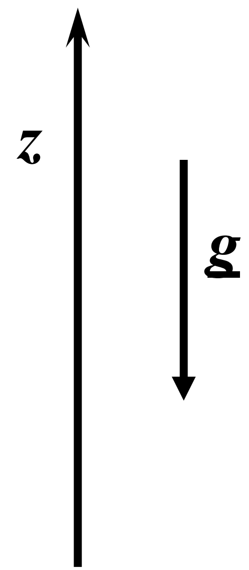
FLUIDOSTATICA

Eq. Bilancio Q. d. M.

$$\cancel{\frac{\partial(\rho\underline{V})}{\partial t}}+\cancel{\underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{V}\underline{V})}+\underline{\nabla}p-\cancel{\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}}_d}=\rho\,\underline{g}$$

Fluido in quiete $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial(\rho\underline{V})}{\partial t}=0\;;\;\;\underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{V}\underline{V})=\mathbf{0}\;;\;\;\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}}_d=0$

$$\boxed{\underline{\nabla}p-\rho\,\underline{g}=0}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0\\[2ex]\dfrac{\partial p}{\partial y}=0\\[2ex]\dfrac{\partial p}{\partial z}+\rho\left|\underline{g}\right|=0\end{array}}$$



Equazioni della fluidostatica

IDROSTATICA

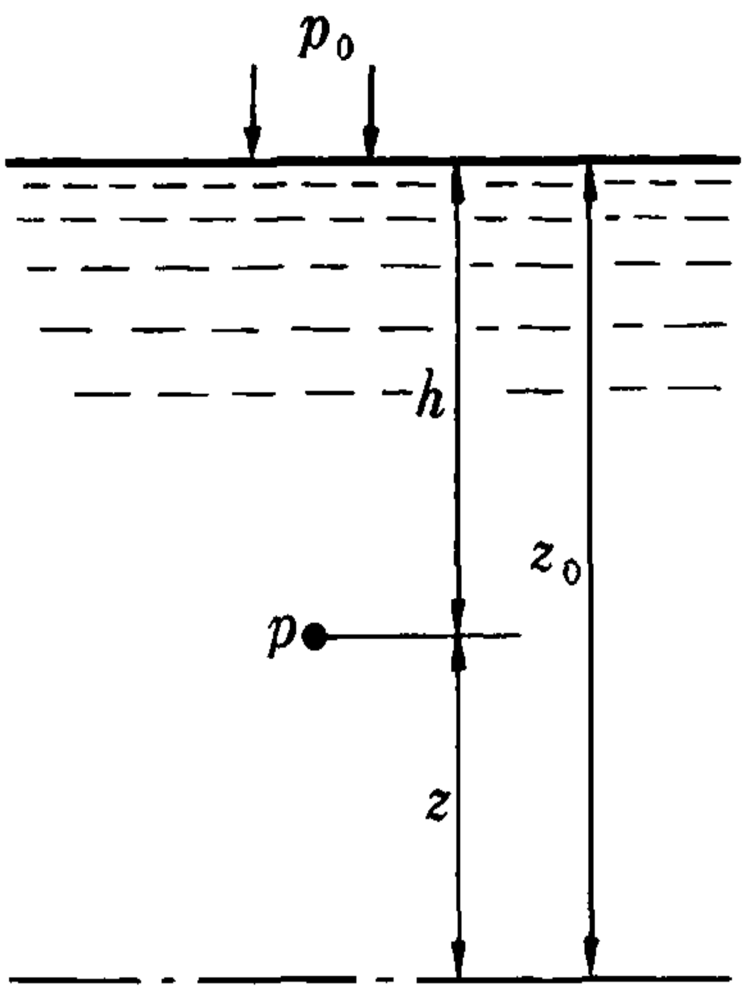
$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z} + \rho \left| \boldsymbol{g} \right| = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{dz} + \rho\, \boldsymbol{g} = 0$$

Ipotesi: densità costante, g costante

$$p = -\rho\, \boldsymbol{g} \int \boldsymbol{dz} = -\rho\, \boldsymbol{g}\, \boldsymbol{z} + \boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{p = p_0 \quad per \quad z = z_0 \quad \rightarrow \quad C = p_0 + \rho\, g\, z_0}$$

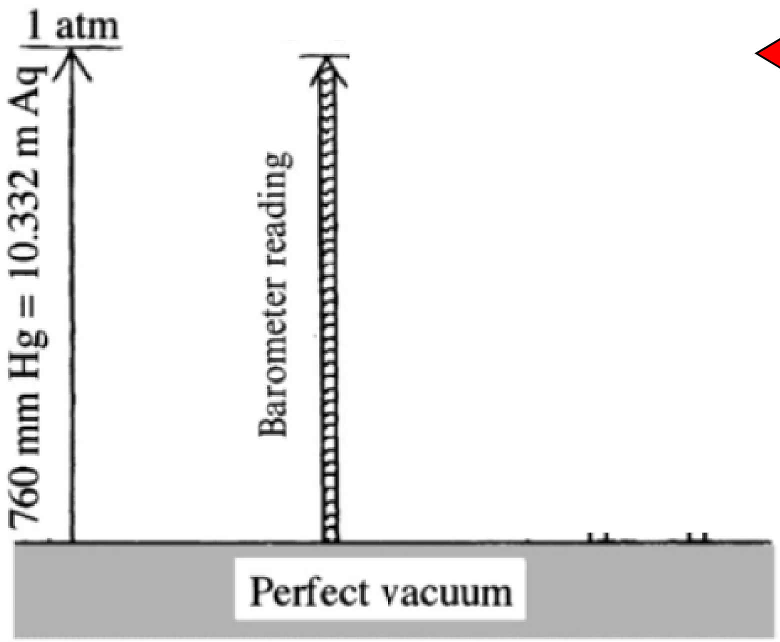
$$\boxed{p = p_0 + (z_0 - z)\rho\, \boldsymbol{g} = p_0 + \rho\, \boldsymbol{g}\, \boldsymbol{h}}$$



Legge di Stevino

A parità di altezza nello stesso fluido, si ha la stessa pressione

MISURA DELLA PRESSIONE
PRESSIONE ASSOLUTA E PRESSIONE RELATIVA



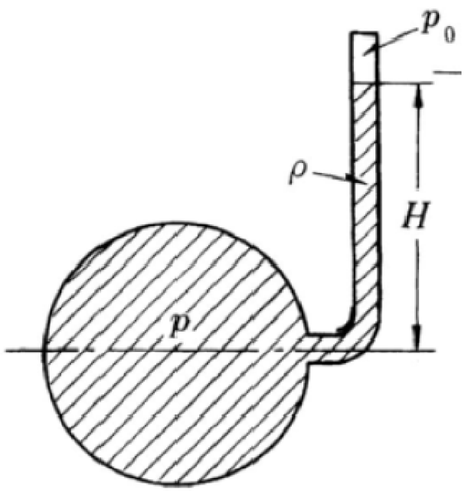
Pressione atmosferica
(1.013 x $10^5 N/m^2$)

Vuoto perfetto

gauge = relativa (quella letta da un usuale manometro)

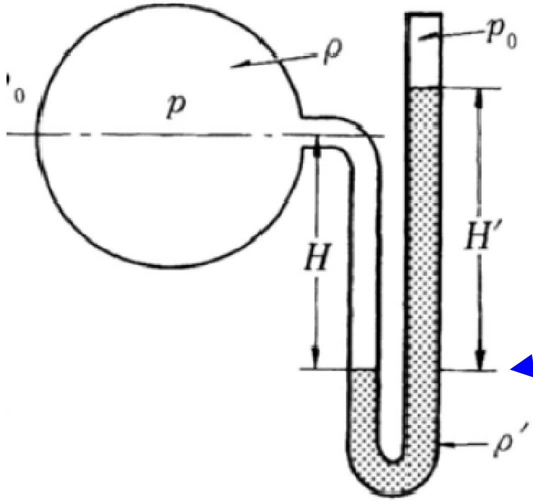
Pressione assoluta = Pressione atmosferica + Pressione relativa

MISURA DELLA PRESSIONE



$$\boxed{\boldsymbol{p = p_o + \rho\, g\, H}}$$

Oppure con liquido manometrico con densità ρ'



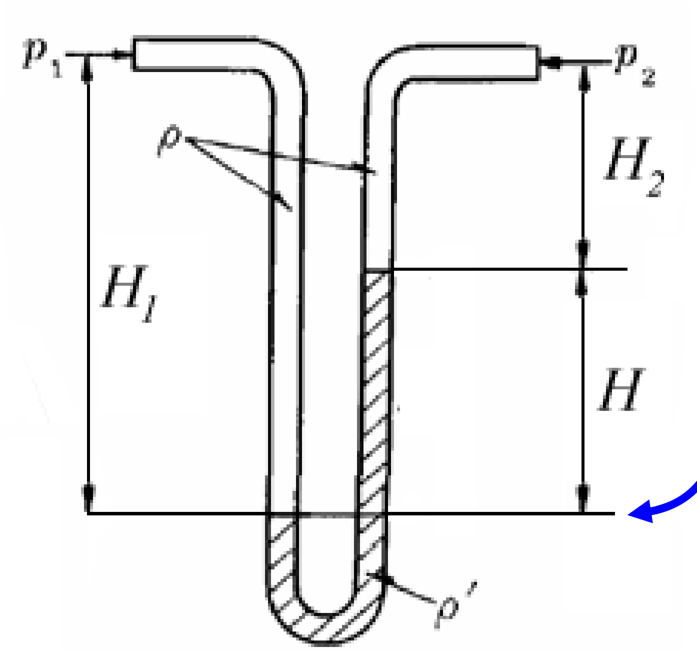
$$p + \rho\, \mathbf{g}\, \boldsymbol{H} = p_o + \rho'\, \mathbf{g}\, \boldsymbol{H'}$$

$$\boxed{p = p_o + \rho'\, \mathbf{g}\, \boldsymbol{H'} - \boldsymbol{\rho}\, \mathbf{g}\, \boldsymbol{H}}$$

$$se\ \ \rho\, \mathbf{g}\, \boldsymbol{H} << \boldsymbol{\rho'}\, \mathbf{g}\, \boldsymbol{H'}$$

$$\boxed{\boldsymbol{p = p_o + \rho'\, g\, H'}}$$

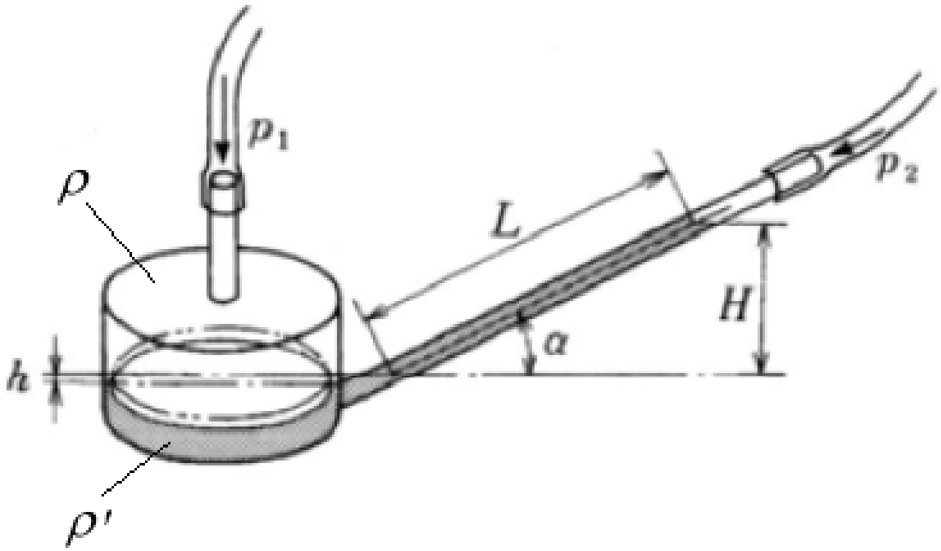
MISURA DELLA PRESSIONE
Manometri differenziali



$$p_1 + \rho\, g\, H_1 - \rho'\, g\, H - \rho\, g\, H_2 = p_2$$

$$\boxed{p_1 - p_2 = (\rho' - \rho)\; g\, H}$$

se $\rho << \rho'$ $\rightarrow$ $\boxed{p_1 - p_2 = \rho'\, g\, H}$



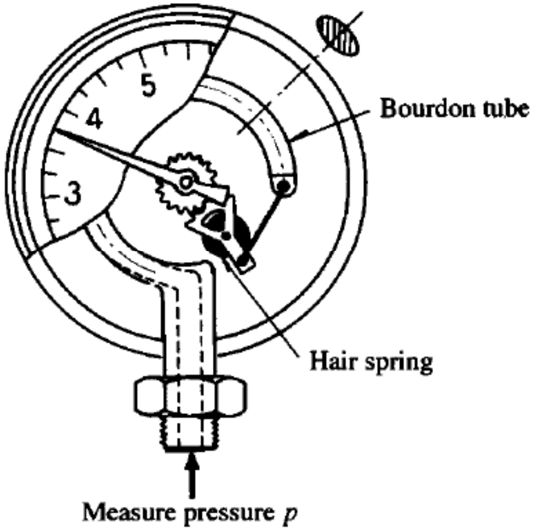
$$H >> h \quad ; \quad \rho << \rho'$$

$$H = L \sin\alpha$$

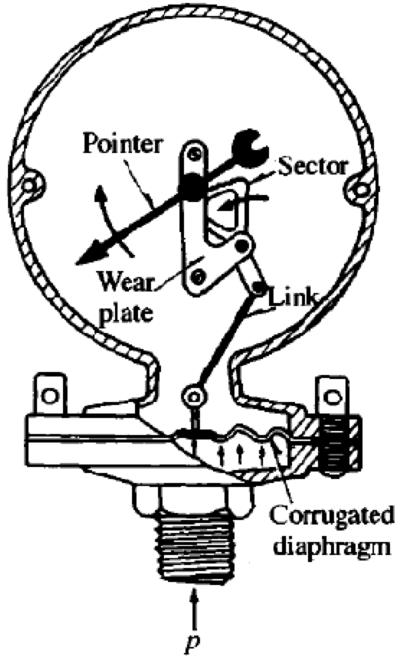
$$\boxed{p_1 - p_2 = \rho'\, g\, L \sin\alpha}$$

MISURA DELLA PRESSIONE

Manometri



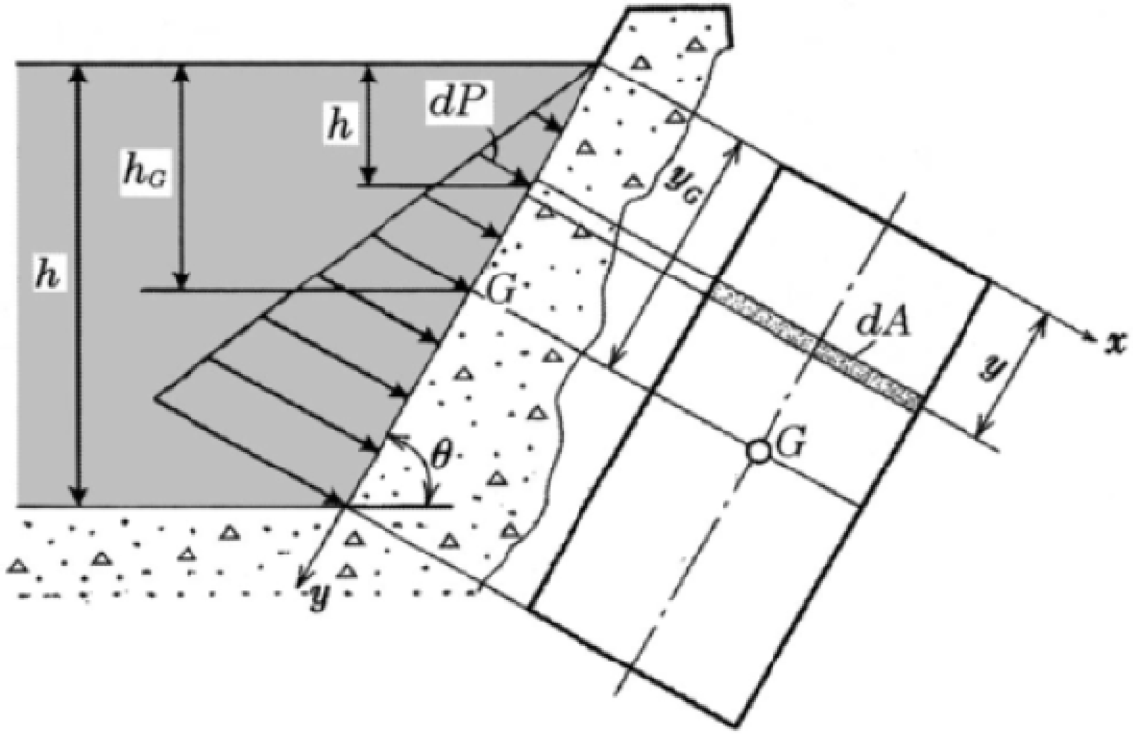
Manometro
Bourdon
(pressioni + alte)



Manometro a
diaframma
(pressioni + basse)

Trasduttore
(qualunque pressione)

SPINTE SU SUPERFICI IMMERSE

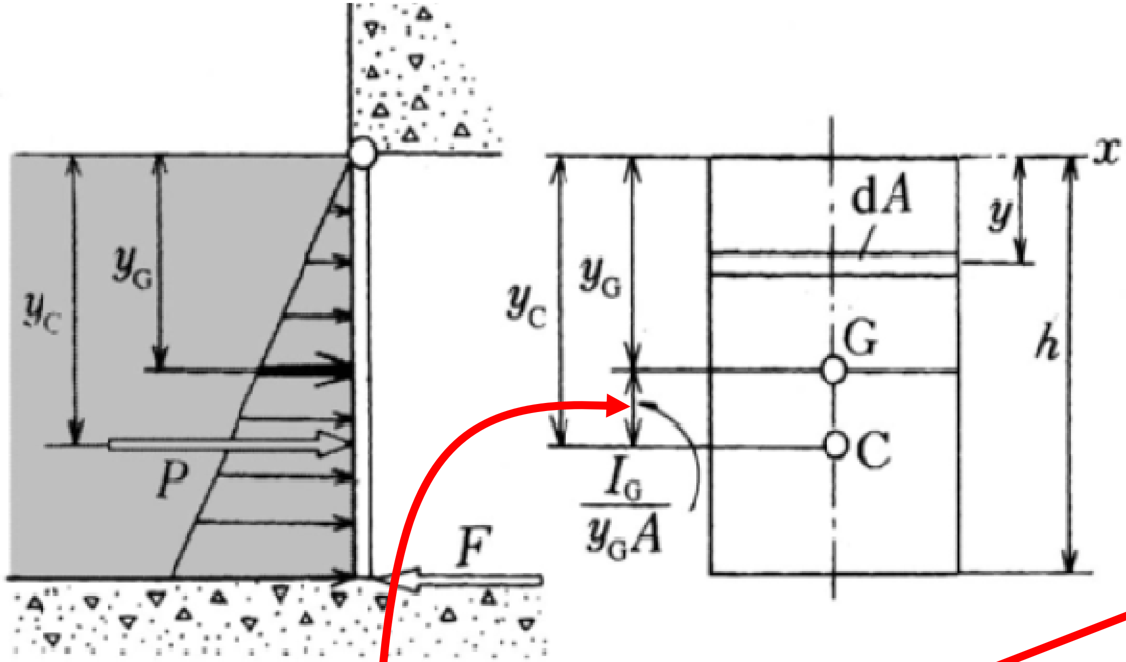


$$dP = \rho\, g\, h\, dA = \rho\, g\, y \sin\theta\, dA$$

$$P = \int_A dP = \int_A \rho\, g\, y \sin\theta\, dA = \rho\, g \sin\theta \int_A y\, dA \qquad y_G = \frac{1}{A}\int_A y\, dA$$

$$\boxed{P = \rho\, g \sin\theta\, y_G\, A = \rho\, g\, h_G\, A}$$

SPINTE SU SUPERFICI IMMERSE



$$dP = \rho\, g\, y\, dA$$

$$P = \rho\, g\, y_G\, A$$

$$dM_x = dP\, y = \rho\, g\, y\, dA\, y$$

$$M_x = \int_A y\,dP = \int_A \rho\, g\, y^2\, dA = \rho\, g \int_A y^2\, dA = \rho\, g\, I_x$$

$$M_x = P\, y_C = \rho\, g\, I_x$$

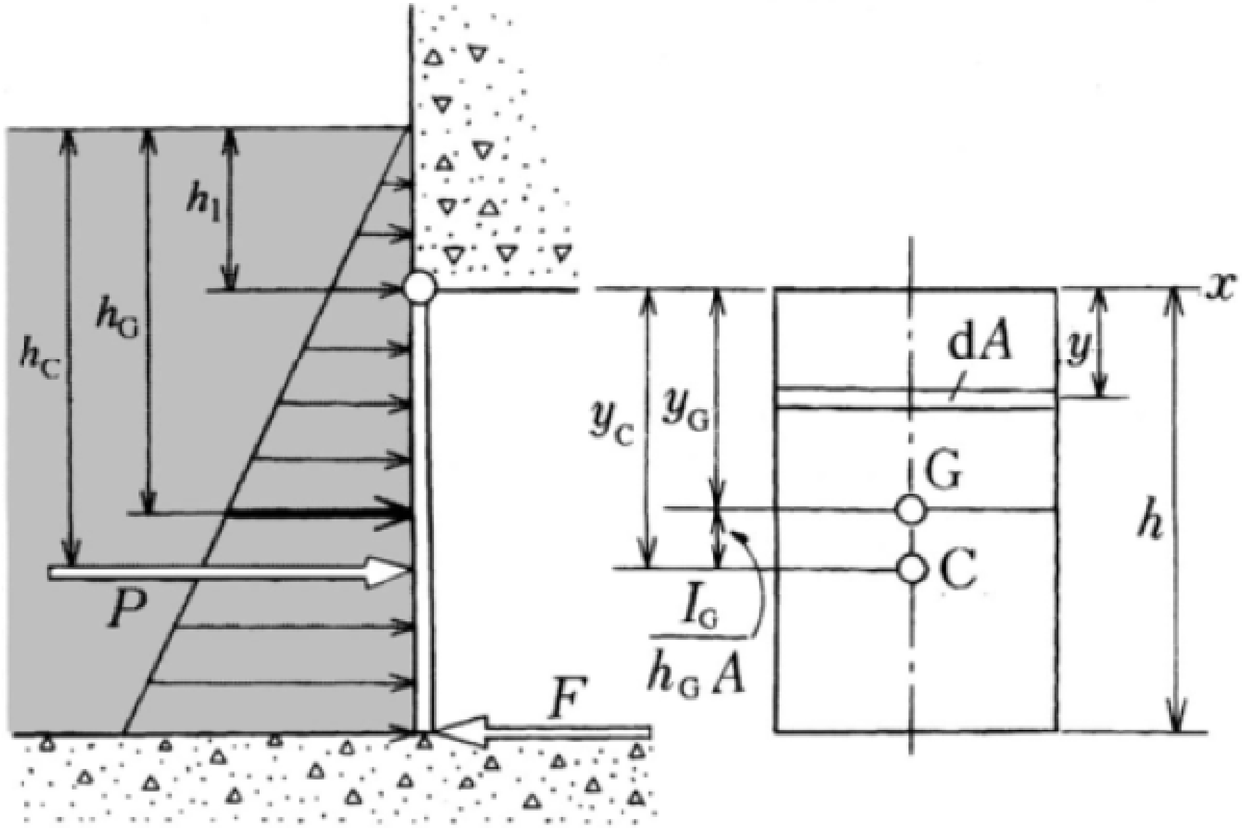
Ricordando che $I_x = I_G + A\, y_G^2$

$$\boxed{y_C = y_G + \frac{I_G}{A\, y_G}}$$

Area rettangolare
$A = b\, h$

$$\boxed{y_C = y_G + \frac{bh^3}{12\, A\, y_G} = y_G + \frac{h^2}{12\, y_G}}$$

SPINTE SU SUPERFICI IMMERSE



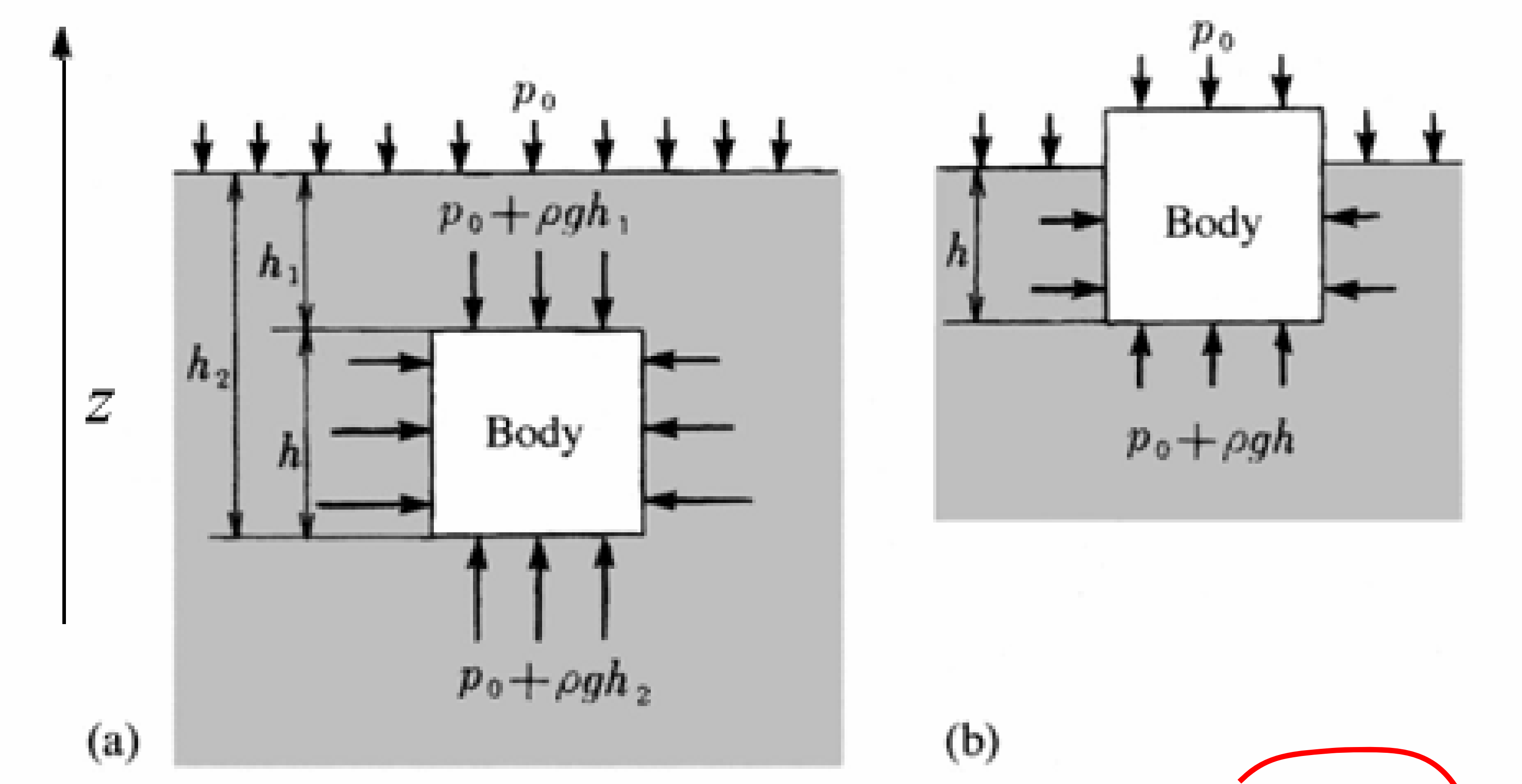
$$y_C = y_G + \frac{bh^3}{12\ A\ y_G} = y_G + \frac{h^2}{12\ y_G}$$

$$\boxed{y_C = y_G + \frac{h^2}{12\ h_G}}$$

se $h_1 = 0$ $\quad \boxed{y_C = y_G + \frac{h}{6}}$

SPINTE SU CORPI IMMERSI

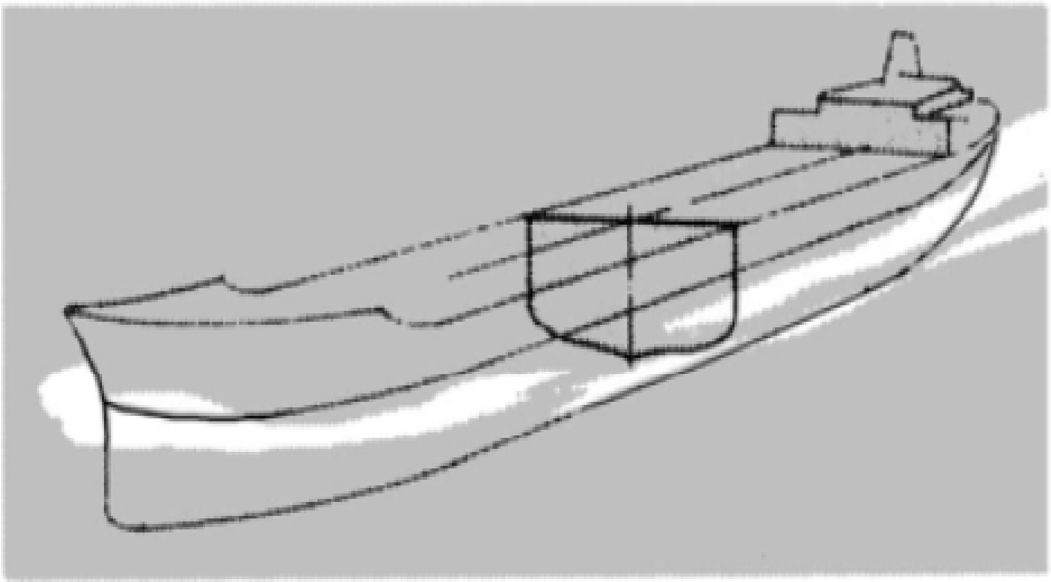
Principio di Archimede

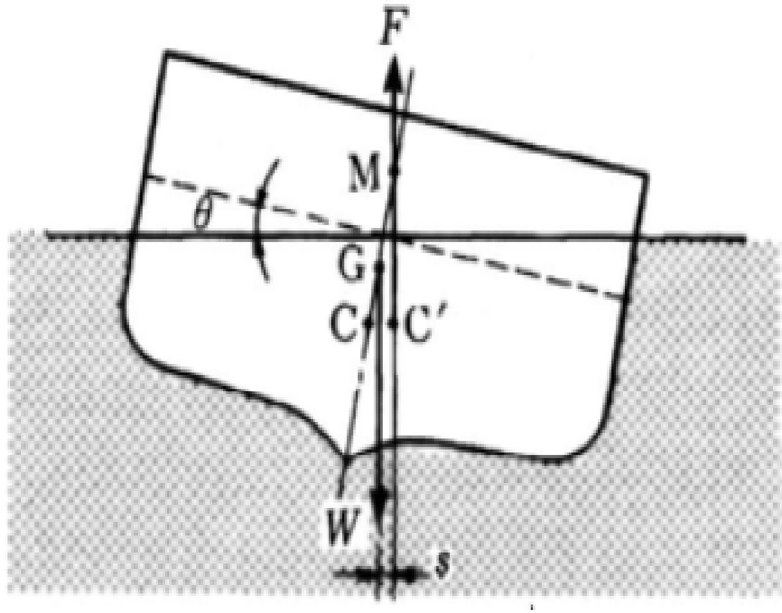


$$\boxed{F_z = -\left(p_0 + \rho\, g\, h_1\right)A + \left(p_0 + \rho\, g\, h_2\right)A = \rho\, g\, h\, A = \rho\, g\, \mathcal{V}}$$

$\mathcal{V}$ = ***Volume di fluido spostato***

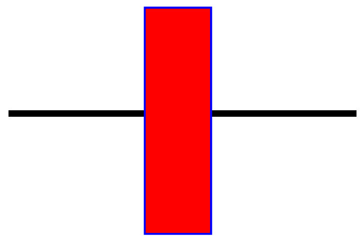
STABILITA' DI CORPI IMMERSI





C e C' = baricentri della parte immersa (orizzontale e inclinata)

G = baricentro del corpo

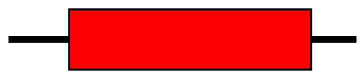


W = forza peso

F = forza di galleggiamento = ***W***

M = metacentro (punto di incontro tra la ***F*** e la **CG**)

Distanza **GM** = altezza metacentrica > 0



APPLICAZIONI SU MISURE DI PRESSIONE

Nome dell'unità di misura	**Unità**	**Conversione**
Pascal	Pa	1 Pa = 1 N/m^2
Bar	bar	1 bar = 0,1 MPa
Metri d'acqua	m di H_2O	1 m di H_2O = 9806.65 ~~M~~Pa
Pressione atmosferica	atm	1 atm = 101.325 Pa
Metri di mercurio	m di Hg	1 m di Hg = 1/0,76 atm
Torr	torr	1 torr = 1 mm Hg

1 atm = 760 mm di Hg (a 273,15 K, g = 9,80665 m/s^2) = 101 325 Pa

1 atm = 10,3323 m di H_2O

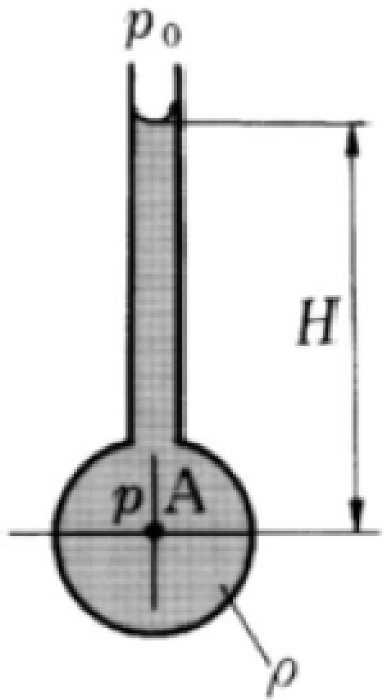
APPLICAZIONI SU MISURE DI PRESSIONE

Quanto vale la pressione assoluta nel mare a 6500*m* di profondità?

La densità dell'acqua marina è ρ =1030*kg/m³*

$$\boxed{\begin{aligned} & p = p_{atm} + \rho\ \mathbf{g}\ \boldsymbol{h} = \\ & = 101\,325 + 1030 \times 9.81 \times 6500 \\ & = 65780000\,\boldsymbol{Pa} = 649.2\,\boldsymbol{atm} \end{aligned}}$$

APPLICAZIONI SU MISURE DI PRESSIONE



Calcolare la pressione assoluta nel punto A

Fluido mercurio $\rho = 13600 kg/m^3$,

$H = 2500 mm$,

$p_o = 1 atm$

$$p_A = p_o + \rho g H$$

$$= 101325 + 13600 \times 9.81 \times 2.5$$

$$= 434865 Pa = 434865/101325 = 4.292\ atm$$

APPLICAZIONI SU MISURE DI PRESSIONE

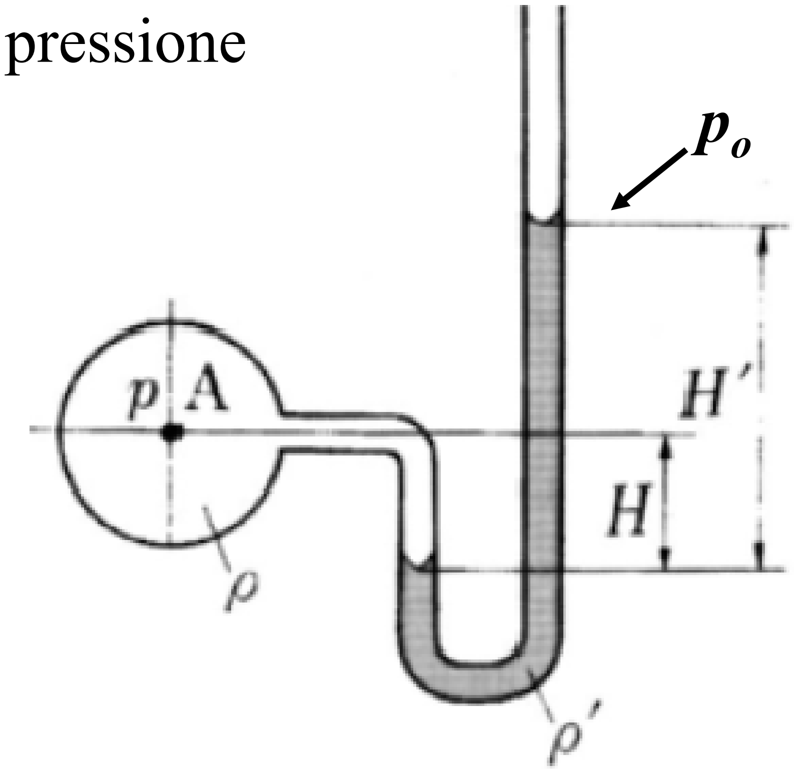
Calcolare la pressione relativa e la pressione assoluta nel punto A

Fluido mercurio $\rho' = 13600 kg/m^3$

Fluido acqua $\rho = 1000 Kg/m^3$

$H' = 3m$; $H = 1m$

$p_o = 1 atm$



p_A (assoluta) $= p_o + \rho' g H' - \rho g H =$

$= 101.325 + 13.600 \times 9.81 \times 3 - 1000 \times 9.81 \times 1$

$= 101.325 + 400.248 - 9.810 = 491.763 Pa$

p_A (relativa) $= \rho' g H' - \rho g H =$

$= 13.600 \times 9.81 \times 3 - 1000 \times 9.81 \times 1 =$

$= 400.248 - 9810 = 390.438 Pa$

APPLICAZIONI SU MISURE DI PRESSIONE

Calcolare la differenza pressione tra i punti 1 e 2

Fluido sotto acqua $\rho' = 1000 kg/m^3$

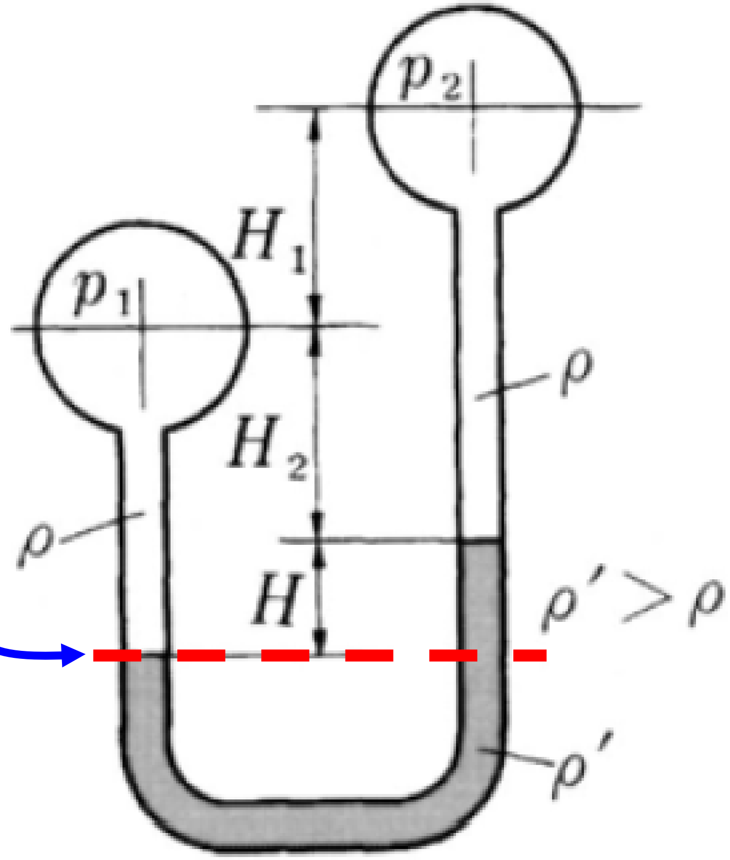
Fluido sopra olio $\rho = 750 Kg/m^3$

$H_1 = 0.75m$, $H_2 = 0.8m$, $H = 0.5m$

$$p_1 + \rho g (H + H_2) = p_2 + \rho g (H_1 + H_2) + \rho' g H$$

$$p_1 + \rho g (H + H_2) - \rho' g H - \rho g (H_1 + H_2) = p_2$$

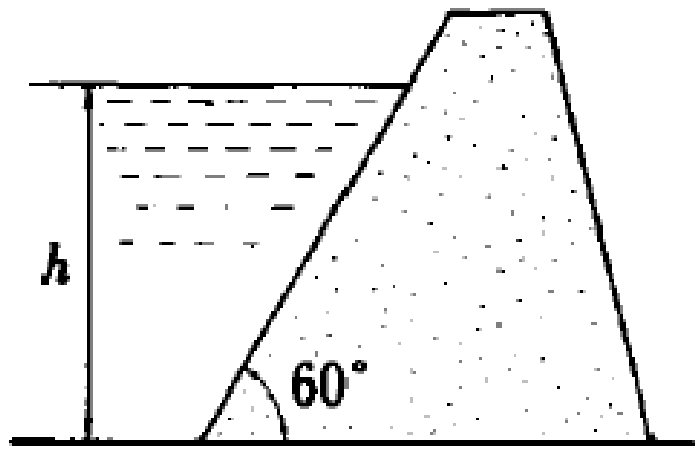
$$p_1 - p_2 = -\rho g (H + H_2) + \rho' g H + \rho g (H_1 + H_2)$$



$$p_1 - p_2 = -750 \times 9.81 (0.5+0.8) + 1000 \times 9.81 \times 0.5 + 750 \times 9.81 \times (0.75+0.8) =$$
$$= -9\,565 + 4\,905 + 11\,404 = 6\,744 Pa$$

APPLICAZIONI SU SPINTE

Calcolare la forza orizzontale P, per lunghezza unitaria, esercitata dall'acqua sulla diga rappresentata in figura.



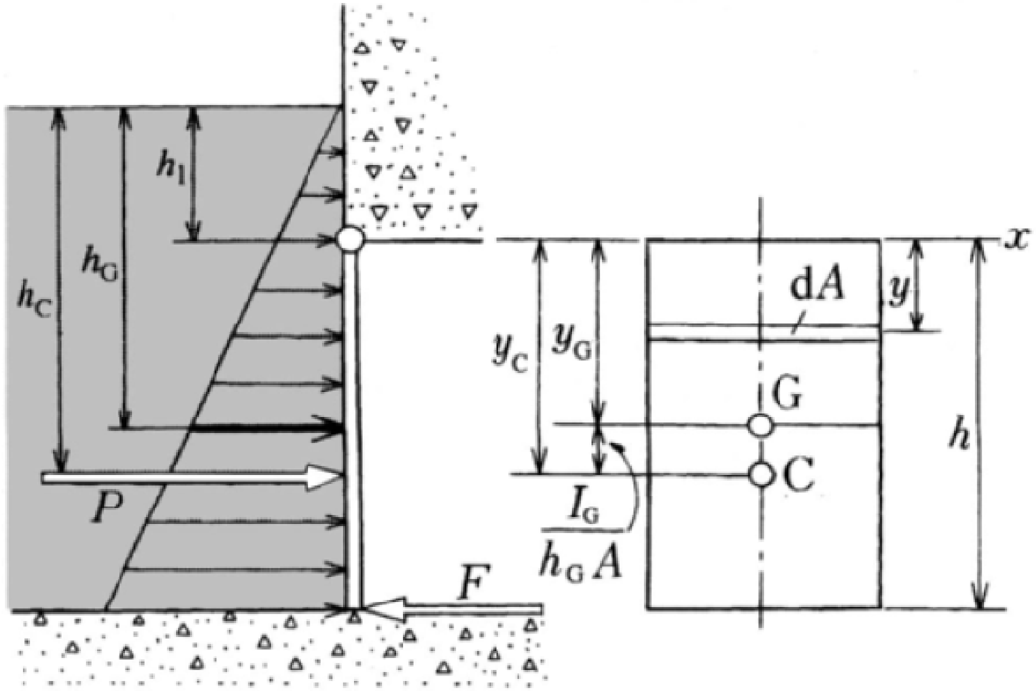
$h = 15m$, $L = 1m$ (*normale al foglio*)

$$\rho = 1000 Kg/m^3$$

$$A = L \times h = 15m^2$$

$$\boldsymbol{P = \rho\, g \sin\theta\; y_G\; A = \rho\, g\, h_G\; A}$$

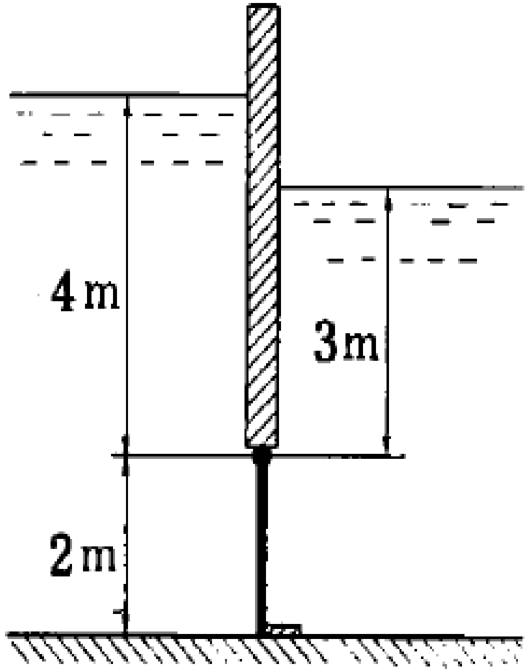
$$P = 1000 \times 9.81 \times 7.5 \times (15 \times 1) = 1\,103\,625 N = 112.5 ton$$



$$\boxed{y_C = y_G + \frac{h^2}{12\,h_G}}$$

APPLICAZIONI SU SPINTE

Calcolare la reazione vincolare per unità di lunghezza da applicare alla chiusa in figura per mantenerla in posizione.



Baricentro lato destro $y_{gd} = 4m$

Forza lato destro $F_d = 1000x4x9.81x(2x1) = 78.480N$

Forza lato sinistro $F_s = 1000x5x9.81x(2x1) = 98.100N$

Baricentro lato sinistro $y_{gs} = 5m$

Centro spinta lato destro $y_{cd}= 1+4/(12x4) = 1.08333m$

Centro spinta lato sinistro $y_{cs}=1+4/(12x5) = 1.06666m$

$F_s \text{ x } y_{cs} – F_d \text{ x } y_{cd}= R \text{ x } 2$

$R = (98100 \text{ x } 1.0666 – 78480 \text{ x } 1.08333)/2 = 9807N$

.

APPLICAZIONI SULLE FORZE DI GALLEGGIAMENTO

Un iceberg, avente una densità pari a 920kg/m^3, galleggia nel mare (densità 1030Kg/m^3). Se il volume immerso è di 100m^3.

Quale è il volume totale dell'iceberg?

Il peso viene bilanciato dalle forze di galleggiamento

Forza Peso = Volume x densità ghiaccio x g

Forza di galleggiamento = Volume immerso x densità mare x g

Forza Peso = Forza di galleggiamento $\rightarrow$ $\rho' V' = \rho V$

Volume = (Volume immerso x densità mare)/densità ghiaccio =

= 100 X 1030/920 = 112.0m^3

APPLICAZIONI SULLE FORZE DI GALLEGGIAMENTO

Quale è la spinta per m^3 dell'elio in atmosfera a 20°C e 1atm assoluta?

$\rho_{aria} = 1.2 kg/m^3$ @ $20°C\ e\ 1ata$

$\rho_{\text{elio}} = 1.013 \times 10^5/(8313/4 \times 293.15) = 0.1663 kg/m^3$

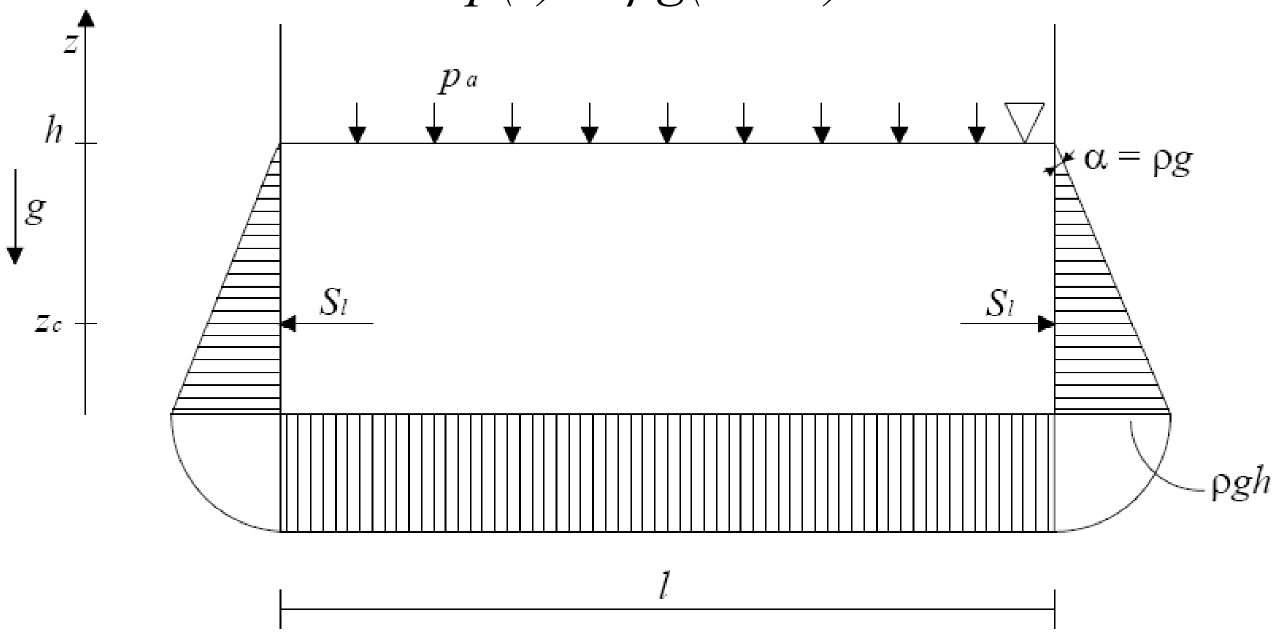
$S = (\rho_{aria} - \rho_{\text{elio}})\, g = (1.2 - .1663) \times 9.81 = 10.14 N/m^3$

circa 1*kp/m³*

Pressione sulle pareti di un recipiente

Si consideri un recipiente con base quadrata (l=2m) contenente acqua (ρ = 998kg/m^3) con un battente di altezza h = 0.7m.
Utilizzando la legge di Stevino si può tracciare il diagramma della pressione lungo le pareti di un recipiente.
La legge di Stevino, infatti, fornisce l'andamento delle pressioni relative in funzione della quota:

$$p(z) = \rho g(h - z)$$



Pressione sulle pareti di un recipiente

Sul fondo del recipiente ($z=0$) si ha la pressione maggiore, pari a:

$$\rho gh = 998 kg/m^3 \cdot 9.81 m/s^2 \cdot 0.7 m = 6.85 kPa$$

Nota la distribuzione della pressione, è possibile ricavare il valore delle spinte esercitate sulle pareti del recipiente effettuando un integrale della pressione esteso alla superficie interessata.
Sul fondo la spinta risulta essere banalmente pari a:

$$S_b = p_b A_b = \rho g h l^2 = 27.4 kN$$

Sulle pareti laterali, la spinta (uguale per tutte, data la geometria) risulta invece pari a:

$$S_l = \int_0^h p(z) l dz = \int_0^h \rho g l (h - z) dz = \left[\rho g l h z - \rho g l \frac{z^2}{2} \right]_0^h = \rho g l \frac{h^2}{2} = \left(\rho g \frac{h}{2} \right) (hl) = 4.80 kN$$

Pressione sulle pareti di un recipiente

Affinché i due sistemi di forze (la distribuzione di pressione e la spinta) siano perfettamente equivalenti, è necessario che il punto di applicazione della spinta sia tale che rispetto ad esso risulti nullo il

$$M_l = \int_0^h p(z)(z - z_c)l\,dz = \int_0^h \rho g(h - z)(z - z_c)l\,dz = \int_0^h \rho gl(hz - z^2 - z_c h + z_c z)dz =$$

$$= \rho gl\left[h\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - z_c hz + z_c\frac{z^2}{2}\right]_0^h = \rho gl\frac{h^3}{6} - z_c\rho gl\frac{h^2}{2} = 0\,Nm \Rightarrow$$

$$z_c = \frac{h}{3} = 0.23m$$

La spinta esercitata sul fondo, invece, è applicata al centro della base del recipiente, essendo uniforme la distribuzione della pressione.
Tale risultato intuitivo può essere ricavato rigorosamente operando in modo analogo a quanto fatto per la spinta laterale.

Pressione atmosferica

L'aria segue l'equazione dei gas perfetti $p=\rho RT,$ tranne che in particolari zone rarefatte dell'atmosfera. L'equazione indica che la pressione è una funzione della densità e della temperatura.

Quindi, poiché la pressione atmosferica varia con l'altitudine secondo l'*equazione differenziale dell'idrostatica:*

$$dp = -\rho g dz$$

la densità varierà anch'essa con l'altitudine.

Per risolvere l'equazione differenziale, è necessaria un'equazione che leghi p e ρ, ma l'equazione di stato, introduce una terza variabile (T).

La terza equazione necessaria che lega le tre variabili dipendenti T, p e ρ si ottiene stabilendo la trasformazione termodinamica che una particella deve seguire quando si sposta da una quota a un'altra e, tale trasformazione dipende dalla quota.

Per questo motivo, nel caso più generale si utilizza la legge politropica:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \qquad \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Pressione atmosferica

Sostituendo la politropica nell' l'*equazione differenziale dell'idrostatica* si ottiene:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0 g \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Separando le variabili si ottiene l'equazione differenziale:

$$p^{\frac{-1}{n}} dp = -\frac{\rho_0 g}{p_0} p_0^{\frac{n-1}{n}} dz$$

che integrata:

$$\left[\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{\frac{n-1}{n}} \right]_{p_0}^{p} = \left[-\frac{\rho_0 g}{p_0} p_0^{\frac{n-1}{n}} z \right]_{z_0}^{z}$$

restituisce, utilizzando anche la legge politropica, le seguenti relazioni:

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{g(n-1)}{nRT_0}(z - z_0) \right]^{\frac{n}{n-1}} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{g(n-1)}{nRT_0}(z - z_0) \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad \frac{T}{T_0} = \left[1 - \frac{g(n-1)}{nRT_0}(z - z_0) \right]$$

Pressione atmosferica

Dall'equazione che descrive la legge di variazione della temperatura con la quota, si ottiene il coefficiente di linearità λ che indica il rateo di variazione della temperatura con la quota.

$$\frac{T}{T_0} = \left[1 - \frac{g(n-1)}{nRT_0}(z - z_0)\right] \qquad \lambda = \frac{g(n-1)}{nR}$$

Sperimentalmente si è ottenuto un valore di λ pari a 5.87K/km, che implica un valore di n pari a 1.21.

In realtà questa approssimazione è vera al di sotto dei 45 000ft (13.7km) dal livello del mare.

Questo primo strato dell'atmosfera è detto ***<u>troposfera</u>***.

Esercizio

Calcolare il valore della pressione atmosferica alla quota di 2000m, sapendo che la pressione e la temperatura a livello del mare pari rispettivamente a 101.3kPa e 23°C.

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{g(n-1)}{nRT_0}(z - z_0)\right]^{\frac{n}{n-1}} = 80.03\,kPa \quad (79.50)$$

L'acqua bolle a ≈ 93°C, la pasta viene una schifezza.

Pressione atmosferica

Lo strato successivo dell'atmosfera è detto ***stratosfera***: esso si estende da 45 000ft (13.7km) fino ad un'altitudine di 55 000ft (16.8 km) e presenta una temperatura quasi costante e pari a -57.5°C (215.65K).

Per quest'ultimo strato è quindi ragionevole considerare l'atmosfera isoterma.

La terza relazione che lega le tre variabili dipendenti T, p e ρ diventa, dunque, la seguente:

$$T = cost = T_0$$

La densità isoterma può essere espressa sostituendo nella $dp = -\rho g dz$ l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\rho = \frac{p}{RT_0}$$

Dall'*equazione differenziale dell'idrostatica* si ottiene:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_0}dz$$

Pressione atmosferica

Integrando si ottengono le relazioni che legano pressione e densità alla quota:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{RT_0}(z - z_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \exp\left[-\frac{g}{RT_0}(z - z_0)\right]$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \exp\left[-\frac{g}{RT_0}(z - z_0)\right]$$

Esercizio

Calcolare il valore della pressione ad una quota di 55000*ft* (55000·0.3048 = 16.77*km*), assumendo i valori di pressione e temperatura a 45000*ft* (13.72k*m*) rispettivamente pari a 2.31*psia* (2.31*x6.*895x10^3 = 15.9*kPa* assoluti) *e* -71.5°*F* ((-71.5 - 32)/1.8 = - 57.5°*C*).

Si ponga:

T_0 = -71.5+460 = 388.5°*R* (Il pedice 0 è riferito alla quota di 45000*ft*)

g = 9.81m/s^2·3.281ft/m = 32.2ft/s^2

R = 287J/kgK = 287m^2/s^2Kx3.2812ft^2/m^2x0.555$K/°R$ = 1716$ft^2/s^2°R$