

Pietro Baldi

Successioni e serie di funzioni

Testi di riferimento:

W. Rudin, *Principi di Analisi Matematica*, McGraw-Hill Libri Italia;

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica Due*, Liguori Editore;

G. De Marco, *Analisi Due/1*, Decibel-Zanichelli Editore.

1 Convergenza puntuale

Definizione 1.1. Sia $\{f_n\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, una successione di funzioni definite su un insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ a valori reali, $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $x \in D$ la successione numerica $\{f_n(x)\} = \{f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$ converga, e indichiamo $f(x)$ il suo limite, cioè

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in D. \quad (1)$$

Diciamo allora che la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente a f , e che f è la *funzione limite*, o il *limite puntuale* della successione. Usando la definizione di limite, (1) si riscrive così: per ogni $x \in D$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $\bar{n}(\varepsilon, x)$ (dipendente da ε e da x) tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}(\varepsilon, x).$$

In modo simile, supponiamo che per ogni $x \in D$ la serie numerica $\sum_n f_n(x)$ converga, e indichiamo $s(x)$ la somma di tale serie, cioè

$$s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \forall x \in D.$$

Diciamo allora che la serie $\sum_n f_n$ converge puntualmente, e che la funzione s è la *somma* della serie di funzioni. In altre parole, $\sum_n f_n \rightarrow s$ puntualmente se la *successione delle somme parziali* $\{s_n\}$, definite come

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x),$$

converge puntualmente alla funzione limite s , cioè: per ogni $x \in D$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $\bar{n}(\varepsilon, x)$ (dipendente da ε e da x) tale che

$$|s_n(x) - s(x)| = \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - s(x) \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}(\varepsilon, x). \quad \square$$

Quando si ha a che fare con le serie (sia numeriche che serie di funzioni), si tenga sempre a mente che il simbolo $\sum_{k=0}^{\infty}$, somma di infiniti termini, sottintende sempre il limite delle somme parziali $\lim_{(n \rightarrow \infty)} \sum_{k=0}^n$.

Anche se incluso nella definizione stessa di convergenza puntuale, forse non è inutile ribadire che per calcolare il limite puntuale di una successione di funzioni $\{f_n\}$ si procede così: si considera $x \in D$ fissato, e si studia la convergenza della successione numerica $\{f_n(x)\}$, in cui x è un numero fissato e “sta fermo”, n invece “si muove”, è l’indice della successione, $n = 1, 2, \dots$, e si studia il limite di questa successione numerica per $n \rightarrow \infty$. Vediamo un esempio concreto.

Esempio 1.2. Sia $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, la *funzione caratteristica* dell’intervallo $[n, n + 1)$, cioè

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [n, n + 1), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Studiamone la convergenza puntuale. Consideriamo $x < 0$ fissato. Essendo negativo, x non sta in nessuno degli intervalli $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, ..., e quindi $f_n(x) = 0$ per ogni indice $n \geq 0$. Dunque $\{f_n(x)\}$ è la successione $\{0, 0, 0, \dots\}$, il cui limite è 0. Questo vale per ogni $x < 0$, e di conseguenza

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x < 0.$$

Ora fissiamo invece $x \geq 0$. Esiste un unico intero N (dipendente da x) tale che il punto x appartenga all’intervallo $[N, N + 1)$. Per esempio, se $x = 5/2$, allora $N = 2$ perché $5/2 \in [2, 3)$; se $x = 0$, $N = 0$ perché $0 \in [0, 1)$; se $x = \pi$, $N = 3$, perché $\pi \in [3, 4)$. Insomma N è il massimo tra gli interi $\leq x$,

$$N = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

e viene detto *la parte intera* di x . Dunque tra gli intervalli $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, ..., l’unico che contiene il punto x è $[N, N + 1)$, mentre $x \notin [n, n + 1)$ se $n \neq N$. Quindi $f_n(x) = 0$ per ogni $n \neq N$, mentre $f_N(x) = 1$. La

successione $\{f_n(x)\}$ risulta perciò fatta tutta di zeri eccetto nell' N -sima posizione, dove compare un 1. Per esempio, se $x = 9/2$, allora $N = 4$, e

$$\{f_n(x)\} = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\} = \{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots\}.$$

Questa successione ha limite 0: per ogni $\varepsilon > 0$, come indice $\bar{n}(\varepsilon, x)$ prendiamo $\bar{n}(\varepsilon, x) = N + 1$, così $|f_n(x) - 0| = 0 < \varepsilon$ per ogni $n \geq N + 1$. Questo ragionamento vale per ogni punto $x \geq 0$, e quindi, in conclusione,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

* * *

Ora che abbiamo definito il concetto di convergenza puntuale per successioni e serie di funzioni, ci poniamo queste domande: se tutte le funzioni f_n di una successione hanno una certa proprietà (sono continue, o derivabili, o integrabili), e $f_n \rightarrow f$ puntualmente, allora anche la funzione limite ha quella proprietà? Le operazioni di limite, di sommatoria, di integrale, di derivata, in generale possono essere scambiate?

In generale, la risposta è negativa: può capitare che una successione di funzioni continue f_n converga puntualmente a una funzione f che non è continua, e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$

in qualche punto x_0 del dominio, come mostrato dall'esercizio 1. Può capitare che una serie puntualmente convergente di funzioni continue abbia somma non continua, e che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$

in qualche x_0 del dominio, come mostrato dall'esercizio 2. Può capitare che una successione di funzioni derivabili $\{f_n\}$ converga puntualmente a una funzione limite f che non è derivabile, come mostrato dall'esercizio 3, o che

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

in qualche punto x del dominio, come mostrato dall'esercizio 18. Può capitare che una successione $\{f_n\}$ di funzioni Riemann-integrabili su un intervallo $[a, b]$ converga puntualmente ad una funzione limite f che non è Riemann-integrabile, o che

$$\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right),$$

come mostrato dall'esercizio 4. In conclusione: con la sola ipotesi di convergenza puntuale, i segni di limite, di derivata, di serie, di integrale non si possono scambiare. Per poterlo fare serve un tipo di convergenza più forte, la convergenza uniforme.

2 Convergenza uniforme

Definizione 2.1. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che la successione di funzioni $\{f_n\}$, $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, converge uniformemente in D alla funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $\bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (dipendente solo da ε) tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D, \forall n \geq \bar{n}(\varepsilon).$$

In modo simile, diciamo che la serie di funzioni $\sum f_n$ converge uniformemente in D alla somma s se la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali converge uniformemente in D alla funzione s , cioè: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (dipendente solo da ε) tale che

$$|s_n(x) - s(x)| = \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - s(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in D, \forall n \geq \bar{n}(\varepsilon). \quad \square$$

Confrontiamo le due definizioni di convergenza:

Puntuale: $\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq \bar{n}(\varepsilon, x)$.

Uniforme: $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq \bar{n}(\varepsilon), \forall x \in D$.

La differenza tra i due tipi di convergenza è questa: nella convergenza uniforme esiste un $\bar{n}(\varepsilon)$ che va bene per tutti i punti x del dominio D , mentre in quella puntuale $\bar{n}(\varepsilon, x)$ va scelto a seconda del punto x . La convergenza puntuale chiede che soltanto “punto per punto” $f_n(x) \rightarrow f(x)$, mentre quella uniforme chiede di più: chiede che f_n si avvicini a f “dappertutto contemporaneamente”. Graficamente la convergenza uniforme si può vedere in questo modo: fissato $\varepsilon > 0$, da un certo indice $\bar{n}(\varepsilon)$ in poi, i grafici di

tutte le f_n sono contenute nel “tubo” di spessore 2ε che avvolge il grafico di f , cioè nella regione di piano compresa tra il grafico della funzione $f - \varepsilon$ e quello della funzione $f + \varepsilon$.

La convergenza uniforme è più forte della convergenza puntuale: se $f_n \rightarrow f$ uniformemente, allora $f_n \rightarrow f$ anche puntualmente. Infatti l'intero $\bar{n}(\varepsilon)$ della definizione di convergenza uniforme soddisfa le richieste della definizione di convergenza puntuale in ogni punto x .

Per avere un'esempio concreto della differenza tra convergenza uniforme e puntuale, torniamo all'esempio 1: $f_n \rightarrow f = 0$ puntualmente ma non uniformemente. Infatti, se la convergenza fosse uniforme, dato $\varepsilon > 0$, per esempio $\varepsilon = 1/2$, esisterebbe un certo indice \bar{n} tale che

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq \bar{n}.$$

Ma questa disuguaglianza non può mai valere *per tutti gli* $x \in \mathbb{R}$: fissato un qualsiasi indice n , nei punti x che stanno nell'intervallo $[n, n+1)$ la funzione f_n vale 1, e in questi punti la disuguaglianza $|f_n(x)| < 1/2$ è falsa. Quindi la successione non converge uniformemente a f su \mathbb{R} . Il fatto che la convergenza sia uniforme dipende dal dominio: se ci limitiamo a considerare la successione sulle semirette $(-\infty, b]$, con $b \in \mathbb{R}$, allora $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $(-\infty, b]$ (vedi esercizio 5).

Definizione 2.2. Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, indichiamo

$$\|f\| := \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

$\|f\|$ viene detta *norma infinito*, o *norma del sup*, o *sup-norma* di f . Spesso viene indicata $\|f\|_\infty$, o, quando si vuole specificare il dominio D su cui si sta facendo il sup, $\|f\|_{\infty, D}$ o semplicemente $\|f\|_D$. \square

In generale, $\sup_{x \in D} |f(x)|$ può essere ∞ (è il caso, per esempio, della funzione $f(x) = x$ sul dominio $D = \mathbb{R}$). Una funzione si dice *limitata* su D se $\|f\|_D < \infty$. In tal caso

$$|f(x)| \leq \|f\|_D \quad \forall x \in D$$

(rivedere la definizione di “sup” dal corso di Analisi Uno).

Per definizione di sup, si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D$$

se e solo se

$$\|f_n - f\|_D = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Quindi la definizione di convergenza uniforme si può riscrivere così: $f_n \rightarrow f$ uniformemente in D se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $\bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_n - f\|_D < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}(\varepsilon)$, cioè se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_D = 0. \quad (2)$$

Questa definizione equivalente di convergenza uniforme è spesso più rapida da usare negli esercizi. Per esempio, è immediato mostrare che la successione dell'esempio 1 non converge uniformemente a $f = 0$ su \mathbb{R} usando le sup-norme:

$$\|f_n - f\|_{\mathbb{R}} = \|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi $\lim_{(n \rightarrow \infty)} \|f_n\| = 1$, e la (2) non è soddisfatta.

La norma del sup gode delle seguenti proprietà: se $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni limitate, e $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) $\|f\| = 0$ se e solo se $f = 0$;

(ii) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$;

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (*disuguaglianza triangolare*).

Dimostrazione. (i) Sia $\|f\| = 0$. Allora $|f(x)| \leq \|f\| = 0$ per ogni $x \in D$, quindi $f(x) = 0$ per ogni x , cioè $f = 0$. Viceversa, sia $f = 0$. Allora $\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)| = \sup_{x \in D} 0 = 0$.

(ii) $\sup_{x \in D} |\lambda| |f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in D} |f(x)|$ per le proprietà del "sup".

(iii) Sia $x \in D$. Per la disuguaglianza triangolare in \mathbb{R} , $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Poi $|f(x)| \leq \|f\|$ e $|g(x)| \leq \|g\|$. Dunque

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Allora $|f(x) + g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$ per ogni $x \in D$, da cui $\sup_{x \in D} |f(x) + g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$. \square

3 Criterio di Cauchy

Ricordiamo (corso di Analisi Uno) che per le successioni numeriche vale il criterio di convergenza di Cauchy: una successione di numeri reali $\{a_n\}$ converge se e solo se è di Cauchy, cioè: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $\bar{n}(\varepsilon)$ (dipendente da ε) tale che $|a_n - a_m| < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \bar{n}(\varepsilon)$.

Per le successioni di funzioni vale lo stesso criterio con la convergenza uniforme:

Teorema 3.1 (Criterio di convergenza uniforme di Cauchy). *Una successione di funzioni $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente in D se e solo se è una successione uniformemente di Cauchy, cioè: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $\bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (dipendente da ε) tale che*

$$\|f_n - f_m\|_D < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}(\varepsilon).$$

Dimostrazione. \Rightarrow) Supponiamo che f_n converga uniformemente, e dimostriamo che allora $\{f_n\}$ è di Cauchy. Sia f il limite uniforme di f_n (che esiste per ipotesi). Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dalla definizione di convergenza uniforme applicata per $\varepsilon/2$, esiste un intero $\bar{n}(\varepsilon)$, dipendente da ε , tale che

$$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq \bar{n}(\varepsilon).$$

Allora, per ogni $n, m \geq \bar{n}(\varepsilon)$, dalla disuguaglianza triangolare si ha

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &= \|(f_n - f) + (f - f_m)\| \\ &\leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo provato che $\{f_n\}$ è uniformemente di Cauchy.

\Leftarrow) Supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione uniformemente di Cauchy, e proviamo che allora f_n converge uniformemente a un certo limite f (che dobbiamo trovare). Innanzitutto, osserviamo che per ogni $x \in D$ la successione numerica $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy: per ogni $\varepsilon > 0$, per ipotesi esiste $\bar{n}(\varepsilon)$ tale che $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \bar{n}(\varepsilon)$, e quindi

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}(\varepsilon).$$

Quindi, per il criterio di convergenza di Cauchy per successioni di numeri reali, $\{f_n(x)\}$ è convergente; indichiamo con $f(x)$ il suo limite. Abbiamo dunque mostrato che $f_n \rightarrow f$ puntualmente. Resta da provare che la convergenza è uniforme.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché la successione è uniformemente di Cauchy, esiste un intero $\bar{n}(\varepsilon)$, dipendente solo da ε , tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}(\varepsilon), \quad \forall x \in D,$$

cioè

$$f_n(x) - \varepsilon < f_m(x) < f_n(x) + \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}(\varepsilon), \quad \forall x \in D.$$

Ora pensiamo $x \in D$, $n \geq \bar{n}(\varepsilon)$ fissati. La successione numerica $\{f_m(x) : m = 0, 1, \dots\}$ converge a $f(x)$ per $m \rightarrow \infty$, e ogni termine della successione $\{f_m(x)\}$ sta nell'intervallo $[f_n(x) - \varepsilon, f_n(x) + \varepsilon]$ (intervallo che non dipende da m , e che quindi resta fermo se $m \rightarrow \infty$). Quindi, passando al limite per $m \rightarrow \infty$,

$$f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon,$$

cioè $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Questo vale per ogni $x \in D$ e per ogni $n \geq \bar{n}(\varepsilon)$, e così abbiamo dimostrato la convergenza uniforme. \square

4 Il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua

Teorema 4.1. *Sia $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue in D . Supponiamo che $\{f_n\}$ converga uniformemente ad una funzione limite f . Allora f è continua in D .*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $x_0 \in D$ e $\varepsilon > 0$. Poiché $f_n \rightarrow f$ uniformemente, esiste $\bar{n}(\varepsilon)$ tale che

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq \bar{n}(\varepsilon).$$

Scriviamo, per brevità, $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$. Dalla disuguaglianza triangolare, per ogni $x \in D$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{\bar{n}}(x)| + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + |f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)|,$$

e sappiamo che il primo e il terzo termine della somma sono $< \varepsilon/3$. La funzione $f_{\bar{n}}$ è continua per ipotesi, quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in D \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta.$$

Perciò sommando i tre termini si ha

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta.$$

Abbiamo mostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un $\delta > 0$ per cui $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per tutti gli $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; in altre parole, abbiamo provato che f è continua in x_0 , per qualsiasi punto x_0 di D . \square

Corollario 4.2 (Scambio dei segni di limite). *Se una successione di funzioni continue $\{f_n\}$ converge uniformemente, allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right),$$

cioè i segni di limite possono essere scambiati.

Dimostrazione. Sia $f(x) := \lim_{(n \rightarrow \infty)} f_n(x)$ la funzione limite. Per ogni n , $\lim_{(x \rightarrow x_0)} f_n(x) = f_n(x_0)$ perché f_n è continua. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

D'altra parte,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

perché, come provato nel teorema precedente, f è continua. \square

Corollario 4.3 (Scambio dei segni di limite e di sommatoria). *Se la serie $\sum f_n$ converge uniformemente e le f_n sono tutte funzioni continue, allora*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right),$$

cioè i segni di limite e di sommatoria possono essere scambiati.

Dimostrazione. Se $\sum f_n$ converge uniformemente, la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ converge uniformemente alla funzione somma, che indichiamo s . Per ogni n , s_n è una funzione continua, essendo la somma delle funzioni continue f_0, f_1, \dots, f_n . Perciò, dal corollario precedente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} s_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \right).$$

Il termine a sinistra è

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} s_n(x) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^n f_k(x) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) \right), \end{aligned}$$

mentre quello a destra è

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \right) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right),\end{aligned}$$

e la tesi è provata. Abbiamo usato il fatto che

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^n f_k(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f_0(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) \right),\end{aligned}$$

vero perché si tratta di una somma di un numero finito di termini. \square

5 Convergenza totale e criterio di Weierstrass per le serie

Definizione 5.1. La serie di funzioni $\sum f_n$, con $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, si dice *totalmente convergente* in D se la serie numerica delle sup-norme converge, cioè se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty. \quad \square$$

Teorema 5.2 (Criterio di Weierstrass per le serie di funzioni). *Sia $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni. Supponiamo che*

$$\|f_n\| \leq M_n \quad \forall n \geq 0,$$

per certi $M_n \geq 0$, e supponiamo che la serie numerica $\sum M_n$ sia convergente, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty.$$

Allora la serie di funzioni $\sum f_n$ converge uniformemente in D .

Dimostrazione. Per dimostrare la convergenza uniforme della serie, dobbiamo dimostrare che la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali converge uniformemente in D . Grazie al criterio di Cauchy, a tale scopo ci basta provare che $\{s_n\}$ è una successione uniformemente di Cauchy; dimostriamolo. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per ipotesi, la serie numerica $\sum M_n$ converge, cioè la successione delle sue somme parziali converge, e quindi è di Cauchy. Perciò esiste un intero $\bar{n}(\varepsilon)$ tale che

$$\left| \sum_{k=0}^n M_k - \sum_{k=0}^m M_k \right| = \sum_{k=n+1}^m M_k < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}(\varepsilon), m > n.$$

Allora, usando la disuguaglianza triangolare (il modulo di una somma è \leq della somma dei moduli), per ogni $x \in D$

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k < \varepsilon. \quad \square$$

Il criterio di Weierstrass ci dice quindi che *la convergenza totale implica la convergenza uniforme* (se la serie $\sum f_n$ converge totalmente, si applica il teorema precedente con $M_n = \|f_n\|$).

Come mostra l'esercizio 6, il viceversa del teorema 5.2 non è vero: una serie di funzioni $\sum f_n$ può convergere uniformemente senza che necessariamente la serie numerica delle sup-norme $\sum \|f_n\|_\infty$ sia convergente.

6 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Teorema 6.1 (Passaggio al limite sotto il segno di integrale). *Sia $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni Riemann-integrabili sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Supponiamo che f_n converga uniformemente in $[a, b]$ alla funzione f . Allora anche f è Riemann-integrabile in $[a, b]$, e*

$$\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Per la definizione di convergenza uniforme applicata per $\varepsilon/(b-a)$, esiste un intero \bar{n} tale che $\|f_n - f\| \leq \varepsilon/(b-a)$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dunque

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in [a, b], \forall n \geq \bar{n}. \quad (3)$$

Consideriamo una partizione \mathcal{P} dell'intervallo $[a, b]$, cioè un insieme di un certo numero di punti $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b.$$

La partizione suddivide $[a, b]$ negli N intervalli $I_1 := [x_0, x_1]$, $I_2 := [x_1, x_2]$, ..., $I_N := [x_{N-1}, x_N]$. Su ciascun intervallo I_k , $k = 1, \dots, N$, consideriamo il sup delle funzioni f_n e f : dalla (3) si ottiene

$$\left(\sup_{x \in I_k} f_n(x) \right) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leq \sup_{x \in I_k} f(x) \leq \left(\sup_{x \in I_k} f_n(x) \right) + \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall n \geq \bar{n}. \quad (4)$$

Passando all'inf su I_k invece del sup, la (3) dà

$$\left(\inf_{x \in I_k} f_n(x) \right) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leq \inf_{x \in I_k} f(x) \leq \left(\inf_{x \in I_k} f_n(x) \right) + \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall n \geq \bar{n}. \quad (5)$$

Moltiplichiamo ciascun termine della (4) per la lunghezza dell'intervallo I_k , cioè per $\ell_k := x_k - x_{k-1}$:

$$\begin{aligned} \left(\sup_{x \in I_k} f_n(x) \right) \ell_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \ell_k &\leq \left(\sup_{x \in I_k} f(x) \right) \ell_k \\ &\leq \left(\sup_{x \in I_k} f_n(x) \right) \ell_k + \frac{\varepsilon}{b-a} \ell_k \quad \forall n \geq \bar{n}. \end{aligned}$$

Sommando tutti i termini si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(\sup_{x \in I_k} f_n(x) \right) \ell_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^N \ell_k &\leq \sum_{k=1}^N \left(\sup_{x \in I_k} f(x) \right) \ell_k \\ &\leq \sum_{k=1}^N \left(\sup_{x \in I_k} f_n(x) \right) \ell_k + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^N \ell_k, \end{aligned}$$

cioè

$$S(f_n, \mathcal{P}) - \varepsilon \leq S(f, \mathcal{P}) \leq S(f_n, \mathcal{P}) + \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}, \quad (6)$$

perché

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \ell_k &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_N - x_{N-1}) \\ &= x_N - x_0 = b - a, \end{aligned}$$

e per la definizione di “somma integrale superiore” relativa alla partizione \mathcal{P} . Facendo gli stessi passaggi sulla (5) invece che sulla (4) si ottiene la stessa disuguaglianza per le “somme integrali inferiori”,

$$s(f_n, \mathcal{P}) - \varepsilon \leq s(f, \mathcal{P}) \leq s(f_n, \mathcal{P}) + \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}. \quad (7)$$

Tutto questo vale per ogni partizione di $[a, b]$. Ora, per ipotesi f_n è Riemann-integrabile per ogni n , cioè

$$\inf_{\mathcal{P}} S(f_n, \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}} s(f_n, \mathcal{P}) =: \int_a^b f_n(x) dx$$

(l’inf delle somme integrali superiori fatto su tutte le partizioni di $[a, b]$ e il sup delle somme integrali inferiori fatto su tutte le partizioni di $[a, b]$ coincidono, e il loro valore si chiama l’integrale di f_n su $[a, b]$). Dunque passando all’inf su tutte le partizioni nella (6) si ottiene

$$\int_a^b f_n(x) dx - \varepsilon \leq \inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f_n(x) dx + \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}, \quad (8)$$

mentre passando al sup su tutte le partizioni nella (7) si ha

$$\int_a^b f_n(x) dx - \varepsilon \leq \sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f_n(x) dx + \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}. \quad (9)$$

I due numeri $\inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P})$ e $\sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P})$ si trovano entrambi nell’intervallo centrato nel punto $(\int_a^b f_n(x) dx)$ e raggio ε , quindi la loro distanza è al più 2ε ,

$$\left| \left(\inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P}) \right) - \left(\sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P}) \right) \right| \leq 2\varepsilon.$$

Questa disuguaglianza vale per ogni $\varepsilon > 0$, e quindi

$$\inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P}).$$

Questo significa che f è Riemann-integrabile su $[a, b]$, e, per definizione di integrale,

$$\int_a^b f(x) dx := \inf_{\mathcal{P}} S(f, \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}} s(f, \mathcal{P}).$$

Resta da provare che $\int f_n \rightarrow \int f$ quando $n \rightarrow \infty$. Alla luce dell’ultima uguaglianza, torniamo alla (8) e riscriviamola:

$$\int_a^b f_n(x) dx - \varepsilon \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f_n(x) dx + \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

In altre parole, fissato $\varepsilon > 0$, abbiamo trovato un intero \bar{n} tale che

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n},$$

che è proprio il limite desiderato. \square

Osservazione 6.2. Con l'ipotesi aggiuntiva che f_n sia continua per ogni n , il teorema 6.1 può essere dimostrato in modo molto più semplice: $f_n \rightarrow f$ uniformemente, quindi f è continua per il teorema 4.1, e dunque è integrabile su $[a, b]$; poi

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \int_a^b \|f_n - f\| dx \\ &= (b - a) \|f_n - f\| \end{aligned}$$

e l'ultimo termine $\rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. \square

Il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale non può essere esteso alle funzioni integrabili in senso generalizzato: se una successione di funzioni $\{f_n\}$ integrabili in senso generalizzato converge uniformemente a una funzione limite f , può accadere che f non sia integrabile in senso generalizzato, come mostrato dall'esercizio 7, oppure che lo sia, ma $\int f(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx$, come mostra l'esercizio 8.

Da quanto finora provato segue il seguente risultato sullo scambio dei segni di integrale e di sommatoria.

Corollario 6.3 (Integrazione di una serie termine a termine). *Sia $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile per ogni n , e supponiamo che la serie $\sum f_n$ converga uniformemente in $[a, b]$. Allora la somma della serie è una funzione integrabile, e*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right),$$

cioè la serie può essere integrata termine a termine.

Dimostrazione. Per ipotesi, la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$ converge uniformemente alla funzione somma, che indichiamo s . Per ogni n , s_n è integrabile in quanto somma di un numero finito di funzioni integrabili. Per il teorema 6.1, s è integrabile in $[a, b]$ e

$$\int_a^b s(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b s_n(x) dx \right). \quad (10)$$

Per la proprietà di additività dell'integrale,

$$\int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n f_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right)$$

(si noti che qui la somma ha un numero finito di termini), per cui (10) si riscrive:

$$\int_a^b s(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right).$$

Questo significa che la serie numerica $\sum_n \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ è una serie per cui la successione delle somme parziali converge, cioè è una serie convergente, che converge alla somma $\int_a^b s(x) dx$. In altre parole,

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right). \quad \square$$

7 Derivazione

Come mostra l'esercizio 3, la convergenza uniforme non basta a garantire la derivabilità della funzione limite, né la convergenza delle derivate: occorrono ipotesi più forti.

Teorema 7.1 (Passaggio al limite sotto il segno di derivata). *Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , cioè derivabile con f'_n continua, per ogni n . Supponiamo che la successione delle derivate $\{f'_n\}$ converga uniformemente in $[a, b]$, e che esista un punto $x_0 \in [a, b]$ per cui la successione numerica $\{f_n(x_0)\}$ converge. Allora f_n converge uniformemente in $[a, b]$ ad una funzione f di classe C^1 , e*

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

(“la derivata del limite è il limite delle derivate”).

Dimostrazione. Indichiamo con h la funzione limite della successione $\{f'_n\}$, e c il limite della successione numerica $\{f_n(x_0)\}$. Dal teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Per il teorema 6.1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'_n(t) dt = \int_{x_0}^x h(t) dt,$$

mentre $f_n(x_0) \rightarrow c$, quindi per ogni $x \in [a, b]$ esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \right) = c + \int_{x_0}^x h(t) dt.$$

Dunque f_n converge puntualmente alla funzione limite

$$f(x) := c + \int_{x_0}^x h(t) dt.$$

Mostriamo che la convergenza $f_n \rightarrow f$ è uniforme: per ogni $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt - c - \int_{x_0}^x h(t) dt \right| \\ &= \left| f_n(x_0) - c + \int_{x_0}^x (f'_n(t) - h(t)) dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - c| + \left| \int_{x_0}^x |f'_n(t) - h(t)| dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - c| + \left| \int_{x_0}^x \|f'_n - h\| dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - c| + (b - a) \|f'_n - h\|, \end{aligned}$$

per cui, prendendo il primo e l'ultimo termine della disuguaglianza e passando al sup sugli $x \in [a, b]$,

$$\|f_n - f\| \leq |f_n(x_0) - c| + (b - a) \|f'_n - h\|.$$

Il termine a destra tende a zero per $n \rightarrow \infty$, quindi $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, cioè $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Infine, h è continua per il teorema 4.1, quindi f è derivabile, la sua derivata è h e perciò f è di classe C^1 , e $f' = h = \lim_{(n \rightarrow \infty)} f'_n$. \square

Il teorema 7.1 è falso se si toglie l'ipotesi che esista un punto x_0 per cui $f_n(x_0)$ converge (esercizio 15).

Come conseguenza del teorema, vale il seguente risultato per lo scambio dei segni di derivazione e di sommatoria.

Corollario 7.2 (Derivazione di una serie termine a termine). *Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 per ogni n . Supponiamo che esista un punto $x_0 \in [a, b]$ per cui la serie numerica $\sum f_n(x_0)$ converge, e che la serie delle derivate $\sum f'_n$ converga uniformemente su $[a, b]$. Allora la serie $\sum f_n$ converge uniformemente in $[a, b]$, la somma della serie è una funzione s di classe C^1 , e*

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in [a, b],$$

(“la derivata della serie è la serie delle derivate”).

Dimostrazione. Considerare la successione delle somme parziali e applicare il teorema 7.1. \square

8 Serie di potenze

Definizione 8.1. Una *serie di potenze* centrata nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in cui $f_0(x) = a_0$, $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n \forall n \geq 1$, e gli a_n sono numeri reali, detti i *coefficienti* della serie. \square

Una serie di potenze centrata in un punto x_0 si può scrivere come serie di potenze centrata in zero ponendo $y = x - x_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n.$$

Per questo motivo limitiamo il nostro studio alle serie di potenze centrate in zero. Scritta esplicitamente, una serie di potenze centrata in zero è la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Definizione 8.2. Diciamo *insieme di convergenza* della serie di potenze $\sum a_n x^n$ l'insieme \mathcal{A} dei punti in cui la serie converge,

$$\mathcal{A} := \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ è serie convergente} \right\}.$$

Diciamo *raggio di convergenza* della serie

$$R := \sup_{x \in \mathcal{A}} |x|. \quad \square$$

Notiamo che in $x = 0$ ogni serie di potenze converge: tutti i termini di indice $n \geq 1$ sono nulli, ogni somma parziale $s_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ si riduce al solo termine a_0 , perciò la serie converge ad a_0 . Dunque \mathcal{A} contiene sempre almeno il punto $x = 0$, e quindi \mathcal{A} non è un insieme vuoto. Questo rende sensato considerare il sup nella definizione del raggio di convergenza.

Ora mostriamo che \mathcal{A} è un intervallo centrato in zero di raggio R (eventualmente con $R = 0$ o $R = \infty$).

Teorema 8.3. *Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, si verifica una delle tre alternative seguenti:*

(i) $R = 0$ e $\mathcal{A} = \{0\}$;

(ii) $0 < R < \infty$ e $(-R, R) \subseteq \mathcal{A} \subseteq [-R, R]$, cioè \mathcal{A} è uno di questi quattro intervalli: $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R]$;

(iii) $R = \infty$ e $\mathcal{A} = \mathbb{R}$.

Dimostrazione. (i) Supponiamo che $R = 0$. Abbiamo già osservato che $0 \in \mathcal{A}$; se \mathcal{A} contenesse anche qualche altro punto $x_0 \neq 0$, avremmo $R = \sup_{x \in \mathcal{A}} |x| \geq |x_0| > 0$, mentre invece $R = 0$. Quindi $\mathcal{A} = \{0\}$.

(ii) Supponiamo che $0 < R < \infty$. Mostriamo che $(-R, R) \subseteq \mathcal{A}$. Sia $x \in (-R, R)$. Allora $|x| < R$, e, per definizione di sup, esiste un punto $x_0 \in \mathcal{A}$ tale che $|x| < |x_0|$ (se questo x_0 non esistesse, avremmo che ogni punto di \mathcal{A} ha modulo $\leq |x|$, e allora sarebbe $R = |x|$, mentre invece $|x| < R$). Siccome $x_0 \in \mathcal{A}$, la serie $\sum a_n x_0^n$ è una serie numerica convergente, dunque la successione $\{a_n x_0^n\}$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$. Quindi è limitata, cioè esiste un numero $M > 0$ tale che

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad \forall n \geq 0.$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x_0|^n \frac{|x|^n}{|x_0|^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{|x|}{|x_0|} \right)^n$$

e l'ultima serie converge perché è una serie geometrica di ragione $|x|/|x_0|$, che è < 1 . Questo mostra che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è una serie numerica assolutamente convergente, e quindi convergente. Di conseguenza x sta nell'insieme dei

punti in cui la serie converge, cioè $x \in \mathcal{A}$. Abbiamo provato che ogni $x \in (-R, R)$ appartiene ad \mathcal{A} , cioè $(-R, R) \subseteq \mathcal{A}$.

L'altra inclusione è immediata: se $x_0 \in \mathcal{A}$, allora $|x_0| \leq \sup_{x \in \mathcal{A}} |x| = R$, e quindi $|x_0| \leq R$, cioè $x_0 \in [-R, R]$. Questo prova che $\mathcal{A} \subseteq [-R, R]$.

Ricapitolando, tutti i punti x di modulo $|x| < R$ stanno in \mathcal{A} , tutti quelli di modulo $|x| > R$ non appartengono ad \mathcal{A} , e gli unici punti per i quali non sappiamo dire se stanno dentro o fuori da \mathcal{A} sono quelli di modulo $= R$, cioè i due punti $-R$ e R . Le quattro possibilità per $\pm R$ di appartenere o meno ad \mathcal{A} determinano i quattro intervalli della (ii).

(iii) Supponiamo che $R = \infty$. Mostriamo che $\mathcal{A} = \mathbb{R}$. Sia $x \in \mathbb{R}$. Per definizione di sup, esiste $x_0 \in \mathcal{A}$ tale che $|x| < |x_0|$ (se così non fosse, ogni punto di \mathcal{A} avrebbe modulo $\leq |x|$, quindi R sarebbe $< \infty$, falso). Proseguendo come al punto (ii), si prova che la serie converge in x . Quindi la serie converge in ogni $x \in \mathbb{R}$. \square

Il criterio del rapporto e quello della radice per serie numeriche forniscono un criterio utile per determinare il raggio di convergenza di una serie di potenze:

Teorema 8.4. *Supponiamo che la successione numerica $|a_{n+1}|/|a_n|$, oppure la successione numerica $\sqrt[n]{|a_n|}$, abbia limite ℓ , con $0 \leq \ell \leq \infty$. Allora la serie di potenze $\sum a_n x^n$ ha raggio di convergenza*

$$R = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = \infty, \\ 1/\ell & \text{se } 0 < \ell < \infty, \\ \infty & \text{se } \ell = 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $|a_{n+1}|/|a_n| \rightarrow \ell$. Consideriamo il limite dei rapporti per la serie $\sum a_n x^n$ con $x \neq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = \ell |x|.$$

Applichiamo il criterio del rapporto: se $\ell |x| < 1$ la serie converge, mentre se $\ell |x| > 1$ la serie non converge. Vediamo i tre casi per ℓ .

Se $\ell = \infty$, allora $\ell |x| = \infty$ per ogni $x \neq 0$, la serie non converge in nessun punto $x \neq 0$, e quindi $\mathcal{A} = \{0\}$, $R = 0$.

Se $0 < \ell < \infty$, la serie converge nei punti x di modulo $|x| < 1/\ell$ e non converge nei punti di modulo $|x| > 1/\ell$. Quindi $(-1/\ell, 1/\ell) \subseteq \mathcal{A} \subseteq [-1/\ell, 1/\ell]$, \mathcal{A} è un intervallo di estremi $\pm 1/\ell$, e allora, per quanto provato nel teorema precedente, $1/\ell = R$.

Se $\ell = 0$, allora $\ell|x| = 0$ per ogni $x \neq 0$, quindi la serie converge in ogni punto $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, e $R = \infty$.

Per il criterio della radice si procede esattamente allo stesso modo. \square

Teorema 8.5. *Sia $\sum a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza R , con $0 < R \leq \infty$. Allora la serie converge totalmente sull'intervallo $[-\rho, \rho]$, per ogni $\rho < R$.*

Dimostrazione. Sia $\rho < R$. Per ogni n ,

$$\|a_n x^n\|_{[-\rho, \rho]} = \sup_{x \in [-\rho, \rho]} |a_n x^n| = |a_n| \rho^n;$$

dobbiamo provare che la serie delle sup-norme $\sum |a_n| \rho^n$ converge. Fissiamo r tale che $\rho < r < R$. Siccome $r \in (-R, R)$, la serie converge in $x = r$, quindi la successione $\{a_n r^n\}$ è infinitesima, e dunque limitata, $|a_n| r^n \leq M \forall n$. Di conseguenza, essendo $\rho/r < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \frac{\rho^n}{r^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} M (\rho/r)^n < \infty.$$

Questo prova che la serie converge totalmente su $[-\rho, \rho]$. \square

La convergenza totale implica la convergenza uniforme, quindi i teoremi di continuità della funzione somma e di integrazione termine a termine visti in precedenza si applicano alle serie di potenze sugli intervalli $[-\rho, \rho]$, per ogni $\rho < R$. Per la derivazione termine a termine dobbiamo proseguire la nostra analisi.

Definizione 8.6. Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, si dice *serie derivata* la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. \square

La serie derivata è la serie che otteniamo se deriviamo una serie termine a termine (senza studiarne, per il momento, la convergenza): se la serie di partenza è $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$, la sua serie derivata è $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$. Notiamo che la serie derivata parte dall'indice $n = 1$ (il termine di indice $n = 0$ è nullo, perché è la derivata della costante a_0 della serie di partenza).

Ricordiamo un limite, già visto in Analisi 1, che ci sarà utile nella dimostrazione del teorema che segue.

Lemma 8.7. *Sia $0 < p < 1$. Allora $np^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.*

Dimostrazione.

$$np^n = ne^{\log(p^n)} = ne^{n \log p} = \frac{n}{e^{-n \log p}} = \frac{n}{e^{n \log(1/p)}}.$$

Applicando de l'Hospital,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{n \log(1/p)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n \log(1/p)} \log(1/p)} = 0$$

perché $\log(1/p) > 0$. □

Teorema 8.8. *Una serie di potenze e la sua serie derivata hanno lo stesso raggio di convergenza.*

Dimostrazione. Consideriamo una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e sia R il suo raggio di convergenza, \mathcal{A} il suo insieme di convergenza. Sia R' il raggio di convergenza della serie derivata, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, e \mathcal{A}' il suo insieme di convergenza. Dobbiamo provare che $R = R'$.

1) Caso $0 < R < \infty$. Proviamo che $(-R, R) \subseteq \mathcal{A}'$. $0 \in \mathcal{A}'$ automaticamente. Sia $x \in (-R, R)$, $x \neq 0$. Fissiamo ρ tale che $|x| < \rho < R$. Dal lemma precedente, la successione $n(x/\rho)^n$ è infinitesima, e dunque limitata,

$$n \frac{|x|^n}{\rho^n} \leq M \quad \forall n \geq 1.$$

Dal teorema 8.5, sappiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n < \infty$. Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |n a_n x^{n-1}| &= \frac{1}{|x|} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{|x|^n}{\rho^n} |a_n| \rho^n \\ &\leq \frac{M}{|x|} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \rho^n < \infty. \end{aligned}$$

Questo prova che la serie derivata converge in x , cioè $x \in \mathcal{A}'$. Abbiamo dimostrato che $(-R, R) \subseteq \mathcal{A}'$. Quindi

$$R' = \sup_{x \in \mathcal{A}'} |x| \geq \sup_{x \in (-R, R)} |x| = R,$$

$R' \geq R$. Ora proviamo che R' non può essere $> R$. Supponiamo infatti che sia $R' > R$. Fissiamo ρ tale che $R < \rho < R'$. Dal teorema 8.5 applicato alla serie derivata,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|n a_n x^{n-1}\|_{[-\rho, \rho]} = \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| \rho^{n-1} < \infty.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n &= |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \rho^n \\
&= |a_0| + \rho \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \rho^{n-1} \\
&\leq |a_0| + \rho \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| \rho^{n-1} < \infty.
\end{aligned}$$

Perciò $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ converge, e $\rho \in \mathcal{A}$. Ma $\mathcal{A} \subseteq [-R, R]$, quindi $\rho \leq R$, assurdo. Di conseguenza, R' non può essere $> R$, e allora $R' = R$.

2) Caso $R = 0$. Se $R' > R$, ripercorrendo la seconda parte del punto 1) arriviamo alla stessa contraddizione. Quindi $R' = R = 0$.

3) Caso $R = \infty$. La prima parte del punto 1) continua a valere, e prova che la serie derivata converge in ogni punto di \mathbb{R} , quindi $\mathcal{A}' = \mathbb{R}$, e $R' = \infty = R$. \square

Corollario 8.9. *Sia f la serie di potenze $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e supponiamo abbia raggio di convergenza $R > 0$. Allora f è derivabile in $(-R, R)$, e la derivata della serie è la serie derivata.*

Questo vale per le derivate di ogni ordine, quindi f è una funzione di classe C^∞ in $(-R, R)$. La derivata k -sima di f è la serie di funzioni

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}. \quad (11)$$

I coefficienti a_k e le derivate della f in zero sono legati dalla relazione

$$f^{(k)}(0) = k! a_k \quad \forall k \geq 0.$$

Di conseguenza la serie f coincide con il suo sviluppo in serie di Taylor,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in (-R, R).$$

Dimostrazione. Il teorema precedente prova che sia f sia la sua serie derivata sono convergenti su $(-R, R)$. Applichiamo il teorema 8.5 alla serie derivata: la serie derivata converge totalmente, e quindi uniformemente, su

ogni intervallo $[-\rho, \rho]$, $\rho < R$. Allora, per il corollario 7.2, la serie f è di classe C^1 su $[-\rho, \rho]$, e si può derivare termine a termine, ottenendo

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Questo vale per ogni $x \in [-\rho, \rho]$, per ogni $\rho < R$, dunque vale per ogni $x \in (-R, R)$.

Mostriamo, per induzione, che f è di classe C^k per ogni k , e che vale la formula (11). Per $k = 1$ l'abbiamo appena dimostrato. Supponiamolo vero per k , e proviamo che allora è vero anche per $k + 1$. Lo stesso ragionamento usato qui sopra per f si applica alla funzione $f^{(k)}$ (che è la serie di potenze (11) per ipotesi induttiva). Quindi $f^{(k)}$ è di classe C^1 e derivabile termine a termine. Usando l'ipotesi induttiva (e osservando che il termine di indice $n = k$ è una costante, quindi ha derivata nulla),

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x) \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (n-k) x^{n-k-1} \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-(k+1))!} a_n x^{n-(k+1)}, \end{aligned}$$

che è proprio la formula (11) per $k + 1$ invece che k . Dunque, per induzione, $f \in C^k$ per ogni k , cioè $f \in C^\infty$ su $(-R, R)$, e la formula (11) vale per ogni $k \geq 0$, per ogni $x \in (-R, R)$.

La formula (11) per $x = 0$ dà $f^{(k)}(0) = k! a_k$. Sostituendo $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ nella serie di partenza si ha la serie di Taylor. \square

Abbiamo provato che una serie di potenze è una funzione di classe C^∞ che coincide con la sua serie di Taylor su $(-R, R)$.

Se f è una funzione di classe C^∞ , si può scrivere la sua serie di Taylor, cioè la serie di potenze che ha per coefficienti i valori $f^{(n)}(0)/n!$. In generale, non si può dire se questa serie converge in qualche altro punto oltre a $x = 0$, e, nel caso in cui la serie converga in un certo punto $x \neq 0$, non si può nemmeno dire se converge a $f(x)$ o ad un altro valore: vedi l'esercizio 26. Se però tutte le derivate di f soddisfano una stima di tipo esponenziale,

come la disuguaglianza (12) che segue, allora la serie di Taylor converge, e converge alla f stessa.

Prima di enunciare e dimostrare il risultato, ricordiamo un limite di Analisi 1 che useremo nella dimostrazione.

Lemma 8.10. *Sia $c > 0$. Allora $c^n/n! \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.*

Dimostrazione. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} c^n/n!$ è convergente per il criterio del rapporto, quindi la successione dei suoi termini è infinitesima. \square

Teorema 8.11 (Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor). *Sia $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ sull'intervallo $(-r, r)$, $r > 0$. Supponiamo che esistano due numeri positivi $A, B > 0$ tali che*

$$\|f^{(n)}\|_{(-r,r)} \leq AB^n \quad \forall n \geq 0. \quad (12)$$

Allora f è sviluppabile in serie di Taylor in $(-r, r)$, cioè

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in (-r, r).$$

Dimostrazione del teorema 8.11. f è di classe C^∞ , cioè è di classe C^n per ogni n . Vale allora la formula di Taylor con resto in forma integrale:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx) dt x^{n+1}.$$

Dunque la differenza tra $f(x)$ e la somma parziale n -esima della serie di Taylor $s_n(x) := \sum_{k=0}^n (f^{(k)}(0)/k!) x^k$ è

$$\begin{aligned} |f(x) - s_n(x)| &= \left| \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx) dt x^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{n!} \int_0^1 |1-t|^n |f^{(n+1)}(tx)| dt |x|^{n+1} \\ &\leq \frac{1}{n!} \int_0^1 \|f^{(n+1)}\|_{(-r,r)} dt r^{n+1} \\ &= \frac{1}{n!} \|f^{(n+1)}\|_{(-r,r)} r^{n+1} \\ &\leq \frac{1}{n!} AB^{(n+1)} r^{n+1} \\ &= AB r \frac{(Br)^n}{n!}, \end{aligned}$$

e, per il lemma precedente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - s_n(x)| = 0.$$

Questo prova che la serie di potenze converge in ogni punto $x \in (-r, r)$, e converge al numero $f(x)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x),$$

cioè f coincide con la sua serie di Taylor su $(-r, r)$. □

9 Esercizi

Alcuni di questi esercizi sono tratti dai libri di testo citati all'inizio.

Esercizio 1. (Il limite puntuale di una successione di funzioni continue può essere non continuo.) Sia $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx & \text{per } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{per } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Disegnare il grafico di f_1, f_2, f_3, f_4 .
- (b) Provare che la successione converge puntualmente in $[-1, 1]$, calcolandone il limite. Verificare che la funzione limite non è continua. Verificare che, per ogni $\varepsilon > 0$, ogni intero $\bar{n}(\varepsilon, x)$ che soddisfa la definizione di convergenza puntuale dipende non solo da ε , ma anche dal punto $x \in [-1, 1]$.
- (c) Provare che la successione non converge uniformemente in $[-1, 1]$. Verificare che non è possibile trovare un intero $\bar{n}(\varepsilon)$ come richiesto dalla definizione di convergenza uniforme che vada bene per tutti i punti $x \in [-1, 1]$.
- (d) Trovare tutti gli intervalli $[a, b] \subseteq [-1, 1]$ in cui la convergenza è uniforme.

Esercizio 2. (La somma di una serie puntualmente convergente di funzioni continue può essere non continua.) Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Provare che la serie converge puntualmente, calcolandone la somma $s(x)$.
- (b) Verificare che s non è continua, e che in particolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) \right).$$

Esercizio 3. (Il limite uniforme di una successione di funzioni derivabili può essere non derivabile.) Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- (a) Provare che la successione converge uniformemente, e calcolarne il limite.
- (b) Provare che la successione delle derivate $\{f'_n\}$ converge puntualmente, e calcolarne il limite.
- (c) Provare che $\{f'_n\}$ non converge uniformemente.
- (d) Trovare tutti gli intervalli $[a, \infty)$ su cui $\{f'_n\}$ converge uniformemente.

Esercizio 4. (*Integrale e limite non si scambiano.*) Sia $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = nx(1 - x^2)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

- (a) Provare che la successione converge puntualmente a $f = 0$.
- (b) Calcolare la sup-norma $\|f_n\| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)|$. Dimostrare che $\{f_n\}$ non converge uniformemente su $[0, 1]$, provando che $\lim_{(n \rightarrow \infty)} \|f_n\| = \infty$.
- (c) Sia $a \in (0, 1)$. Calcolare la sup-norma $\|f_n\|_{[a,1]} = \sup_{x \in [a,1]} |f_n(x)|$. Provare che $f_n \rightarrow 0$ uniformemente su $[a, 1]$.
- (d) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right),$$

verificando che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right) \neq \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

L'esercizio che segue è stato parzialmente svolto nell'Esempio 1.

Esercizio 5. Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \dots$, la *funzione caratteristica* dell'intervallo $[n, n + 1]$, cioè

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [n, n + 1], \\ 0 & \text{se } x \notin [n, n + 1]. \end{cases}$$

- (a) Disegnare il grafico di f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 .
- (b) Provare che la successione converge puntualmente a $f = 0$.
- (c) Provare che la successione non converge uniformemente su \mathbb{R} .
- (d) Provare che la successione converge uniformemente sulla semiretta $(-\infty, b]$, per ogni $b \in \mathbb{R}$.
- (e) Consideriamo la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$. Disegnare il grafico di s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 .
- (f) Provare che la serie $\sum f_n$ converge puntualmente. Calcolare la funzione somma s .
- (g) Provare che la serie $\sum f_n$ converge uniformemente sulla semiretta $(-\infty, b]$, per ogni $b \in \mathbb{R}$.
- (h) Provare che la serie $\sum f_n$ non converge uniformemente su \mathbb{R} .

L'esercizio seguente mostra che nel criterio di Weierstrass di convergenza uniforme per serie di funzioni l'implicazione è solo in una direzione (non è un "se e solo se").

Esercizio 6. (*Convergenza uniforme senza convergenza totale.*) Sia $f_n : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{se } x \in [n, n+1) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Disegnare il grafico di f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 .
- (b) Provare che la successione converge uniformemente a $f = 0$.
- (c) Sia $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$. Disegnare il grafico di s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 .
- (f) Provare che la serie $\sum f_n$ converge uniformemente su \mathbb{R} . Scrivere la funzione somma.
- (g) Provare che la serie $\sum f_n$ non converge totalmente.

I due esercizi che seguono mostrano che il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale non può essere esteso alle funzioni integrabili in senso generalizzato: se una successione di funzioni $\{f_n\}$ integrabili in senso generalizzato converge uniformemente a una funzione limite f , può accadere che f non sia integrabile in senso generalizzato (esercizio 7), oppure che lo sia, ma $\int f(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx$ (esercizio 8).

Esercizio 7. Sia $f_n : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{per } x \in [1, n], \\ 0 & \text{per } x > n. \end{cases}$$

- (a) Disegnare il grafico di f_1, f_2, f_3, f_4 .
- (b) Verificare che f_n è Riemann-integrabile in senso generalizzato su $[1, \infty)$, e calcolare

$$\int_1^\infty f_n(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f_n(x) dx.$$

- (c) Provare che la successione converge uniformemente in \mathbb{R} , e calcolare la funzione limite f .
- (d) Provare che f non è Riemann-integrabile in senso generalizzato su $[1, \infty)$, verificando che

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \log b = \infty.$$

Esercizio 8. Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x \in [n, 2n], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Disegnare il grafico di f_1, f_2, f_3, f_4 .
 (b) Provare che $f_n \rightarrow 0$ uniformemente in \mathbb{R} .
 (c) Verificare che f_n è Riemann-integrabile in senso generalizzato su $[0, \infty)$, con

$$\int_0^\infty f_n(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f_n(x) dx = 1 \quad \forall n \geq 1,$$

per cui

$$\lim_{(n \rightarrow \infty)} \left(\int_0^\infty f_n(x) dx \right) \neq \int_0^\infty \left(\lim_{(n \rightarrow \infty)} f_n(x) \right) dx.$$

Esercizio 9. Sia $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \dots$,

$$f_n(x) = x^2 e^{-n^2 x^2}.$$

- (a) Provare che la successione converge uniformemente su \mathbb{R} .
 (b) Provare che la serie $\sum f_n$ converge totalmente.

Esercizio 10. Sia $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = \frac{n}{n+x}.$$

- (a) Provare che la successione converge puntualmente su $[0, \infty)$, e calcolare la funzione limite f .
 (b) Calcolare $\|f_n - f\|$, e provare che f_n non converge uniformemente a f su $[0, \infty)$.
 (c) Sia $b > 0$. Calcolare $\|f_n - f\|_{[0, b]}$, e provare che $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $[0, b]$.

Esercizio 11. Sia $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + (nx)^2}.$$

- (a) Provare che la successione converge puntualmente su $[0, \infty)$, e calcolare la funzione limite f .
 (b) Calcolare $\|f_n - f\|$, e provare che f_n non converge uniformemente a f su $[0, 1]$.
 (c) Sia $a > 0$. Calcolare $\|f_n - f\|_{[a, 1]}$, e provare che $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $[a, 1]$.
 (d) Per $x \in [0, 1]$, calcolare

$$F_n(x) := \int_0^x f_n(t) dt.$$

Mostrare che $F_n \rightarrow 0$ uniformemente su $[0, 1]$.

Esercizio 12. Sia $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}, \quad \alpha \geq 0.$$

- (a) Per quali valori di $\alpha \geq 0$ la successione converge uniformemente su \mathbb{R} ?
- (b) Per quali valori di $\alpha \geq 0$ la serie $\sum f_n$ converge totalmente su \mathbb{R} ?

Esercizio 13. Sia $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$$

- (a) Provare che $f_n \rightarrow 0$ uniformemente su \mathbb{R} .
- (b) Provare che la serie $\sum f_n$ non converge totalmente su \mathbb{R} .
- (c) Provare che la serie $\sum f_n$ converge uniformemente su \mathbb{R} .

Esercizio 14. Sia $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n/n!$, $n = 0, 1, \dots$.

- (a) Mostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente in $[-R, R]$, per ogni $R > 0$.
- (b) Verificare che per ogni $R > 0$

$$\int_0^R e^x dx = e^R - 1,$$

integrando la serie termine a termine.

L'esercizio che segue mostra che nel teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata l'ipotesi di convergenza in un punto non può essere rimossa.

Esercizio 15. Costruire una successione di funzioni $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili tale che la successione delle derivate $\{f'_n\}$ sia uniformemente convergente su \mathbb{R} , ma la successione stessa non converga.

Esercizio 16. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}, \quad x \geq 0.$$

- (a) Per quali valori di x la serie converge totalmente?
- (b) In quali intervalli la serie $\sum f_n$ converge uniformemente?
- (c) In quali intervalli la convergenza non è uniforme?
- (d) Qualora la serie converga, la funzione somma è continua?
- (e) La funzione somma è limitata?

Esercizio 17. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}.$$

- (a) Provare che la serie converge uniformemente in ogni intervallo limitato.
- (b) Provare che la serie non converge totalmente per nessun valore di x .

Esercizio 18. Sia

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- (a) Dimostrare che la successione converge uniformemente, e calcolarne la funzione limite f .
- (b) Provare che l'uguaglianza

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

è corretta per $x \neq 0$, ma errata se $x = 0$.

Esercizio 19. Sia $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = n^2 x^n (1 - x).$$

- (a) Provare che la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente, calcolandone la funzione limite f .
- (b) Dimostrare che la convergenza non è uniforme su $[0, 1]$, calcolando il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|$.
- (c) Provare che $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $[0, b]$, per ogni $b \in (0, 1)$.
- (d) Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx,$$

verificando che è un valore diverso da $\int_0^1 f(x) dx$.

Esercizio 20. Sia $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , e $\varphi_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\varphi_n(x) := \int_0^x f(t) \cos(nt) dt.$$

Provare che $\varphi_n \rightarrow 0$ uniformemente sull'intervallo $[0, b]$, per ogni $b > 0$. [Suggerimento: integrare per parti.]

Esercizio 21. Sia $f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = (1 + x^n)^{1/n}.$$

- (a) Calcolare il limite puntuale $f(x) = \lim_{(n \rightarrow \infty)} f_n(x)$ per ogni $x \in [0, 2]$.
(b) Provare che $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $[0, 2]$.

Esercizio 22. Sia $b > 0$, $f_n: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = n \log \left(1 + \frac{x}{n} \right).$$

- (a) Calcolare il limite puntuale f della successione.
(b) Provare che $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $[0, b]$. (Si può farlo anche studiando la serie delle derivate f'_n e usando il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata).

Esercizio 23. Sia $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una successione che converge uniformemente alla funzione continua f sull'intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Sia $\{x_n\}$ una successione di punti di (a, b) che converge ad un punto $x_0 \in (a, b)$. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x_0).$$

Esercizio 24. Sia $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ n - n^2|x| & \text{se } 0 < |x| < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{se } |x| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

- (a) Disegnare il grafico di f_1, f_2, f_3, f_4 .
(b) Calcolare il limite puntuale $f(x) = \lim_{(n \rightarrow \infty)} f_n(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.
(c) Stabilire per quali valori $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, la successione converge uniformemente sull'intervallo $[a, b]$.
(d) Calcolare

$$\int_{-1}^1 f_n(x) dx.$$

Stabilire se la successione numerica $\{\int_{-1}^1 f_n\}$ ha limite, e, in caso affermativo, dire se è vero che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

- (e) Provare che la serie $\sum f_n$ converge puntualmente in \mathbb{R} .

- (f) Stabilire per quali valori $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, la serie converge totalmente sull'intervallo $[a, b]$.
- (g) Provare che sugli intervalli $[a, b]$ in cui la serie non converge totalmente, la serie non converge nemmeno uniformemente.
- (h) Provare che la funzione somma non è limitata.

Esercizio 25. Sia

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= a_2 = 3, & a_3 &= a_4 = 3^2, \\ a_5 &= a_6 = 3^3, & a_7 &= a_8 = 3^4, & a_9 &= a_{10} = 3^5, \quad \dots \end{aligned}$$

Calcolare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

L'esercizio seguente è l'esempio classico di una funzione di classe C^∞ che non coincide con il suo sviluppo di Taylor: $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} (f^{(n)}(0)/n!) x^n$ per ogni $x \neq 0$.

Esercizio 26. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Provare che f è di classe C^∞ , mostrando per induzione che la derivata n -esima è della forma

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{\alpha_n}} e^{-1/x^2} \quad \forall x \neq 0, \quad f^{(n)}(0) = 0,$$

per un certo polinomio $p_n(x)$ e un certo esponente α_n , ed è continua.