq 0$.

Passo base: per $n = 0$, $u_0(t) = y_0$ è una funzione continua, definita per ogni $t \in \mathcal{A}$; $u_0(t) = y_0 \in J$ per ogni $t \in \mathcal{A}$. Quindi per $n = 0$ tutte le richieste sono soddisfatte.

Passo induttivo: supponiamo che la funzione u_{n-1} sia definita su $\mathcal{A}$, sia continua, e $u_{n-1}(t) \in J$ per ogni $t \in \mathcal{A}$, e dimostriamo che allora queste condizioni valgono anche per u_n. Innanzitutto,

$$(t, u_{n-1}(t)) \in \mathcal{A} \times J \subseteq I \times J \subseteq D \quad \forall t \in \mathcal{A}$$

perché $\mathcal{A} \subseteq I$ e $u_{n-1}(t) \in J$ per ogni $t \in \mathcal{A}$. Quindi, per ogni $t \in \mathcal{A}$, la coppia $(t, u_{n-1}(t))$ appartiene al dominio della funzione f, e dunque la funzione integranda $f(s, u_{n-1}(s))$ è ben posta. Di conseguenza $u_n(t)$ è definita per ogni $t \in \mathcal{A}$. Poi u_{n-1} è continua per ipotesi induttiva, quindi $f(s, u_{n-1}(s))$ è continua (composizione di funzioni continue). Dal momento che

$$u_n'(t) = f(t, u_{n-1}(t)),$$

u_n è di classe C^1, e quindi continua, su $\mathcal{A}$. Rimane da verificare che $u_n(t) \in J$ per ogni $t \in \mathcal{A}$. Ora, per ogni $s \in \mathcal{A}$, si ha $(s, u_{n-1}(s)) \in I \times J$, quindi

$$|f(s, u_{n-1}(s))| \leq \sup_{(x,y) \in I \times J} |f(x, y)| = \|f\|_{\infty, I \times J} =: M.$$

Perciò

$$|u_n(t) - y_0| = \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-1}(s))\, ds \Big| \leq \Big| \int_{t_0}^{t} |f(s, u_{n-1}(s))|\, ds \Big| \leq \Big| \int_{t_0}^{t} M\, ds \Big| = M|t - t_0| \leq M\delta$$

per ogni $t \in \mathcal{A}$ (ricordiamo che $\mathcal{A} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$). Dunque, se δ soddisfa

$$M\delta \leq b, \tag{6}$$

allora $|u_n(t) - y_0| \leq M\delta \leq b$ per ogni $t \in \mathcal{A}$, cioè

$$u_n(t) \in J \quad \forall t \in \mathcal{A},$$

e questo conclude il passo induttivo.

Ricapitolando, abbiamo dimostrato che, se δ soddisfa (5) e (6), allora si può costruire la succesione $\{u_n\}$ come sopra descritto.

2) Convergenza della successione. Mostriamo che $\{u_n\}$ è una successione che converge uniformemente in $\mathcal{A}$; per il criterio di convergenza uniforme di Cauchy, è sufficiente provare che la successione è uniformemente di Cauchy. Stimiamo la norma del sup della differenza tra due elementi consecutivi della successione, usando l'ipotesi (ii) su f: per ogni $t \in \mathcal{A}$ si ha

$$\begin{aligned}
|u_n(t) - u_{n-1}(t)| &= \Big| \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-1}(s))\, ds \Big) - \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-2}(s))\, ds \Big) \Big| \\
&\leq \Big| \int_{t_0}^{t} |f(s, u_{n-1}(s)) - f(s, u_{n-2}(s))|\, ds \Big| \\
&\leq \Big| \int_{t_0}^{t} L|u_{n-1}(s) - u_{n-2}(s)|\, ds \Big| \\
&\leq \Big| \int_{t_0}^{t} L\|u_{n-1} - u_{n-2}\|_{\infty, \mathcal{A}}\, ds \Big| \\
&= L\,|t - t_0|\, \|u_{n-1} - u_{n-2}\|_{\infty, \mathcal{A}} \\
&\leq L\,\delta\, \|u_{n-1} - u_{n-2}\|_{\infty, \mathcal{A}},
\end{aligned}$$

cioè $|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq L\,\delta\,\|u_{n-1} - u_{n-2}\|_\infty$, e, passando al sup su $t \in \mathcal{A}$,

$$\|u_n - u_{n-1}\|_{\infty,\mathcal{A}} \leq L\,\delta\,\|u_{n-1} - u_{n-2}\|_{\infty,\mathcal{A}}. \tag{7}$$

Mostriamo per induzione che allora

$$\|u_{k+1} - u_k\| \leq (L\delta)^k\,\|u_1 - u_0\| \quad \forall k \geq 0, \tag{8}$$

dove la norma è quella del sup su $\mathcal{A}$.

Passo base: per $k = 0$ è l'uguaglianza banale $\|u_1 - u_0\| \leq \|u_1 - u_0\|$, vera.

Passo induttivo: supponiamo che la disuguaglianza sia vera per $k-1$, cioè

$$\|u_k - u_{k-1}\| \leq (L\delta)^{k-1}\,\|u_1 - u_0\|,$$

e dimostriamo che allora vale anche per k. Usando (7) e l'ipotesi induttiva si ha

$$\|u_{k+1} - u_k\| \leq L\delta\,\|u_k - u_{k-1}\| \leq L\delta\,(L\delta)^{k-1}\,\|u_1 - u_0\| = (L\delta)^k\,\|u_1 - u_0\|,$$

quindi (8) è dimostrata.

Dimostriamo che $\{u_n\}$ è uniformemente di Cauchy: dato $\varepsilon > 0$, cerchiamo $\bar{n}$ tale che $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \bar{n}$. A tale scopo supponiamo che δ soddisfi

$$L\delta < 1. \tag{9}$$

In questo modo la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty}(L\delta)^k$ converge, dunque esiste $\bar{n}$ tale che

$$\sum_{k=n}^{m-1}(L\delta)^k \leq \frac{\varepsilon}{1 + \|u_1 - u_0\|} \quad \forall n, m \geq \bar{n}, \quad \text{con } m > n.$$

Se $m, n \in \mathbb{N}$, con $m > n$, scriviamo la differenza $u_m - u_n$ come [2]

$$\begin{aligned} u_m - u_n &= u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - u_{m-2} + u_{m-2} - \ldots - u_{n+1} + u_{n+1} - u_n \\ &= \sum_{k=n}^{m-1}(u_{k+1} - u_k). \end{aligned}$$

Allora per ogni $n, m \geq \bar{n}$, con $m > n$, dalla disuguaglianza triangolare e dalla (8) si ha

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\| &= \Big\| \sum_{k=n}^{m-1}(u_{k+1} - u_k) \Big\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|u_{k+1} - u_k\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} (L\delta)^k\,\|u_1 - u_0\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1 + \|u_1 - u_0\|}\,\|u_1 - u_0\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che la successione $\{u_n\}$ è uniformemente di Cauchy in $\mathcal{A}$. Quindi converge uniformemente in $\mathcal{A}$ ad una certa funzione limite u. Per il teorema di continuità del limite uniforme, anche u è continua in $\mathcal{A}$.

[2] Per esempio, se $n = 100$ e $m = 104$, stiamo scrivendo la differenza $u_m - u_n$ come $u_{104} - u_{100} = (u_{104} - u_{103}) + (u_{103} - u_{102}) + (u_{102} - u_{101}) + (u_{101} - u_{100})$.

3) La funzione limite è una soluzione. Dalla convergenza uniforme $\|u_n - u\| \to 0$ e dall'ipotesi (ii) su f si ha la convergenza degli integrali: per ogni $t \in \mathcal{A}$ fissato,

$$\begin{aligned} \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \Big| &\le \Big| \int_{t_0}^{t} |f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))|\, ds \Big| \\ &\le \Big| \int_{t_0}^{t} L |u_n(s) - u(s)|\, ds \Big| \\ &\le \Big| \int_{t_0}^{t} L \|u_n - u\|\, ds \Big| \\ &= L \|u_n - u\|\, |t - t_0| \\ &\le L\,\delta\, \|u_n - u\| \ \to 0 \quad \text{per } n \to \infty. \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $t \in \mathcal{A}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1}(t) = \lim_{n\to\infty} \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\, ds \Big) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds.$$

D'altra parte $u_n \to u$ uniformemente, e quindi puntualmente, perciò

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1}(t) = u(t)$$

per ogni $t \in \mathcal{A}$. Dall'unicità del limite si ha allora

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \quad \forall t \in \mathcal{A}.$$

Infine, ricordiamo che $u_n(t) \in J$ per ogni $t \in \mathcal{A}$, per ogni $n \ge 0$. Dunque

$$|u(t) - y_0| = |u(t) - u_n(t) + u_n(t) - y_0| \le |u(t) - u_n(t)| + |u_n(t) - y_0| \le |u(t) - u_n(t)| + b,$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$,

$$|u(t) - y_0| \le b, \quad \forall t \in \mathcal{A},$$

cioè $u(t) \in J$ per ogni $t \in \mathcal{A}$.

In conclusione, abbiamo dimostrato che, se δ soddisfa le disuguaglianze (5), (6) e (9), allora esiste una funzione continua $u\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ che soddisfa (4), e dunque, dal lemma 2.1, u è una soluzione di classe C^1 del problema di Cauchy 3. Le disuguaglianze (5),(6),(9) sono soddisfatte, per esempio, scegliendo

$$\delta = \min \Big\{ a,\ \frac{b}{M}\,,\ \frac{1}{2L} \Big\}.$$

4) Unicità della soluzione. Siano $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$,

$$u\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}, \quad v\colon [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \to \mathbb{R}$$

due soluzioni di (3). Poniamo $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1\}$. Sull'intervallo $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$ sono definite sia u che v. Per ogni $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$, la differenza $u(t) - v(t)$ è

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &= \Big| \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \Big) - \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds \Big) \Big| \\ &= \Big| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \Big)\, ds \Big| \\ &\le \Big| \int_{t_0}^{t} \big| f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \big|\, ds \Big| \\ &\le \Big| \int_{t_0}^{t} L |u(s) - v(s)|\, ds \Big| \\ &\le \Big| \int_{t_0}^{t} L \|u - v\|\, ds \Big| \\ &= L\, \|u - v\|\, |t - t_0| \ \le L\,\delta\, \|u - v\|, \end{aligned}$$

dove la norma del sup si intende sull'intervallo $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$. Passando al sup su $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$ si ottiene

$$\|u - v\| \leq L\delta \|u - v\|,$$

da cui $(1 - L\delta)\|u - v\| = 0$. Per la (9), $(1 - L\delta) > 0$, quindi $\|u - v\| = 0$, cioè $u = v$. Questo prova l'unicità della soluzione. $\square$

Come conseguenza dell'unicità della solzione del problema di Cauchy, non può mai capitare che i grafici di due diverse soluzioni della stessa equazione si tocchino in un punto: se due soluzioni sono diverse in un certo istante, allora sono diverse in ogni istante.

Proposizione 2.3. *Supponiamo che $u, v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ siano due funzioni di classe C^1 che soddisfano l'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ sull'intervallo $[a, b]$, cioè*

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad v'(t) = f(t, v(t)) \quad \forall t \in [a, b].$$

Se $u(t_0) > v(t_0)$ per un certo $t_0 \in [a, b]$, allora

$$u(t) > v(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

Dimostrazione. La dimostrazione non è in programma; la riportiamo per completezza.

Dimostriamo che $u > v$ su $[t_0, b]$; la dimostrazione che $u > v$ su $[a, t_0]$ è analoga. La differenza $u(t) - v(t)$ è una funzione continua, ed è > 0 in $t = t_0$. Per il teorema della permanenza del segno, esiste $t_1 \in (t_0, b]$ tale che

$$u(t) - v(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1).$$

Supponiamo, per assurdo, che esista qualche punto tra t_1 e b in cui $u - v \leq 0$, cioè supponiamo che

$$E := \{t \in [t_1, b] : u(t) - v(t) \leq 0\} \neq \emptyset.$$

Sia $t^* := \inf E$. Per definizione di estremo inferiore, esiste una successione $(t_n) \subseteq E$ che converge a t^*. Dal momento che $u - v$ è continua, e $u(t_n) - v(t_n) \leq 0$ per ogni n perché $t_n \in E$, si ha

$$u(t^*) - v(t^*) = \lim_{n\to\infty} \big(u(t_n) - v(t_n)\big) \leq 0.$$

D'altra parte, ancora dalla definizione di estremo inferiore, $u(t) - v(t) > 0$ per ogni $t < t^*$ (se così non fosse, t^* non sarebbe l'estremo inferiore di E). Visto che $t^* \in [t_1, b]$, possiamo costruire una successione (s_n) che converge a t^* da sinistra, $s_n < t^*$ per ogni n, con $s_n \in [t_0, t^*)$. Poiché $u(s_n) - v(s_n) > 0$ per ogni n, passando al limite si ha

$$u(t^*) - v(t^*) = \lim_{n\to\infty} \big(u(s_n) - v(s_n)\big) \geq 0.$$

Dalle due disuguaglianze segue che

$$u(t^*) - v(t^*) = 0.$$

Indichiamo $y_0 := u(t^*) = v(t^*)$. Allora u e v soddisfano entrambe il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t^*) = y_0. \end{cases}$$

Dunque, dal teorema 2.2, $u(t) = v(t)$ su ogni intervallo del tipo $[t^* - \delta, t^* + \delta]$ nel quale siano definite entrambe. Ma in tutti i punti $t < t^*$ si ha $u(t) > v(t)$, assurdo. Quindi l'insieme E è vuoto, cioè $u > v$ su tutto l'intervallo $[t_0, b]$. $\square$

Mostriamo una condizione sufficiente per avere l'ipotesi di lipschitzianità per f.

Proposizione 2.4. *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ funzione continua con derivata parziale $\partial_y f(t, y)$ continua in D. Allora in ogni rettangolo $I \times J \subseteq D$, con I, J intervalli chiusi e limitati, f è lipschitziana in y, uniformemente in t.*

Dimostrazione. Siano I, J intervalli chiusi e limitati, con $I \times J \subseteq D$. Il rettangolo $I \times J$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$, quindi (per Heine-Borel) è compatto. $\partial_y f$ è continua su $I \times J$, dunque (per Weierstrass) ha massimo e minimo, e quindi è limitata,

$$\sup_{(t,y)\in I\times J} |\partial_y f(t,y)| = \|\partial_y f\|_{\infty,I\times J} < \infty.$$

Siano $t \in I$ e $y_1, y_2 \in J$. Sia

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(\vartheta) := f(t, y_1 + \vartheta(y_2 - y_1)).$$

Per i teoremi sulla composizione di funzioni, g è continua e derivabile, con

$$g'(\vartheta) = \partial_y f(t, y_1 + \vartheta(y_2 - y_1))\,(y_2 - y_1).$$

Dal teorema di Lagrange, esiste $\vartheta \in (0,1)$ tale che

$$g(1) - g(0) = g'(\vartheta).$$

Poiché $g(0) = f(t, y_1)$ e $g(1) = f(t, y_2)$,

$$f(t,y_2) - f(t,y_1) = \partial_y f(t, y_1 + \vartheta(y_2 - y_1))\,(y_2 - y_1),$$

da cui

$$|f(t,y_2) - f(t,y_1)| = |\partial_y f(t, y_1 + \vartheta(y_2 - y_1))|\,|y_2 - y_1| \le \|\partial_y f\|_{\infty,I\times J}|y_2 - y_1|.$$

Questo prova che f è lipschitziana in y, uniformemente in t, su $I \times J$, con costante $L = \|\partial_y f\|_{\infty,I\times J}$. □

Osservazione 2.5. L'ipotesi che f sia lipschitziana in y, uniformemente in t, è necessaria per avere l'unicità della soluzione. Il problema

$$\begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

è un esempio di problema di Cauchy che ammette più di una soluzione, anzi ne ha infinite: le funzioni

$$u(t) = 0, \qquad v(t) = \begin{cases} t^2 & \text{per } t \ge 0 \\ -t^2 & \text{per } t < 0, \end{cases}$$

$$w(t) = \begin{cases} t^2 & \text{per } t \ge 0 \\ 0 & \text{per } t < 0, \end{cases} \qquad w_a(t) = \begin{cases} (t-a)^2 & \text{per } t \ge a \\ 0 & \text{per } t < a, \end{cases} \quad a \in \mathbb{R},$$

sono tutte soluzioni di (10) in $\mathbb{R}$. In accordo con il teorema 2.2, la funzione $f(y) = 2\sqrt{|y|}$ non è lipschitziana.

In generale, se f non è lipschitziana, ma è comunque continua, il problema di Cauchy ha almeno una soluzione; questo risultato di esistenza senza unicità si chiama *teorema di esistenza di Peano*. □

2.2 Problema di Cauchy di grado n

Il teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy vale anche nel caso vettoriale (l'enunciato è quasi identico a quello per il caso scalare).

Teorema 2.6 (Teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy, caso vettoriale)**.** *Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ una funzione su un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, e sia $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, con $(t_0, y_0) \in D$. Siano $a > 0$, $b > 0$, sia I l'intervallo $I = [t_0 - a, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$ e sia J la palla chiusa $J = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \le b\} \subset \mathbb{R}^n$. Sia $I \times J \subseteq D$. Supponiamo che f in $I \times J$ soddisfi:*

- *f è continua in $I \times J$;*
- *f è lipschitziana in y, uniformemente in x, su $I \times J$, cioè esiste $L > 0$ tale che*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \forall x \in I,\ \forall y_1, y_2 \in J.$$

Allora esiste $\delta > 0$ ed esiste una funzione $u\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 tale che

$$\begin{cases} (t, u(t)) \in I \times J & \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ u'(t) = f(t, u(t)) & \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ u(t_0) = y_0. \end{cases}$$

La soluzione $u(t)$ è unica, nel senso che, se $\delta_1 > 0$, $v\colon [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \to \mathbb{R}^n$ è un'altra soluzione dello stesso problema di Cauchy, allora $u(t) = v(t)$ per ogni t nell'intervallo in cui sono definite entrambe, cioè per ogni $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$, con $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1\}$.

Dimostrazione. La dimostrazione non è in programma. È identica a quella del caso scalare, con le norme al posto dei moduli, J palla chiusa in $\mathbb{R}^n$ di centro nel punto y_0 e raggio b invece dell'intervallo reale corrispondente; l'integrale della funzione $f(s, u(s))$ a valori vettoriali è definito come il vettore

$$\int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} f_1(s, u(s))\, ds \\ \int_{t_0}^{t} f_2(s, u(s))\, ds \\ \dots \\ \int_{t_0}^{t} f_n(s, u(s))\, ds \end{pmatrix}.$$

□

Grazie all'equivalenza tra problemi vettoriali di ordine 1 e problemi scalari di ordine n, anche per il problema di Cauchy di ordine n vale il teorema di esistenza e unicità:

Teorema 2.7 (Teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy di grado n)**.** *Sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ una funzione su un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, e sia $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$. Siano $a > 0, b > 0$, sia I l'intervallo $I = [t_0 - a, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$ e sia J la palla chiusa $J = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \le b\} \subset \mathbb{R}^n$. Sia $I \times J \subseteq D$. Supponiamo che f in $I \times J$ soddisfi:*

- *f è continua in $I \times J$;*
- *f è lipschitziana in y, uniformemente in x, su $I \times J$, cioè esiste $L > 0$ tale che*
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \forall x \in I,\ \forall y_1, y_2 \in J.$$

Allora esiste $\delta > 0$ ed esiste una funzione $u\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ di classe C^n tale che

$$\begin{cases} (t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) \in I \times J & \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) & \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ u(t_0) = y_0 \\ u'(t_0) = y_1 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

La soluzione $u(t)$ è unica, nel senso che, se $\delta_1 > 0$, $v\colon [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \to \mathbb{R}^n$ è un'altra soluzione dello stesso problema di Cauchy, allora $u(t) = v(t)$ per ogni t nell'intervallo in cui sono definite entrambe, cioè per ogni $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$, con $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1\}$.

Dimostrazione. La dimostrazione non è in programma. Il teorema è una conseguenza immediata del teorema 2.6 e della proposizione 1.1. □

2.3 Regolarità

Proposizione 2.8. *Sia $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^k. Sia I intervallo, e $u\colon I \to \mathbb{R}$ una soluzione dell'equazione $u'(t) = f(t, u(t))$. Allora u è di classe C^{k+1}. Se $f \in C^\infty$, anche $u \in C^\infty$.*

Dimostrazione. Per induzione su k. Per $k = 0$: è conseguenza del teorema di Cauchy (f continua, $u \in C^1$). Supponiamo che la proposizione sia vera per k, e dimostriamo che allora è vera anche per $k + 1$. Se f è di classe C^{k+1}, allora è anche C^k, quindi, per ipotesi induttiva, u è C^{k+1}. Dunque la funzione $f(t, u(t))$ è di classe C^{k+1} in quanto composizione di due funzioni C^{k+1}. Poi $u' = f(t, u)$, dunque $u' \in C^{k+1}$, cioè $u \in C^{k+2}$. Questo conclude l'induzione.

Infine, se $f \in C^\infty$, allora $f \in C^k$ per ogni k, quindi $u \in C^k$ per ogni k, cioè $u \in C^\infty$. □

2.4 Esistenza e unicità globale

Teorema 2.9 (Teorema di esistenza e unicità globale per il problema di Cauchy)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo reale, non necessariamente limitato (è incluso il caso in cui $I = \mathbb{R}$). Sia $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Sia $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:*

- *f è continua in $I \times \mathbb{R}$;*
- *f è localmente lipschitziana in y, uniformemente in t, in $I \times \mathbb{R}$, cioè: per ogni $M > 0$ esiste $L > 0$ (dipendente da M) tale che*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall t \in I, \ \forall y_1, y_2 \in [-M, M];$$

- *f ha una crescita al più lineare in y, cioè: esistono due funzioni continue $A, B\colon I \to \mathbb{R}$, con $A(t) \geq 0$, $B(t) \geq 0$ per ogni $t \in I$, tali che*

$$|f(t, y)| \leq A(t) + B(t)|y| \quad \forall t \in I, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Allora esiste un'unica soluzione $u\colon I \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & \forall t \in I \\ u(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. La dimostrazione non è in programma. □

Osservazione 2.10. L'aggettivo *globale* si riferisce al fatto che la soluzione è definita in tutto l'intervallo I di partenza: dato I, e data f con quelle ipotesi, esiste un'unica soluzione *definita su tutto I*.

Invece nel teorema di esistenza e unicità locale il dominio della soluzione è, in generale, più piccolo dell'intervallo I di partenza: dato I, e data f con quelle altre ipotesi, esiste un intervallo $\mathcal{A} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ contenuto in I, ed esiste un'unica soluzione definita su $\mathcal{A}$ (e quindi, in generale, non definita su tutto I, ma solo su un suo sottointervallo). □

Osservazione 2.11. Se f è lipschitziana in y, uniformemente in t, su $I \times \mathbb{R}$, cioè se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall t \in I, \ y_1, y_2 \in \mathbb{R},$$

allora la seconda e la terza ipotesi del teorema 2.9 sono soddisfatte: la seconda banalmente (L va bene per ogni M), la terza perché

$$\begin{aligned} |f(t, y)| &= |f(t, y) - f(t, 0) + f(t, 0)| \\ &\leq |f(t, y) - f(t, 0)| + |f(t, 0)| \\ &\leq L|y - 0| + |f(t, 0)| \\ &= B(t)|y| + A(t), \end{aligned}$$

con $A(t) := |f(t, 0)|$ e $B(t) := L$. □

Infine, facciamo menzione del fatto che simili risultati di regolarità e di esistenza e unicità globale valgono anche nel caso vettoriale (ma non sono in programma).

Per il resto di queste pagine studiamo equazioni scalari.

3 Alcune tecniche risolutive

Non esistono metodi generali che permettano di scrivere esplicitamente le soluzioni delle equazioni differenziali. Tuttavia per alcuni casi notevoli esiste una formula risolutiva o un metodo per la ricerca delle soluzioni.

3.1 Equazioni a variabili separabili

Si dicono *a variabili separabili* le equazioni di 1° grado in cui $f(t,y)$ è del tipo $f(t,y) = \varphi(t)g(y)$, cioè

$$u'(t) = \varphi(t)\, g(u(t)).$$

Innanzitutto, se g ha degli zeri, allora l'equazione ha degli equilibri: se $g(\bar{y}) = 0$ per un certo valore $\bar{y} \in \mathbb{R}$, allora $f(t,\bar{y}) = \varphi(t)g(\bar{y}) = 0$ per ogni t, quindi $u(t) = \bar{y}$ è soluzione. Per esempio, le funzioni costanti $u(t) = k\pi$, con k intero, sono soluzioni dell'equazione

$$u' = \varphi(t)\, \sin u,$$

qualunque sia la funzione $\varphi(t)$.

Fuori dagli zeri di g si può applicare il ragionamento seguente. Supponiamo che $u(t)$ sia una funzione definita in un intervallo I, tale che $g(u(t)) \neq 0$ per ogni $t \in I$. Sia G una primitiva di $1/g$, cioè $G'(y) = 1/g(y)$, e sia Φ una primitiva di φ, cioè $\Phi'(t) = \varphi(t)$. Allora, dalla regola di derivazione della funzione composta,

$$\frac{d}{dt}\Big\{G(u(t)) - \Phi(t)\Big\} = G'(u(t))\, u'(t) - \Phi'(t) = \frac{1}{g(u(t))}\, u'(t) - \varphi(t).$$

Dunque u è soluzione dell'equazione differenziale $u'(t) = \varphi(t)g(u(t))$ se e solo se $u'/g(u) = \varphi(t)$, cioè se e solo se

$$\frac{d}{dt}\Big\{G(u(t)) - \Phi(t)\Big\} = 0,$$

cioè

$$G(u(t)) - \Phi(t) = c = \text{costante}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione $u' = \varphi(t)g(u)$, con $g(u(t)) \neq 0$, sono tutte della forma

$$u(t) = G^{-1}(\Phi(t) + c).$$

(Nota: G^{-1}, la funzione inversa di G, esiste perché, da $g(u) \neq 0$, segue che $G' = 1/g \neq 0$, e quindi G è invertibile).

Questo metodo si chiama a variabili separabili perché, dividendo l'equazione $u' = \varphi(t)g(u)$ per $g(u)$, u e t "si separano".

Vediamo un esempio di applicazione del metodo.

Esercizio. 1) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione

$$u' = \frac{u^3}{t-1}\,;$$

2) risolvere il problema di Cauchy con dato iniziale

$$a)\ \ u(0) = 1, \qquad b)\ \ u(2) = -1/2, \qquad c)\ \ u(2) = 0.$$

Svolgimento. 1) L'equazione è del tipo $u' = f(t,u) = g(u)\varphi(t)$, con

$$g(u) = u^3, \qquad \varphi(t) = \frac{1}{t-1}\,.$$

Il dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ su cui f è definita è l'insieme

$$D = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 :\ t \neq 1\},$$

ed f è continua in D. g ha un unico zero in $u = 0$. Dunque la funzione $u(t) = 0$ è soluzione del problema. Visto che ogni soluzione deve essere definita su un intervallo, e visto che l'istante $t = 1$ va escluso dal dominio di esistenza della f, distinguiamo la soluzione costante nulla nei due intervalli $t < 1$ e $t > 1$: le soluzioni costanti sono

$$u\colon (-\infty,1) \to \mathbb{R}, \quad u(t) = 0 \quad \text{e} \quad v\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad v(t) = 0.$$

Prima di cercare le altre soluzioni, notiamo che

$$\partial_y f(t,y) = \frac{3u^2}{t-1}$$

esiste ed è continua su tutto il dominio D di esistenza della f. Quindi in ogni rettangolo $I \times J \subset D$, con I, J intervalli chiusi e limitati, $\partial_y f$ è limitata (in quanto funzione continua su un compatto), e dunque f è lipschitziana in y, uniformemente rispetto a t, in $I \times J$, come si è visto nella proposizione 2.4. Di conseguenza due soluzioni diverse non si toccano mai. Visto che $u = 0$ è soluzione, e ogni altra soluzione non può toccarla, ne segue che ogni altra soluzione dell'equazione è tutta > 0 o tutta < 0.

Fuori dagli equilibri, per $u \neq 0$, ragioniamo per variabili separabili:

$$\frac{u'}{u^3} = \frac{1}{t-1}\,.$$

Cercare una primitiva di $1/g(u) = 1/u^3$ significa risolvere l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{u^3}\,du,$$

quindi una primitiva di $1/g$ è, per esempio,

$$G(u) = -\frac{1}{2u^2}\,.$$

Una primitiva di $\varphi(t) = 1/(t-1)$ è

$$\Phi(t) = \log|t-1|\,.$$

Dunque $G(u) = \Phi(t) + c$ dà

$$-\frac{1}{2u^2} = \log|t-1| + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

da cui, svolgendo il conto,

$$u(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{-2(\log|t-1|+c)}}\,, \quad c \in \mathbb{R},$$

o, ponendo $-2c = c_1$,

$$u(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{-2\log|t-1|+c_1}}\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Queste soluzioni sono definite in intervalli in cui $\log|t-1| + c < 0$, in modo che sotto la radice compaia una quantità > 0;

$$\begin{aligned}\log|t-1| + c < 0 &\iff \log|t-1| < -c\\ &\iff |t-1| < e^{-c}\\ &\iff 1 - e^{-c} < t < 1 + e^{-c}.\end{aligned}$$

Perciò troviamo soluzioni di 4 tipi: quelle > 0 per $t < 1$:

$$u : (1 - e^{-c}, 1) \to \mathbb{R}, \quad u(t) = \frac{1}{\sqrt{-2(\log|t-1|+c)}}\,, \tag{11}$$

quelle > 0 per $t > 1$:

$$u : (1, 1 + e^{-c}) \to \mathbb{R}, \quad u(t) = \frac{1}{\sqrt{-2(\log|t-1|+c)}}\,, \tag{12}$$

quelle < 0 per $t < 1$:

$$u : (1 - e^{-c}, 1) \to \mathbb{R}, \quad u(t) = -\frac{1}{\sqrt{-2(\log|t-1|+c)}}\,, \tag{13}$$

e quelle < 0 per $t > 1$:

$$u : (1, 1 + e^{-c}) \to \mathbb{R}, \quad u(t) = -\frac{1}{\sqrt{-2(\log|t-1|+c)}}\,, \tag{14}$$

per ciascun valore $c \in \mathbb{R}$. Poi $|t-1|$ si può scrivere $(1-t)$ in (11) e (13), e $(t-1)$ in (12) e (14).

2) a) Il dato iniziale $(0,1)$ sta nella regione $t<1$, $u>0$, quindi la soluzione è del tipo (11). Cerchiamo c tale che

$$u(0) = \frac{1}{\sqrt{-2(\log|0-1|+c)}} = 1.$$

Risulta $c=-1/2$, quindi la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $u(0)=1$ è la funzione

$$u\colon (1-\sqrt{e},\, 1) \to \mathbb{R}, \quad u(t) = \frac{1}{\sqrt{-2\log(1-t)|+1}}.$$

b) Il dato iniziale $(2,-1/2)$ sta nella regione $t>1$, $u<0$, quindi la soluzione è del tipo (13). Cerchiamo c tale che

$$u(2) = -\frac{1}{\sqrt{-2(\log|2-1|+c)}} = -\frac{1}{2}.$$

Risulta $c=-2$, quindi la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $u(2)=-1/2$ è la funzione

$$u\colon (1,\, 1+e^2) \to \mathbb{R}, \quad u(t) = -\frac{1}{\sqrt{-2\log(t-1)+4}}.$$

c) Il dato iniziale $(2,0)$ sta sulla semiretta $\{u=0,\ t>1\}$, quindi la soluzione è l'equilibrio

$$u\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad u(t) = 0.$$ □

3.2 Equazioni riconducibili a equazioni a variabili separabili per sostituzione

Ci sono equazioni che, di per sé, non sono risolvibili con il metodo delle variabili separabili, ma possono essere trasformate in un'equazione a variabili separabili tramite un'opportuna sostituzione. Per esempio, l'equazione

$$u' = t^2 u + t^3 - 1$$

non è a variabili separabili, ma ponendo

$$v(t) := u(t) + t$$

si ha:

$$v' = u' + 1 = (t^2u + t^3 - 1) + 1 = t^2 u + t^3 = t^2(u+t) = t^2 v,$$

e l'equazione

$$v' = t^2 v$$

è a variabili separabili. Una volta trovate le soluzioni $v(t)$, le soluzioni del problema di partenza sono $u(t) = v(t) - t$.

Un altro esempio è fornito dal prossimo paragrafo.

3.3 Formula risolutiva per $u' + a(t)u = b(t)$

Consideriamo l'equazione

$$u' + a(t)u = b(t), \tag{15}$$

con a, b funzioni continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Cerchiamo una sostituzione del tipo

$$u(t) = h(t)\, v(t),$$

con $h \neq 0$, che la trasformi in un'equazione più semplice nell'incognita v. Siccome $u' = h'v + hv'$, (15) vale se e solo se

$$hv' + v(h' + ah) = b. \tag{16}$$

Il termine in v nella (16) sparisce se troviamo una funzione $h(t)$ tale che

$$h' + ah = 0.$$

Questa è un'equazione a variabili separabili: $h'/h = -a$. Fissato un punto $t_0 \in I$, una primitiva di a è

$$A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds,$$

quindi

$$\log |h(t)| = -A(t) + c, \quad |h(t)| = e^{-A(t)+c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Scegliamo $c = 0$ e $h > 0$, cioè scegliamo

$$h(t) = e^{-A(t)} > 0 \quad \forall t \in I.$$

Dunque (16) diventa

$$e^{-A}\, v' = b,$$

cioè (moltiplicando per e^A)

$$v' = b\, e^A. \tag{17}$$

Ora u soddisfa (15) se e solo se v soddisfa (17), e questo è vero se e solo se

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{A(s)}\, ds\, + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

cioè (essendo $u = hv$) se e solo se

$$u(t) = e^{-A(t)} \Big\{ \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{A(s)}\, ds\, + c \Big\}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Con questa formula abbiamo trovato tutte le soluzioni dell'equazione (15).

Osservazione 3.1. Si può arrivare alla formula (18) anche da altre strade. Per esempio, cercando un integrale primo con fattore integrante $\mu(x)$. □

3.4 Equazioni della forma $u' = g(at + bu + c)$

Le equazioni della forma

$$u'(t) = g\big(at + bu(t) + c\big),$$

con g funzione continua e $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, si risolvono con la sostituzione

$$v(t) := at + bu(t) + c.$$

Si ha infatti

$$v' = a + bu' = a + b\, g(at + bu + c) = a + b\, g(v),$$

e l'equazione $v' = a + b\, g(v)$ è a variabili separabili, del tipo

$$v' = \varphi(t)\, g_1(v), \quad \text{con } \varphi(t) = 1, \;\; g_1(v) = a + b\, g(v).$$

3.5 Equazioni della forma $u' = g(u/t)$

Le equazioni della forma

$$u'(t) = g\Big(\frac{u(t)}{t}\Big),$$

con g funzione continua, $t \neq 0$, si risolvono con la sostituzione

$$v(t) := \frac{u(t)}{t}\,.$$

Si ha infatti $u = tv$, da cui $u' = v + tv'$, e $g(u/t) = g(v)$, per cui l'equazione $u' = g(u/t)$ diventa

$$v + tv' = g(v),$$

cioè
$$v' = \frac{g(v) - v}{t}\,,$$
che è a variabili separabili,
$$v' = \varphi(t) g_1(v), \quad \text{con } \varphi(t) = \frac{1}{t}\,, \quad g_1(v) = g(v) - v.$$
Un esempio nell'esercizio seguente.

Esercizio. Scrivere tutte le soluzioni positive dell'equazione
$$u' = \frac{(2t+u)u}{t^2}\,, \quad t > 0,$$
incluso il loro dominio.

Svolgimento. Noto che
$$\frac{(2t+u)u}{t^2} = \frac{2tu}{t^2} + \frac{u^2}{t^2} = 2\Big(\frac{u}{t}\Big) + \Big(\frac{u}{t}\Big)^2,$$
quindi, ponendo $v = u/t$, si ha $u = tv$, $u' = v + tv'$, e l'equazione diventa
$$v + tv' = 2v + v^2,$$
cioè
$$v' = \frac{v + v^2}{t}\,,$$
che è a variabili separabili. I suoi equilibri sono $v = 0$ e $v = -1$. Fuori dagli equilibri procediamo per variabili separabili. Una primitiva di $1/(v+v^2)$ è
$$\int \frac{dv}{v(v+1)} = \int \Big(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\Big)\, dv = \log|v| - \log|v+1| = \log\Big(\frac{|v|}{|v+1|}\Big)\,,$$
quindi si trova
$$\log\Big(\frac{|v|}{|v+1|}\Big) = \log t + c, \quad c \in \mathbb{R},$$
($|t| = t$ perché, per ipotesi, $t > 0$), da cui, ponendo $c_1 = e^c$,
$$\frac{|v|}{|v+1|} = c_1 t, \quad c_1 > 0.$$
L'esercizio chiede di trovare le soluzioni positive; $u > 0$ se e solo se $v > 0$. Per $v > 0$, $|v| = v$ e $|v+1| = v+1$, quindi
$$\frac{v}{v+1} = c_1 t, \quad c_1 > 0,$$
da cui $v = vc_1 t + c_1 t$,
$$v(t) = \frac{c_1 t}{1 - c_1 t} = \frac{t}{a - t}\,, \quad a := \frac{1}{c_1} > 0.$$
Tornando a $u = tv$, si ottiene
$$u(t) = \frac{t^2}{a - t}\,,$$
definita per $t > 0$, $t \neq a$, con $a > 0$. Poi $t^2/(a-t)$ è positivo per $t \in (0, a)$, quindi le soluzioni positive sono
$$u\colon (0, a) \to \mathbb{R}, \quad u(t) = \frac{t^2}{a - t}\,,$$
per ogni $a > 0$. □

3.6 Equazioni della forma $u' = g(\frac{at+bu+c}{At+Bu+C})$

Le equazioni della forma

$$u' = g\Big(\frac{at + bu + c}{At + Bu + C}\Big),$$

con g funzione continua e $a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$, non tutti nulli, si risolvono con sostituzioni diverse a seconda che il determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix} = aB - bA$$

sia nullo oppure $\neq 0$.

Caso 1: $aB - bA = 0$. In questo caso poniamo

$$v(t) := at + bu(t).$$

Di conseguenza, $u = (v - at)/b$,

$$At + Bu = At + B\frac{v - at}{b} = \frac{Abt + Bv - aBt}{b} = \frac{(Ab - aB)t + Bv}{b} = \frac{Bv}{b},$$

(è sparita la dipendenza da t al denominatore), e

$$v' = a + bu' = a + b\,g\Big(\frac{at + bu + c}{At + Bu + C}\Big) = a + b\,g\Big(\frac{v + c}{\frac{B}{b}\,v + C}\Big) = a + b\,g\Big(\frac{bv + bc}{Bv + bC}\Big),$$

e l'equazione

$$v' = a + b\,g\Big(\frac{bv + bc}{Bv + bC}\Big)$$

è a variabili separabili, $v' = \varphi(t)\,g_1(v)$, con $\varphi(t) = 1$ e

$$g_1(v) = a + b\,g\Big(\frac{bv + bc}{Bv + bC}\Big).$$

Caso 2: $aB - bA \neq 0$. In questo caso le rette $at + by + c = 0$ e $At + By + C = 0$ nel piano (t, y) non sono parallele; calcoliamo il loro punto di intersezione (α, β), cioè calcoliamo la soluzione (α, β) del sistema

$$\begin{cases} at + by + c = 0 \\ At + By + C = 0. \end{cases}$$

Poniamo

$$\begin{cases} s := t - \alpha \\ v(s) := u(t) - \beta = u(s + \alpha) - \beta. \end{cases}$$

Dalla sostituzione $t = s + \alpha$, $u(t) = v(s) + \beta$ risulta:

$$at + bu(t) + c = a(s + \alpha) + b(v(s) + \beta) + c = as + bv(s) + (a\alpha + b\beta + c) = as + bv(s),$$

$$At + Bu(t) + C = A(s + \alpha) + B(v(s) + \beta) + C = As + Bv(s) + (A\alpha + B\beta + C) = As + Bv(s),$$

in quanto (α, β) è soluzione del sistema. Poi

$$v'(s) = \frac{d}{ds}\,v(s) = \frac{d}{ds}\Big\{u(s + \alpha) - \beta\Big\} = u'(s + \alpha) = u'(t).$$

Quindi l'equazione di partenza si riscrive:

$$v'(s) = g\Big(\frac{as + bv(s)}{As + Bv(s)}\Big).$$

Per $s \neq 0$ si scrive poi

$$g\Big(\frac{as + bv(s)}{As + Bv(s)}\Big) = g\Big(\frac{a + b\frac{v(s)}{s}}{A + B\frac{v(s)}{s}}\Big),$$

si pone

$$w(s) := \frac{v(s)}{s}\,,$$

da cui $v = sw$, $v' = w + sw'$, e l'equazione diventa

$$w + sw' = g\Big(\frac{a + bw}{A + Bw}\Big),$$

cioè

$$w' = \frac{1}{s}\Big\{g\Big(\frac{a + bw}{A + Bw}\Big) - w\Big\},$$

che è a variabili separabili,

$$w'(s) = \varphi(s)\, g_1(w(s)),$$

con

$$\varphi(s) = \frac{1}{s} \qquad g_1(w) = g\Big(\frac{a + bw}{A + Bw}\Big) - w.$$

Una volta trovate le soluzioni $w(s)$, si ha $v(s) = sw(s)$, e infine le soluzioni $u(t)$ del problema di partenza,

$$u(t) = v(s) + \beta = v(t - \alpha) + \beta.$$

3.7 Integrale primo

Un *integrale primo* di un'equazione differenziale è una funzione che ha valore costante lungo le soluzioni dell'equazione: $F(t, y)$ è un integrale primo se, per ogni soluzione $u\colon I \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale, si ha

$$F(t, u(t)) = c \quad \forall t \in I,$$

dove c è un certo valore (costante). Per esempio, la funzione

$$F(t, y) = t^2 \sin y$$

è un integrale primo dell'equazione

$$u' = -\frac{2\tan(u)}{t}\,,$$

(o dell'equazione $tu' \cos(u) + 2\sin(u) = 0$), perché, data una qualsiasi soluzione $u(t)$ dell'equazione differenziale, si ha

$$\frac{d}{dt}\Big\{F(t, u(t))\Big\} = \frac{d}{dt}\Big\{t^2\ \sin(u(t))\Big\} = 2t\ \sin(u(t)) + t^2\ \cos(u(t))\, u'(t) = 0,$$

e quindi $F(t, u(t)) =$ costante.

Per esempio, l'equazione

$$u' = \frac{2t}{e^u}$$

ha integrale primo

$$F(t, u) = e^u - t^2,$$

perché

$$\frac{d}{dt}(e^u - t^2) = e^u u' - 2t = 0$$

per ogni $u(t)$ soluzione dell'equazione. Dunque tutte le soluzioni soddisfano un'uguaglianza del tipo

$$F(t, u(t)) = e^{u(t)} - t^2 = c,$$

per un certo valore $c \in \mathbb{R}$ e per t in un intervallo tale che $c + t^2 > 0$. Di conseguenza

$$u(t) = \log(c + t^2).$$

Notiamo che l'equazione $u' = 2t/e^u$ è a variabili separabili; di fatto, in questo caso il conto che si fa con i due metodi è lo stesso.

Data un'equazione differenziale del tipo

$$A(t,u) + B(t,u)u' = 0,$$

se troviamo una funzione $F(t,y)$ tale che

$$\begin{cases} \partial_t F(t,y) = A(t,y) \\ \partial_y F(t,y) = B(t,y), \end{cases}$$

allora F è un integrale primo dell'equazione. Infatti, dalla regola di derivazione delle funzioni composte,

$$\frac{d}{dt}\Big\{F(t,u(t))\Big\} = \partial_t F(t,u(t)) + \partial_y F(t,u(t))\, u'(t) = A(t,u) + B(t,u)\, u' = 0$$

per ogni soluzione u. Vediamo un altro esempio.

Esercizio. Risolvere l'equazione differenziale

$$4x^3 - 4xy + (-2x^2 + 2y)y' = 0$$

trovandone un integrale primo.

Svolgimento. Cerchiamo una funzione $F(x,y)$ tale che

$$\begin{cases} \partial_x F(x,y) = 4x^3 - 4xy \\ \partial_y F(x,y) = -2x^2 + 2y. \end{cases}$$

La (I) è soddisfatta se e solo se

$$F(x,y) = \int (4x^3 - 4xy)\, dx = 4\frac{x^4}{4} - 4y\frac{x^2}{2} + \varphi(y) = x^4 - 2x^2y + \varphi(y)$$

per qualsiasi funzione $\varphi(y)$ della sola y. Per una F di questo tipo,

$$\partial_y F(x,y) = \partial_y\{x^4 - 2x^2y + \varphi(y)\} = -2x^2 + \varphi'(y)$$

e quindi l'equazione (II) vale se e solo se

$$\varphi'(y) = 2y.$$

Quindi $\varphi(y) = y^2 + c$, per esempio $c = 0$. Abbiamo trovato un integrale primo

$$F(x,y) = x^4 - 2x^2y + y^2 = (x^2 - y)^2.$$

Quindi le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale soddisfano

$$(x^2 - y)^2 = c,$$

da cui si ottiene

$$y = x^2 + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

□

3.8 Integrale primo con fattore integrante

Supponiamo che l'equazione
$$A(t,u)+B(t,u)u'=0$$
non ammetta nessuna funzione F tale che
$$\begin{cases}\partial_t F(t,y)=A(t,y)\\ \partial_y F(t,y)=B(t,y),\end{cases}$$
cosicché il metodo descritto nel paragrafo precedente non si applica. Possiamo procedere nel modo seguente.

Se $u(t)$ soddisfa l'equazione $A(t,u)+B(t,u)u'=0$, allora soddisfa anche l'equazione
$$\mu(t,u)A(t,u)+\mu(t,u)B(t,u)u'=0$$
per ogni fattore $\mu(t,u)$; applicando il procedimento dell'integrale primo a questa equazione, cerchiamo due funzioni $F(t,y)$ e $\mu(t,y)$ tali che
$$\begin{cases}\partial_t F(t,y)=\mu(t,y)A(t,y)\\ \partial_y F(t,y)=\mu(t,y)B(t,y).\end{cases}$$
La funzione μ viene detta *fattore integrante*. Se esistono F e μ siffatte, e se F,μ,A,B sono sufficientemente regolari, allora
$$\partial_y(\mu A)=\partial_y(\partial_t F)==\partial_t(\partial_y F)=\partial_t(\mu B), \tag{19}$$
dunque $\mu(t,y)$ deve soddisfare l'equazione
$$(\partial_y\mu)A+\mu(\partial_y A)=(\partial_t\mu)B+\mu(\partial_t B).$$
Questa, in generale, è un'equazione che contiene le derivate parziali di μ. Tuttavia, in certi casi esiste un fattore integrante che dipende solo da t o solo da y, nel qual caso l'equazione per μ è affrontabile con metodi già visti. Vediamo in dettaglio.

Supponiamo di cercare un fattore integrante che dipenda solo da t: $\mu(t,y)=\mu(t)$. Allora (19) dà l'equazione
$$\mu(t)\partial_y A(t,y)=\mu(t)\,\partial_t B(t,y)+\mu'(t)\,B(t,y),$$
cioè
$$\mu'(t)B(t,y)=\mu(t)\,[\partial_y A(t,y)-\partial_t B(t,y)],$$
equazione a variabili separabili,
$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}=\frac{\partial_y A(t,y)-\partial_t B(t,y)}{B(t,y)}.$$
Se l'espressione a destra non dipende da y, ma solo da t, allora si può risolvere l'equazione, trovare il fattore integrante $\mu(t)$, quindi procedere alla ricerca dell'integrale primo F.

In modo analogo si procede per fattori integranti $\mu(y)$ che dipendono solo da y. Vediamo un esempio.

Esercizio. Calcolare le soluzioni di
$$(x^2+y^2)y'+2xy-x^2y-\frac{y^3}{3}-e^x=0.$$

Svolgimento. È un'equazione del tipo
$$A(x,y(x))+B(x,y(x))y'(x)=0,$$
con
$$A(x,y):=2xy-x^2y-\frac{y^3}{3}-e^x,\qquad B(x,y):=x^2+y^2.$$
Si vede, con calcolo diretto, che non esiste nessuna funzione F tale che $F_x=A$ e $F_y=B$. Però
$$\frac{A_y-B_x}{B}=\frac{2x-x^2-y^2-2x}{x^2+y^2}=-1,$$

indipendente da y, quindi possiamo cercare un fattore integrante che dipenda solo da x. Cerchiamo dunque $\mu(x)$ tale che

$$\mu A = F_x, \quad \mu B = F_y.$$

Necessariamente

$$(\mu A)_y = \mu A_y = (F_x)_y = (F_y)_x = (\mu B)_x = \mu' B + \mu B_x,$$

dunque μ deve soddisfare

$$\mu' B = \mu(A_y - B_x),$$

cioè

$$\mu'(x)\,(x^2 + y^2) = \mu(x)[2x - x^2 - y^2 - 2x] = -\mu(x)(x^2 + y^2),$$

da cui $\mu' = -\mu$. Per variabili separabili troviamo allora

$$\mu(x) = ae^{-x}, \quad a \in \mathbb{R},$$

e scegliamo, per esempio, $a = 1$. L'equazione per F diventa dunque:

$$\begin{cases} F_x = \mu A = e^{-x}[2xy - x^2 y - \frac{y^3}{3} - e^x] \\ F_y = \mu B = e^{-x}(x^2 + y^2). \end{cases}$$

A questo punto procediamo come già visto nel paragrafo precedente: la (II) vale se e solo se

$$F = e^{-x} x^2 y + e^{-x} \frac{y^3}{3} + \varphi(x),$$

con $\varphi(x)$ funzione della sola x. Per una F di questa forma,

$$F_x = -e^{-x} x^2 y + e^{-x} 2xy - e^{-x} \frac{y^3}{3} + \varphi'(x),$$

per cui anche la (I) è soddisfatta se e solo se

$$\varphi'(x) = -1.$$

Scegliamo dunque $\varphi(x) = -x$, e abbiamo

$$F(x, y) = e^{-x} x^2 y + e^{-x} \frac{y^3}{3} - x.$$

Ora, $\mu(x) > 0$ per ogni x, dunque l'equazione di partenza e quella moltiplicata per μ hanno esattamente le stesse soluzioni. Quindi le soluzioni cercate devono soddisfare $F(x, y(x)) = c$,

$$e^{-x} x^2 y + e^{-x} \frac{y^3}{3} - x = c,$$

c costante, da cui

$$x^2 y + \frac{y^3}{3} = (c + x)e^x.$$

Questa espressione non contiene derivate, e determina univocamente la funzione $y(x)$, nel senso che per ogni valore di x esiste un unico valore $y(x)$ che soddisfa questa uguaglianza. $\square$

Svolgimento alternativo: per sostituzione. L'equazione differenziale può essere risolta anche per sostituzione, procedendo nel modo seguente. I termini contenenti la derivata y' sono $x^2\, y' + y^2\, y'$, e

$$x^2\, y' = (x^2\, y)' - 2xy, \qquad y^2\, y' = \Big(\frac{y^3}{3}\Big)'.$$

Quindi

$$(x^2 + y^2)y' = \Big(x^2 y + \frac{y^3}{3}\Big)' - 2xy,$$

e l'equazione si riscrive
$$\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)' - \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) - e^x = 0.$$
Ponendo $x^2y + y^3/3 =: u$, l'equazione è
$$u' - u - e^x = 0.$$

Vedremo più avanti un metodo generale per risolvere equazioni lineari a coefficienti costanti come questa. Possiamo comunque risolverla in questo modo: dividendo per e^x, l'equazione diventa

$$u'e^{-x} - ue^{-x} - 1 = 0.$$

Poniamo $v := ue^{-x}$, cosicché $v' = u'e^{-x} - ue^{-x}$, e l'equazione diventa

$$v' = 1,$$

le cui soluzioni sono $v(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Quindi

$$u = e^x v = (x + c)e^x,$$

da cui, come sopra,

$$x^2y + \frac{y^3}{3} = (x + c)e^x. \qquad \square$$

4 Equazioni lineari

Un'equazione di 1° grado $u' = f(t, u)$ si dice *lineare* se è della forma

$$u'(t) + a(t)u(t) = b(t),$$

per certe funzioni $a(t)$, $b(t)$ definite su un certo intervallo reale. Un'equazione di 2° grado $u'' = f(t, u, u')$ si dice lineare se è della forma
$$u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) = b(t).$$
In generale, un'equazione di n° grado $u^{(n)} = f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)})$ si dice lineare se è della forma

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) = b(t). \tag{20}$$

Le funzioni $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$ si dicono *coefficienti* dell'equazione, la funzione $b(t)$ si dice *termine noto*. Un'equazione lineare si dice *omogenea* se il termine noto è zero. L'equazione omogenea

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) = 0, \tag{21}$$

che ha gli stessi coefficienti della (20) e termine noto nullo, si dice *equazione omogenea associata alla* (20).

Proposizione 4.1. *Se i coefficienti $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$ e il termine noto $b(t)$ sono funzioni continue su un intervallo reale $I \subseteq \mathbb{R}$, allora tutte le soluzioni dell'equazione* (20) *sono funzioni di classe C^n globali, cioè definite su I.*

Dimostrazione. La dimostrazione non è in programma. È una conseguenza del teorema di esistenza globale nel caso vettoriale e dell'equivalenza tra equazioni differenziali di 1° grado in $\mathbb{R}^n$ ed equazioni differenziali scalari di grado n. $\square$

In particolare, se i coefficienti e il termine noto sono definiti in $\mathbb{R}$, anche le soluzioni sono definite in tutto $\mathbb{R}$.

Proposizione 4.2. *Se u e v sono soluzioni dell'equazione lineare* (20)*, allora la differenza $u-v$ è soluzione dell'equazione omogenea associata* (21)*.*

Dimostrazione. La differenza $w(t) := u(t) - v(t)$ soddisfa:

$$\begin{aligned}
&w^{(n)} + a_{n-1}(t)\, w^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, w' + a_0(t)\, w \\
&= \big(u^{(n)} - v^{(n)}\big) + a_{n-1}(t) \big(u^{(n-1)} - v^{(n-1)}\big) + \ldots + a_1(t) \big(u' - v'\big) + a_0(t) \big(u - v\big) \\
&= u^{(n)} + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, u' + a_0(t)\, u - \Big(v^{(n)} + a_{n-1}(t)\, v^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, v' + a_0(t)\, v\Big) \\
&= b(t) - b(t) = 0.
\end{aligned}$$

□

Proposizione 4.3. *Supponiamo che $\bar{y}(t)$ sia soluzione di (20). Allora una funzione $u(t)$ è soluzione dell'equazione non omogenea (20) se e solo se $u = \bar{y} + v$ per una certa $v(t)$ soluzione dell'omogenea associata (21). In altre parole, l'insieme di tutte le soluzioni di (20) è*

$$\Big\{u : \ u \text{ soluzione di } (20)\Big\} = \Big\{\bar{y} + v : \ v \text{ soluzione di } (21)\Big\}.$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Sia u soluzione di (20). Anche $\bar{y}$ è soluzione di (20), quindi, come provato nella proposizione 4.2, la loro differenza $v := u - \bar{y}$ è soluzione di (21), perciò $u = \bar{y} + v$, con v soluzione di (21).
$\Leftarrow$) Sia $u = \bar{y} + v$, con v soluzione di (21). Allora

$$\begin{aligned}
&u^{(n)} + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, u' + a_0(t)\, u \\
&= \big(\bar{y}^{(n)} + v^{(n)}\big) + a_{n-1}(t) \big(\bar{y}^{(n-1)} + v^{(n-1)}\big) + \ldots + a_1(t) \big(\bar{y}' + v'\big) + a_0(t) \big(\bar{y} + v\big) \\
&= \bar{y}^{(n)} + a_{n-1}(t)\, \bar{y}^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, \bar{y}' + a_0(t)\, \bar{y} + \Big(v^{(n)} + a_{n-1}(t)\, v^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, v' + a_0(t)\, v\Big) \\
&= b(t) + 0 = b(t),
\end{aligned}$$

cioè u è soluzione di (20). □

4.1 Equazioni lineari omogenee

Supponiamo che i coefficienti $a_{n-1}(t), \ldots, a_0(t)$ siano funzioni continue su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Abbiamo già osservato che tutte le soluzioni di (21) sono funzioni di classe C^n definite su tutto I. Essendo definite tutte su uno stesso dominio, si può sempre considerare la somma $u + v \colon I \to \mathbb{R}$ di due qualsiasi soluzioni u, v di (21). Indichiamo S l'insieme delle sue soluzioni,

$$S := \Big\{u \colon I \to \mathbb{R} : \ v \text{ soluzione di } (21)\Big\}.$$

Proposizione 4.4. *S è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$: $u + v$, $\lambda u \in S$ per ogni $u, v \in S$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Se $u, v \in S$, allora

$$\begin{aligned}
&(u + v)^{(n)} + a_{n-1}(t)\, (u + v)^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)\, (u + v) \\
&= \big(u^{(n)} + v^{(n)}\big) + a_{n-1}(t) \big(u^{(n-1)} + v^{(n-1)}\big) + \ldots + a_0(t) \big(u + v\big) \\
&= u^{(n)} + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)\, u + \Big(v^{(n)} + a_{n-1}(t)\, v^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)\, v\Big) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

cioè $u + v \in S$. Se $u \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\begin{aligned}
&(\lambda u)^{(n)} + a_{n-1}(t)\, (\lambda u)^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)\, (\lambda u) \\
&= \lambda \Big(u^{(n)} + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\, u' + a_0(t)\, u\Big) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

cioè $\lambda u \in S$. Quindi S è spazio vettoriale. □

Ricordiamo alcune definizioni fondamentali di algebra lineare applicate allo spazio vettoriale S.

Definizione 4.5. Supponiamo che $u_1(t), \dots, u_m(t)$ siano m soluzioni di (21). $u_1(t), \dots, u_m(t)$ si dicono *linearmente dipendenti* se esiste $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \neq 0$, tale che

$$\lambda_1 u_1(t) + \ldots + \lambda_m u_m(t) = 0 \quad \forall t \in I; \tag{22}$$

si dicono *linearmente indipendenti* se, al contrario, l'unico $\lambda \in \mathbb{R}^m$ per cui vale (22) è $\lambda = 0$.

Un insieme $\{u_1, \dots, u_m\}$ di soluzioni di (21) si dice una *base* dello spazio vettoriale S se:

- $u_1, \dots, u_m$ sono linearmente indipendenti;
- $\{u_1, \dots, u_m\}$ è un sistema di generatori, cioè per ogni $u \in S$ esiste $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$u(t) = \lambda_1 u_1(t) + \ldots + \lambda_m u_m(t) \quad \forall t \in I.$$

Si dice *dimensione* dello spazio vettoriale S il numero di elementi di una sua base.[3] □

Teorema 4.6. *Sia t_0 un punto interno all'intervallo I. Siano $u_1, \dots, u_n$ soluzioni dell'equazione* (21) *definite come soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy: u_1 sia la soluzione di* (21) *con dato iniziale*

$$\begin{cases} u(t_0) = 1 \\ u'(t_0) = 0 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(t_0) = 0, \end{cases}$$

u_2 la soluzione di (21) *con dato iniziale*

$$\begin{cases} u(t_0) = 0 \\ u'(t_0) = 1 \\ u''(t_0) = 0 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(t_0) = 0, \end{cases}$$

e similmente per ciascuna u_k, $k = 1, \dots, n$, fino a u_n, soluzione di (21) *con dato iniziale*

$$\begin{cases} u(t_0) = 0 \\ u'(t_0) = 0 \\ \dots \\ u^{(n-2)}(t_0) = 0 \\ u^{(n-1)}(t_0) = 1; \end{cases}$$

in generale, u_k è la soluzione di (21) *con dato iniziale*

$$\begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = e_k,$$

dove e_k è il k-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Allora $\{u_1, \dots, u_n\}$ è una base di S. Di conseguenza, S è uno spazio di dimensione n, e ogni soluzione di (21) *è della forma*

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \ldots + c_n u_n(t), \quad (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

[3] Come è noto dal corso di Geometria e Algebra lineare, tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.

Dimostrazione. 1) Dimostriamo che $u_1, \dots, u_n$ sono linearmente indipendenti. Supponiamo che $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$$\lambda_1 u_1(t) + \ldots + \lambda_n u_n(t) = 0 \quad \forall t \in I. \tag{23}$$

Allora, derivando rispetto a t, otteniamo

$$\lambda_1 u_1'(t) + \ldots + \lambda_n u_n'(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Derivando ancora si ha

$$\lambda_1 u_1''(t) + \ldots + \lambda_n u_n''(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

e andiamo avanti a derivare, fino a

$$\lambda_1 u_1^{(n-1)}(t) + \ldots + \lambda_n u_n^{(n-1)}(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

La prima equazione in $t = t_0$ dà

$$\lambda_1 u_1(t_0) + \ldots + \lambda_n u_n(t_0) = 0;$$

per definizione delle funzioni $u_1, \dots, u_n$,

$$u_1(t_0) = 1, \quad u_2(t_0) = 0, \quad \ldots \quad u_n(t_0) = 0, \tag{24}$$

perciò $\lambda_1 = 0$. La seconda equazione in $t = t_0$ dà

$$\lambda_1 u_1'(t_0) + \ldots + \lambda_n u_n'(t_0) = 0;$$

per definizione,

$$u_2'(t_0) = 1, \quad u_j'(t_0) = 0 \quad \forall j \neq 2, \tag{25}$$

e quindi $\lambda_2 = 0$. Procediamo in modo analogo: l'equazione in $t = t_0$

$$\lambda_1 u_1^{(k-1)}(t_0) + \ldots + \lambda_n u_n^{(k-1)}(t_0) = 0$$

ha

$$u_k^{(k-1)}(t_0) = 1, \quad u_j^{(k-1)}(t_0) = 0 \quad \forall j \neq k,$$

da cui $\lambda_k = 0$. Questo prova che $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti nulli, quindi l'unico $\lambda \in \mathbb{R}^n$ per cui vale (23) è $\lambda = 0$.

2) Proviamo che $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori. Sia $v \in S$. Poniamo

$$\lambda_1 := v(t_0), \quad \lambda_2 := v'(t_0), \quad \ldots \quad \lambda_n := v^{(n-1)}(t_0).$$

Sia

$$w(t) := \lambda_1 u_1(t) + \ldots + \lambda_n u_n(t).$$

w è soluzione di (21), e in $t = t_0$ vale:

$$w(t_0) = \lambda_1 u_1(t_0) + \ldots + \lambda_n u_n(t_0) = \lambda_1$$

per (24),

$$w'(t_0) = \lambda_1 u_1'(t_0) + \ldots + \lambda_n u_n'(t_0) = \lambda_2$$

per (25), e similmente

$$w^{(k-1)}(t_0) = \lambda_k, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Dunque sia v che w sono soluzioni del problema di Cauchy di equazione (21) e dato iniziale

$$\begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, $v = w$, e quindi

$$v(t) = \lambda_1 u_1(t) + \ldots + \lambda_n u_n(t) \quad \forall t \in I.$$

Questo prova che $u_1, \dots, u_n$ formano un sistema di generatori. Essendo anche linearmente indipendenti, danno una base di S, che quindi è spazio vettoriale di dimensione n. $\square$

In particolare, per $n = 1$, il teorema appena provato dice che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea di 1° grado $u' = a(t)u$ è lo spazio vettoriale uni-dimensionale

$$\Big\{u : u' = a(t)u\Big\} = \Big\{c_1 u_1 : c_1 \in \mathbb{R}\Big\},$$

dove $u_1(t)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = a(t)u \\ u(t_0) = 1. \end{cases}$$

Per $n = 2$, il teorema dice che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea di 2° grado $u'' = a_1(t)u' + a_0(t)u$ è lo spazio vettoriale bi-dimensionale

$$\Big\{u : u'' = a_1(t)u' + a_0(t)u\Big\} = \Big\{c_1 u_1 + c_2 u_2 : (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\Big\},$$

dove $u_1(t)$, $u_2(t)$ soddisfano l'equazione $u'' = a_1(t)u' + a_0(t)u$ con dati iniziali

$$\begin{cases} u_1(t_0) = 1 \\ u_1'(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2(t_0) = 0 \\ u_2'(t_0) = 1. \end{cases}$$

Per $n = 3$, il teorema dice che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea di 3° grado $u''' = a_2(t)u'' + a_1(t)u' + a_0(t)u$ è lo spazio vettoriale tri-dimensionale

$$\Big\{u : u''' = a_2(t)u'' + a_1(t)u' + a_0(t)u\Big\} = \Big\{c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 : (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3\Big\},$$

dove $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ soddisfano l'equazione $u''' = a_2(t)u'' + a_1(t)u' + a_0(t)u$ con dati iniziali

$$\begin{cases} u_1(t_0) = 1 \\ u_1'(t_0) = 0 \\ u_1''(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2(t_0) = 0 \\ u_2'(t_0) = 1 \\ u_2''(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_3(t_0) = 0 \\ u_3'(t_0) = 0 \\ u_3''(t_0) = 1. \end{cases}$$

Definizione 4.7. Date n soluzioni linearmente indipendenti $u_1, \dots, u_n$ di (21) (non necessariamente quelle del teorema precedente), si dice *matrice wronskiana* la matrice $n \times n$ (dipendente dal tempo)

$$W(t) = W(u_1, \dots, u_n)(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \dots & u_n'(t) \\ u_1''(t) & u_2''(t) & \dots & u_n''(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

□

Per esempio, se $u(t) \neq 0$ è una soluzione dell'equazione omogenea di 1° grado $u' = a(t)u$, la sua matrice wronskiana è la matrice 1×1

$$W(t) = u(t);$$

se $u_1(t), u_2(t)$ sono 2 soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea di 2° grado $u'' = a_1(t)u' + a_0(t)u$, la loro matrice wronskiana è la matrice 2×2

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix};$$

se $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ sono 3 soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea di 3° grado $u''' = a_2(t)u'' + a_1(t)u' + a_0(t)u$, la loro matrice wronskiana è la matrice 3×3

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & u_3'(t) \\ u_1''(t) & u_2''(t) & u_3''(t) \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.8 (Teorema del wronskiano). *Siano $u_1, \dots, u_n$ soluzioni dell'equazione omogenea* (21)*. Allora la loro matrice wronskiana è invertibile per ogni $t \in I$, cioè*

$$\det\big(W(u_1, \dots, u_n)(t)\big) \neq 0 \quad \forall t \in I,$$

se e solo se $u_1, \dots, u_n$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. La dimostrazione non è in programma. Si trova sul libro di testo. □

4.2 Metodo di variazione delle costanti

Il metodo della *variazione delle costanti* è una tecnica per trovare una soluzione dell'equazione lineare non omogenea (20), una volta che siano note n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata (21). Poi, conoscendo

- *una* soluzione $\bar{y}$ dell'equazione non omogenea,
- n soluzioni $u_1, \dots, u_n$ linearmente indipendenti dell'omogenea associata,

si possono scrivere *tutte* le soluzioni dell'equazione non omogenea. Infatti, dalla proposizione 4.3 sappiamo che ogni soluzione dell'equazione non omogenea è del tipo

$$u = \bar{y} + v,$$

con v soluzione dell'omogenea; dal teorema 4.6 (e dall'Algebra lineare) sappiamo che qualsiasi famiglia di n funzioni $u_1, \dots, u_n \in S$ linearmente indipendenti formano una base di S, lo spazio vettoriale di dimensione n delle soluzioni dell'equazione omogenea; quindi ogni soluzione v dell'omogenea è del tipo

$$v = c_1 u_1 + \ldots + c_n v_n, \quad (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n,$$

per cui le soluzioni dell'equazione non omogenea (20) sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$u = \bar{y} + c_1 u_1 + \ldots + c_n v_n, \quad (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Illustriamo il metodo per $n = 1, 2, 3$; il caso generale $n \in \mathbb{N}$ segue lo stesso procedimento.

4.2.1 Variazione delle costanti: caso $n = 1$

Cerchiamo di costruire una soluzione dell'equazione di 1° grado

$$u' + a(t)u = b(t), \tag{26}$$

e supponiamo di conoscere una soluzione v dell'equazione omogenea associata

$$v' + a(t)v = 0,$$

linearmente indipendente (cioè $v \neq 0$).[4] Sappiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono del tipo

$$cv(t), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Il metodo consiste nel cercare una soluzione della forma

$$u(t) = \varphi(t)\, v(t),$$

ottenuta mettendo una funzione $\varphi(t)$ (da determinare) al posto della costante c. Derivando e sostituendo $u = \varphi v$,

$$\begin{aligned} u' + au &= \varphi' v + \varphi v' + a\varphi v \\ &= \varphi' v + \varphi(v' + av) \\ &= \varphi' v \end{aligned}$$

perché, per ipotesi, $v' + av = 0$. Se trovo φ tale che $\varphi' v = b$, allora u è soluzione di (26). Per avere una tale φ è sufficiente un'integrazione, $\varphi' = b/v$,

$$\varphi = \int b/v\,.$$

Osserviamo che il metodo è molto simile a quello usato nel paragrafo 3.3.

[4] Le soluzioni dell'equazione $v = +a(t)v = 0$ si trovano immediatamente per separazione delle variabili.

4.2.2 Variazione delle costanti: caso $n = 2$

Vogliamo costruire una soluzione dell'equazione di 2° grado

$$u'' + a_1(t)u' + a_0(t)u = b(t), \tag{27}$$

e supponiamo di conoscere 2 soluzioni linearmente indipendenti v, w dell'equazione omogenea associata,

$$v'' + a_1(t)v' + a_0(t)v = 0, \quad w'' + a_1(t)w' + a_0(t)w = 0.$$

Sappiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono del tipo

$$c_1v(t) + c_2w(t), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$u(t) = \varphi(t)\, v(t) + \psi(t)\, w(t),$$

ottenuta mettendo due funzioni $\varphi(t)$, $\psi(t)$ (da determinare) al posto delle costanti c_1, c_2. Deriviamo una prima volta:

$$u' = \varphi'v + \varphi v' + \psi'w + \psi w'.$$

Se φ, ψ soddisfano

$$\varphi'v + \psi'w = 0, \tag{28}$$

allora rimane

$$u' = \varphi v' + \psi w'.$$

Dunque, derivando una seconda volta,

$$u'' = \varphi'v' + \varphi v'' + \psi'w' + \psi w'',$$

e, sostituendo le espressioni trovate per u, u', u'',

$$\begin{aligned} u'' + a_1u' + a_0u &= \varphi'v' + \varphi v'' + \psi'w' + \psi w'' + a_1(\varphi v' + \psi w') + a_0(\varphi v + \psi w) \\ &= \varphi\big(v'' + a_1v' + a_0v\big) + \psi\big(w'' + a_1w' + a_0w\big) + (\varphi'v' + \psi'w') \\ &= \varphi'v' + \psi'w' \end{aligned}$$

perché, per ipotesi, v e w sono soluzioni dell'equazione omogenea. Se φ, ψ soddisfano anche

$$\varphi'v' + \psi'w' = b, \tag{29}$$

allora u è soluzione di (27). Le equazioni (28) e (29) formano il sistema di 2 equazioni nelle 2 incognite φ, ψ

$$\begin{pmatrix} v & w \\ v' & w' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi' \\ \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

La matrice 2×2 che compare a sinistra è la matrice wronskiana $W = W(v, w)(t)$ delle soluzioni v, w. Poiché v e w sono linearmente indipendenti, dal teorema del wronskiano segue l'invertibilità di W, e quindi la possibilità di risolvere il sistema, trovando

$$\begin{pmatrix} \varphi' \\ \psi' \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Una volta trovate φ' e ψ', con un'integrazione si trovano φ e ψ (a meno di una costante), e quindi una soluzione particolare u.

4.2.3 Variazione delle costanti: caso $n = 3$

Vogliamo costruire una soluzione dell'equazione di 3º grado

$$u''' + a_2(t)u'' + a_1(t)u' + a_0(t)u = b(t), \tag{30}$$

e supponiamo di conoscere 3 soluzioni linearmente indipendenti v_1, v_2, v_3 dell'equazione omogenea associata

$$v''' + a_2(t)v'' + a_1(t)v' + a_0(t)v = 0.$$

Come prima, cerchiamo una soluzione della forma

$$u(t) = \varphi_1(t)\, v_1(t) + \varphi_2(t)\, v_2(t) + \varphi_3(t)\, v_3(t),$$

ottenuta mettendo 3 funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ da determinare al posto delle costanti c_1, c_2, c_3 che compaiono nella formula delle soluzioni dell'equazione omogenea. Deriviamo una prima volta:

$$u' = \varphi_1' v_1 + \varphi_1 v_1' + \varphi_2' v_2 + \varphi_2 v_2' \varphi_3' v_3 + \varphi_3 v_3'.$$

Se $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ soddisfano

$$\varphi_1' v_1 + \varphi_2' v_2 + \varphi_3' v_3 = 0, \tag{31}$$

allora rimane

$$u' = \varphi_1 v_1' + \varphi_2 v_2' + \varphi_3 v_3'.$$

Derivando una seconda volta,

$$u'' = \varphi_1' v_1' + \varphi_1 v_1'' + \varphi_2' v_2' + \varphi_2 v_2'' + \varphi_3' v_3' + \varphi_3 v_3''.$$

Se $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ soddisfano

$$\varphi_1' v_1' + \varphi_2' v_2' + \varphi_3' v_3' = 0, \tag{32}$$

allora rimane

$$u'' = \varphi_1 v_1'' + \varphi_2 v_2'' + \varphi_3 v_3''.$$

Poi

$$u''' = \varphi_1' v_1'' + \varphi_1 v_1''' + \varphi_2' v_2'' + \varphi_2 v_2''' + \varphi_3' v_3'' + \varphi_3 v_3''',$$

e, sostituendo le espressioni trovate per u, u', u'', u''',

$$\begin{aligned}
u''' + a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u &= \varphi_1' v_1'' + \varphi_1 v_1''' + \varphi_2' v_2'' + \varphi_2 v_2''' + \varphi_3' v_3'' + \varphi_3 v_3''' \\
&\quad + a_2\big(\varphi_1 v_1'' + \varphi_2 v_2'' + \varphi_3 v_3''\big) + a_1\big(\varphi_1 v_1' + \varphi_2 v_2' + \varphi_3 v_3'\big) + a_0\big(\varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2 + \varphi_3 v_3\big) \\
&= \big(\varphi_1' v_1'' + \varphi_2' v_2'' + \varphi_3' v_3''\big) + \varphi_1\Big(v_1''' + a_2 v_1'' + a_1 v_1' + a_0 v_1\Big) \\
&\quad + \varphi_2\Big(v_2''' + a_2 v_2'' + a_1 v_2' + a_0 v_2\Big) + \varphi_3\Big(v_3''' + a_2 v_3'' + a_1 v_3' + a_0 v_3\Big) \\
&= \varphi_1' v_1'' + \varphi_2' v_2'' + \varphi_3' v_3''
\end{aligned}$$

perché, per ipotesi, v_1, v_2, v_3 sono soluzioni dell'equazione omogenea. Se $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ soddisfano anche

$$\varphi_1' v_1'' + \varphi_2' v_2'' + \varphi_3' v_3'' = b, \tag{33}$$

allora u è soluzione di (30). Le equazioni (31), (32) e (33) formano il sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ v_1'' & v_2'' & v_3'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \\ \varphi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

La matrice 3×3 è la matrice wronskiana $W = W(v_1, v_2, v_3)(t)$ delle soluzioni v_1, v_2, v_3, matrice invertibile perché v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti (teorema del wronskiano). Dunque il sistema è risolubile, con soluzione

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \\ \varphi_3' \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Una volta trovate $\varphi_1, \varphi_2', \varphi_3'$ si integra e si trovano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ e quindi una soluzione particolare u.

5 Equazioni lineari a coefficienti costanti

Quando i coefficienti $a_{n-1}, \ldots, a_0$ dell'equazione lineare (20) sono costanti, esistono metodi espliciti per la ricerca delle soluzioni. Premettiamo alcuni richiami e notazioni complesse e definiamo l'esponenziale complesso.

5.1 Esponenziale complesso

Definizione 5.1. L'*esponenziale complesso* è la funzione complessa definita come serie di potenze

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}. \qquad \square$$

Osserviamo che, per $z \in \mathbb{R}$, questa è la serie di Taylor dell'esponenziale reale. Dunque questa definizione estende in modo naturale la funzione esponenziale reale anche al dominio complesso.

Ricordiamo che il coniugio, o coniugato, del numero complesso $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, è

$$\bar{z} := x - iy.$$

Proposizione 5.2. *Valgono le seguenti proprietà.*

- *La serie di potenze che definisce l'esponenziale complesso converge in ogni $z \in \mathbb{C}$, e ha quindi raggio di convergenza ∞; la serie converge totalmente, e quindi uniformemente, su ogni palla chiusa $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, per ogni $R \geq 0$.*
- $e^{z+w} = e^z e^w$ *per ogni* $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ *per ogni* $z \in \mathbb{C}$.
- $e^{it} = \cos t + i \sin t$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}$.
- $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, *per ogni* $t \in \mathbb{R}$.
- *Se $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, allora e^z è il punto del piano complesso che si trova a distanza e^x dall'origine e forma un angolo y rispetto alla semiretta delle ascisse positive (di fatto sono coordinate polari: $e^z = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$, con e^x nel ruolo della ρ e y nel ruolo della ϑ).*

Dimostrazione. La dimostrazione è facoltativa.

1) Criterio del rapporto:

$$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty,$$

quindi c'è convergenza puntuale in ogni $z \in \mathbb{C}$. La convergenza totale e uniforme è conseguenza di quanto provato per le serie di potenze reali (vale anche in campo complesso).

2) La convergenza totale giustifica i seguenti passaggi formali. Usando la formula binomiale

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} z^k\, w^{n-k},$$

si ha

$$\begin{aligned}
e^z e^w &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!}\Big)\\
&= \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{z^k\, w^j}{k!\, j!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{k,j\geq 0\\ k+j=n}} \frac{z^k\, w^j}{k!\, j!}\Big)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k\, w^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\Big)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, z^k\, w^{n-k}\Big)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(z+w)^n = e^{z+w}\,.
\end{aligned}$$

3)

$$\overline{e^z} = \overline{\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}\,.$$

4)

$$\begin{aligned}
e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\\
&= 1 + it - \frac{t^2}{2} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - i\frac{t^7}{7!} + \frac{t^8}{8!} + i\frac{t^9}{9!} - \frac{t^{10}}{10!} - i\frac{t^{11}}{11!} + \dots\\
&= \Big(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - \frac{t^{10}}{10!} + \dots\Big)\\
&\quad + i\Big(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \frac{t^{11}}{11!} + \dots\Big)\\
&= \cos t + i\sin t.
\end{aligned}$$

5)

$$\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{\cos t + i\sin t + \cos(-t) + i\sin(-t)}{2} = \frac{\cos t + i\sin t + \cos t - i\sin t}{2} = \cos t,$$

$$\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{\cos t + i\sin t - [\cos t - i\sin t]}{2i} = \frac{2i\sin t}{2i} = \sin t.$$

6) Se $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, allora

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = (e^x\cos y) + i\,(e^x\sin y),$$

e poi si identificano numeri complessi e punti del piano tramite la biiezione

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \quad a + ib \mapsto \binom{a}{b}. \tag{34}$$

□

5.2 Soluzioni a valori complessi

Sia $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione di una variabile reale a valori complessi, $w(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$. Tramite l'identificazione (34) tra il piano complesso $\mathbb{C}$ e il piano $\mathbb{R}^2$, possiamo pensare a w come ad una funzione a valori in $\mathbb{R}^2$.

Quindi tutto quello che abbiamo visto per funzioni a valori vettoriali si applica alle funzioni complesse di variabile reale (limiti, continuità, differenziale, curve, ecc.); notiamo che il modulo di un numero complesso coincide con la norma del vettore di $\mathbb{R}^2$ corrispondente: se $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con x, y reali, allora

$$|z| = z\bar{z} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|.$$

Se u, v sono le componenti reale e immaginaria di w, cioè

$$u, v \colon I \to \mathbb{R}, \quad w(t) = u(t) + i\, v(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

la derivata $w'(t)$ è

$$w'(t) = u'(t) + i\, v'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix},$$

e similmente per le derivate successive. (u e v sono funzioni a valori reali).

Proposizione 5.3. *Siano $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ numeri reali, e consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti reali*

$$u^{(n)} + a_{n-1}\, u^{(n-1)} + \ldots + a_1\, u' + a_0\, u = 0. \tag{35}$$

Sia $w \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione complessa con parte reale u e parte immaginaria v, cioè $w(t) = u(t) + iv(t)$. Allora w è soluzione complessa *di* (35) *(cioè $w(t)$ soddisfa l'equazione* (35)*) se e solo se u e v sono entrambe soluzioni di* (35)*.*

Dimostrazione. Identificando $w = u + iv \in \mathbb{C}$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $w' = u' + iv' \in \mathbb{C}$ con $(u', v') \in \mathbb{R}^2$, ecc.,

$$\begin{aligned} &w^{(n)} + a_{n-1}\, w^{(n-1)} + \ldots + a_1\, w' + a_0\, w \\ &= \begin{pmatrix} u^{(n)} \\ v^{(n)} \end{pmatrix} + a_{n-1} \begin{pmatrix} u^{(n-1)} \\ v^{(n-1)} \end{pmatrix} + \ldots + a_1 \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^{(n)} + a_{n-1}\, u^{(n-1)} + \ldots + a_1\, u' + a_0\, u \\ v^{(n)} + a_{n-1}\, v^{(n-1)} + \ldots + a_1\, v' + a_0\, v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e questo vettore di $\mathbb{R}^2$ è zero se e solo se entrambe le sue componenti sono nulle. □

5.3 Polinomio caratteristico e soluzioni

Definizione 5.4. Si dice *polinomio caratteristico* dell'equazione (35) il polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$ □

Richiamo di algebra: un numero λ_0 (reale o complesso) si dice *radice* di p se $p(\lambda_0) = 0$. Se p ha r radici coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r$, si dice che λ_1 è radice di molteplicità r. Per esempio, il polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

ha radice $\lambda_1 = 1$ di molteplicità 2. Il polinomio

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^4(\lambda - 1 - 2i)^3(\lambda - 1 + 2i)^3(\lambda - 3) \tag{36}$$

ha radici distinte $\lambda_1 = 2$ di molteplicità 4, $\lambda_2 = 1 + 2i$ di molteplicità 3, $\lambda_3 = 1 - 2i$ di molteplicità 3, e $\lambda_4 = 3$ di molteplicità 1.

Se il polinomio p ha grado n, e ha k radici distinte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, ciascuna con la sua molteplicità $r_1, r_2, \ldots, r_k$, allora

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n.$$

Negli esempi di sopra: $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ ha grado $n = 2$, ha la radice $\lambda_1 = 1$ di molteplicità $r_1 = 2$, e la somma delle molteplicità (solo r_1, in questo caso) è $= 2 = n$. Il polinomio (36) ha grado $n = 11$, ha radici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ di molteplicità $r_1 = 4$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$, $r_4 = 1$, e

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 4 + 3 + 3 + 1 = 11 = n.$$

Se un polinomio p a coefficienti reali ha una radice complessa $\lambda = \alpha + i\beta$, allora anche il numero complesso coniugato $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ è radice di p; in altre parole, le radici dei polinomi a coefficienti reali sono numeri reali e/o coppie di numeri complessi coniugati. Radici coniugate hanno la stessa molteplicità.

Teorema 5.5. *1) Supponiamo che il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ dell'equazione* (35) *abbia come radici i k numeri complessi distinti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, ciascuno con la sua molteplicità $r_1, r_2, \dots, r_k$. Per ciascuna di queste radici considero le seguenti funzioni complesse: se λ ha molteplicità r, considero le r funzioni complesse*

$$e^{\lambda t}, \quad te^{\lambda t}, \quad t^2 e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad t^{r-1} e^{\lambda t}.$$

Facendo questa operazione per λ_1 ottengo r_1 funzioni complesse; facendola per λ_2 ne ottengo altre r_2, ..., fino a λ_k, per cui ne ottengo r_k. Alla fine ottengo $r_1 + r_2 + \dots + r_k$, cioè n funzioni complesse. Tesi: queste funzioni sono n soluzioni complesse di (35)*, linearmente indipendenti.*[5]

2) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è radice di p, allora $e^{\lambda t}$ è una soluzione reale di (35).
Se $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ sono una coppia di radici complesse coniugate di p, con $\beta \neq 0$, allora

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)], \quad e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)]$$

sono una coppia di soluzioni complesse di (35)*; di conseguenza (per la proposizione 5.3)*

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

sono una coppia di soluzioni reali di (35).

Una base dello spazio vettoriale S delle soluzioni di (35) *è data dalle n soluzioni reali linearmente indipendenti ottenute nel modo seguente:*

- *per ogni radice reale $\lambda \in \mathbb{R}$ di p di molteplicità r, considero le r funzioni reali*

$$e^{\lambda t}, \quad te^{\lambda t}, \quad \dots, \quad t^{r-1} e^{\lambda t};$$

- *per ogni coppia di radici complesse coniugate $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ di p (con $\beta \neq 0$) di molteplicità r considero le $2r$ funzioni reali*

$$\begin{aligned} &e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad te^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad \dots \quad t^{r-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t), \\ &e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad te^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad \dots \quad t^{r-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t). \end{aligned}$$

Dimostrazione. La dimostrazione non è in programma. □

Esempio (chiarificatore?). Se $p(\lambda)$ è il polinomio (36),

$$\begin{aligned} &e^{2t}, \quad te^{2t}, \quad t^2 e^{2t}, \quad t^3 e^{2t}, \\ &e^{(1+2i)t}, \quad te^{(1+2i)t}, \quad t^2 e^{(1+2i)t}, \\ &e^{(1-2i)t}, \quad te^{(1-2i)t}, \quad t^2 e^{(1-2i)t}, \\ &e^{3t} \end{aligned}$$

sono 11 soluzioni complesse linearmente indipendenti. Per averle reali:

$$\begin{aligned} &e^{2t}, \quad te^{2t}, \quad t^2 e^{2t}, \quad t^3 e^{2t}, \\ &e^{t} \cos(2t), \quad te^{t} \cos(2t), \quad t^2 e^{t} \cos(2t), \\ &e^{t} \sin(2t), \quad te^{t} \sin(2t), \quad t^2 e^{t} \sin(2t), \\ &e^{3t} \end{aligned}$$

sono 11 soluzioni reali linearmente indipendenti. Queste 11 soluzioni reali formano una base dello spazio vettoriale S delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea di grado 11 che ha (36) come polinomio caratteristico.

[5] Linearmente indipendenti sia rispetto agli scalari reali che agli scalari complessi.

5.4 Soluzione particolare di forma notevole

Quando siamo alla ricerca di una soluzione particolare di un'equazione lineare a coefficienti costanti, non omogenea, con termine noto di una qualche forma notevole, possiamo procedere in modo diretto, senza ricorrere al metodo della variazione delle costanti, cercandola della forma suggeritaci dal termine noto.

In particolare, se $b(t)$ è un polinomio, andiamo a cercare una soluzione particolare di tipo polinomiale, cioè u polinomio; se $b(t)$ è un *polinomio trigonometrico*, cioè una funzione del tipo

$$b(t) = p(t)\cos(\omega t) + q(t)\sin(\omega t),$$

con $p(t), q(t)$ polinomi e $\omega \in \mathbb{R}$ costante, cerchiamo una soluzione particolare u della stessa forma,

$$u(t) = P(t)\cos(\omega t) + Q(t)\sin(\omega t),$$

con P, Q polinomi da determinare; similmente se al posto di $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ ci sono degli esponenziali $e^{\lambda t}$.

Vediamo il metodo applicato a qualche esempio.

Esercizio. Scrivere una soluzione particolare dell'equazione

$$u'' - 4u' + 4u = (1+t^2)e^{2t} - 2t^3e^{3t}.$$

Svolgimento. Cerchiamo una soluzione u della stessa forma del termine noto, cioè del tipo

$$u(t) = P(t)e^{2t} + Q(t)e^{3t},$$

con P e Q polinomi da determinare. Calcoliamo la derivata prima

$$u' = P'e^{2t} + 2Pe^{2t} + Q'e^{3t} + 3Qe^{3t}$$

e la derivata seconda

$$u'' = P''e^{2t} + 4P'e^{2t} + 4Pe^{2t} + Q''e^{3t} + 6Q'e^{3t} + 9Qe^{3t}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} u'' - 4u' + 4u &= \{P''e^{2t} + 4P'e^{2t} + 4Pe^{2t} + Q''e^{3t} + 6Q'e^{3t} + 9Qe^{3t}\} \\ &\quad - 4\{P'e^{2t} + 2Pe^{2t} + Q'e^{3t} + 3Qe^{3t}\} \\ &\quad + 4\{Pe^{2t} + Qe^{3t}\} \\ &= e^{2t}\Big\{P'' + 4P' + 4P - 4P' - 8P + 4P\Big\} \\ &\quad + e^{3t}\Big\{Q'' + 6Q' + 9Q - 4Q' - 12Q + 4Q\Big\} \\ &= P''e^{2t} + e^{3t}\Big(Q'' + 2Q' + Q\Big), \end{aligned}$$

e u soddisfa l'equazione non omogenea se

$$\begin{cases} P'' = 1 + t^2 & \text{(I)} \\ Q'' + 2Q' + Q = -2t^3. & \text{(II)} \end{cases}$$

Nella (I) a destra c'è un polinomio di grado 2, quindi P'' deve essere di grado 2, dunque P di grado 4 (il grado di un polinomio si abbassa di 1 ad ogni derivazione, perché la derivata di t^n è nt^{n-1}, un grado in meno). Se

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4,$$

allora

$$P' = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3, \quad P'' = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2$$

e quindi (I) è soddisfatta se

$$2a_2 = 1, \quad 6a_3 = 0, \quad 12a_4 = 1$$

e a_0, a_1 qualsiasi. Quindi scegliamo $a_0 = a_1 = 0$, e

$$P(t) = \frac{1}{2}\,t^2 + \frac{1}{12}\,t^4.$$

Nella (II) a destra c'è un polinomio di grado 3. A sinistra compaiono Q e le sue derivate Q', Q'', che hanno grado minore di Q. Quindi complessivamente il grado del termine a sinistra $(Q'' + 2Q' + Q)$ è il grado di Q. Perciò cerchiamo Q di grado 3,

$$Q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3.$$

Dopo aver calcolato Q', Q'', si ha

$$\begin{aligned} Q'' + 2Q' + Q &= \big(2b_2 + 6b_3 t\big) + 2\big(b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2\big) + \big(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3\big) \\ &= b_3 t^3 + \big(6b_3 + b_2\big)t^2 + \big(6b_3 + 4b_2 + b_1\big)t + \big(2b_2 + 2b_1 + b_0\big). \end{aligned}$$

Dunque (II) è soddisfatta se

$$b_3 = -2, \qquad 6b_3 + b_2 = 0, \qquad 6b_3 + 4b_2 + b_1 = 0, \qquad 2b_2 + 2b_1 + b_0 = 0,$$

cioè

$$b_3 = -2, \quad b_2 = 12, \quad b_1 = -36, \quad b_0 = 48,$$

da cui

$$Q(t) = 48 - 36t + 12t^2 - 2t^3.$$

La soluzione particolare trovata è

$$u(t) = \Big(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12}\Big)e^{2t} + \big(48 - 36t + 12t^2 - 2t^3\big)e^{3t}.$$ □

Esercizio. Scrivere una soluzione particolare dell'equazione

$$u' + 3u = 13\cos(2t).$$

Svolgimento. Cerchiamo u del tipo

$$u(t) = a\,\cos(2t) + b\,\sin(2t).$$

La derivata prima è

$$u'(t) = -2a\,\sin(2t) + 2b\,\cos(2t),$$

dunque

$$u' + 3u = (3a + 2b)\,\cos(2t) + (-2a + 3b)\,\sin(2t).$$

u è soluzione se

$$3a + 2b = 5, \qquad -2a + 3b = 0,$$

da cui $a = 3$ e $b = 2$,

$$u(t) = 3\,\cos(2t) + 2\,\sin(2t).$$ □

Osservazione 5.6. In generale, seno e coseno vanno scritti entrambi. Per esempio, nel problema precedente, se si parte da una u della forma $u(t) = a\cos(2t)$, con a costante, allora in $u' + 3u$ compare un termine di seno che non si può eliminare senza annullare anche quello del coseno:

$$u' + 3u = -2a\,\sin(2t) + 3a\,\cos(2t) \quad \neq 13\,\cos(2t),$$

e quindi non si trova nessuna soluzione della forma $u = a\cos(2t)$. □

Esercizio. Scrivere una soluzione particolare dell'equazione

$$u'' + 4u = \cos(2t).$$

Svolgimento. Non si riesce a trovare una soluzione della forma $a\cos(2t)+b\sin(2t)$ con a,b costanti (per convincersene, fare il tentativo). Quindi la cerchiamo della forma più generale

$$u(t) = P(t)\,\cos(2t) + Q(t)\,\sin(2t),$$

con P,Q polinomi. La derivata prima è

$$u' = (P' + 2Q)\cos(2t) + (Q' - 2P)\sin(2t),$$

la derivata seconda è

$$u'' = (P'' + 4Q' - 4P)\cos(2t) + (Q'' - 4Q' - 4Q)\sin(2t),$$

da cui

$$u'' + 4u = (P'' + 4Q')\cos(2t) + (Q'' - 4P')\sin(2t).$$

u è soluzione se

$$P'' + 4Q' = 1, \qquad Q'' - 4P' = 0.$$

Dal momento che compaiono solo P', P'', Q', Q'', poniamo $P' = p$ e $Q' = q$; il problema diventa trovare p,q tali che

$$\begin{cases} p' + 4q = 1 & \text{(I)} \\ q' - 4p = 0. & \text{(II)} \end{cases} \tag{37}$$

I termini a destra sono costanti; se p,q sono costanti, allora $p' = q' = 0$, e questo sistema diventa: $4q = 1$, $-4p = 0$, che ha soluzione

$$q = 1/4, \qquad p = 0.$$

Quindi possiamo scegliere

$$P(t) = 0, \qquad Q(t) = \frac{1}{4}\,t.$$

Abbiamo trovato la soluzione particolare

$$u(t) = \frac{1}{4}\,t\,\sin(2t).$$

□

Il sistema (37) può essere risolto anche in questo modo: derivando (I) si ha $p'' + 4q' = 0$; dalla (II), $q' = 4p$, quindi sostituendo si ha

$$p'' + 16p = 0.$$

Quest'equazione ha la soluzione costante $p = 0$. Per $p = 0$, la (I) diventa $4q = 1$, da cui $q = 1/4$.

Indice