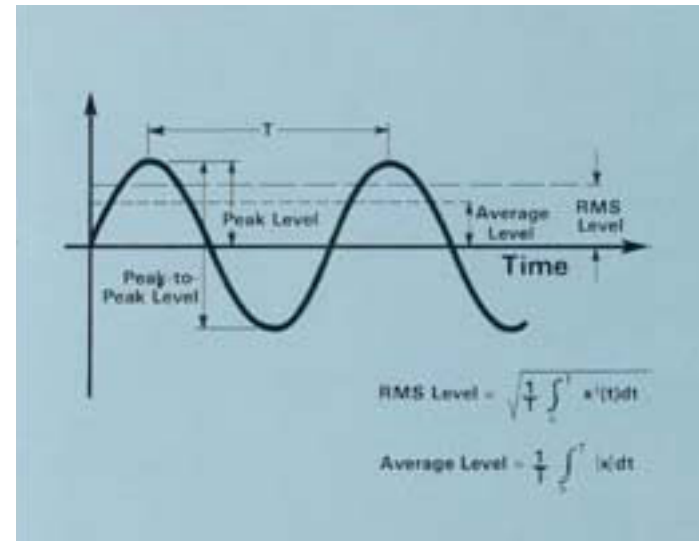
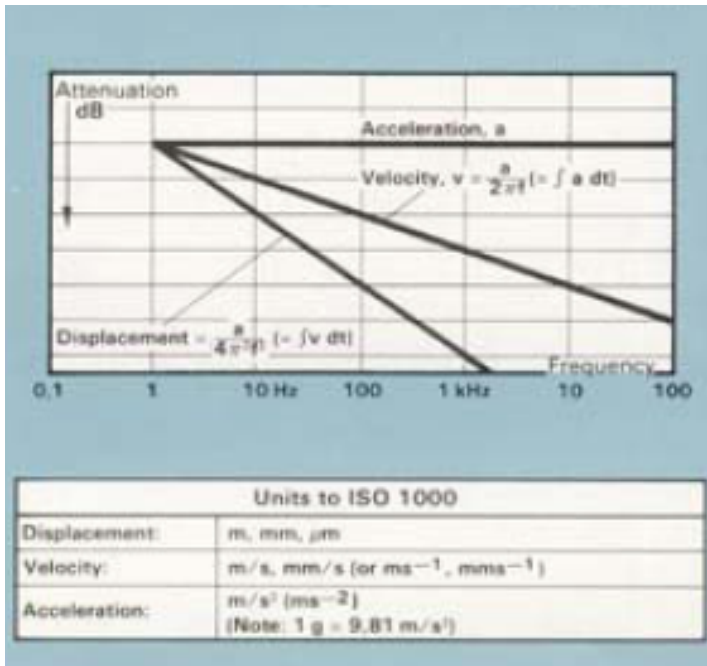
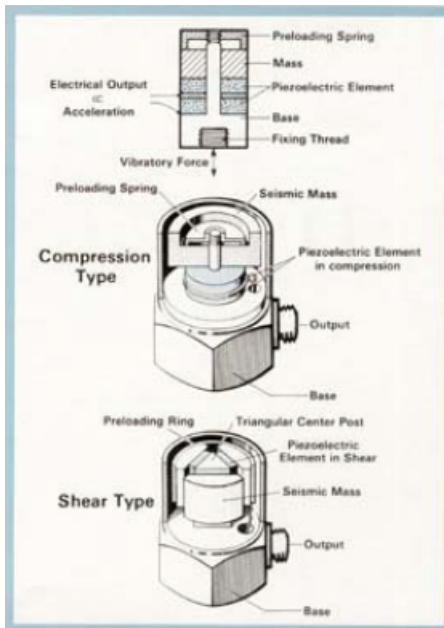


Analisi vibrazionale di base

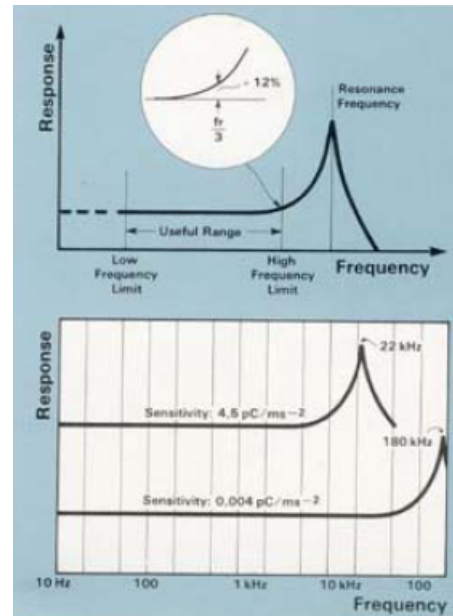
Parametri che definiscono il fenomeno vibratorio



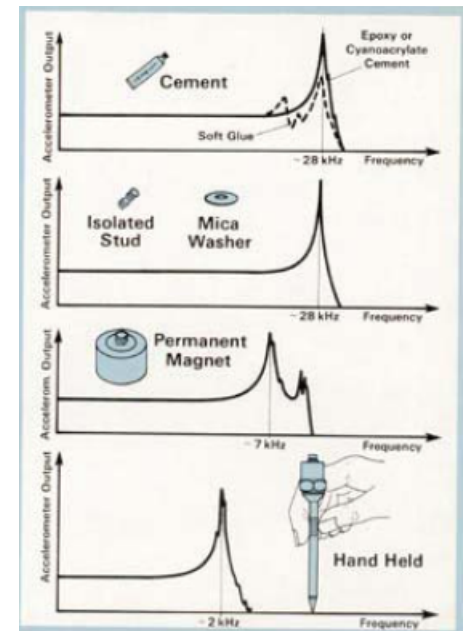
Sensori per l'acquisizione dei fenomeni vibratori



Accelerometer Characteristics (Sensitivity, Mass and Dynamic Range)

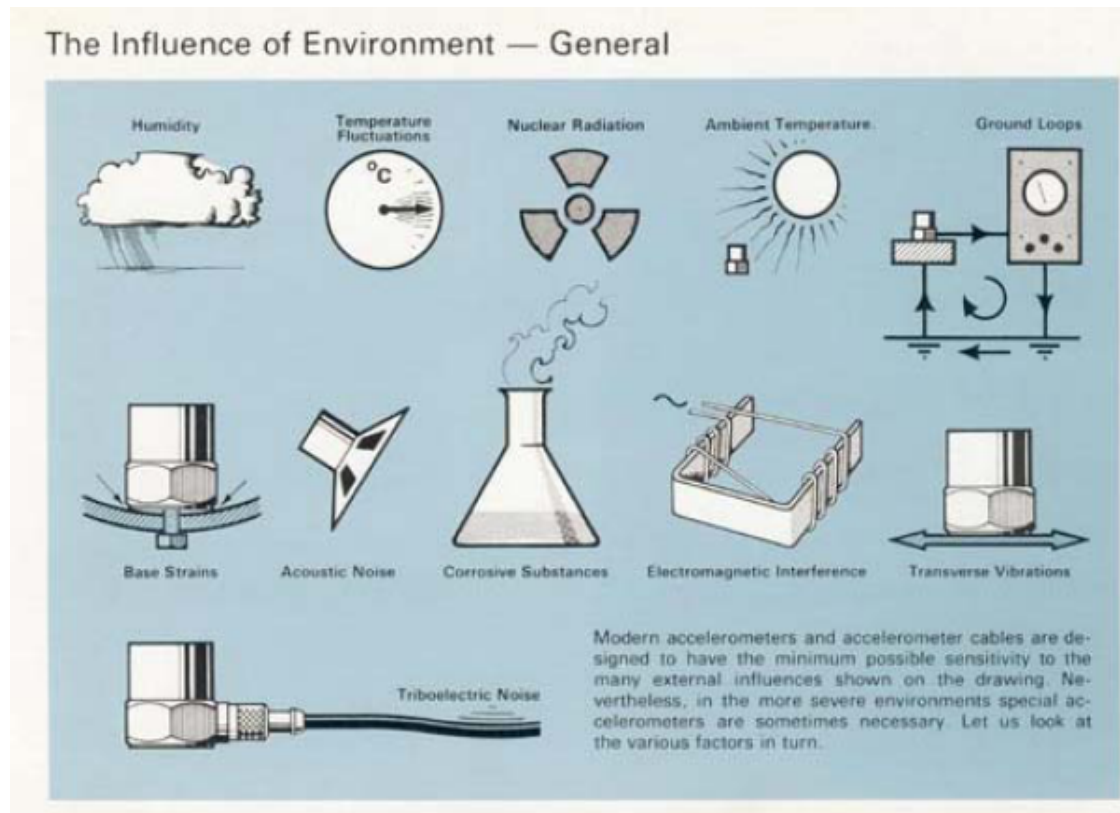


Accelerometer Frequency Range Considerations



Choosing a Mounting Position for the Accelerometer

Sensori per l'acquisizione dei fenomeni vibratori



La scala dei decibel

Rec. No. _____
 Date: _____
 Sign: _____

GP 0124 Multiple Freq. Scale by _____ Zero Level: _____

For Amplitude Ratios:

$$N(\text{dB}) = 20 \log_{10} \left(\frac{B}{B_{\text{ref}}} \right)$$

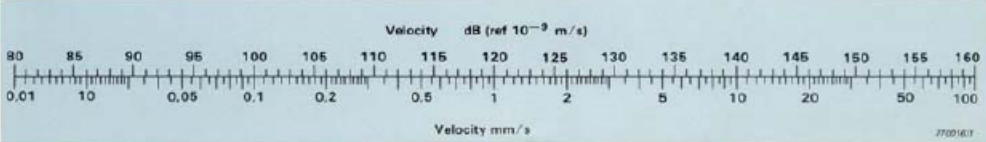
Number of Decibels (N) is derived from the ratio of the Measured Level (B) to the Reference Level (B_{ref}).

Decibel Reference Levels (ISO R 1683)

Quantity	Definition	Ref. level
Vibratory Acc. Level	$L_a = 20 \log_{10}(a/a_0)$ dB	$a_0 = 10^{-6} \text{ m/s}^2$
Vibratory Vel. Level	$L_v = 20 \log_{10}(v/v_0)$ dB	$v_0 = 10^{-9} \text{ m/s}$
Vibratory Force Level	$L_f = 20 \log_{10}(F/F_0)$ dB	$F_0 = 10^{-8} \text{ N}$

770026.1

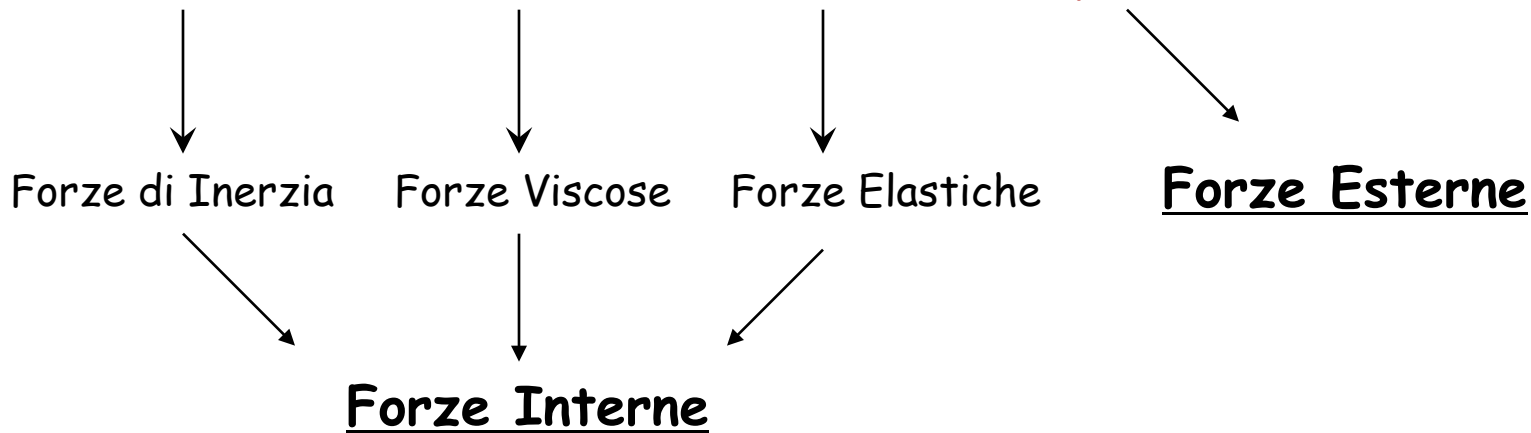
Logarithmic Scales and Decibels



A) Fondamenti di Dinamica

Equazione del moto in dinamica:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [B]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (A.1)$$



$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [B]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad \text{vibrazioni libere}$$

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad \text{vibrazioni libere non smorzate}$$

$$\{u(t)\} = Ce^{j\omega t} = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

soluzione dell'equazione
in assenza di smorzamento

Con $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ed $f = \omega_n/2\pi$ Frequenze naturali o proprie del Σ rappresentano il N° di onde di tipo sinusoidali o cosinusoidali nel tempo

Nota: Più in generale, nel caso di sistemi a più GDL, ω è un vettore con $[K]$ ed $[M]$ matrici di Rigidezza e Massa rispettivamente.

Nel caso più generale rappresentato dalle vibrazioni libere smorzate si definisce smorzamento critico $b_{cr} = 2\sqrt{km}$ il valore dello smorzamento in corrispondenza del quale l'ampiezza del moto va subito a zero senza alcuna oscillazione; in particolare per $b > b_{cr}$ il sistema si comporta come sopra, mentre per $b < b_{cr}$ il moto si smorza dopo un certo N. di oscillazioni

Dal momento che $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{b}{b_{cr}}\right)^2}$ ed essendo $b \ll b_{cr}$ ($0,01 < b < 0,1$) risulta come le frequenze naturali e quelle smorzate siano molto simili tra loro; questo è il motivo per cui normalmente si affronta il problema della risoluzione del moto non smorzato, inserendo lo smorzamento solo in una fase successiva nella forma di smorzamento modale o proporzionale.

Sicché anche nel caso più generale di vibrazioni forzate andremo a risolvere l'equazione:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (A.2)$$

con $\{u(t)\} = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \text{"soluzione particolare"}$

La soluzione particolare dipende dal rapporto tra frequenza di eccitazione del sistema e quella naturale o propria dello stesso; quando la frequenza di eccitazione si approssima a quella naturale si verifica la condizione nota come risonanza del sistema, caratterizzata in assenza di smorzamento da spostamenti tendenti all'infinito.

Nota: Un problema classico in Dinamica è rappresentato dalle unità di misura di alcune grandezze dovute alla coerenza dimensionale; vediamo infatti come dalla scelta di utilizzare le unità di misura del S.I. a meno delle lunghezze che continuiamo ad esprimere in mm, conseguenza di avere le Masse espresse in tonnellate.

Prendiamo ad esempio l'equazione della Dinamica nella forma:

$$\begin{array}{ccccccc} [M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{p(t)\} \\ \downarrow \quad \searrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \downarrow \\ \text{Ns}^2/\text{mm} \quad \text{mm}/\text{s}^2 \quad \text{N}/\text{mm} \quad \text{mm} \quad \text{N} \end{array}$$

Dal momento che per definizione $1\text{N} = 1\text{Kg} \cdot 1\text{m}/\text{s}^2 = 10^3\text{Kg} \cdot \text{mm}/\text{s}^2$ risulta:
 $\text{Ns}^2/\text{mm} = 10^3\text{Kg} = 1\text{Ton}$

E' dunque per coerenza dimensionale che bisogna esprimere in Tonnellate la Massa e quindi in Ton/mm^3 le densità; per questo motivo densità come quella dell'acciaio che è di $7,85\text{ Kg}/\text{dm}^3$ viene espressa in coerenza con le altre unità di misura in $7,85\text{E}-9$ (Ton/mm^3).

A₁) Note ed Osservazioni: Matrice di Massa

Approssimando la matrice di massa con una matrice di tipo diagonale si consegue una notevole rapidità del calcolo ma si ha come difetto quello di non considerare le forze di inerzia che nascono tra i nodi. Ciò equivale a dire che la massa dell'intera Struttura viene concentrata nei nodi e non distribuita sugli elementi, come per la rigidezza.

Con una matrice di massa piena invece si distribuisce la massa come avviene per la rigidezza.

A₂) Note ed Osservazioni: Smorzamento

Lo smorzamento è una approssimazione matematica usata per rappresentare la dissipazione di Energia presente all'interno di tutte le Strutture.

A causa dei valori tipici piuttosto bassi dello smorzamento sono solitamente ammesse semplici approssimazioni nella schematizzazione dello stesso:

$$\begin{array}{ll} F_v = b\dot{u} & \text{smorzamento viscoso} \\ F_s = iGKu & \text{smorzamento strutturale} \end{array}$$

Nota: Lo smorzamento può essere trascurato in tutti quei fenomeni di breve durata (ad esempio nei Crash Test), mentre risulta essenziale per tutti quei fenomeni di lunga durata nei quali è notevole il trasferimento di Energia alla Struttura.

B) Analisi reale agli autovalori

Il primo step di un'analisi dinamica è rappresentato dal calcolo delle frequenze naturali o caratteristiche e delle associate forme modali, in assenza di smorzamento, dal momento che queste caratterizzano il comportamento dinamico di ciascuna struttura.

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\}$$

equazione del moto in assenza di smorzamento

Si assume come soluzione dell'equazione una funzione armonica del tipo:

$$\{u(t)\} = \{\Phi\} \text{sen} \omega t$$



Autovalore o Frequenza naturale

Autovettore o Forma modale

Nota: Il fatto di assumere una soluzione armonica ha un significato fisico preciso; in un moto armonico tutti i GDL della Struttura si muovono in fase.

Sostituendo la soluzione nell'equazione del moto si ottiene:

$$([K] - \omega^2[M]) \{\Phi\} = \{0\} \quad (B.1)$$

Questa equazione ammette una soluzione "banale" ed una "non banale":

- $\{\Phi\} = \{0\}$ con $\det([K] - \omega^2[M]) \neq 0$ modi rigidi di corpo libero
- $\{\Phi\} \neq \{0\}$ con $\det([K] - \omega^2[M]) = 0$ modi di corpo deformabile

L'equazione:

$$([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad \text{assume il nome di equazione caratteristica}$$

Essa ci consente, note $[K]$ ed $[M]$, di ricavare ω e quindi i valori di Φ ; ciascun autovalore ed autovettore così calcolati definiscono un modo di vibrare non smorzato della struttura; la generica deformata strutturale è il risultato della combinazione lineare di tutti i modi propri di vibrare.

$$\{u\} = \sum_i \xi_i \{\Phi_i\}$$

Quindi in definitiva tutto si riduce alla ricerca degli autovalori che annullano il determinante dell'equazione caratteristica. Due sono i possibili metodi di soluzione: Metodi di RICERCA e Metodi di TRASFORMAZIONE.

I Metodi di RICERCA procedono iterativamente alla ricerca della soluzione, per cui il tempo di calcolo dipende fortemente dal N° di autovalori richiesto (vanno bene per l'estrazione di pochi autovalori su sistemi con molti GDL). I Metodi di TRASFORMAZIONE agiscono, invece, sulle matrici di Massa e di Rigidezza diagonalizzandole (in questo modo risultano particolarmente efficaci per l'estrazione di molti autovalori su sistemi con pochi GDL).

Un Metodo che coglie al meglio le opportunità offerte dai due illustrati è il Metodo di LANCZOS, che quindi può essere generalmente utilizzato; esso ricorre alla "Sparse Decomposition" che sostanzialmente aumenta la velocità di calcolo riducendo, nel contempo, l'utilizzo di spazio-disco.

B₁) Note ed Osservazioni: Normalizzazione

Gli autovettori possono essere normalizzati rispetto alla Massa o rispetto allo Spostamento.

La Normalizzazione rispetto alla Massa sfrutta la proprietà di ortogonalità delle Matrici di Massa e Rigidezza; tale proprietà, valida solo per le Matrici di Massa e Rigidezza, si traduce fisicamente nel fatto che ciascuna forma modale è unica, ovvero che nessun modo proprio può essere ottenuto come combinazione di altri modi propri.

Sfruttando questa proprietà ed utilizzando come smorzamento quello modale o proporzionale, si riescono a disaccoppiare completamente le equazioni del moto ovvero a scrivere un sistema di equazioni linearmente indipendenti che consentono una rapida soluzione del problema agli autovalori/autovettori.

La Normalizzazione rispetto al massimo spostamento posto uguale ad 1, è particolarmente utile nella determinazione della partecipazione di diversi componenti a ciascun modo proprio di vibrare della struttura.

C) Rigid Body Modes

I Modi di Corpo Rigido si manifestano in strutture non vincolate; per una Struttura 3-D non vincolata esistono 6 Modi di Corpo Rigido, 3 traslazioni e 3 rotazioni. Un Meccanismo si manifesta quando è solo una porzione di Struttura a muoversi come Corpo Rigido per effetto di cerniere interne.

La presenza di un Modo di Corpo Rigido o di un Meccanismo è segnalata da un autovalore e da un autovettore nullo.

Essendo $\{\omega\} = \{0\}$ (autovettori nulli) ed essendo $\{\omega\} = \sqrt{\begin{matrix} [K_r] \\ \hline [M_r] \end{matrix}}$ risulta:

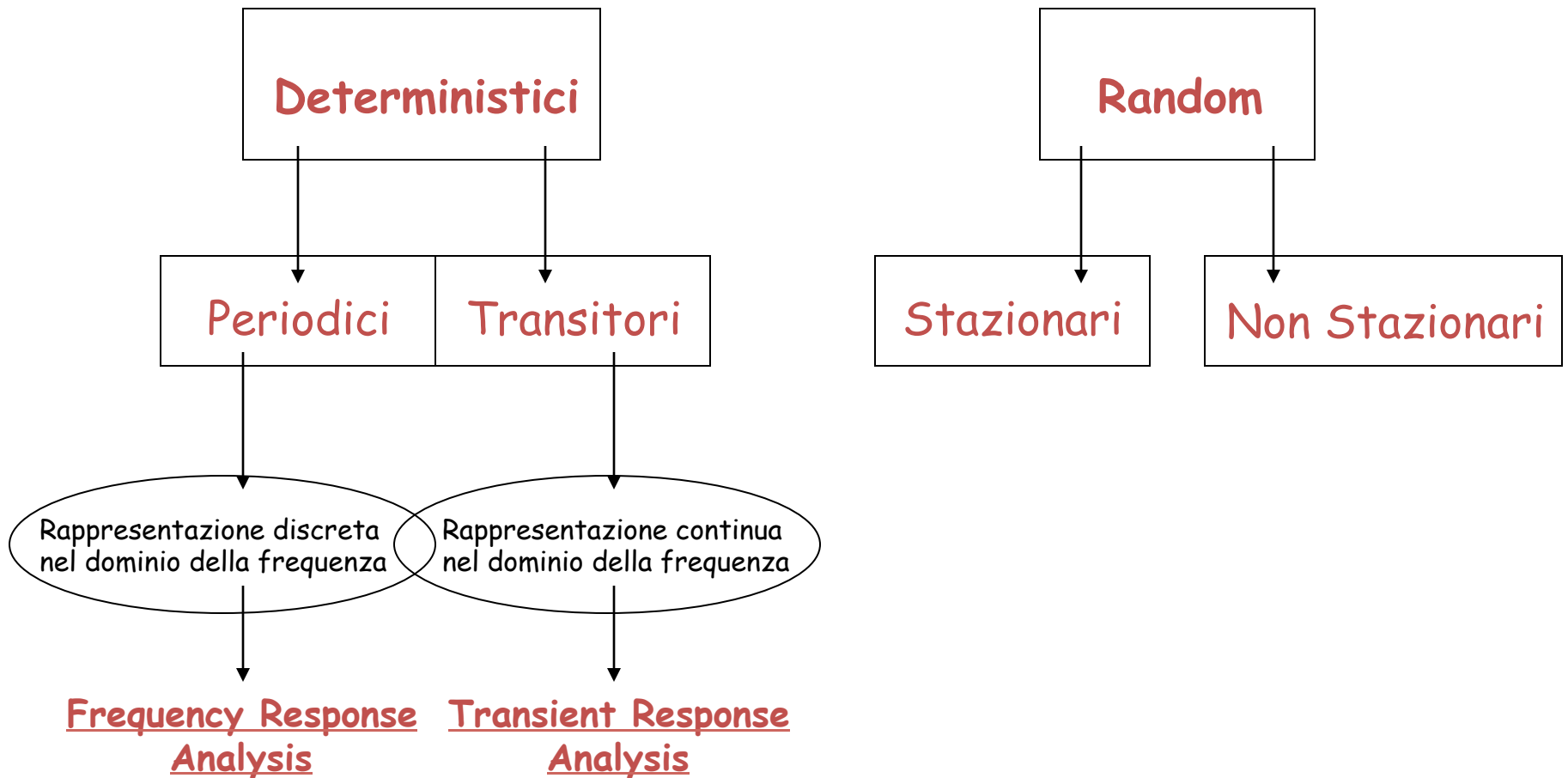
$[K_r] = 0$ e $[M_r] > 0$, ovvero:

$$[\Phi_r]^T [K_r] [\Phi_r] = 0$$

Energia di deformazione nulla

$$[\Phi_r]^T [M_r] [\Phi_r] > 0$$

D) Classificazione dei Carichi



E) Frequency Response Analysis

La Frequency Response Analysis si utilizza quando il fenomeno dinamico che vogliamo studiare è il risultato di una eccitazione "a regime", ovvero in tutti quei fenomeni in cui il **transitorio** o è trascurabile (perché veloce o semplicemente perché tale da non produrre un'apprezzabile eccitazione nella Struttura) oppure, se non lo è, non è di interesse il comportamento durante il transitorio stesso.

La Frequency Response Analysis è interamente eseguita nel dominio della frequenza; ciò significa che le forze esterne agenti sulla Struttura sono espresse nel dominio della frequenza così come la risposta dinamica della Struttura stessa. Quest'ultima è un valore complesso caratterizzato da un'ampiezza e da un valore di fase (espressa rispetto alle forze esterne e dovuta alla presenza dello smorzamento).

Mentre il Metodo Diretto tenderebbe a risolvere direttamente l'equazione del moto in presenza di smorzamento (sistema di equazioni accoppiato) per effetto di una eccitazione definita nel dominio della frequenza, il Metodo Modale utilizza i modi propri della Struttura per disaccoppiare il sistema di equazioni del moto;

***Nota:** Utilizziamo sempre il Metodo Modale dal momento che esso presenta due grossi vantaggi rispetto al Metodo Diretto: risolvendo prima l'equazione del moto libero non smorzato e tenendo in conto dello smorzamento e delle forze esterne solo successivamente, si riesce a disaccoppiare completamente le equazioni (si risolve un sistema di equazioni linearmente indipendenti) e quindi a ridurre sensibilmente i tempi di calcolo; inoltre il Metodo Modale utilizzando le coordinate modali in luogo di quelle fisiche riduce drasticamente i GDL del problema e quindi il N. di equazioni linearmente indipendenti da risolvere.*

E₁) Modal Frequency Response Analysis

La trasformazione che consente di passare dalle coordinate fisiche alle coordinate modali è la seguente:

$$\begin{array}{ccc} \leftarrow \{u\} = [\Phi] \{q\} = \sum_i \xi_i \{\Phi_i\} \rightarrow & & (E.1) \\ \text{Coordinate Fisiche} & \downarrow & \text{Coordinate Modali} \\ & \text{Matrice dei Modi} & \end{array}$$

Nota: In generale le coordinate modali non hanno un preciso significato fisico, tranne per alcuni sistemi semplici (es. Trave libera o incastrata)

Tale trasformazione consente di ridurre sensibilmente il N. di equazioni da risolvere; infatti mentre le incognite $\{u\}$ sono tante quanti sono i GDL della Struttura (N. di nodi * 6), le incognite $\{q\}$ sono in numero pari al N. di Autovalori/Autovettori Reali.

Nota: Operare tale trasformazione equivale dunque a risolvere un sistema di N equazioni, con $N \ll$ GDL della Struttura.

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{p(t)\} \quad \text{equazione del moto non smorzato}$$

Operando la trasformazione all'interno dell'equazione che governa le vibrazioni in assenza di smorzamento si ottiene:

$$-\omega^2[M][\Phi]\{\zeta(\omega)\} + [K][\Phi]\{\zeta(\omega)\} = \{P(\omega)\}$$

Ovvero moltiplicando ambo i membri per la Matrice dei Modi trasposta:

$$-\omega^2[\Phi]^T[M][\Phi]\{\zeta(\omega)\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{\zeta(\omega)\} = [\Phi]^T\{P(\omega)\} \quad (E.2)$$

Dove risulta:

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = \text{Matrice Diagonale per l'ortogonalità dei Modi Propri}$$

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = \text{Matrice Diagonale per l'ortogonalità dei Modi Propri}$$

Sicché nella forma espressa dalla (E.2) le equazioni del moto risultano completamente disaccoppiate; la soluzione del problema matriciale si riconduce alla risoluzione di un sistema di N equazioni linearmente indipendenti nelle N incognite rappresentate dalle coordinate modali:

$$-\omega^2 m_i \xi_i(\omega) + k_i \xi_i(\omega) = p_i(\omega) \quad \text{con } i = 1 \dots N \quad (\text{E.3})$$

Se consideriamo lo smorzamento, invece, in generale non è più possibile pervenire ad un sistema di equazioni linearmente indipendente come la (E.3) dal momento che la proprietà di ortogonalità dei Modi Propri non vale per la Matrice di Smorzamento; pertanto in presenza di smorzamento il Metodo Modale si ridurrebbe al Metodo Diretto, con la sola differenza (comunque non trascurabile) rappresentata dal fatto che esso ragiona in termini di coordinate modali anziché fisiche e dunque con un numero di incognite decisamente inferiore.

$$[\Phi]^T [B] [\Phi] \neq \text{Matrice Diagonale}$$

Nota: Il più importante vantaggio dell'approccio modale è proprio quello di ridurre i GDL che consentono di descrivere il comportamento dinamico di un generico sistema vibrante al N. di radici del sistema caratteristico, pur mantenendo una elevata precisione della soluzione. Da questa affermazione scaturisce il concetto di "**Base Modale**":

Base Modale: N° di modi necessario per approssimare all'interno di un dato range di frequenza la risposta del sistema vibrante

Ma quanto deve essere estesa la Base Modale ?

Valgono le seguenti considerazioni:

- il contributo del generico modo di vibrare varia con la frequenza
- all'aumentare della frequenza la componente statica del generico modo diminuisce; ciò ne determina un minor contributo alla risposta totale

Di qui si conclude, come regola generale, che definito il range di interesse, la trasformazione modale può essere effettuata considerando "solamente" tutti i "q" modi propri la cui frequenza

$$\omega_i < 2 \Omega_{\max}$$

Una possibilità per tenere comunque disaccoppiate le equazioni del moto in presenza di smorzamento (e dunque di sfruttare entrambi i vantaggi offerti dal Metodo Modale) è quella di "applicare" lo smorzamento ad ogni Modo o frequenza attraverso il ricorso al cosiddetto smorzamento modale o proporzionale.

Le equazioni del moto (E.3) diventano:

$$-\omega^2 m_i \zeta_i(\omega) + i\omega b_i \zeta_i(\omega) + k_i \zeta_i(\omega) = p_i(\omega) \quad \text{con } i = 1 \dots N$$

Con $b_i = 2m_i\omega_i\zeta_i$ smorzamento modale o proporzionale

Nota: lo smorzamento modale viene misurato sperimentalmente per ciascun Modo e pertanto non è definibile analiticamente. Fisicamente rappresenta il rapporto tra altezza ed ampiezza della campana della risonanza del Modo.

E₂) Definizione dei Carichi in frequenza

Nella **Frequency Response Analysis** i carichi sono assegnati in funzione della frequenza.

Vi sono due aspetti da tener presenti nella definizione di carichi dinamici: il primo riguarda, come per la Statica, la distribuzione dei carichi stessi, il secondo la loro variazione in frequenza, che per l'appunto li differenzia dai carichi statici.

F) Transient Response Analysis

La **Transient Response Analysis** rappresenta il modo più generale per il calcolo della risposta Dinamica di una Struttura. La Transient Response Analysis è interamente eseguita nel dominio del Tempo; le forze esterne applicate sono esse stesse funzioni note del Tempo.

I metodi di soluzione utilizzati nella Transient Response Analysis sono esattamente gli stessi di quelli già analizzati nella Frequency Response Analysis, per cui laddove non vi sono sostanziali differenze tra le due Analisi si farà un semplice cenno al metodo (Direct Transient Response Analysis o Modal Transient Response Analysis).

G) "Cenni" al caso dei Carichi Random

Prima di occuparci dei Carichi Random, definiamo cosa si intende per Funzione di Trasferimento:

$$U_j(\omega) = H_{ja}(\omega) \times F_a(\omega) \quad (G.1)$$



Funzione di Trasferimento

Nota: Per avere in output la Funzione di Trasferimento basta fornire in input Forze unitarie nel dominio di frequenze di interesse (**Rumore Bianco**); risulta: $U_j(\omega) = H_{ja}(\omega)$

A seconda che $U_j(\omega)$ rappresenta una grandezza dinamica (spostamento, velocità o accelerazione) oppure acustica (disturbo di pressione), la FdT sarà di tipo dinamico (es. Inertanza) o acustico (es. FdT acustica).

Si possono studiare solo i segnali Random che presentano la caratteristica di essere **Ergodici** e **Stazionari**.

Un carico Random si definisce **Ergodico** se ogni segnale che lo caratterizza presenta lo stesso valore Medio degli altri; si definisce **Stazionario** quando è la media di tutti i segnali ad essere la stessa ad ogni istante di tempo. In altre parole, definiti $X_1(t)$, $X_2(t)$, ... $X_n(t)$ n segnali caratterizzanti il carico Random si hanno fenomeni Ergodici o Stazionari a seconda che:

Ergodico $X_{1m} = X_{2m} = X_{3m} = \dots = X_{nm}$

Stazionario $X_1(t_1) + X_2(t_1) + \dots + X_n(t_1) = X_1(t_2) + X_2(t_2) + \dots + X_n(t_2)$

Definiamo ora cosa sono ed a cosa servono le **Funzioni di Correlazione**: le **Funzioni di Correlazione** servono a stabilire se esiste qualche legame tra diversi fenomeni Random in un dato istante di Tempo. Esse si dicono di **AUTO-CORRELAZIONE** o di **CROSS-CORRELAZIONE** a seconda che il fenomeno in questione si correli con se stesso o con altri fenomeni.

Nota: *Se il fenomeno è Deterministico è possibile fare la correlazione ad ogni istante di Tempo mentre per fenomeni Random la correlazione fatta ad un dato istante temporale vale esclusivamente a quell'istante di tempo, prima e dopo regna il CAOS !*

Nota: *Le funzioni di AUTO-CORRELAZIONE raggiungono il loro valore max all'istante $t=0$ (essendo il fenomeno il medesimo), mentre per le funzioni di CROSS-CORRELAZIONE il max si può verificare ad ogni istante di Tempo, dato che esse rappresentano un legame tra diversi fenomeni.*

Modal analysis is a method to describe a structure in terms of its natural characteristics which are the **frequency**, **damping** and **mode shapes** – its dynamic properties.

- Modal analysis involves process of determining the **modal parameters** of a structure to construct a modal model of the response

Modal Parameters

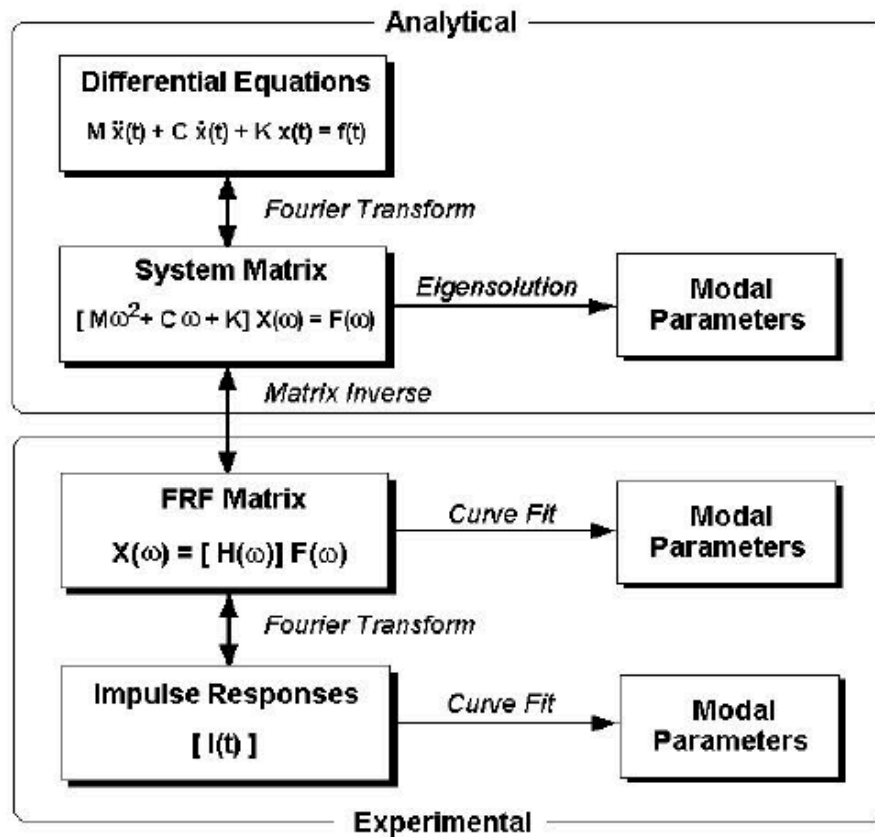
ω — Frequency

ζ — Damping

$\{\phi\}$ — Mode Shape

- Theoretical [**Finite Element Analysis (FEA)**] and **Experimental Modal Analysis (EMA)** have been very separate engineering activities aimed at solving above mentioned common problem.
- Now the two technologies are converging and powerful new tools for solving **noise and vibration problems** are emerging as a result.

Experimental and theoretical routes



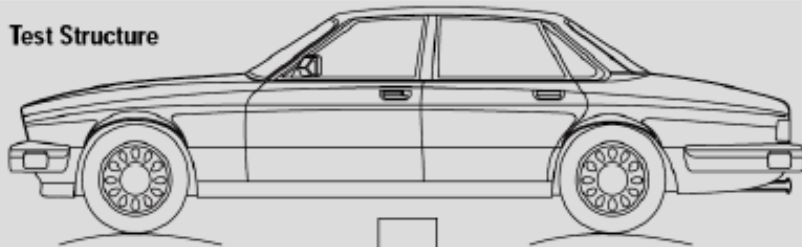
Modal Parameters

- ω — Frequency
- ζ — Damping
- $\{\phi\}$ — Mode Shape

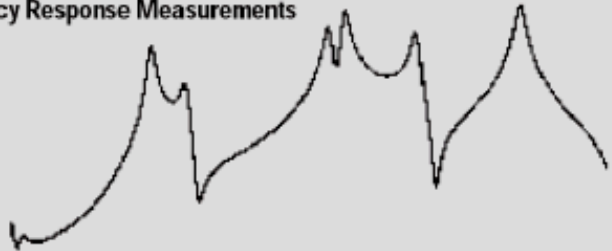
Experimental and theoretical routes

- The modal parameters may be determined by analytical means, such as finite element analysis, and one of the common reasons for experimental modal analysis is the verification/correction of the results of the analytical approach (model updating).
- Often, though, an analytical model does not exist and the modal parameters determined experimentally serve as the model for future evaluations such as structural modifications.
- Predominately, experimental modal analysis is used to explain a dynamics problem, vibration or acoustic, that is not obvious from intuition, analytical models, or previous similar experience.

Test Structure



Frequency Response Measurements



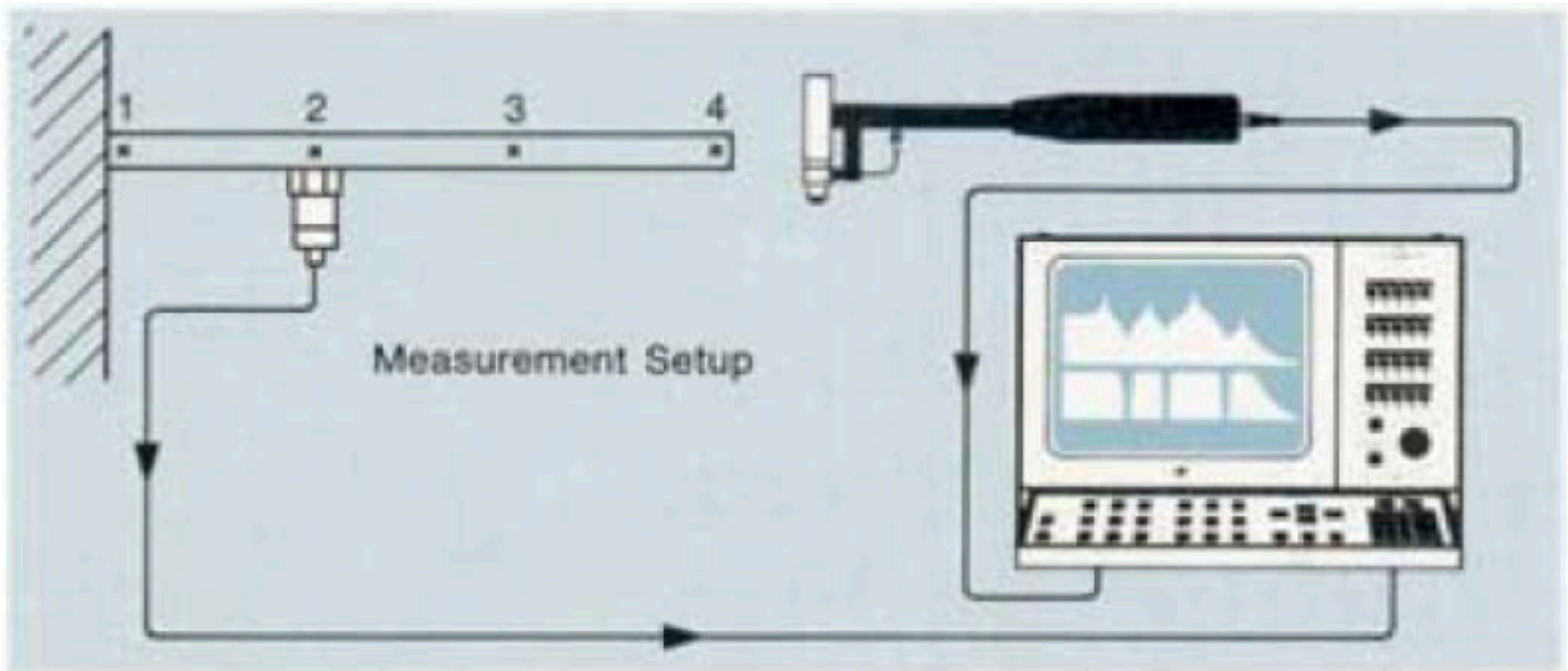
Modal Parameters

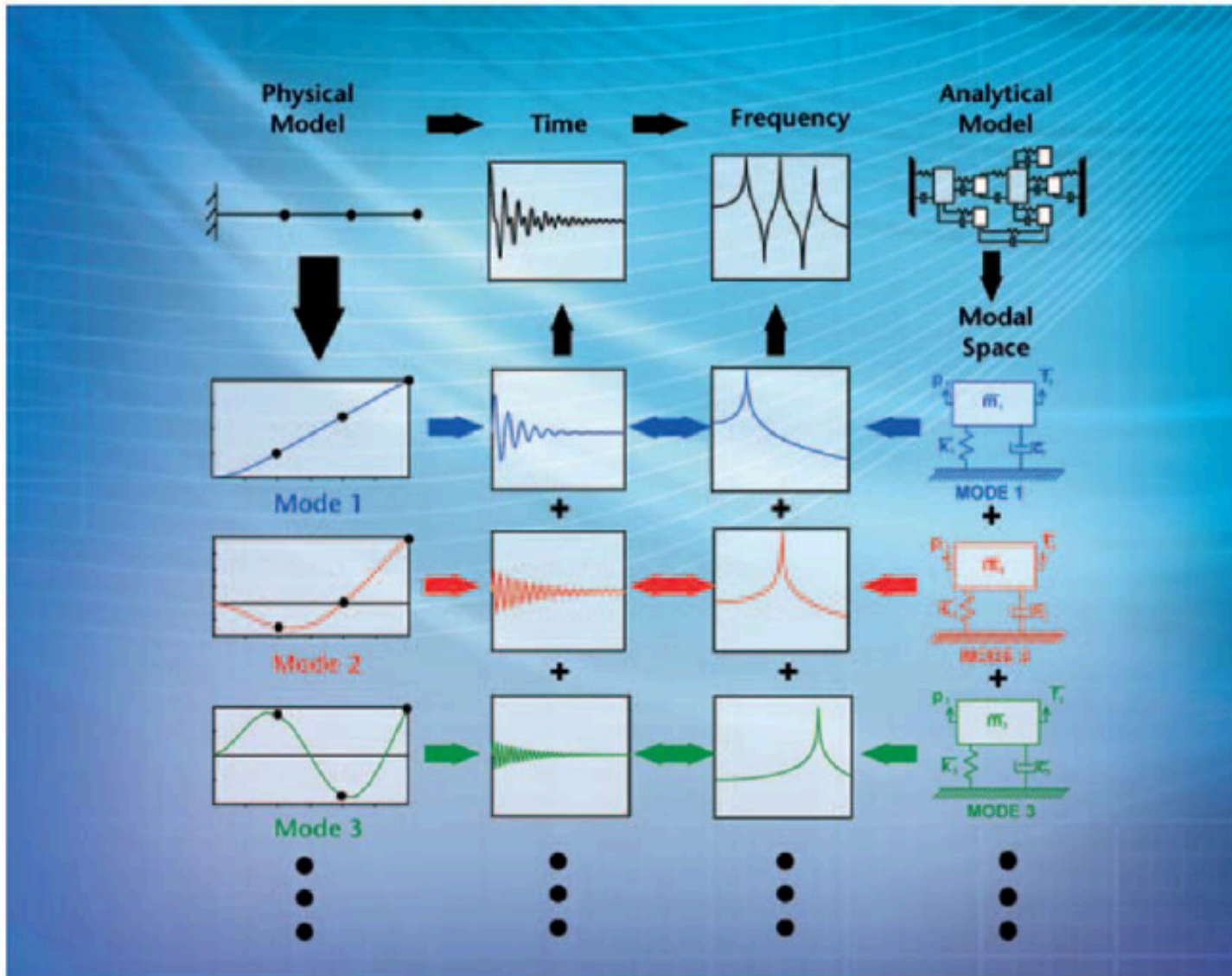
- ω — Frequency
- ζ — Damping
- $\{\phi\}$ — Mode Shape



Curve Fit Representation

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega \omega_r)}$$





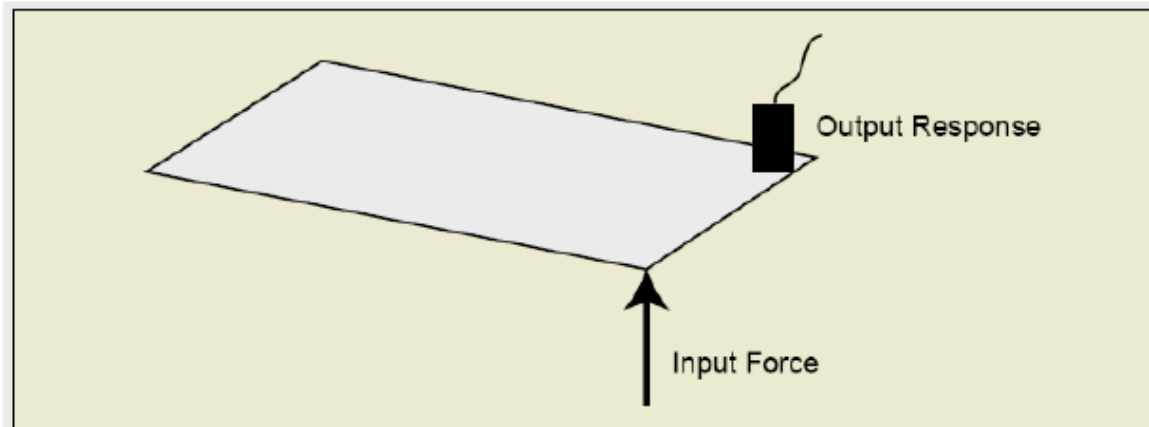


Figure 1. Simple plate excitation/response model.

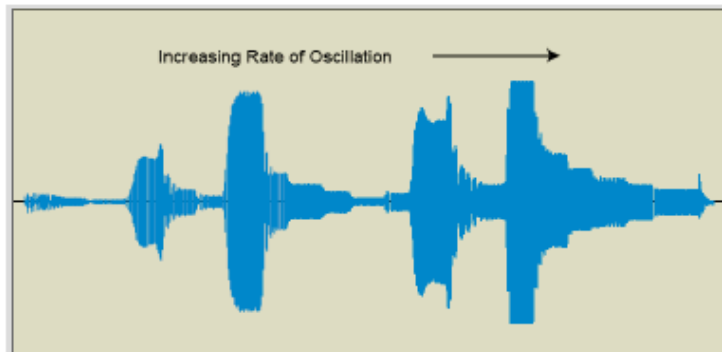


Figure 2. Simple plate response.

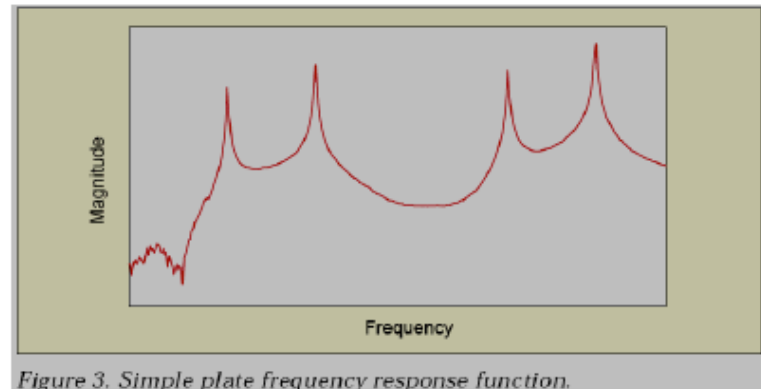


Figure 3. Simple plate frequency response function.

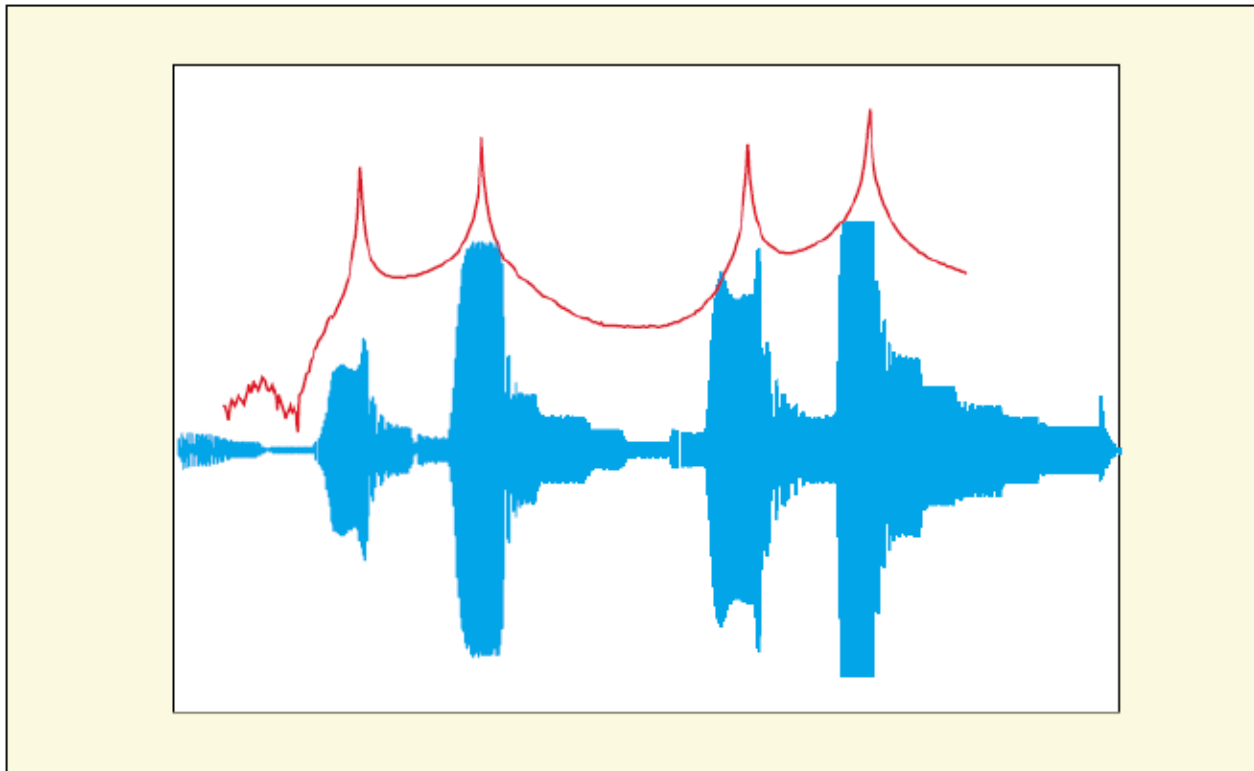


Figure 4. Overlay of time and frequency response functions.

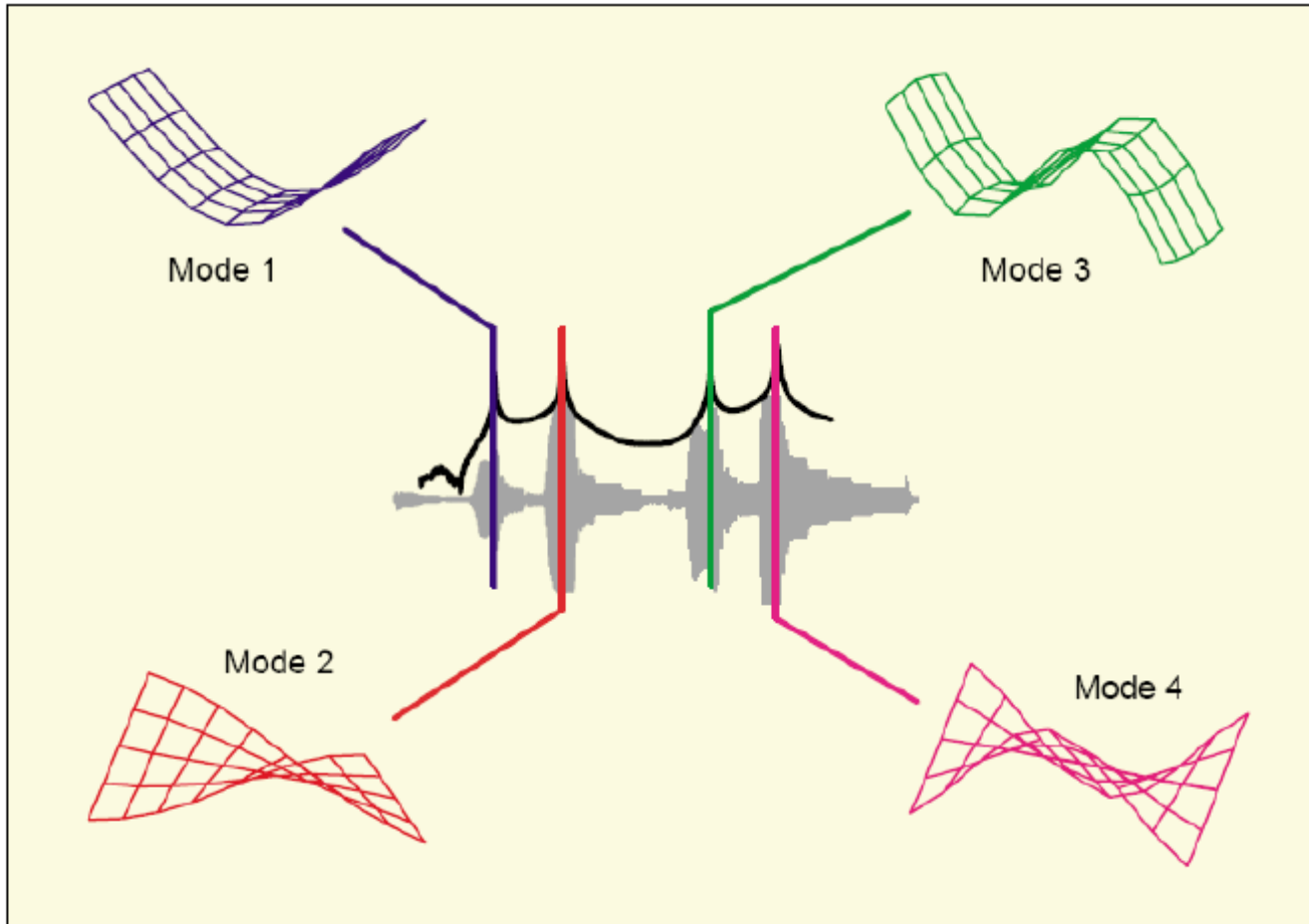
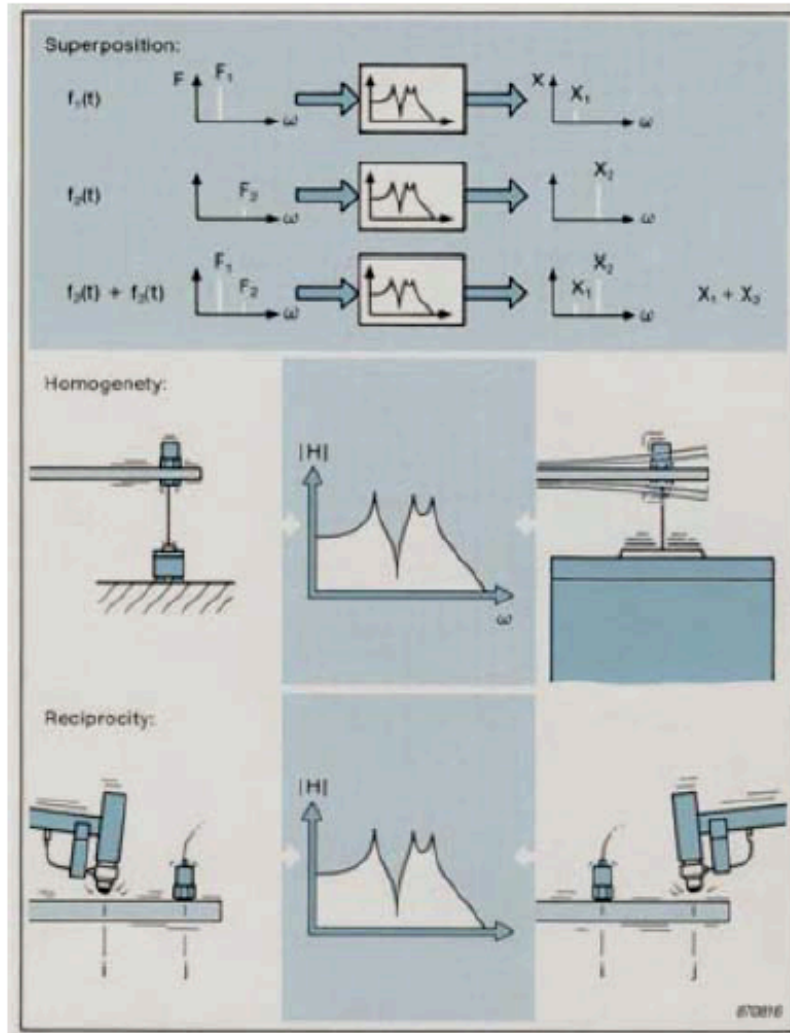
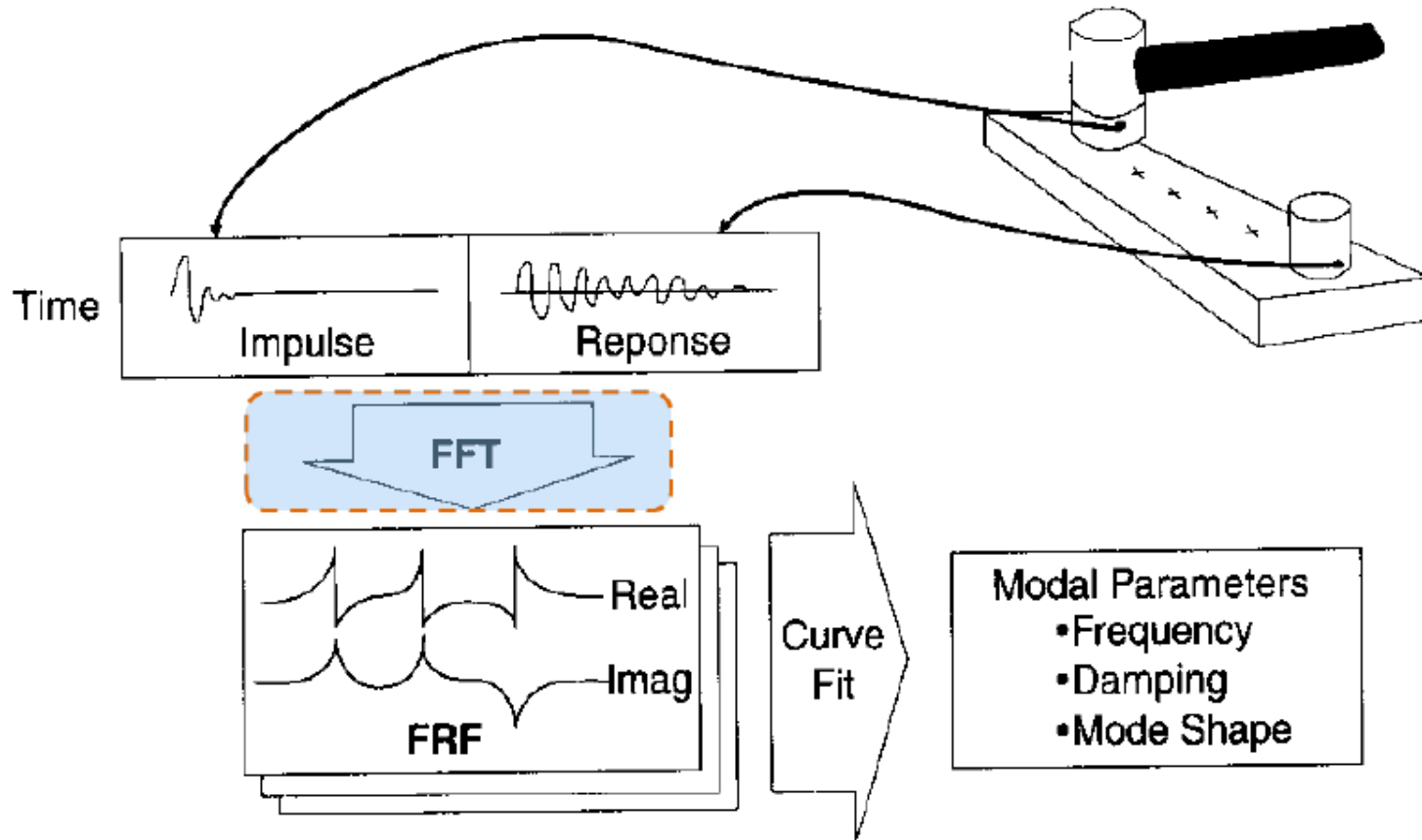
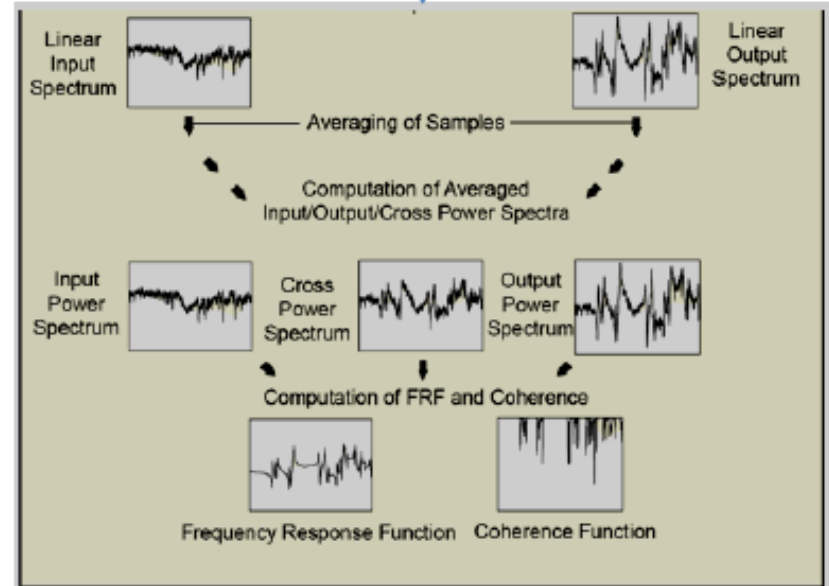
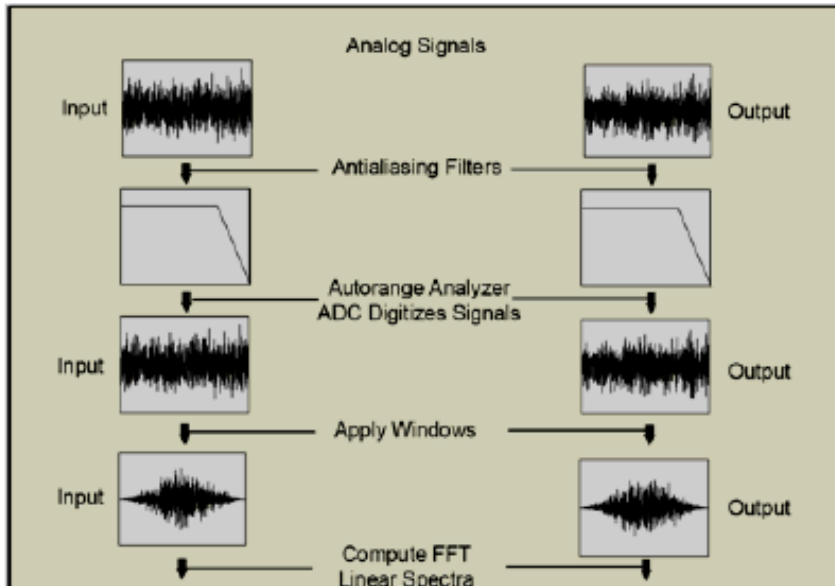


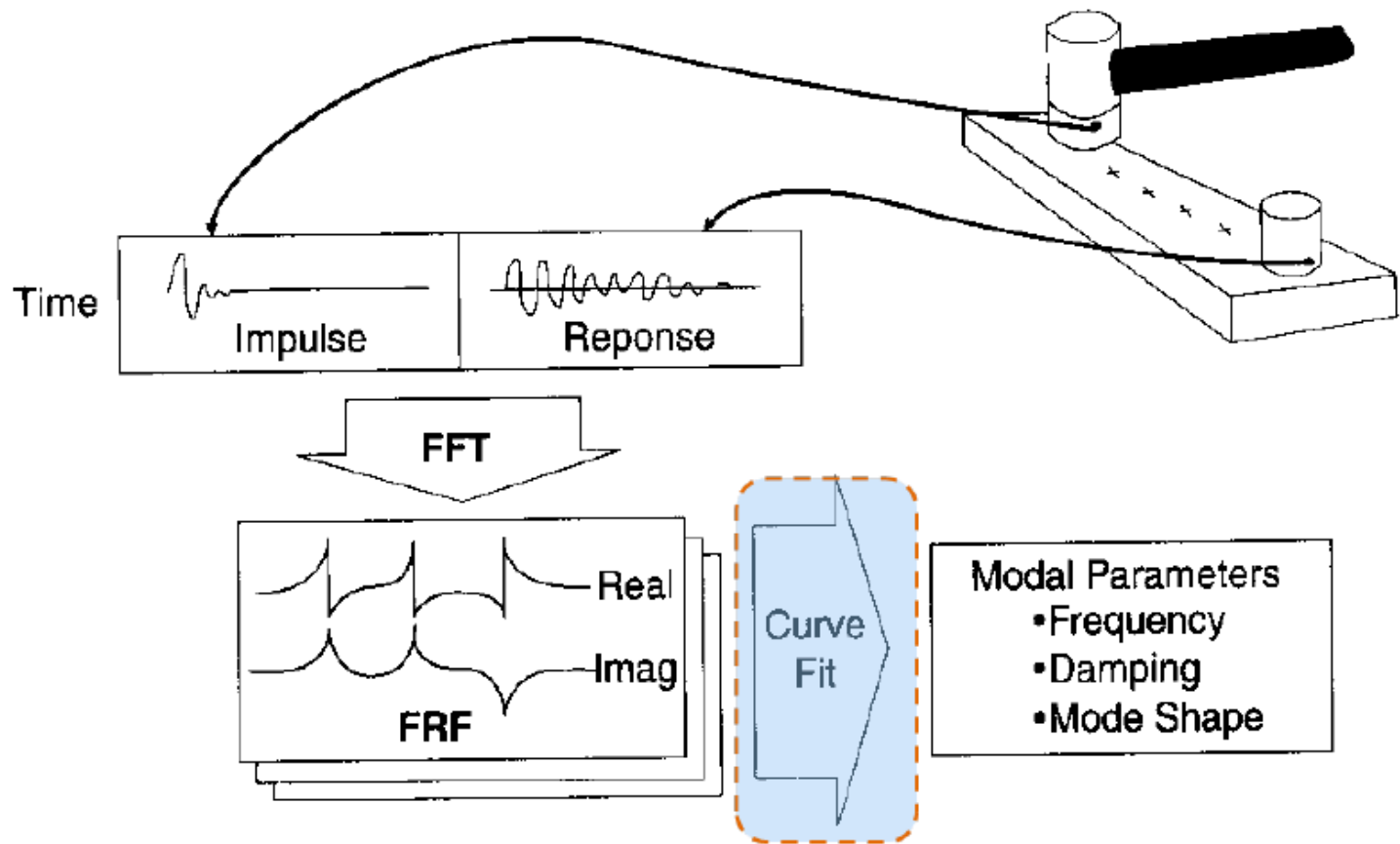
Figure 5. Simple plate sine dwell responses.

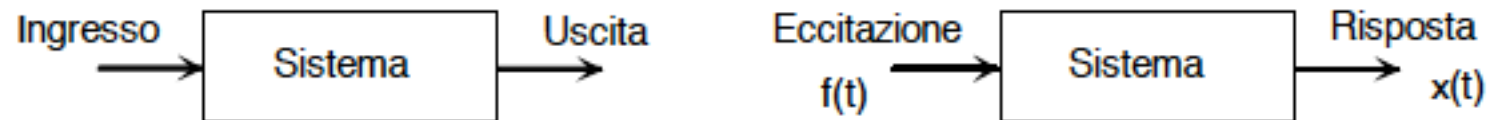
IPOSTESI DI LINEARITA'











Le caratteristiche di un sistema lineare a parametri costanti possono essere descritte dalla *funzione risposta all'impulso unitario* $h(\tau)$, che viene definita come la risposta del sistema in dato istante t ad un impulso unitario applicato all'istante $t - \tau$. L'utilità della funzione risposta all'impulso unitario deriva dal fatto che la risposta $x(t)$ di un sistema ad un ingresso arbitrario $f(t)$ è data dall'*integrale di convoluzione*:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Le ipotesi fondamentali alla base dell'analisi modale sono:

- SISTEMA LINEARE
- SISTEMA TEMPOINVARIANTE
- SISTEMA OSSERVABILE

Un sistema lineare a parametri costanti può anche essere caratterizzato dalla *funzione di trasferimento* $H(s)$, che è definita come la trasformata di Laplace della $h(\tau)$:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad s = \sigma + j\omega.$$

Le caratteristiche dinamiche del sistema possono essere descritte anche dalla *funzione risposta in frequenza* $H(\omega)$ (FRF), che è definita come la trasformata di Fourier della $h(\tau)$:

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

La funzione risposta in frequenza è semplicemente un caso particolare della funzione di trasferimento dove, nell'esponente $s = \sigma + j\omega$ si ha $\sigma = 0$.

Per sistemi fisici la funzione risposta in frequenza può sostituire la funzione di trasferimento senza alcuna perdita di informazione.

Definizioni

INGRESSO	USCITA	FRF	1/FRF
Forza	Accelerazione	Inertanza	Massa apparente
	Velocità	Mobilità	Impedenza
	Spostamento	Ricettanza	Rigidezza dinamica

SISTEMI A N GRADI DI LIBERTÀ E SISTEMI CONTINUI

Sistemi a N gdl

Un sistema con N gradi di libertà si può studiare come se fosse costituito da N sistemi con un singolo gdl.

Ad ogni modo corrispondono:

- * una pulsazione propria
- * uno smorzamento modale
- * una forma modale

Se in un punto del sistema con N gdl si applica una forzante sinusoidale $f(t) = F_0 \cos \omega t$, tutto il sistema vibra con pulsazione ω , le ampiezze (e le fasi) delle risposte dipendono da ω , si hanno N condizioni di risonanza.

La risposta del sistema viene descritta mediante funzioni risposta in frequenza (FRF):

$$H_{ij} = \frac{\text{risposta in "i"}}{\text{eccitazione in "j"}}$$

La FRF presenta N picchi di risonanza. La FRF del sistema è la “somma” delle FRF dei singoli modi propri.

SCHEMA DEL PROCEDIMENTO

1. Si scelgono i vincoli della struttura: se possibile, si preferiscono di solito vincoli molto cedevoli, a cui corrispondono moti di corpo rigido a frequenze molto basse, che non interferiscono con i modi di vibrare della struttura.
2. Si scelgono i punti (e quindi i corrispondenti n_m gradi di libertà) sulla struttura.
3. Si eccita in un punto (ad es. con uno *shaker elettrodinamico*) e si rilevano (ad es. con accelerometri) le risposte negli altri punti; oppure si rileva la risposta in un punto (ad es. con un accelerometro) e si eccita (ad es. con un martello strumentato) in corrispondenza di tutti gli altri punti.
4. L'eccitazione ed il rilievo vengono effettuati in un intervallo $\omega_{min} + \omega_{max}$ (di solito è $\omega_{min} \approx 0$): i modi rilevati sono tutti e solo quelli interni a tale intervallo.
5. Si trovano così n_m FRF.
6. Su ciascuna delle FRF così ottenute sono presenti N picchi, corrispondenti alle N pulsazioni proprie comprese nell'intervallo $\omega_{min} + \omega_{max}$ considerato, salvo l'eventuale presenza di nodi: se un gdl l cade in corrispondenza di un nodo del modo s , nella relativa FRF il picco in corrispondenza di ω_s non compare.
7. Si possono così ricavare, con la semplice osservazione dei picchi di risonanza ("*peak picking*"), le N pulsazioni proprie del sistema nell'intervallo di interesse.
8. Nell'intorno di ogni pulsazione naturale ω_s , trattando il sistema come se fosse ad un solo gdl, si ricava il coefficiente di smorzamento ζ_s (per esempio con il metodo della banda di mezza potenza).
9. Con il metodo del sistema ad un solo grado di libertà (*SDOF*), si ricavano infine X_{ls} e X_{ks} :

$$X_{ls} = \omega_s \sqrt{2\zeta_s \cdot |\alpha_{ll}(\omega_s)|} \quad X_{ks} = \frac{2\zeta_s \omega_s^2 \cdot |\alpha_{lk}(\omega)|}{X_{ls}}$$

AUTOCORRELAZIONE (AUTOCORRELATION)

L'autocorrelazione $R_{xx}(\tau)$ di una funzione $x(t)$ indica quanto la funzione stessa è correlata con sé stessa.

La definizione è:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

L'autocorrelazione di una funzione periodica è periodica. L'autocorrelazione di una funzione casuale tende a zero per $\tau \neq 0$.

La trasformata di Fourier di $R_{xx}(\tau)$ è detta *densità di potenza spettrale* (PSD) o *densità di autospettro* (ASD) e si indica di solito con $S_{xx}(\omega)$:

$$S_{xx}(\omega) = F\{R_{xx}(\tau)\}$$

La funzione $S_{xx}(\omega)$ è legata alla trasformata di Fourier di $x(t)$ dalla relazione:

$$S_{xx}(\omega) = X^*(\omega)X(\omega) = |X(\omega)|^2$$

dove il simbolo * indica il complesso coniugato.

La funzione $S_{xx}(\omega)$ è reale e contiene le informazioni sulle frequenze presenti in $x(t)$, ma non quelle sulle fasi.

Per diminuire gli errori di misura, si effettua la media di più misure:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k^*(\omega)X_k(\omega)$$

CORRELAZIONE INCROCIATA (CROSS-CORRELATION)

La *correlazione incrociata* $R_{xy}(\tau)$ di due funzioni $x(t)$, $y(t)$ indica quanto le due funzioni sono correlate fra loro. La definizione è:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+\tau)dt$$

La trasformata di Fourier di $R_{xy}(\tau)$ è detta *densità di spettro incrociato* (CSD) e si indica di solito con $S_{xy}(\omega)$:

$$S_{xy}(\omega) = \mathbf{F}\{R_{xy}(\tau)\}$$

La funzione $S_{xx}(\omega)$ è legata alle trasformate di Fourier di $x(t)$ e di $y(t)$ dalla relazione:

$$S_{xy}(\omega) = X^*(\omega)Y(\omega)$$

La funzione $S_{xx}(\omega)$ è una funzione complessa e contiene informazioni sulle frequenze e sulle fasi; inoltre risulta:

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}^*(\omega)$$

Per diminuire gli errori di misura, si effettua la media di più misure:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k^*(\omega)Y_k(\omega)$$

STIMA DELLA FRF

Se $f(t)$ è l'eccitazione e $x(t)$ è la risposta del sistema, la FRF si definisce come rapporto delle loro trasformate di Fourier:

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)}$$

Per diminuire gli errori di misura, si impiegano degli *stimatori* della FRF effettuando la media di più misure.

Stimatore H_1 :
$$H(\omega) = \frac{F^*(\omega)X(\omega)}{F^*(\omega)F(\omega)} = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} = H_1(\omega)$$

Lo stimatore H_1 riduce gli effetti dei disturbi all'uscita.

Stimatore H_2 :
$$H(\omega) = \frac{X^*(\omega)X(\omega)}{X^*(\omega)F(\omega)} = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xf}(\omega)} = H_2(\omega)$$

Lo stimatore H_2 riduce gli effetti dei disturbi all'ingresso.

In assenza di errori di misura, sarebbe $H_1(\omega) = H_2(\omega) = H(\omega)$.

Per giudicare l'attendibilità della misura si può usare la *funzione coerenza* γ^2 che indica quanto la risposta è coerente con l'eccitazione:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} = \frac{|S_{fx}(\omega)|^2}{S_{ff}(\omega)S_{xx}(\omega)}; \quad \text{risulta: } 0 \leq \gamma^2 \leq 1.$$

Se $\gamma^2 < 0.75$, i risultati sono poco attendibili, cioè il rapporto segnale/rumore è basso.

Altre cause che danno luogo a bassi valori della coerenza sono le seguenti:

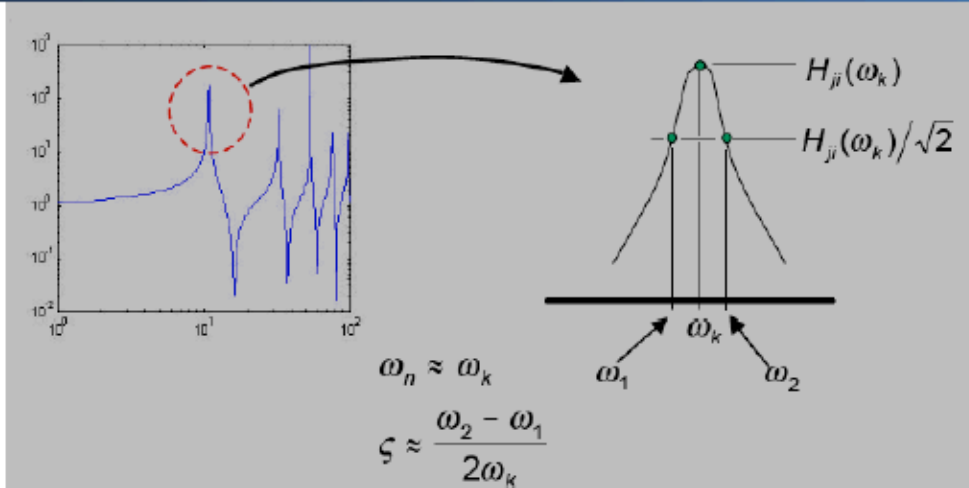
- * sono presenti altre eccitazioni che però non vengono misurate
- * il sistema presenta delle non linearità

CURVE FITTING METHODS

All curve fitting methods fall into one of the following categories,

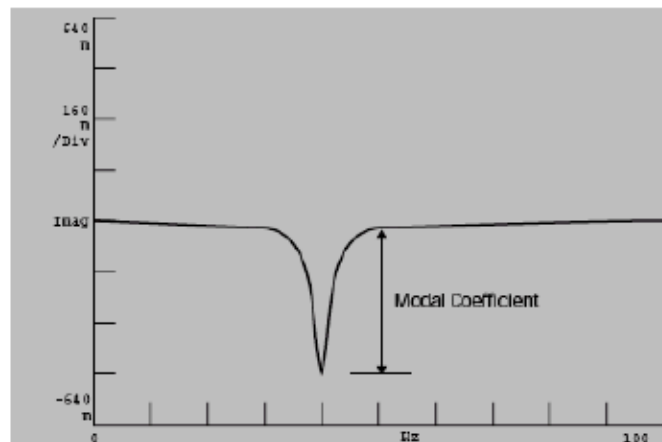
- **Local SDOF**
 - **Local MDOF**
 - **Global**
 - **Multi-Reference (Poly Reference)**
-
- **SDOF** methods estimate modal parameters *one mode at a time*.
 - **MDOF, Global, and Multi-Reference methods** can simultaneously estimate modal parameters for *two or more modes at a time*.

Curve fitting technique [Peak picking method]



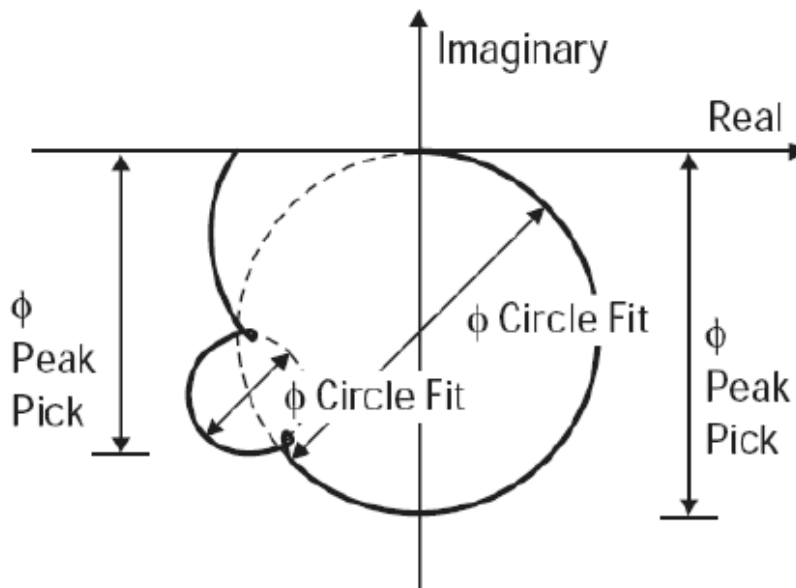
**Damping factor
from half power**


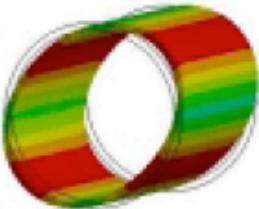
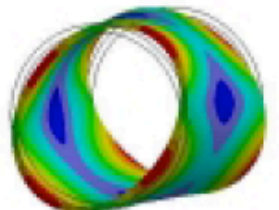



**Quadrature
peak pick**



Curve fitting techniques [Circle fit]

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_i \phi_j}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j(2\zeta\omega\omega_n)}$$



Modo	Modo	Frequenza naturale [Hz]
		1470
		1800
		4200