

■ Approfondimento 4.3

Introduzione al Metodo degli Elementi Finiti per le travi

In questo paragrafo si presenta un'introduzione al *Metodo degli Elementi Finiti*, con riferimento ai sistemi di travi elastiche, con il solo scopo di fornire agli allievi che iniziano lo studio delle strutture l'impostazione concettuale di base del metodo, rinviando per l'approfondimento ai numerosi testi specialistici esistenti. In particolare ci si riferirà ai modelli agli elementi finiti di tipo compatibile, che trovano la loro giustificazione teorica nel Principio di minimo dell'Energia Potenziale Totale.

Come mostrato in questo capitolo, i sistemi di travi possono essere risolti mediante i classici metodi delle forze e degli spostamenti, tuttavia per strutture più complesse, per geometria spaziale per tipo di carichi e condizioni di vincolo, quali per esempio una diga a gravità o un pezzo meccanico, una pala di turbina, o il guscio di una barca a vela, o una scarpa in frana, è indispensabile accedere al metodo di analisi strutturale degli Elementi Finiti, che ha segnato lo sviluppo dell'Ingegneria strutturale negli ultimi 50 anni.

Il metodo, nato nell'Ingegneria strutturale, è stato duttilmente importato in altri settori dell'ingegneria connessi con la diffusione del calore, la fluidodinamica, i campi elettromagnetici, la biomeccanica, ecc.

L'idea centrale del metodo è quella di suddividere idealmente la struttura in un numero di sottostrutture più piccole chiamate *elementi*; ciascun elemento viene poi modellato per quanto riguarda spostamenti, deformazioni, tensioni e legame costitutivo, tramite opportune funzioni dette "*di forma*" che forniscono la funzione spostamento sull'elemento, interpolando i valori da essi assunti in opportuni punti detti "*nod*i".

Il problema viene in tal modo "*discretizzato*" nel senso che viene ricondotto alla ricerca dei soli incogniti spostamenti nodali U , detti "*gradi di libertà*". L'assemblaggio dei diversi "elementi", tramite equazioni di congruenza, e la scrittura delle equazioni di equilibrio nodale fa pervenire, in perfetta similitudine con il metodo degli spostamenti sopra trattato per la trave, a un sistema di equazioni algebriche aventi la forma:

$$K \cdot U = F$$

la cui soluzione fornisce gli spostamenti nodali incogniti dai quali si ottengono tutti gli altri enti meccanici.

È evidente che la soluzione cui si perviene non è quella effettiva, ma solo una sua "*approssimante*",

in quanto i campi di spostamento modellati tramite le assegnate funzioni di forma, di norma polinomi di grado opportuno, forzano la soluzione che ha in generale una diversa espressione. Inoltre, la soluzione trovata soddisfa le condizioni statiche e cinematiche del problema reale solo in modo approssimato.

Il sistema di equazioni algebriche che si ottiene con questa procedura standard di elementi finiti è equivalente alla condizione di stazionarietà e di minimo del funzionale dell'*Energia Potenziale Totale*, all'interno del *metodo diretto di Ritz-Rayleigh*, precedentemente presentato.

L'aumento del numero di elementi, tramite il loro infittimento, specie nelle zone di accumulo di sforzi e deformazioni o in zone di complessa geometria, di norma conduce a soluzioni che meglio approssimano quella effettiva.

La grande efficienza del metodo in ambito elastico è stata decisiva per la sua estensione, in anni più recenti, a campi di utilizzo in condizioni più complesse, quali per esempio:

- Elasticità non lineare.
- Deformazioni e spostamenti finiti.
- Carichi non conservativi.
- Strutture elasto-plastiche e elasto-viscose.
- Plasticità, frattura e danneggiamento.
- Dinamica.
- Analisi strutturale limite e al collasso.
- Analisi sismica....

applicazioni per le quali esistono importanti testi esaustivi, sia in inglese sia in italiano [66].

L'idea centrale: elementi, matrice di rigidezza

Come si è visto nei paragrafi precedenti, la soluzione del metodo degli spostamenti è ricondotta alla risoluzione di un *sistema di equazioni algebriche* esprimendo gli equilibri nodali: il risultato costituisce una "*soluzione esatta*" del problema, in quanto risultano soddisfatte tutte le equazioni di equilibrio e di compatibilità che lo regolano.

Per strutture più complesse, si utilizza il metodo degli *Elementi Finiti* che qui di seguito viene presentato con riferimento alla struttura piana di Figura AP4.7, costituita da travi di materiale linearmente elastico.

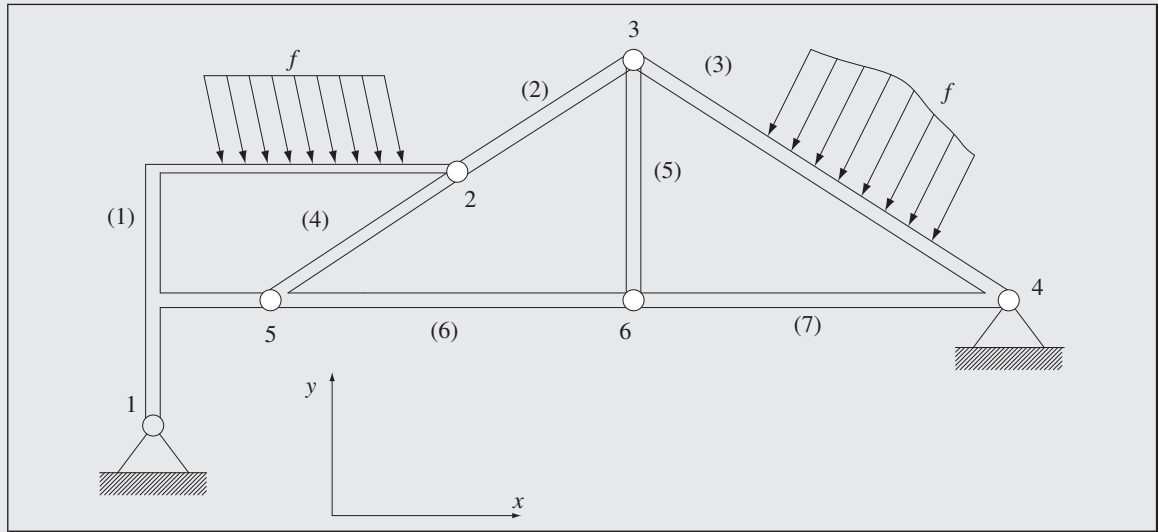


Figura AP4.7

La struttura è idealmente scomponibile in $n = 7$ parti, o elementi, numerati fra parentesi da (1) a (7). I nodi di interconnessione sono numerati da 1 a 6. Consideriamo per semplicità che i nodi di connessione siano incernierati, in modo da non trasmettere momenti.

Immaginiamo che, tramite apposita calcolazione o tramite esperimenti, sia stata determinata la risposta strutturale di ogni elemento, per esempio operando come nel **Paragrafo 4.8**. Consideriamo un generico elemento, per esempio quello (1), collegato al suolo o agli altri elementi tramite in nodi 1, 2, 5 (Figura AP4.8). Le forze nodali U e V siano univocamente legate agli spostamenti u e v dei nodi e ai carichi distribuiti. Per semplicità non si considerano qui gli effetti di distorsioni, variazioni termiche, ritiro o altri effetti anelastici.

Per l'elemento e -esimo come visto si perviene alla relazione:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e$$

ove \mathbf{f}^e è l'insieme delle forze nodali necessarie per equilibrare i carichi distribuiti sull'elemento e le $\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e$ rappresentano le forze nodali dovute ai soli spostamenti nodali \mathbf{u}^e , a essi legati dalla risposta elastica dell'elemento e -esimo; \mathbf{K}^e è la matrice di rigidità dell'elemento.

Similmente l'analisi preliminare dell'elemento permette di dedurre le tensioni σ in ogni suo punto in funzione degli spostamenti nodali.

La stessa procedura deve essere considerata per ciascun elemento costituente la struttura.

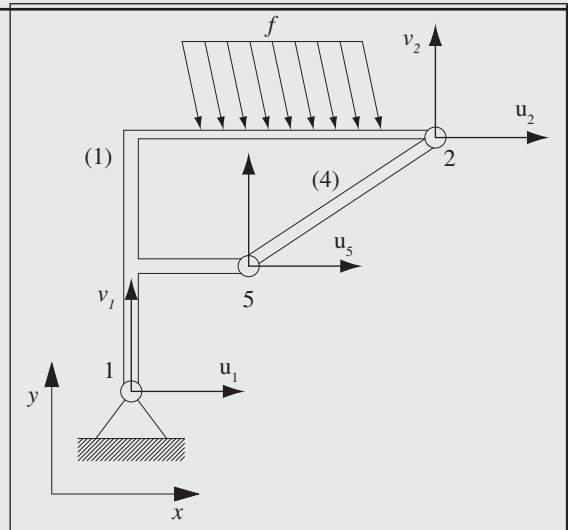


Figura AP4.8

Modificare: Paragrafo 4.9.

Le equazioni di equilibrio dei nodi della struttura, coinvolgenti gli elementi facenti capo ai nodi, unitamente alle condizioni di vincolo dei nodi vincolati, determinano il sistema di equazioni algebriche che fornisce la soluzione del problema.

La soluzione di una trave inflessa con gli Elementi Finiti

Come esempio introduttivo allo studio degli elementi finiti applicati alle travi elastiche si ritiene utile trat-

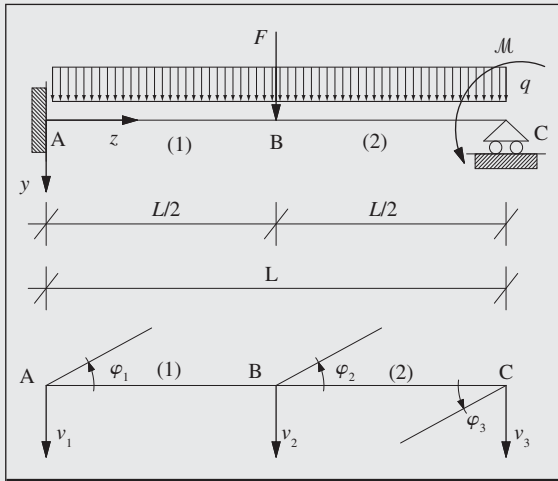


Figura AP4.9

tare quello della trave di Figura AP4.9 di luce L , linearmente elastica, incastrata in A e appoggiata in C, caricata con carico uniformemente distribuito q da una forza F al centro della campata B e da una coppia M in C. Si utilizzerà per la trave la teoria della flessione secondo Eulero-Bernoulli.

L'esercizio verrà svolto seguendo il metodo di Ritz-Raleigh utilizzando l'Energia Potenziale Totale.

La procedura solutiva è quella degli elementi finiti, utilizzando sottoelementi e particolari funzioni di forma, che perviene a un sistema di equazioni di equilibrio risolvibile.

Elementi-nodi

La trave viene suddivisa nei due elementi (1) e (2) di Figura AP4.9, con la scelta dei tre nodi

$$A = 1, B = 2 \text{ e } C = 3$$

Gradi di libertà nodali

Pertanto il vettore dei gradi di libertà nodali è quello di seguito riportato, che assembla ordinatamente spostamenti e rotazioni dei nodi 1, 2 e 3:

$$\mathbf{a} = [v_1 \ \varphi_1 \ v_2 \ \varphi_2 \ v_3 \ \varphi_3]^T$$

Funzioni di forma

Per descrivere lo spostamento trasversale dei due elementi costituenti la trave, si assumono funzioni di forma cubiche, ottenibili da risultati classici delle travi inflesse, come fatto nel [Paragrafo 4.8](#). In particolare

con riferimento al primo grado di libertà nodale v_1 , la funzione spostamento nel primo elemento è costituita dallo spostamento della trave AB per effetto di uno spostamento trasversale v_1 di A; si ha pertanto:

$$v = N_{11}v_1 = \frac{8}{L^3} \left(\frac{L}{2} - z \right)^2 \left(\frac{L}{2} + 2z \right) v_1$$

la funzione di forma del primo elemento, riferita al primo grado di libertà nodale, si scrive:

$$N_{11} = \frac{8}{L^3} \left(\frac{L}{2} - z \right)^2 \left(\frac{L}{2} + 2z \right)$$

Analogamente, la funzione di forma del primo elemento, riferita al secondo grado di libertà nodale del nodo 1, che è la rotazione φ_1 , viene indicata con N_{12} . Si ha $v = N_{12}\varphi_1$; si ha pertanto

$$N_{12} = z \left(1 - \frac{4z}{L} + \frac{4z^2}{L^2} \right)$$

Le funzioni N_{11} e N_{12} presentano i grafici di figura seguente.

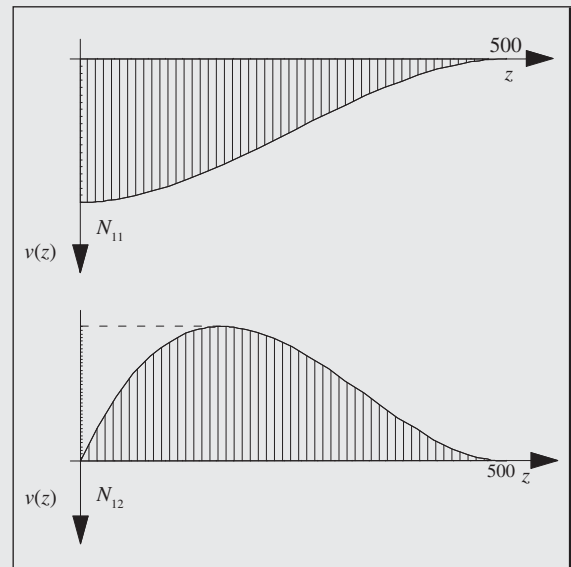


Figura AP4.10

Per l'elemento (1) si procede poi similmente per quanto riguarda il grado di libertà di spostamento del nodo 2, chiamato v_2 , per il quale si ha: $v = N_{13}v_2$, con

$$N_{13} = \frac{8(3L/2 - 2z)z^2}{L^3};$$

per il grado di libertà di rotazione del nodo 2, indicato con φ_2 , per il quale si ha: $v = N_{14}\varphi_2$, risulta

$$N_{14} = -\frac{4(L/2 - z)z^2}{L^2}$$

In figura seguente si riportano i grafici di N_{13} e N_{14} .

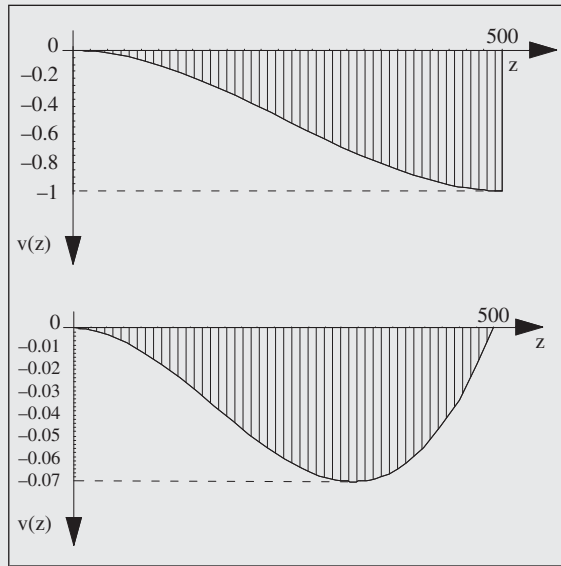


Figura AP4.11

Per l'elemento (2) di estremi B e C, si procede in modo del tutto analogo a quello seguito per quello (1). Le funzioni di forma sono ordinatamente quelle definite dalle espressioni seguenti, funzioni nel secondo elemento della variabile $x = z - L/2$:

$$v = N_{23}v_2, \quad N_{23} = \frac{8}{L^3}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2\left(\frac{L}{2} + 2x\right)$$

$$v = N_{24}\varphi_2, \quad N_{24} = x\left(1 - \frac{4x}{L} + \frac{4x^2}{L^2}\right)$$

$$v = N_{25}v_3, \quad N_{25} = \frac{8}{L^3}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2\left(\frac{L}{2} - 2x\right)$$

$$v = N_{26}\varphi_3, \quad N_{26} = \frac{4x^2}{L^2}\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

I grafici di queste quattro funzioni di forma sono esattamente uguali a quelli già riportati sopra per l'elemento (1).

Si nota qui esplicitamente che, per motivi didattici, le funzioni di forma cubiche qui assunte per gli

spostamenti delle travi sono di potenza minore di quella del quarto ordine costituente l'effettiva soluzione del problema. Questa situazione è peraltro quella usualmente riscontrata nel caso di soluzione di strutture spaziali complesse, nelle quali le funzioni di forma sono necessariamente funzioni molto semplici. Ciò conduce, come verrà accennato, a soluzioni "approssimanti" quella reale.

Spostamenti interpolanti

A questo punto si possono scrivere le espressioni degli spostamenti nei due elementi. Per il primo elemento si ha:

$$v = \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{a}, \text{ ove } \mathbf{N}_1 = [N_{11} \ N_{12} \ N_{13} \ N_{14} \ 0 \ 0]$$

mentre per il secondo elemento si ha:

$$u = \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{a}, \text{ con } \mathbf{N}_2 = [0 \ 0 \ N_{23} \ N_{24} \ N_{25} \ N_{26}]$$

Energia di deformazione della trave

Si può a questo punto scrivere l'energia di deformazione, o potenziale elastico della trave, i cui spostamenti sono quelli ottenuti qui sopra.

Basta ricordare che la curvatura elastica χ della trave, in funzione degli spostamenti è fornita dalla

$$\chi = -\frac{d^2v}{dz^2} = -v''$$

Il momento flettente della trave linearmente elastica vale $M = EI\chi = -EIv''$. Pertanto l'energia specifica di deformazione elastica flessionale si scrive

$$\Phi = \frac{1}{2}M\chi = \frac{1}{2}EI(v'')^2$$

Con gli spostamenti dati dalle espressioni di sopra si calcola l'energia di deformazione specifica nei due elementi:

Elemento (1).

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2}EI(v'')^2 = \frac{1}{2}EI\left[\left(\frac{d^2dz^2}{\mathbf{N}_1}\right) \cdot \mathbf{a}\right]^2 = \\ &= \frac{1}{2}EI[\mathbf{N}_1'' \cdot \mathbf{a}]^2 \end{aligned}$$

con:

$$\mathbf{N}_1'' \leftarrow$$

$$\left[-\frac{24(L-4z)}{L^3}, -\frac{8(L-3z)}{L^2}, \frac{24(L-4z)}{L^3}, -\frac{4(L-6z)}{L^2}, 0, 0 \right]$$

Elemento (2).

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2}EI(u'')^2 = \frac{1}{2}EI \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N}_2 \right) \cdot \mathbf{a} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2}EI[\mathbf{N}_2'' \cdot \mathbf{a}]^2\end{aligned}$$

con:

$$\mathbf{N}_2'' = \left[0 \quad -\frac{24(L-4x)}{L^3} \quad \frac{8(L-3x)}{L^2} \quad \frac{24(L-4x)}{L^3} \quad -\frac{4(L-6x)}{L^2} \right]$$

Condizioni di vincolo

Per la trave in esame, le condizioni imposte dai vincoli presenti in A e in C sono: $v_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $v_3 = 0$ e determinano pertanto per il vettore dei parametri di libertà la forma:

$$\mathbf{a} = [0 \quad 0 \quad v_2 \quad \varphi_2 \quad 0 \quad \varphi_3]^T$$

rendendolo dipendente dai soli gradi di libertà liberi $v_2, \varphi_2, \varphi_3$, che si assemblano nel vettore dei parametri nodali liberi: $\mathbf{a}_l = [v_2 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]^T$.

Energia potenziale totale

L'energia potenziale totale della trave (4.4) si scrive:

$$\begin{aligned}\Pi &= \int_0^{L/2} \Phi(v) dz + \int_0^{L/2} \Phi(u) dx - \int_0^{L/2} q v dz + \\ &- \int_0^{L/2} q u dx - F v_2 - M \varphi_3 = \\ &\int_0^{L/2} \frac{1}{2} EI [\mathbf{N}_1'' \cdot \mathbf{a}]^2 dz + \int_0^{L/2} \frac{1}{2} EI [\mathbf{N}_2'' \cdot \mathbf{a}]^2 dx + \\ &- \int_0^{L/2} q v dz - \int_0^{L/2} q u dx - F v_2 - M \varphi_3\end{aligned}$$

Le elaborazioni di questo esercizio sono state sviluppate a mezzo del codice di calcolo Mathematica della Wolfram.

Matrice di rigidezza-soluzione

La condizione di stazionarietà dell'energia potenziale totale è data dal sistema di equazioni lineari:

$$\frac{d\Pi}{dv_2} = 0, \quad \frac{d\Pi}{d\varphi_2} = 0, \quad \frac{d\Pi}{d\varphi_3} = 0$$

che si esplicita:

$$\begin{bmatrix} \frac{192EI}{L^3} & 0 & \frac{24EI}{L^2} \\ 0 & \frac{16EI}{L} & \frac{4EI}{L} \\ \frac{24EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} + F \\ 0 \\ -\frac{qL^2}{48} + M \end{bmatrix}$$

Questo sistema lineare di equazioni, scritto nella forma assoluta $\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_l = \mathbf{f}$, per quanto già mostrato corrisponde a condizioni di equilibrio nodale ed evidenzia per la \mathbf{K} il significato di matrice di rigidezza della struttura. L'inversione della \mathbf{K} determina la soluzione del problema consegnata nei valori degli incogniti gradi di libertà liberi:

$$\mathbf{a}_l = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7FL^3 - 24ML^2 + 4qL^4}{768EI} \\ \frac{3FL^2 - 24ML + 2qL^3}{348EI} \\ \frac{-3FL^2 + 24ML - 2qL^3}{96EI} \end{bmatrix}$$

La sostituzione dei valori della \mathbf{a}_l nella \mathbf{a} permette di dedurre l'espressione del campo di spostamento nei due elementi:

$$v = \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{a}; \quad u = \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{a}$$

costituente l'approssimazione ottenuta con gli EF.

Per il seguente dimensionamento della trave e dei carichi:

$$L = 500 \text{ cm}, \quad E = 2 \cdot 10^7 \text{ Ncm}^{-2}, \\ \text{trave in profilato metallico IPE300}, \quad I = 8356 \text{ cm}^4, \\ q = 400 \text{ Ncm}^{-1}, \quad F = 50000 \text{ N}, \quad M = 2 \cdot 10^6 \text{ Ncm}$$

si ottiene:

$$v = \frac{-z^2(-3.385 \cdot 10^5 + 827z)}{8.423 \cdot 10^9} \text{ cm}$$

$$u = \frac{(-250+x)(-3.294 \cdot 10^7 - 1.885 \cdot 10^5 x + 373x^2)}{8.423 \cdot 10^9} \text{ cm}$$

correggere: u

Il grafico degli spostamenti trovati è riportato di seguito:

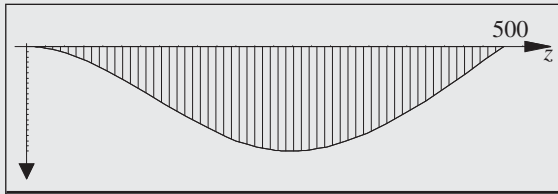


Figura AP4.12

Per derivazione degli spostamenti si ottiene il momento flettente nei due elementi, riferito allo stesso asse z :

$$M_1 = -EIv'' = -14.1 \cdot 10^6 + 1.034 \cdot 10^5 z \text{ Ncm}$$

$$M_2 = -EIu'' = 23,39 \cdot 10^6 - 4662,5z \text{ Ncm}$$

il cui grafico è consegnato nella Figura AP4.13.

Come osservato, gli spostamenti ottenuti con la procedura degli EF, sono solo un'approssimazione cubica di quelli effettivi, che sono in realtà dati da polinomi di quarto grado.

Ne consegue che il momento flettente, è stato ottenuto con forma lineare, che approssima quella ef-

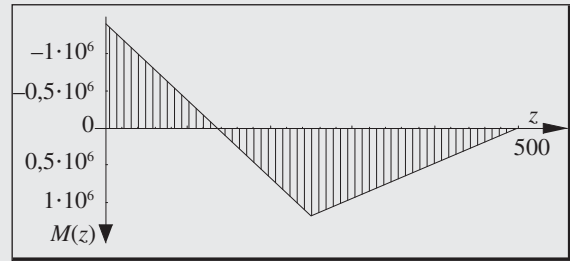


Figura AP4.13

fettiva costituita da parabole. Tale aspetto degli EF è connesso con la scelta di effettuare un'approssimazione dei campi soluzione, che pertanto non soddisfano completamente le equazioni del problema. In particolare, l'approssimazione scelta per il campo di spostamento, forzata dalle funzioni di forma assunte, risulta più povera rispetto alla soluzione e configura dunque una trave più rigida di quella effettiva. Gli spostamenti approssimanti sono pertanto generalmente più piccoli di quelli effettivi. Il momento flettente e, a seguire, il taglio non soddisfano completamente le equazioni di equilibrio. La soluzione cui si perviene ha peraltro la caratteristica di essere la migliore in senso energetico, nell'ambito di quelle approssimate dalla famiglia di funzioni di forma scelte.

4.10.1 Utilizzo del II teorema di Castigliano per la ricerca di spostamenti e rotazioni su strutture isostatiche

■ Esempio 4.23

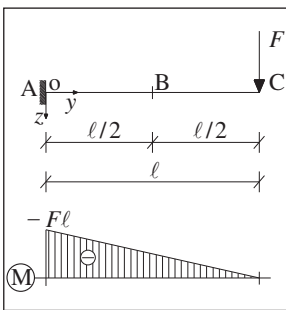


Figura 4.48

- ① $M_1(z) = -F(l-z) - \mathfrak{M}$
- ② $M_2(z) = -F(l-z)$

Si voglia determinare la rotazione della sezione B di mezzeria della mensola di Figura 4.48

Seguendo lo spirito del II teorema di Castigliano si considera la struttura ausiliaria di Figura 4.49, ottenuta da quella effettiva, alla quale è stata aggiunta una coppia oraria nella sezione B in oggetto, ente statico duale della rotazione cercata.

Il momento flettente nel tratto AB vale φ_B : ①. E nel tratto BC: ②.

L'energia complementare flessionale della trave vale:

$$\Phi_c^l = \frac{1}{2} \left[\int_0^{l/2} \frac{M_1^2}{EI} dz + \int_{l/2}^l \frac{M_2^2}{EI} dz \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{F^2 l^3}{3EI} + \frac{3Fl^2 \mathfrak{M}}{4EI} + \frac{\mathfrak{M}^2 l}{2EI} \right)$$

È immediato riconoscere nei tre addendi che costituiscono l'energia complementare, Φ_c^l , nell'ordine, il termine diretto dipendente da F , quello misto dovuto a F e \mathfrak{M} e quello diretto dovuto a \mathfrak{M} .