

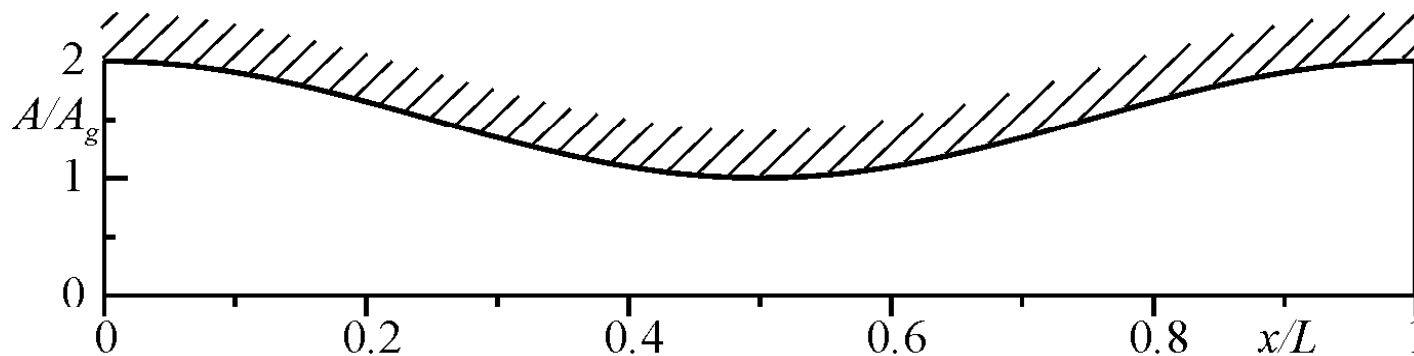
# UGELLI

Si intende per ugello un condotto ad area variabile, non molto lungo rispetto al suo diametro medio, **convergente** e/o **divergente**, avente una distribuzione dell'area della generica sezione del tipo diagrammato in figura.

Ciascun tratto di questo condotto nel quale la **pressione diminuisce** (la velocità aumenta) è chiamato effusore; viceversa, il tratto in cui la **pressione aumenta** (la velocità diminuisce) viene detto diffusore ( $dp + \rho V dV = 0$ ).

Ad esempio, per quanto detto prima, il tratto **convergente** di un ugello si comporterà come **effusore**, se attraversato da un flusso **subsonico**, e come **diffusore**, se attraversato da un flusso **supersonico**.

Il moto del fluido negli ugelli è relativamente ben descritto con le ipotesi di moto quasi-unidimensionale, quasi-stazionario, omoenergetico ed iso-entropico.



Sulla base di queste ipotesi sono quindi valide le equazioni di bilancio:

$$H = h + V^2 / 2 = \text{cost}$$

$$\dot{m} = \rho VA = GA = \text{cost}$$

$$s = \text{cost}$$

che, come già visto, **per un gas più che perfetto** conducono alle stesse relazioni relative alle **condizioni di ristagno** (che, ovviamente, sono **costanti**):

$$T_o = T \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

$$\rho_o = \rho \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$p_o = p \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Sono altresì valide tutte le considerazioni derivate sulla scorta di dette ipotesi ed in particolare la formula (anche essa valida **per gas più che perfetto**) sul legame tra il rapporto delle aree e il numero di Mach:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

$$T_o = T \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

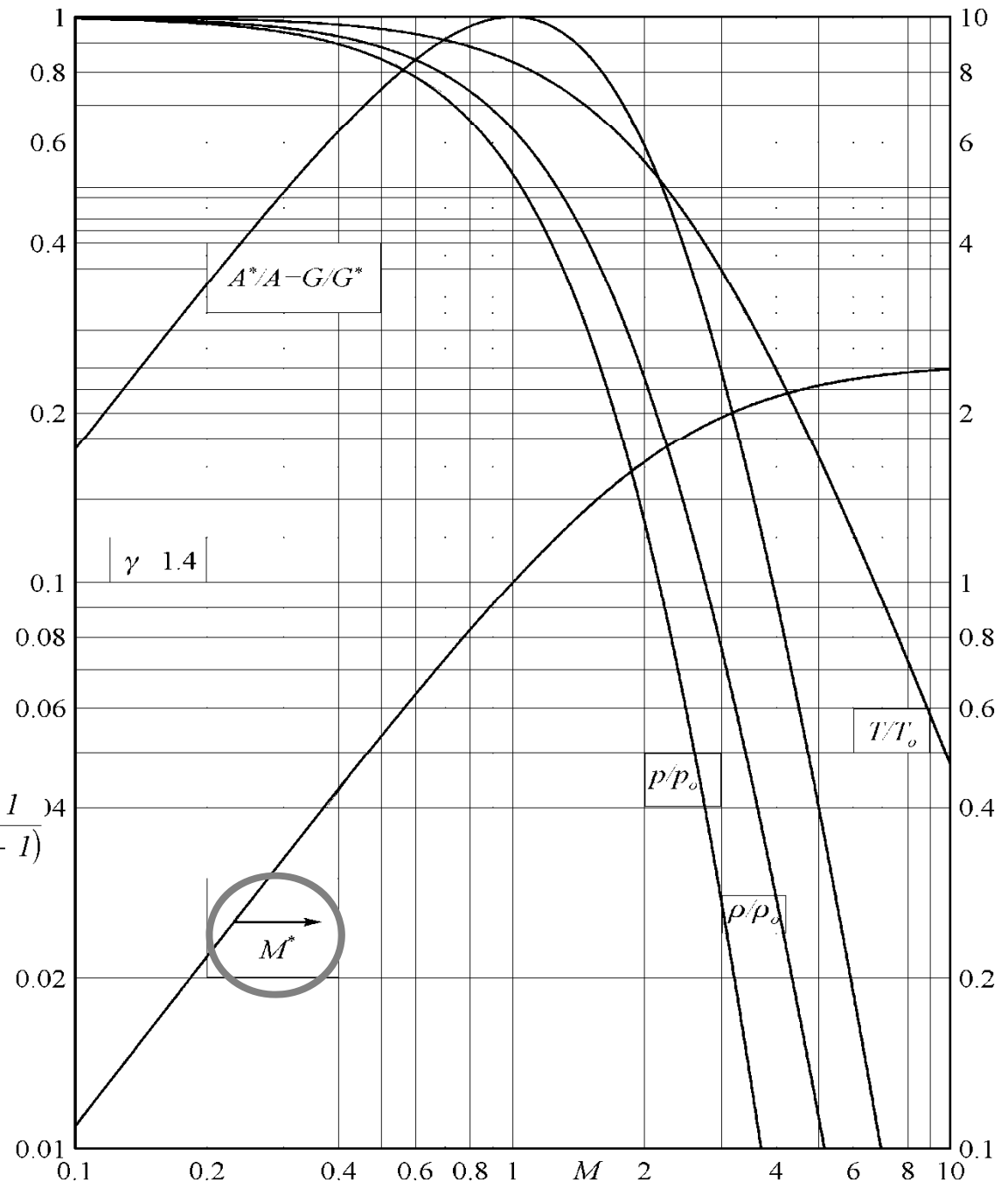
$$\rho_o = \rho \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$p_o = p \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$M^{*2} = \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{\gamma + 1}{2}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

Tutti i rapporti si leggono sulla scala di sinistra, tranne  $M^*$  che va letto su quella di destra.



All'aumentare di Mach, **i rapporti**  $T / T_0$ ,  $\rho / \rho_0$  e  $p / p_0$  **sono tutti monotonicamente decrescenti**.

La diminuzione maggiore si ha per la pressione, poi per la densità e, infine, per la temperatura.

Infatti, nel caso di  $\gamma = 1.4$ , gli esponenti della quantità in parentesi sono rispettivamente **3.5**, **2.5** e **1**.

Tranne che per  $M = 1$ , **per ogni  $A/A^* > 1$ , esistono due valori del numero di Mach, uno in regime subsonico e l'altro in supersonico**.

Il numero di Mach critico, già definito dalla:

$$M^* = \frac{V}{a^*}$$

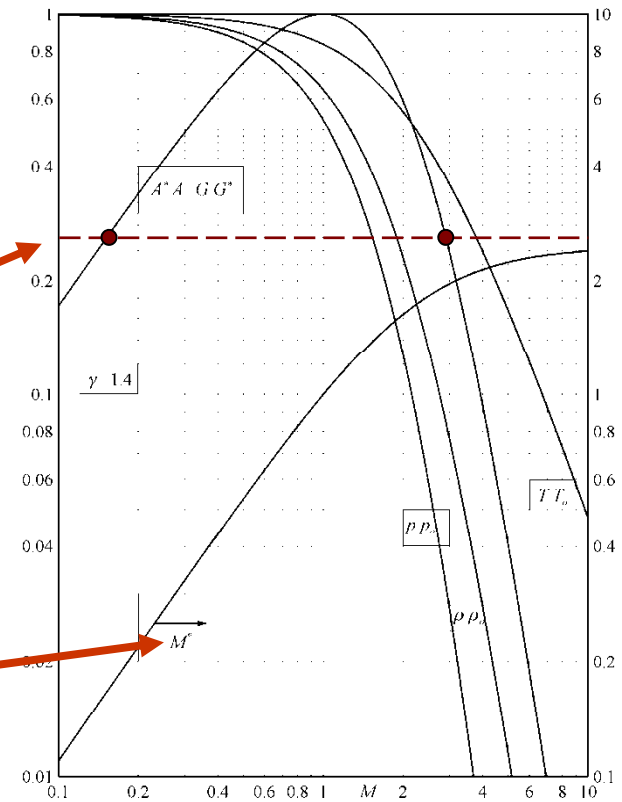
rappresenta anche  $V/V^*$ , **misura la velocità sempre con la  $V^* = a^*$**  e, quindi, indica l'andamento della velocità del fluido in funzione del numero di Mach.

Il suo valore limite, **asintotico** ( $M \rightarrow \infty$ ):

$$\sqrt{(\gamma + 1) / (\gamma - 1)} \quad (\cong 2.45 \text{ per } \gamma = 1.4)$$

si ottiene quando la velocità del gas raggiunge la velocità limite  $V_l$  e può essere ricavato facendo tendere  $M \rightarrow \infty$  nella:

$$M^{*2} = \frac{V^2}{a^2} \frac{a^2}{a^{*2}} = M^2 \frac{T}{T_0} \frac{T_0}{T^*} = \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{\gamma + 1}{2}$$



Per le **condizioni critiche** ( $M = 1$ ), si ha:

$$\frac{T^*}{T_o} = \frac{a^{*2}}{a_o^2} = \frac{2}{\gamma + 1} \quad ; \quad (0.8333)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_o} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad ; \quad (0.6339)$$

$$\frac{p^*}{p_o} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad ; \quad (0.5283)$$

I valori numerici in parentesi valgono per  $\gamma = 1.4$ .

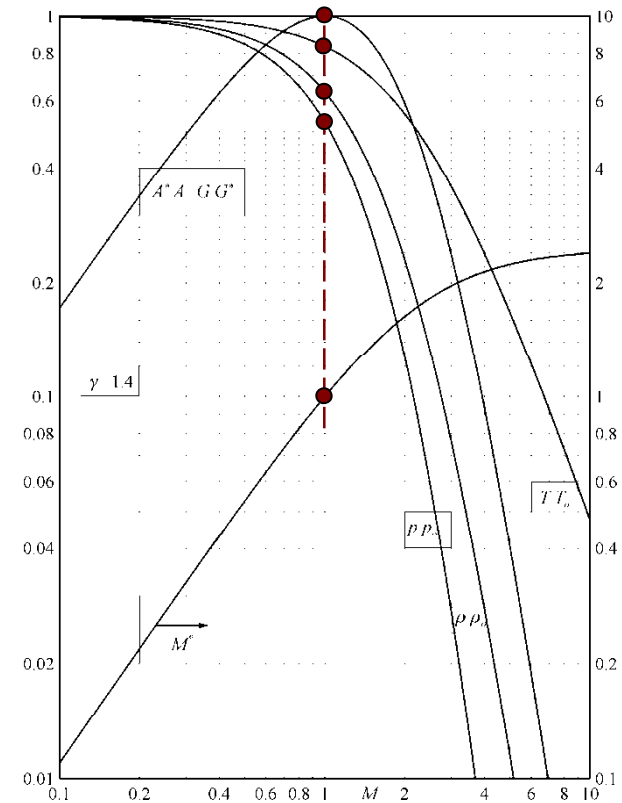
I rapporti critici sono, infatti, *solo funzione* di  $\gamma$ . Chiaramente, per  $M = 1$ , si ha:

$$A/A^* = 1 \quad ; \quad M^* = 1$$

Si vuole ora ricavare la **velocità del fluido in funzione della pressione** da esso raggiunta in un determinato punto del condotto.

Per un gas più che perfetto, la  $H = h + V^2/2$  si può scrivere nella forma:

$$V^2 = 2(H - h) \quad \rightarrow \quad V = \left[ 2c_p T_o \left( 1 - \frac{T}{T_o} \right) \right]^{1/2}$$



$$V = \left[ 2c_p T_o \left( 1 - \frac{T}{T_o} \right) \right]^{1/2}$$

Questa espressione, ricordando che:

$$c_p = \gamma R / (\gamma - 1) \quad ; \quad a_o^2 = \gamma R T_o$$

e che per una trasformazione isoentropica vale:

$$\frac{p_o}{p} = \left( \frac{T_o}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

diventa:

$$V = a_o \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma - 1) / \gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

Questa relazione, generalmente chiamata **formula di de Saint Venant e Wantzel**, consente di calcolare la **velocità raggiunta da un gas che, partendo dalla pressione di ristagno  $p_o$ , si porta ad una pressione  $p$ .**

$$V = a_o \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

La **formula di de Saint Venant e Wantzel**, per  $p/p_o \rightarrow 0$ , ovviamente conduce alla velocità limite:

$$V_\ell = a_o \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} = \sqrt{\frac{2\gamma RT_o}{\gamma - 1}} = \sqrt{2H}$$

Questa relazione mostra, ad esempio, che, per  $\gamma = 1.4$ , la massima velocità raggiungibile dal fluido è pari a  $\sqrt{5} a_o$  e cioè a circa 2.24 volte la velocità del suono in condizioni di ristagno (nel serbatoio).

Infine, occorre porre qui in evidenza che, nel caso in cui  $(p_o - p)/p \ll 1$  dalla:

$$p_o - p = \frac{\gamma}{2} p M^2 \left( 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2 - \gamma}{24} M^4 + \dots \right)$$

si ricava:  $M^2 \ll 1$  e  $F_c \cong 1$ , **quindi il moto può essere considerato incompressibile.**

Infatti, per valori di:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots$$

$(x = \Delta p/p_o \ll 1)$

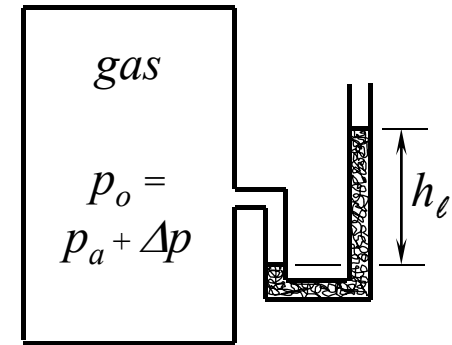
$$p_a/p_o = \frac{(p_o - \Delta p)}{p_o} \cong 1$$

espandendo in serie arrestandosi al secondo termine la quantità elevata a potenza all'interno della parentesi quadra della formula

$$V = a_o \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

si ricava la formula della **velocità in regime incompressibile**:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_o - p_a)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$



nella quale la  $p_a$  (pressione ambiente) ha sostituito la  $p$  perché, come si vedrà, per l'ipotesi fatta è sempre valida la condizione di Kutta (pressione nella sezione di uscita dell'ugello eguale alla pressione ambiente).

La **differenza di pressione  $\Delta p$  tra serbatoio e ambiente** può essere valutata come  $\Delta p = \rho_l g h_\ell$ , dove  $\rho_l$  e  $h_\ell$  sono, rispettivamente **la densità e il dislivello del liquido manometrico** in un manometro differenziale a liquido.

Allora, risulta molto più conveniente ricavare la velocità all'uscita di un ugello (anche ***per motivi di migliore approssimazione numerica***) mediante la **formulazione incompressibile del teorema di Bernoulli**:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \cancel{gz} = cost$$

(applicata tra il serbatoio, dove  $V = 0$  e  $p = p_o$ , e la sezione di uscita dell'ugello, dove  $p = p_a$ , e nella quale si trascuri il termine gravitazionale) che conduce alla relazione già anticipata in precedenza:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_o - p_a)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

In questa relazione la densità  $\rho$ , a causa della piccola differenza tra le due pressioni  $p_a$  e  $p_o$ , può essere calcolata ***sia alla pressione di ristagno  $p_o$ , che alla pressione ambiente  $p_a$ , che, miglior ancora, alla pressione media tra le due.***

Comunque, essa deve essere **sempre calcolata alla temperatura di ristagno** (nel serbatoio) in quanto **la temperatura dell'ambiente in cui scarica l'ugello non influenza in alcun modo il fenomeno di efflusso.**

L'ultimo modo (e cioè il **calcolo della densità alla pressione media tra quella nel serbatoio e quella ambiente**) consente di estendere, con una buona approssimazione (migliore del 3%), la validità della precedente relazione sino a valori di  $(p_o - p) / p_o \cong 0.5$ , cioè praticamente fino a  $M \cong 1$ .

In tal caso la:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_o - p_a)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

diventa:

$$V = \sqrt{\frac{4(p_o - p_a)RT_o}{p_o + p_a}}$$

Va fatto, poi, rilevare che, ponendo  $p_a = p$ , le precedenti relazioni possono essere applicate ad una **qualunque sezione del condotto** nella quale la pressione sia pari a  $p$ , **purché ivi sia valida la condizione  $M \ll 1$** .

Ovviamente, anche la formula di de Saint Venant e Wantzel può essere applicata ad una **qualunque sezione del condotto** nella quale la pressione sia pari alla  $p$  che compare in essa.

# PORTATA IN UN UGELLO

La portata di massa attraverso un ugello **convergente**, o **convergente divergente**, in cui il moto sia quasi-unidimensionale e quasi-stazionario, può essere calcolata in una **qualunque sezione** del condotto mediante la formula:

$$\dot{m} = \rho VA$$

Nel caso di **gas più che perfetto** e di **trasformazione isoentropica**, quale quella che si sta studiando, si ha:

$$\rho = \rho_o \frac{p}{p_o} = \frac{p_o}{RT_o} \left( \frac{p}{p_o} \right)^{1/\gamma} = \frac{\gamma p_o}{a_o^2} \left( \frac{p}{p_o} \right)^{1/\gamma}$$

per cui, sostituendo nella precedente relazione questa espressione e la formula di de Saint Venant e Wantzel :

$$V = a_o \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

si ottiene infine:

$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o} \left\{ \frac{2 \gamma^2}{\gamma - 1} \left( \frac{p}{p_o} \right)^{2/\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o} \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left( \frac{p}{p_o} \right)^{2/\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

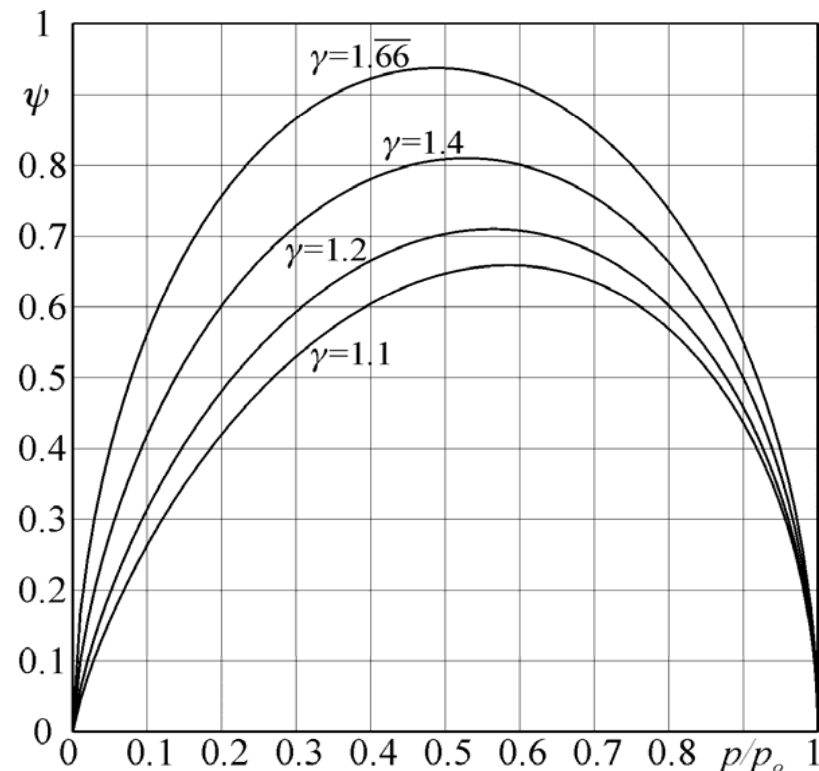
Si ricorda che la pressione  $p$  è quella che si realizza nella sezione di area  $A$ . È conveniente, allora, introdurre il **fattore di efflusso**  $\psi$  definito come:

$$\psi = \frac{\dot{m} a_o}{p_o A} = \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left( \frac{p}{p_o} \right)^{2/\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

che consente di scrivere la portata nella forma:

$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o} \psi$$

Il **fattore di efflusso**  $\psi$  è stato riportato nel diagramma a lato per quattro diversi valori di  $\gamma$ .



$$\psi = \frac{\dot{m} a_o}{p_o A} = \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma - 1} \left( \frac{p}{p_o} \right)^{2/\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

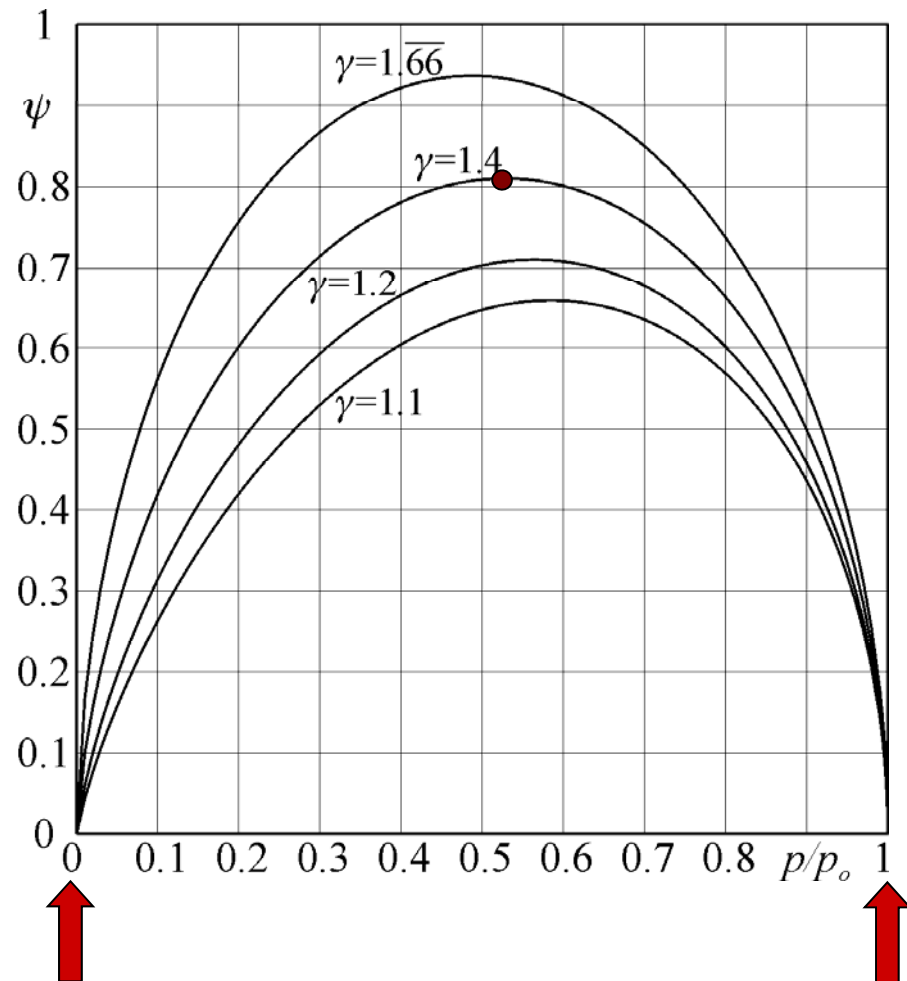
Il fattore di efflusso  $\psi$  è **nullo per**  $p/p_o = 0$ , in quanto si annulla la quantità:

$$\left( \frac{p}{p_o} \right)^{2/\gamma}$$

nel prodotto entro la parentesi graffa.

$\psi$  è **anche nullo per**  $p/p_o = 1$ , in quanto si annulla la quantità nella parentesi quadra.

Inoltre, il fattore di efflusso raggiunge un **valore massimo**  $\psi^*$  per un determinato valore di  $p/p_o$  che può essere facilmente calcolato.



Indicando con  $\eta = p/p_o$ , la relazione:

$$\psi = \frac{\dot{m} a_o}{p_o A} = \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma - 1} \left( \frac{p}{p_o} \right)^{2/\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

può essere scritta come:

$$\psi = K \eta^{1/\gamma} \left[ 1 - \eta^{(\gamma-1)/\gamma} \right]^{1/2}$$

dove  $K$  è una costante dipendente da  $\gamma$ .

Derivando la relazione precedente rispetto ad  $\eta$  ed uguagliando a zero, si ha:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\psi}{d\eta} \right|_{\eta=\bar{\eta}} &= K \frac{1}{\gamma} \bar{\eta}^{(1-\gamma)/\gamma} \left[ 1 - \bar{\eta}^{(\gamma-1)/\gamma} \right]^{1/2} + \\ &- K \frac{\bar{\eta}^{1/\gamma}}{2} \frac{(\gamma-1)\bar{\eta}^{-1/\gamma} / \gamma}{\left[ 1 - \bar{\eta}^{(\gamma-1)/\gamma} \right]^{1/2}} = 0 \end{aligned}$$

per cui, risolvendo rispetto ad  $\bar{\eta}$ , si ottiene infine **il particolare valore di  $p/p_o$  per il quale si ha il valore massimo di  $\psi$ :**

$$\boxed{\bar{\eta} = \frac{p^*}{p_o} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$\bar{\eta} = \frac{p^*}{p_o} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad p_o = p \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Questo valore **coincide** con quello già trovato per le **condizioni critiche del moto** ( $M = 1$ ).

Si può concludere che il valore massimo di  $\psi$  si raggiunge nelle condizioni critiche ( $M = 1$ ), può essere quindi indicato con  $\psi^*$  e vale:

$$\psi^* = \gamma \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad ; \quad (0.8102)$$

dove il valore numerico riportato tra parentesi si riferisce al caso di  $\gamma = 1.4$ .

Chiaramente, **quando  $\psi = \psi^*$ , è anche  $A = A^*$  e la portata attraverso l'ugello può essere calcolata mediante la:**

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

Come si vedrà in seguito, **in un ugello semplicemente convergente**, la condizione  $p_a/p_o > p^*/p_o$  si traduce nella situazione  $p_u = p_a$  e  $M_u < 1$  (dove  $p_u$  e  $M_u$  sono la pressione ed il numero di Mach nella sezione di uscita dell'ugello).

È importante sottolineare che la relazione:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

può essere applicata **anche nel caso in cui il numero di Mach nella sezione di uscita dell'ugello risulti minore di 1** e cioè quando si ha la condizione:

$$p_a/p_o > p^*/p_o$$

Infatti, dal valore di  $p_u/p_o = p_a/p_o$ , mediante la formula:

$$p_o = p \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

è immediatamente ricavabile il valore del numero di Mach nella sezione di uscita dell'ugello  $M_u$ . Questo valore, sostituito nell'espressione:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

consente di calcolare il rapporto tra l'area della sezione di uscita dell'ugello e **l'area critica, nella quale si raggiungerebbe  $M = 1$  se il fluido continuasse ad accelerare dopo l'uscita.**

Poiché l'area della sezione di uscita dell'ugello si presume nota, la conoscenza del rapporto  $A_u/A^*$  consente di calcolare il valore di  $A^*$  da sostituire nella relazione per il calcolo della portata :

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

Questo modo di procedere è chiamato **metodo per il calcolo della portata mediante l'area critica fittizia** in quanto l'area critica non esiste nel campo di moto ma è possibile effettuare i calcoli come se esistesse.

La relazione ricavata in precedenza:

$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o} \psi$$

è del tutto generale e può essere applicata ad una **qualsunque sezione** di un qualunque condotto, purché **il moto rispetti le ipotesi fatte e  $\psi$  sia calcolato con il rapporto  $p/p_o$  che si realizza in detta sezione.**

Per valori di

$$p_a / p_o = (p_o - \Delta p) / p_o \cong 1$$

espandendo in serie arrestandosi al secondo termine le quantità elevate a potenza all'interno della parentesi graffa della formula:

$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o} \left\{ \frac{2 \gamma^2}{\gamma - 1} \left( \frac{p}{p_o} \right)^{2/\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

si ricava l'espressione della **portata di massa in regime incompressibile**:

$$\dot{m} = A_u \sqrt{2(p_o - p_a) \rho} = A_u \sqrt{2 \rho \Delta p}$$

ricavabile peraltro più semplicemente sostituendo la già trovata formula:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_o - p_a)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

nella relazione  $\dot{m} = \rho V A$ .

Nella espressione che esprime la portata in regime incompressibile:

$$\dot{m} = A_u \sqrt{2(p_o - p_a)\rho} = A_u \sqrt{2\rho \Delta p}$$

il calcolo della densità alla pressione media tra il serbatoio e l'ambiente, pur migliorando l'approssimazione del calcolo stesso, questa volta non ne estende di molto la sua validità.

Utilizzando questo metodo, infatti, la relazione precedente (con la densità calcolata alla pressione media) può essere applicata fino a valori di:

$$(p_o - p_a)/p_o \cong 0.1$$

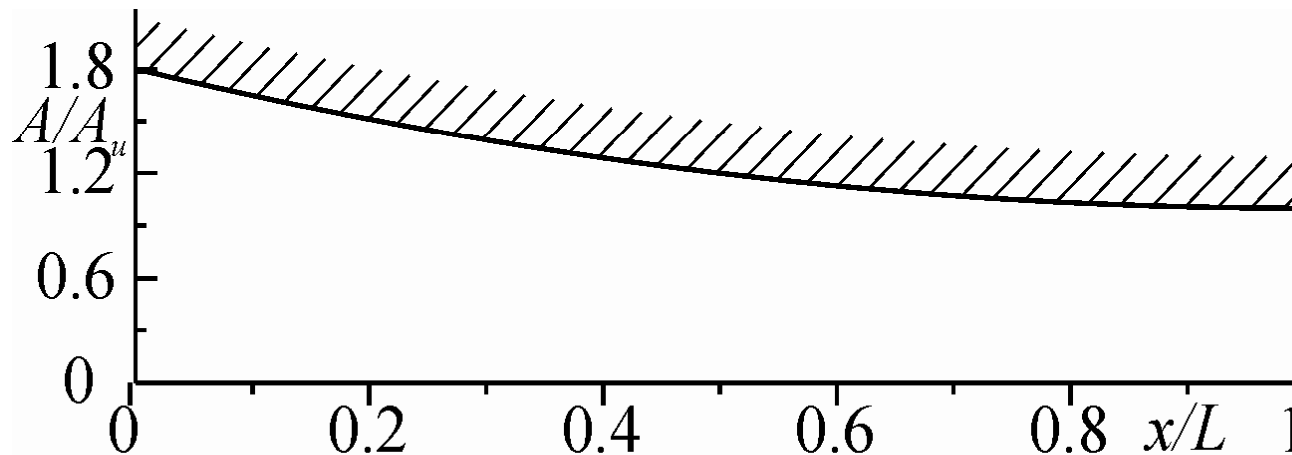
e cioè fino a  $M \approx 0.4$ , con uno **scostamento massimo** dal risultato esatto pari a circa il **3%**.

Ovviamente, lo scostamento è tanto più piccolo quanto più piccolo è il valore del rapporto precedente.

# UGELLO CONVERGENTE COLLEGATO A UN SERBATOIO

Si supponga ora di avere un ugello convergente (del quale per semplicità è stata disegnata solo la distribuzione dell'area in direzione longitudinale), che sia collegato ad un serbatoio nel quale è noto lo stato termodinamico del gas.

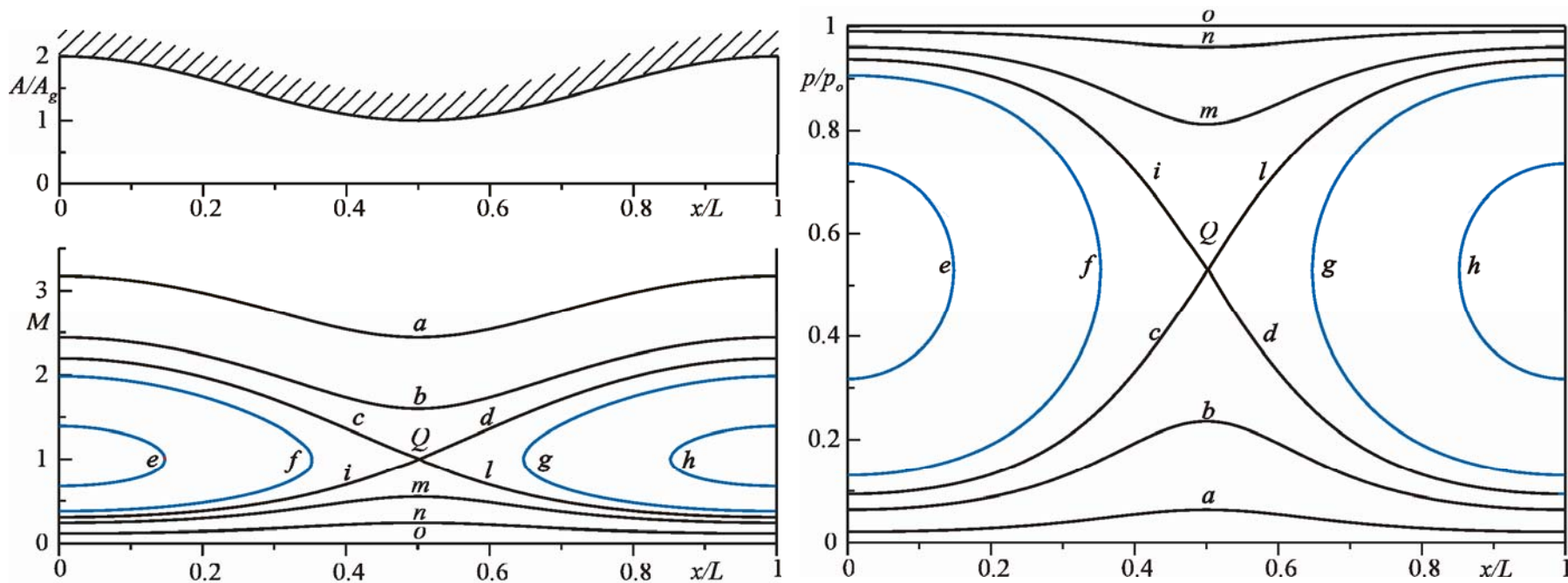
Nel serbatoio, per definizione, la velocità del fluido è nulla per cui, ipotizzando attraverso l'ugello un moto quasi-stazionario, omoenergetico ed isoentropico. le condizioni nel serbatoio (ad esempio  $p_o$  e  $T_o$ ) coincidono con le condizioni di ristagno del gas lungo tutto l'ugello.



Si ricordino le **curve soluzione per un moto quasi unidimensionale, quasi-stazionario, omoenergetico e isoentropico in condotti ad area variabile.** Per un ugello semplicemente convergente ovviamente non esistono i tratti a destra del punto  $Q$ . Delle curve  $e$  ed  $f$  si è già detto.

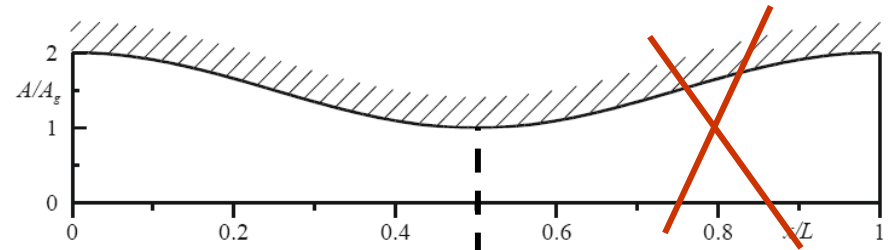
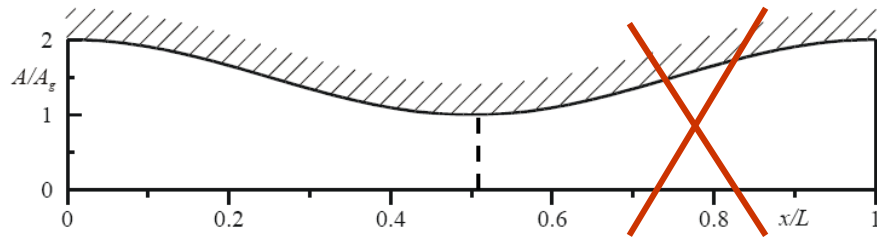
Infine, poiché l'ugello è attaccato ad un serbatoio nel quale la velocità è nulla, si devono escludere anche le curve soluzioni del tipo  $a, b, e c$ , che prevedono un ingresso supersonico nell'ugello.

Infatti, per avere un ingresso supersonico (partendo da velocità nulla nel serbatoio) è necessario che il fluido passi attraverso condizioni soniche ( $M = 1$ ) prima dell'ingresso, e quindi per una gola ( $dA = 0$ ), che certo non esiste.

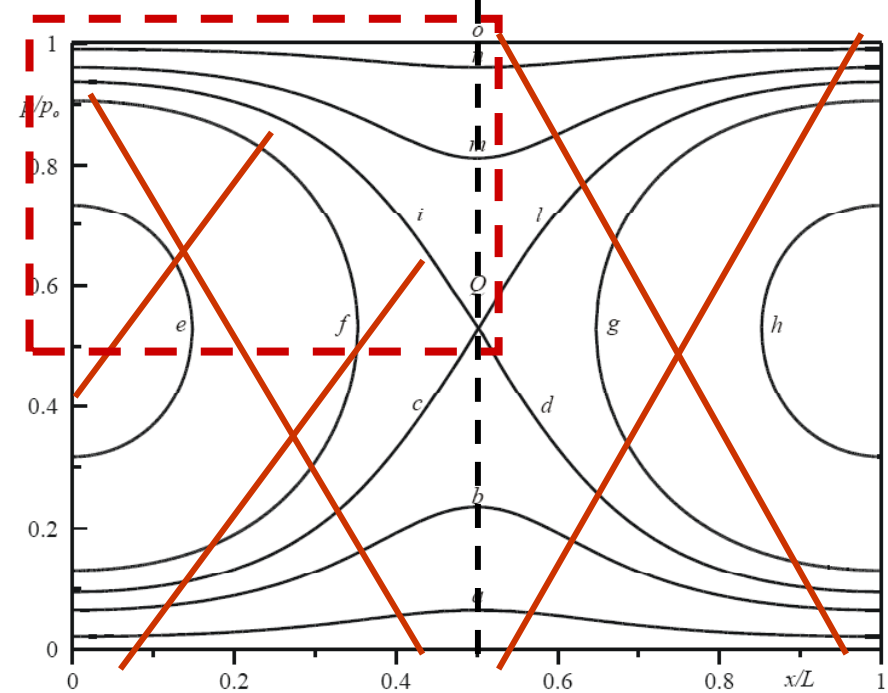
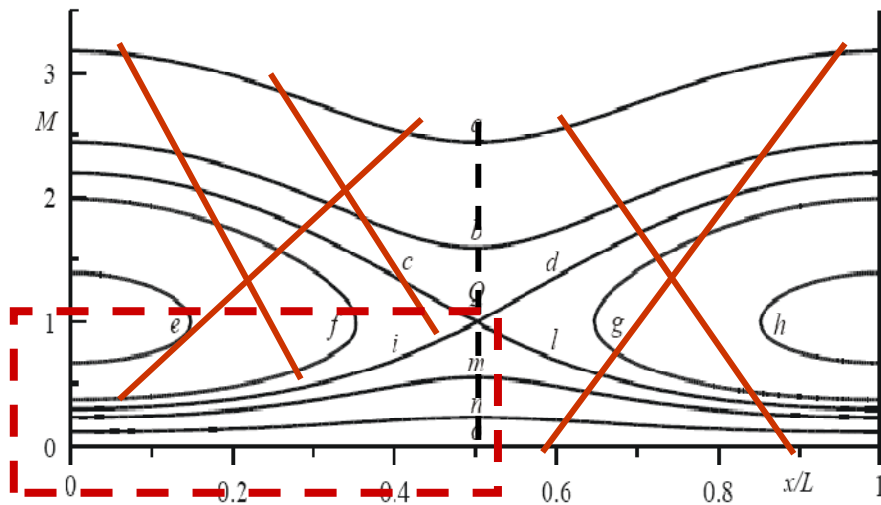


# NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

$$p_o = p \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$



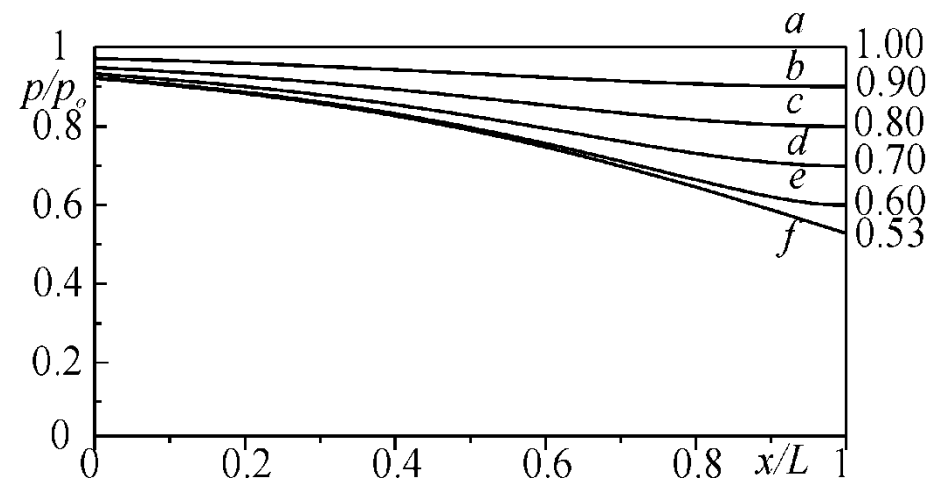
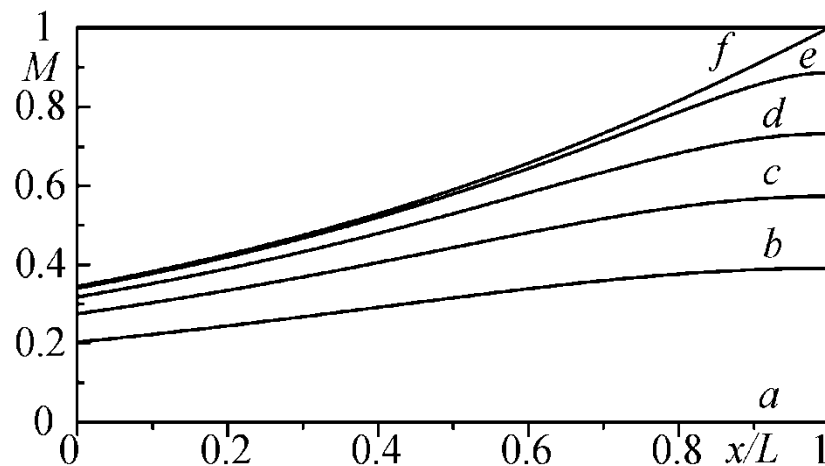
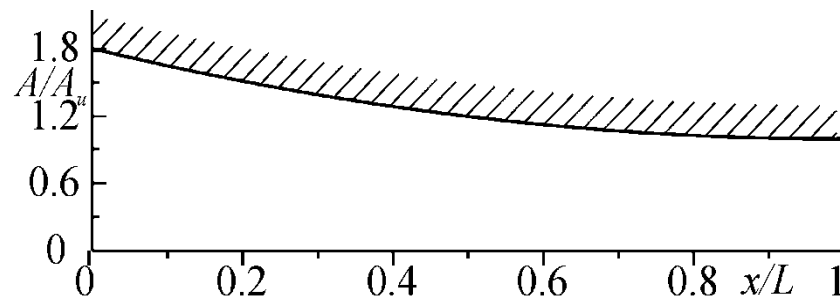
$$\frac{dM}{dx} = \frac{M \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)}{(M^2 - 1) A(x)} \frac{dA(x)}{dx}$$



Le curve soluzione che restano sono pertanto (sui piani  $M - x/L$  e  $p/p_o - x/L$ ) del tipo di quelle rappresentate in figura (per un ugello che, nella fattispecie, ha un'area di ingresso pari a 1.8 volte quella di uscita - **di gola** - ed è attraversato da un gas avente  $\gamma = 1.4$ ).

Poiché il numero di Mach all'ingresso è subsonico, l'ugello si comporterà quindi sempre come un **effusore**.

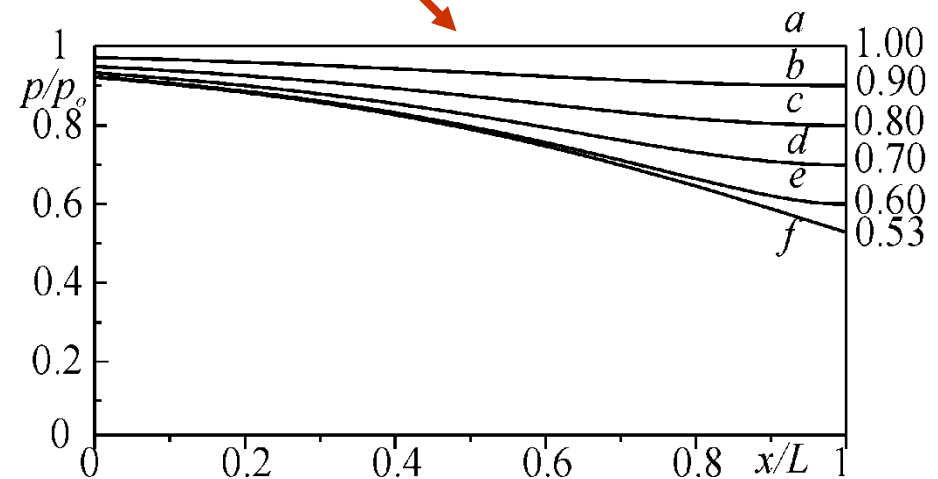
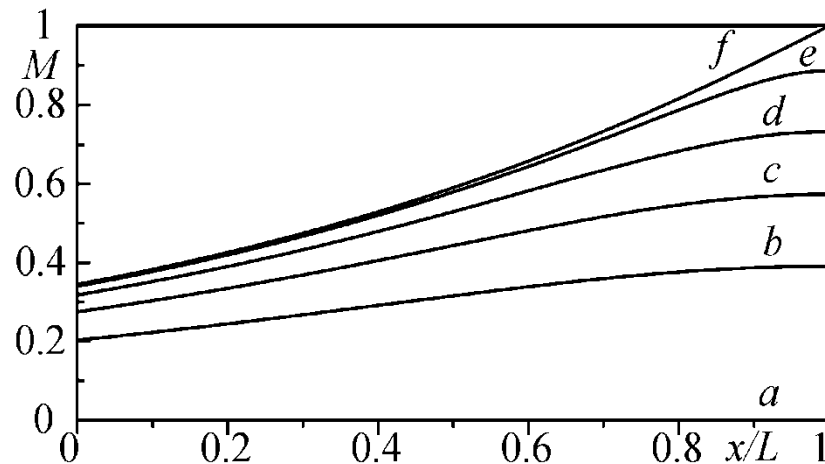
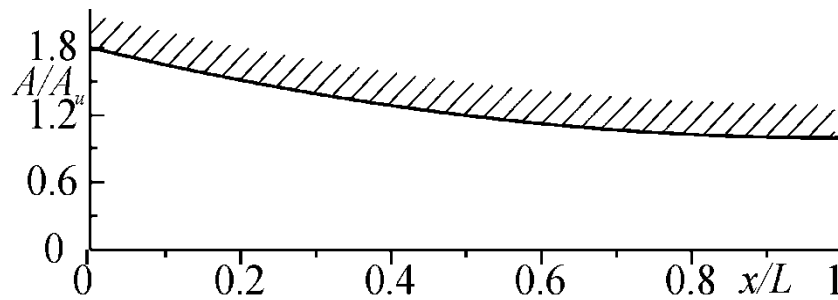
Si vuole ora determinare il funzionamento dell'ugello al variare delle condizioni termodinamiche nel serbatoio (la pressione  $p_o$ ) e della pressione ambiente  $p_a$ .



Per semplicità, si può supporre che il serbatoio contenga un gas ad una pressione costante  $p_o = 1\text{ata}$  e che l'ugello scarichi in un ambiente (in una camera a vuoto) in cui sia possibile regolare la pressione  $p_a$  da  $1\text{ata}$  in giù.

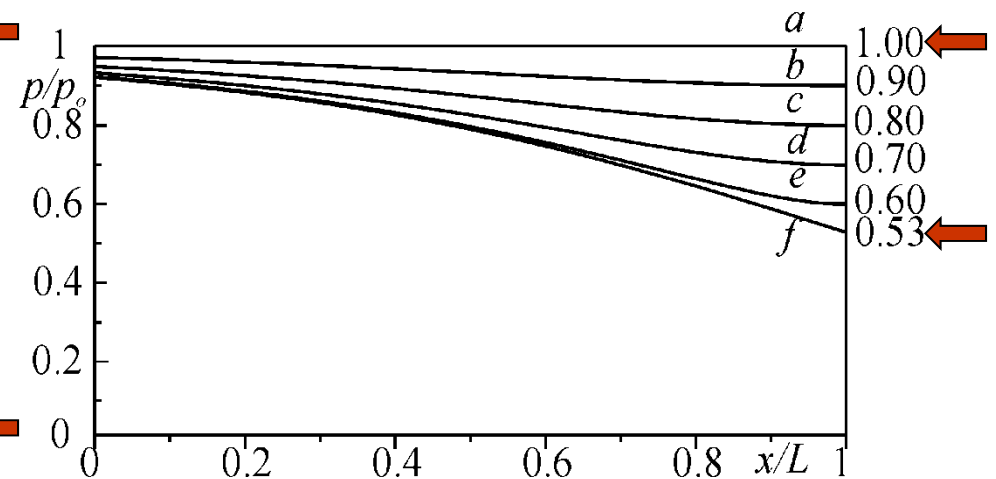
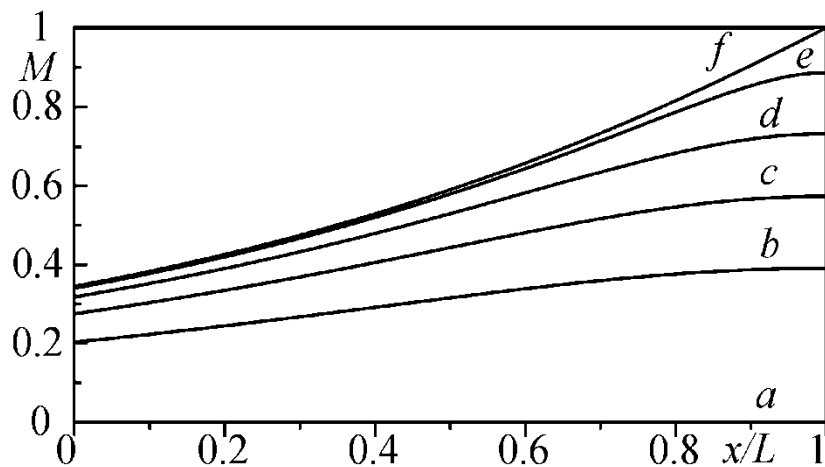
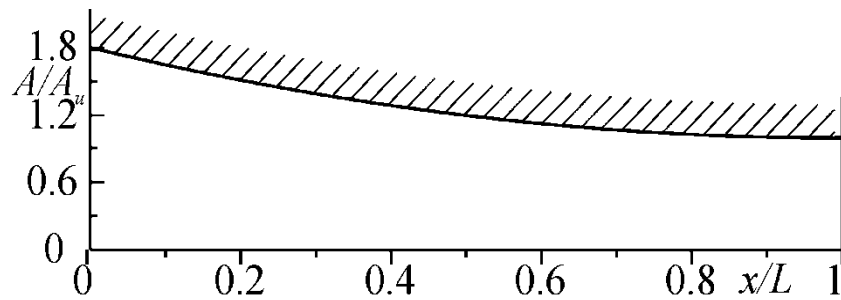
Poiché  $p_o = 1\text{ata}$ , i valori del rapporto adimensionale  $p/p_o$  rappresentano, quindi, direttamente la pressione del fluido espressa in *ata*.

Ad es., le curve tracciate nel grafico corrispondono a quelle per cui la pressione nella sezione di uscita dell'ugello  $p_u$  vale (dall'alto verso il basso) 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, e  $0.53\text{ata}$ , cioè rispettivamente le curve *a*, *b*, *c*, *d*, *e* ed *f* di figura.



La curva  $f$  corrisponde al raggiungimento delle condizioni soniche nella sezione di uscita dell'ugello ( $p^*/p_o = 0.5283$  per  $\gamma = 1.4$ )

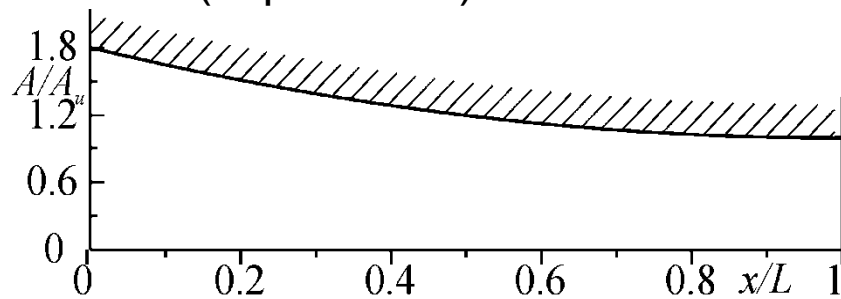
Inoltre, anche alla luce di ciò che verrà detto in seguito, è verosimile che la curva  $a$ , corrispondente a  $p_u = p_o = 1\text{ata}$ , sia relativa al caso per il quale si ha  $p = p_o$  lungo tutto l'ugello perché la velocità, e quindi il numero di Mach  $M$ , sono ovunque nulli.



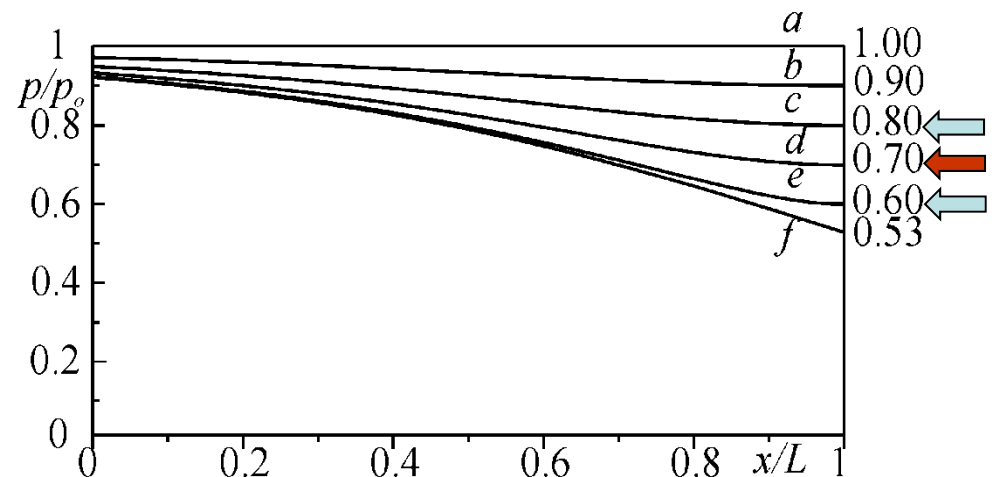
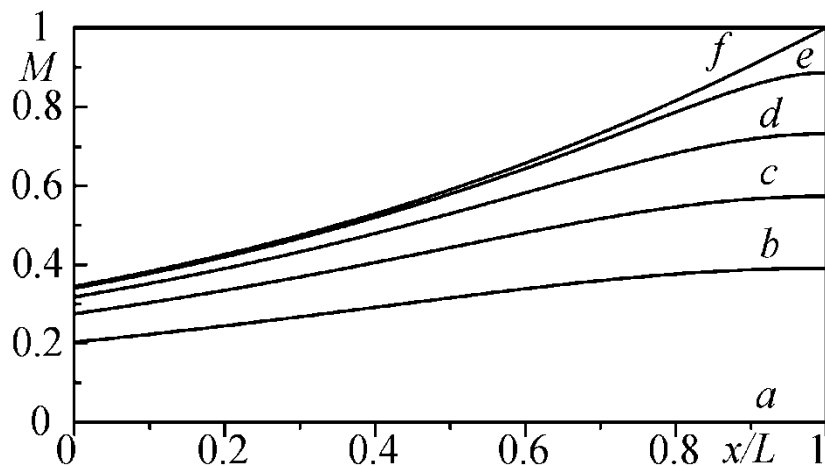
Si vuole ora mostrare che, qualunque sia il valore della pressione ambiente  $p_a$  compreso tra  $p^* = 0.5283\text{ata}$  ed  $1\text{ata}$ , la pressione del fluido all'uscita dell'ugello  $p_u$  deve **necessariamente essere uguale a  $p_a$** , cioè deve rispettare la cosiddetta **condizione di Kutta (pressione ambiente = pressione all'uscita)**.

Si immagini, ad esempio, che l'ugello stia funzionando lungo la curva  $d$  corrispondente a  $p_u = 0.7\text{ata}$  e che la pressione ambiente  $p_a$  sia uguale a  $0.6\text{ata}$ , ovvero a  $0.8\text{ata}$ .

Nella sezione di uscita dell'ugello dovrebbero essere, quindi, presenti o un salto di pressione verso l'alto (compressione), ovvero un salto di pressione verso il basso (espansione).

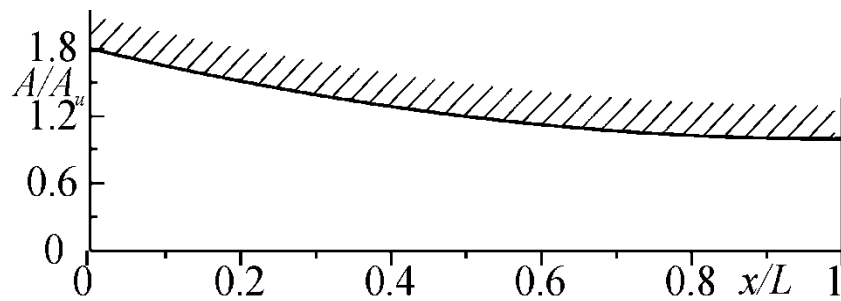


$p_a$

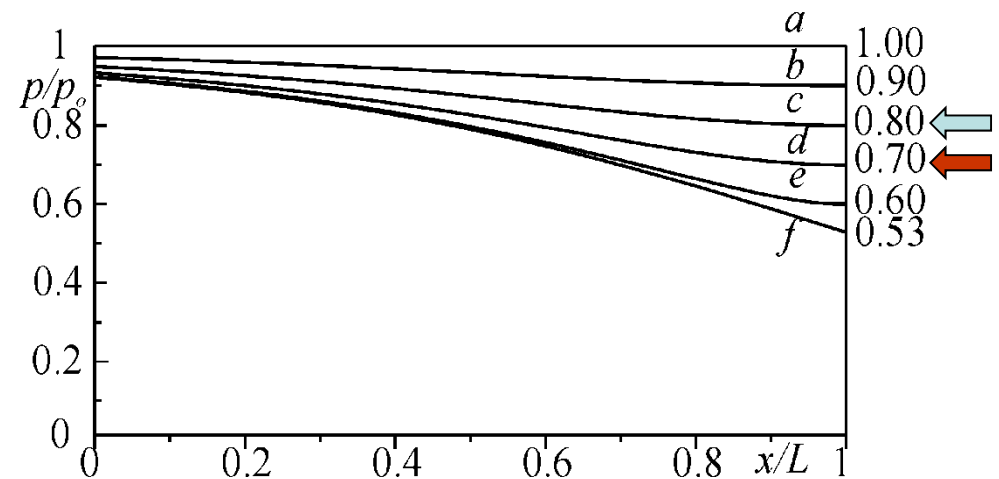
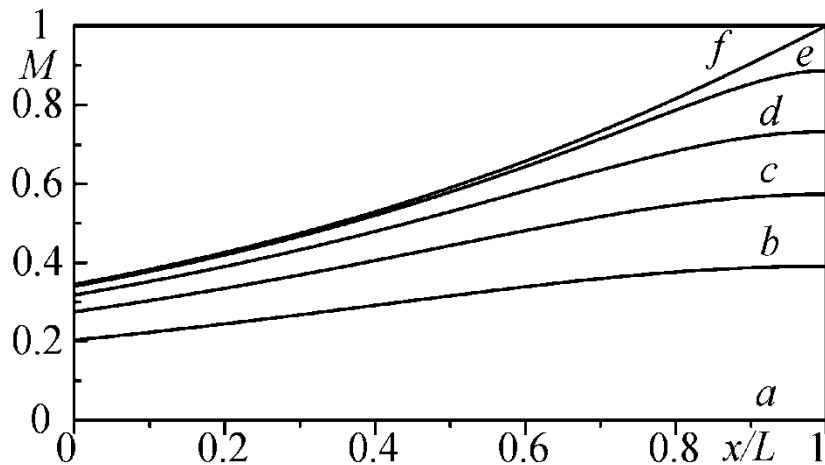


Il brusco salto di pressione verso l'alto si può spiegare solo con un' **onda d'urto instazionaria** (perché il moto nella sezione di uscita è **subsonico**) che, muovendosi verso il serbatoio (poiché ha velocità maggiore di quella del suono e la corrente che esce dall'ugello è subsonica), fa rallentare la corrente per il fatto che **sovrappone alla velocità verso valle una velocità verso monte**.

L'onda d'urto tende quindi a far fluire il gas secondo la curva di funzionamento *c*.



$P_a$

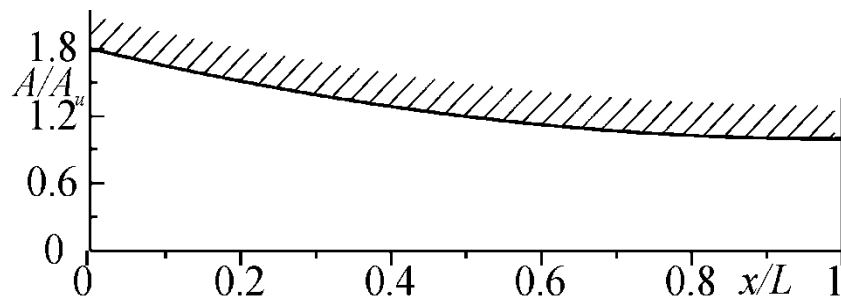


Viceversa, il brusco salto di pressione verso il basso può avvenire attraverso **un treno di onde di Mach di espansione** (anche esse **instazionarie**), che **risalgono l'ugello viaggiando alla velocità del suono**, e che, **accelerando il fluido verso valle**, lo portano a fluire secondo la curva *e* sino a che la differenza di pressione non si annulla.

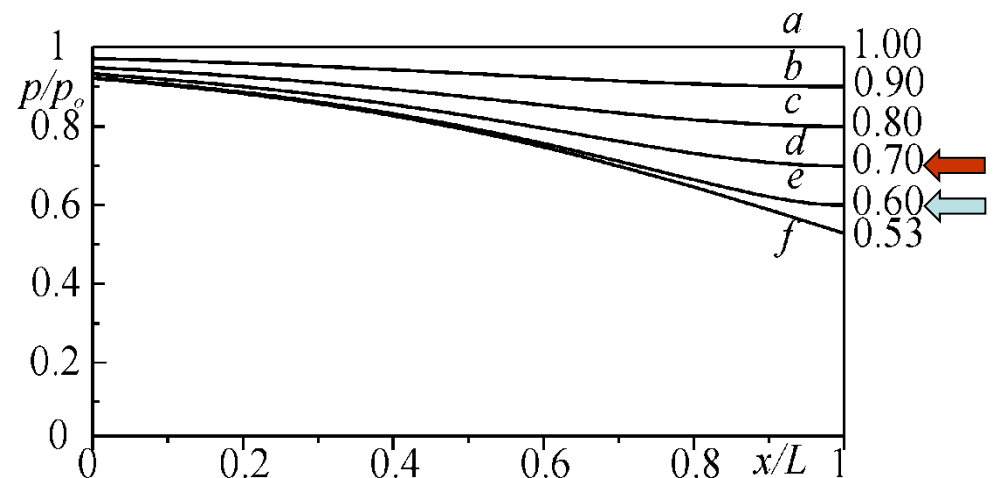
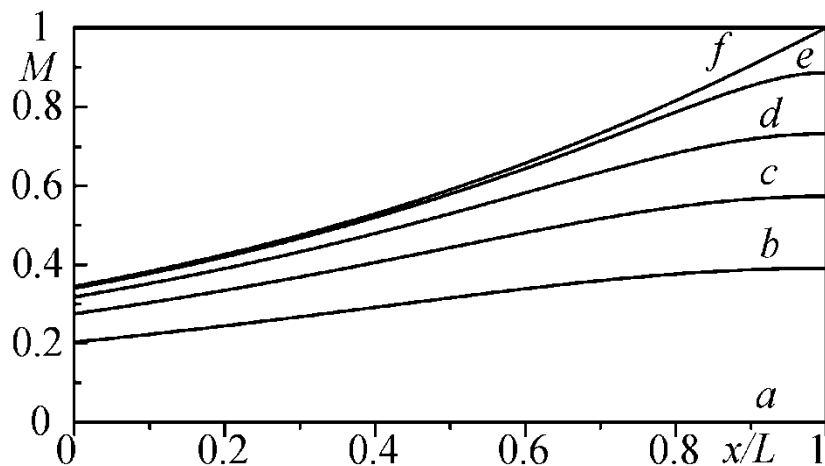
In definitiva, si può concludere che, **per**  $p^*/p_o \leq p_a/p_o \leq 1$ , **deve essere**  $p_u = p_a$ .

Il calcolo del numero di Mach nella sezione di uscita dell'ugello può quindi essere eseguito, in questo caso, ponendo  $p = p_a$  nella:

$$p_o = p \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$



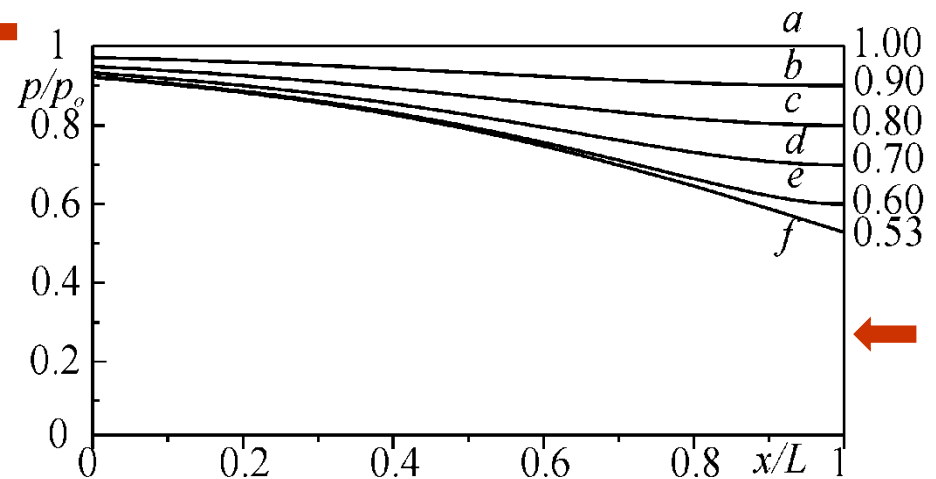
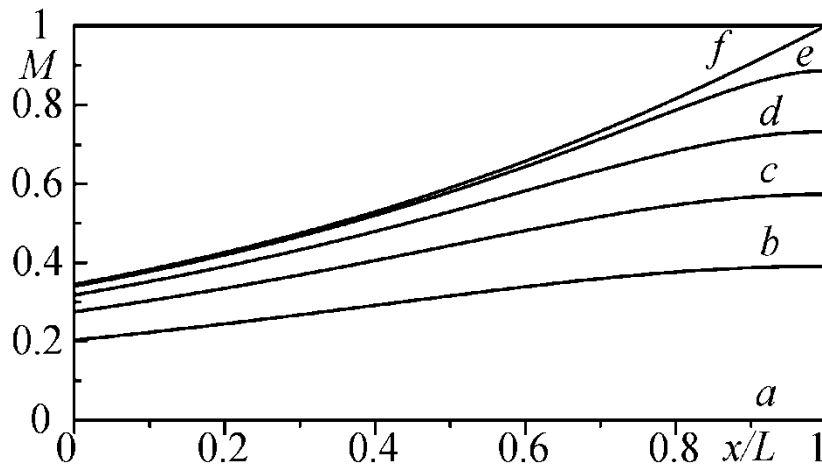
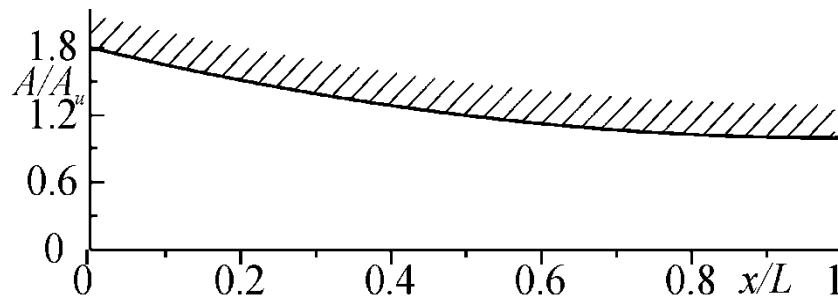
$p_a$



Ben diverso è il caso di  $p^*/p_o \geq p_a/p_o$ . Infatti, qualunque sia il valore di  $p_a < p^*$ , l'ugello **continuerà a funzionare secondo la curva f** poichè, essendo questa relativa al caso di una corrente sonica (verso valle) all'uscita dell'ugello, **il treno di onde di espansione** (che viaggiano verso monte alla velocità del suono), **non può risalire la corrente che esce alla stessa velocità.**

**Le onde pertanto resteranno ferme nella sezione di uscita dell'ugello.** Quindi, in questo caso, la pressione del fluido nella sezione di uscita sarà sempre **uguale alla pressione critica.**

Il numero di Mach all'uscita sarà sempre pari a 1 e l'ugello si dirà **strozzato**, o **sottoespanso**, perché **la corrente non riesce a completare nell'ugello stesso la sua espansione fino alla pressione ambiente.**



Il motivo per cui viene utilizzato l'aggettivo **strozzato** è dovuto al fatto che, come si vedrà nel seguito, **se la pressione di ristagno è costante, la portata di massa effluente dall'ugello resta costante al diminuire della pressione ambiente dal valore  $p^*$  sino al vuoto più assoluto.**

L'ugello non riesce a scaricare più fluido perché si strozza. Per un ugello convergente, **il fenomeno dello strozzamento non dipende dalla geometria dell'ugello stesso** purchè sia sempre possibile ritenere il moto unidimensionale nell'ugello stesso.

I risultati descritti in precedenza per  $p_a$  variabile sono del tutto generali (in quanto legati ai valori dei rapporti  $p/p_o$ ) e possono essere facilmente estrapolati ad altri casi.

Essi sono pertanto applicabili, **mutatis mutandis**, al caso di **un ugello convergente che scarichi in un ambiente a pressione costante  $p_a$  e per il quale cambi la pressione nel serbatoio  $p_o$ .**

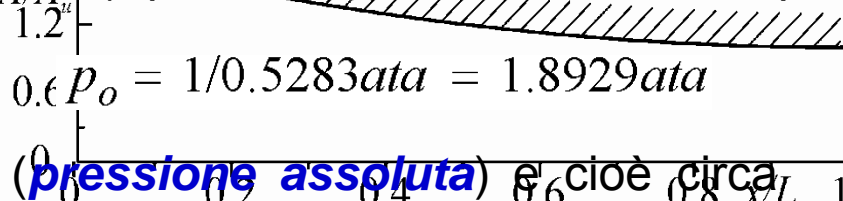
Ovviamente si intende sempre che sia  $p_o \geq p_a$ .

Il diagramma riportato in basso sintetizza ***l'andamento della pressione nella sezione di uscita dell'ugello in funzione della pressione ambiente.***

Entrambe le pressioni sono state adimensionalizzate rispetto alla pressione di ristagno. Per  $p^*/p_o \leq p_a/p_o$ , si ha  $p_u = p_a$ , e cioè è rispettata la condizione di Kutta; invece, per  $p^*/p_o > p_a/p_o$ , la  $p_u$  resta costantemente uguale al valore  $p^*$ .

A titolo di curiosità, si vuol fare osservare che per un gas non è molto difficile raggiungere le condizioni critiche di  $M = 1$ .

Se l'ugello convergente scarica ad esempio aria ( $\gamma = 1.4$ ) nell'atmosfera (a 1.01325 ata), per avere  $M = 1$  basta che la pressione nel serbatoio sia pari a:

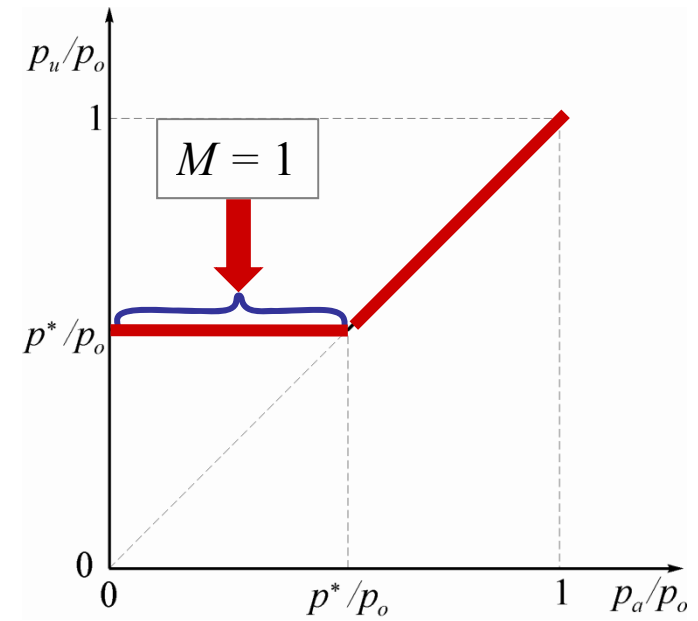


0.9 atmosfere relative, ovvero circa



Si pensi ad esempio cosa succede **quando si fora un pneumatico** nel

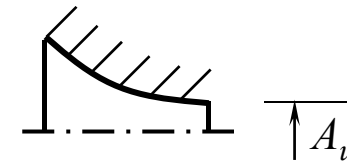
quale l'aria si trova inizialmente a una pressione relativa pari a circa  $2 \text{kp/cm}^2 \approx 3 \text{ ata}$  (pressione assoluta).



# PORTATA ATTRAVERSO UN UGELLO CONVERGENTE COLLEGATO AD UN SERBATOIO

Per poter applicare la:

$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o} \psi$$



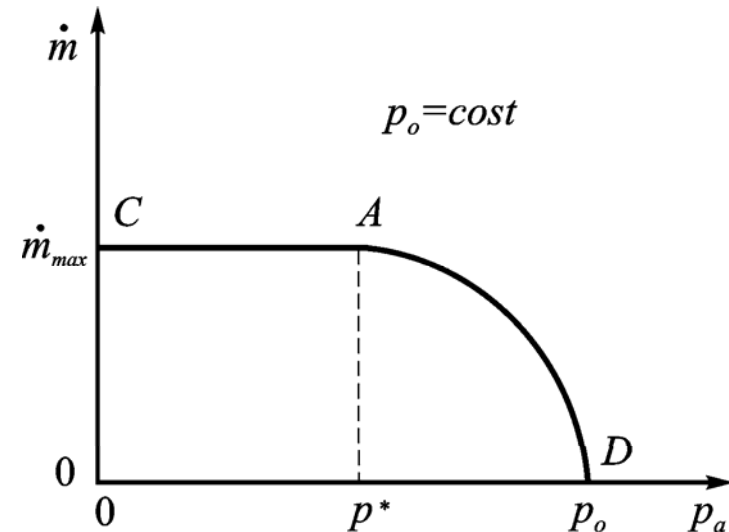
ad un **ugello convergente**, conviene scegliere per  $A$  la sezione di uscita dell'ugello di area  $A_u$  per cui si ha:

$$\dot{m} = \frac{p_o A_u}{a_o} \psi_u$$

dove la  $\psi_u$  è il valore del fattore di efflusso valutato alla  $p_u/p_o$  e cioè nella  $A_u$ .

Si consideri un ugello convergente collegato ad un serbatoio in cui siano **fissate** ad esempio **le condizioni di ristagno** ( $a_o$ ) e che scarichi in un ambiente a pressione  $p_a$  variabile tra 0 e  $p_o$ .

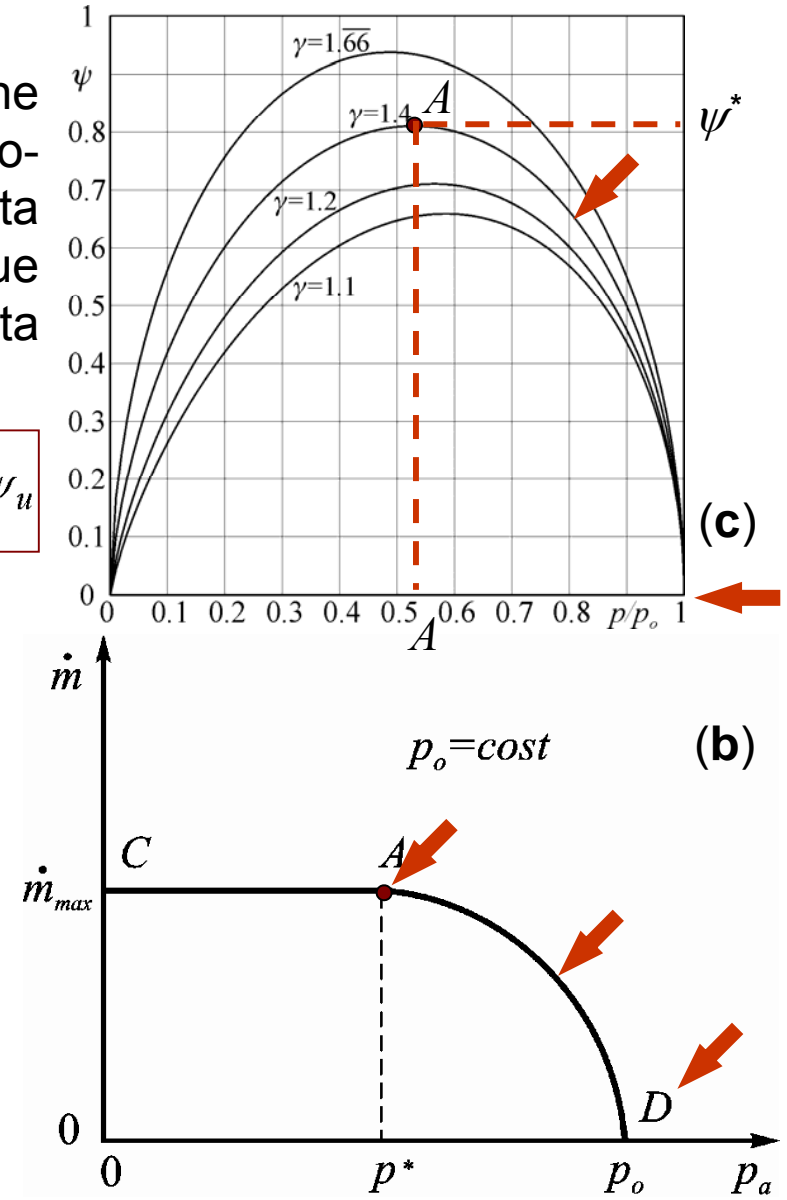
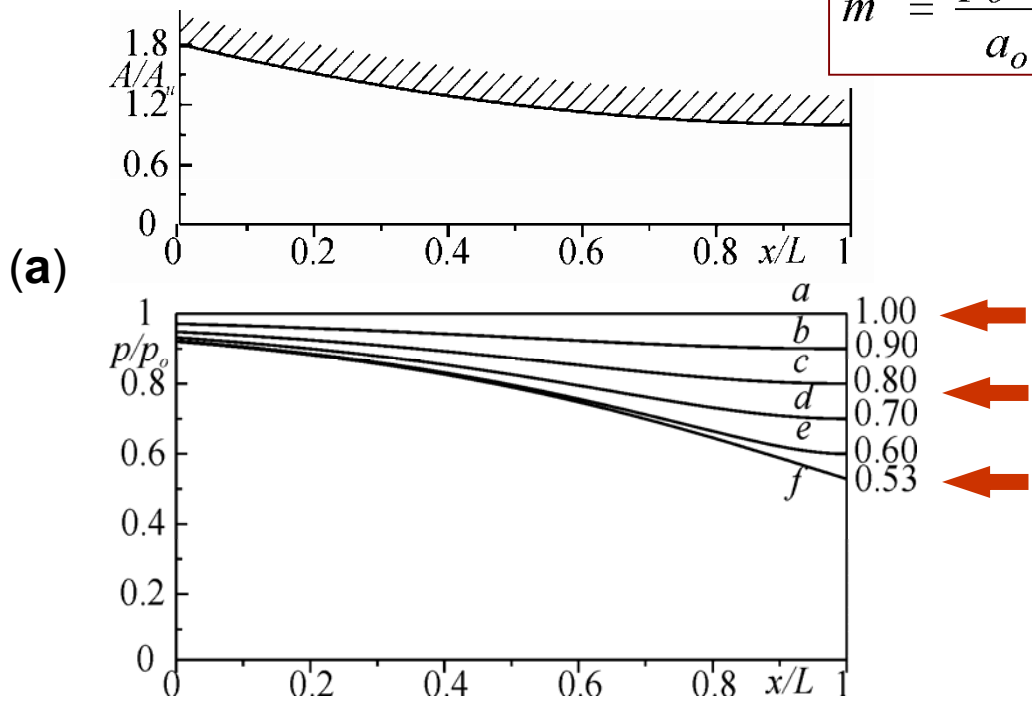
Il diagramma che rappresenta la portata in funzione della pressione ambiente  $p_a$  è del tipo riportato in figura.



Infatti, a partire dal valore  $p_a = p_u = p_o$ , per cui  $\psi_u = 0$  e la portata è nulla (curva *a* della Fig.(a) e punto *D* di Fig.(b)), man mano che la  $p_a$  diminuisce (curve *b, c, d, e* ed *f* di Fig.(a)), poiché la  $p_u = p_o$  è costante, il tratto relativo di curva è simile al diagramma di  $\psi$ , a destra del massimo.

Quando, però, la  $p_u$  diventa uguale alla pressione critica (punto *A* di Fig.(b) e (c)), ulteriori diminuzioni della  $p_a$  non si risentono nella sezione di uscita dell'ugello dove la pressione  $p_u$  resta comunque bloccata alla pressione  $p^*$ . Il valore di  $\psi_u$  resta quindi costantemente uguale a  $\psi^*$ .

$$\dot{m} = \frac{p_o A_u}{a_o} \psi_u$$



Questo fatto giustifica il tratto orizzontale del diagramma a sinistra del punto  $A$  (fino al punto  $C$ ) nel quale la portata di massa resta costante e giustifica altresì il motivo per cui, quando nella sezione di uscita dell'ugello si raggiungono le condizioni critiche ( $M = 1$ ), l'ugello stesso si dice **strozzato**.

Si ricordi che il diagramma è relativo ad **assegnati valori di**  $\gamma, p_o, a_o$  e  $A_u$ .

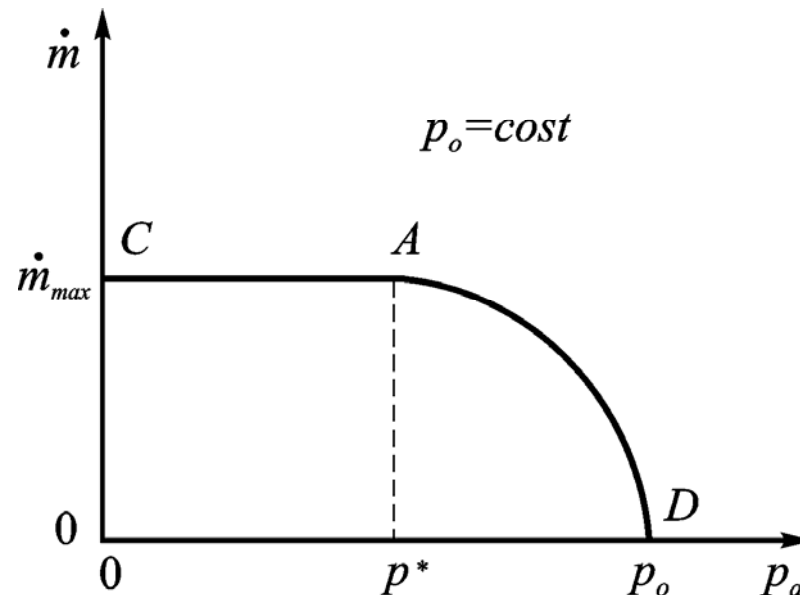
Il fatto che, per valori della pressione ambiente al di sotto di  $p^*$ , la portata di massa resta costante deve essere, ad esempio, tenuto in conto nella progettazione degli impianti a vuoto.

***È inutile usare pompe che diano, all'inizio, una depressione sempre più spinta per aumentare la portata poiché, per  $p_a < p^*$ , questa non cambia.***

Ricordando la:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

si vede che, in questi casi, è preferibile soprattutto aumentare la  $A^*$  e cioè l'area della sezione minima tra il serbatoio in cui si vuol fare il vuoto e la pompa.



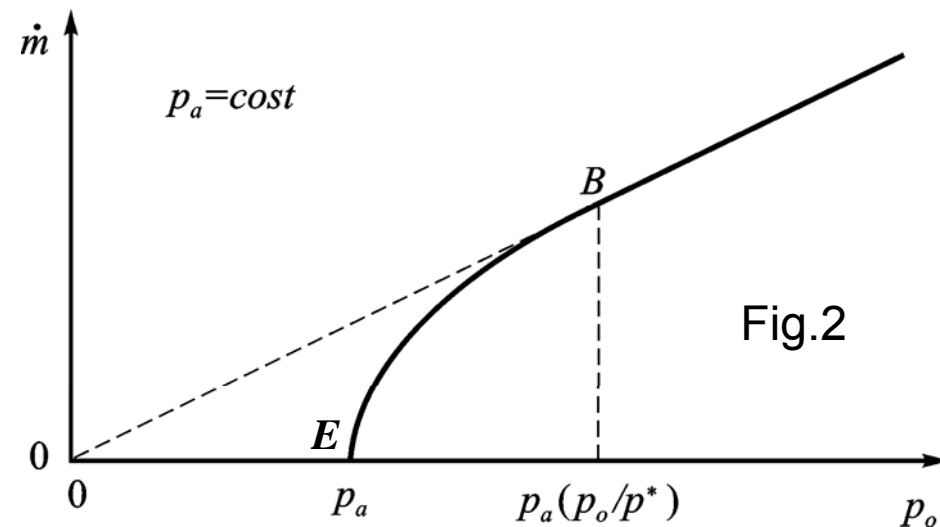
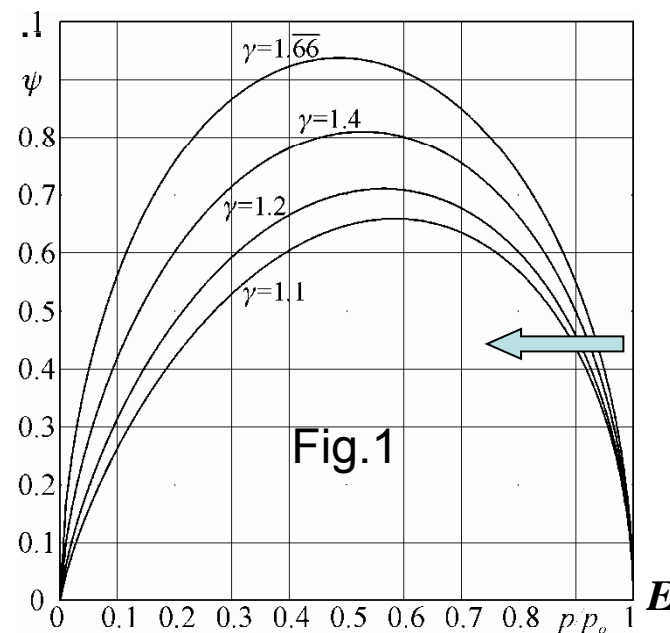
Per lo stesso ugello convergente già considerato, si vuole ora vedere **l'andamento della portata in funzione della pressione di ristagno** (nel serbatoio)  $p_o$  per un fissato valore della pressione  $p_a$  dell'ambiente in cui scarica l'ugello.

Oltre al valore di  $p_a$  si suppongono assegnati i valori di  $\gamma$ ,  $a_o$  e  $A_u$ .

Il diagramma che rappresenta la portata in funzione di  $p_o$  è del tipo rappresentato in Fig.2. Infatti, a partire dal valore  $p_o = p_a$  relativo al caso di portata nulla (punto  $E$ ), **man mano che la  $p_o$  aumenta**, nella:

$$\dot{m} = \frac{p_o A_u}{a_o} \psi_u$$

**cresce anche il valore di  $\psi_u$**  (Fig.1, ove  $p_u = p_a$  e  $p_u/p_o$  diminuisce) e quindi la portata cresce. Quindi, l'aumento in questa zona si ha perchè nella relazione precedente aumentano sia  $\psi_u$ , che  $p_o$ .



Quando la  $p_o$  diventa pari a  $p_a(p_o/p^*)$ , che per il caso di  $\gamma = 1.4$  è pari a  $p_o = p_a/0.5283 = 1.8929p_a$  (punto  $B$  del diagramma di Figg. 1 e 2), nella sezione di uscita dell'ugello si raggiungono le condizioni critiche.

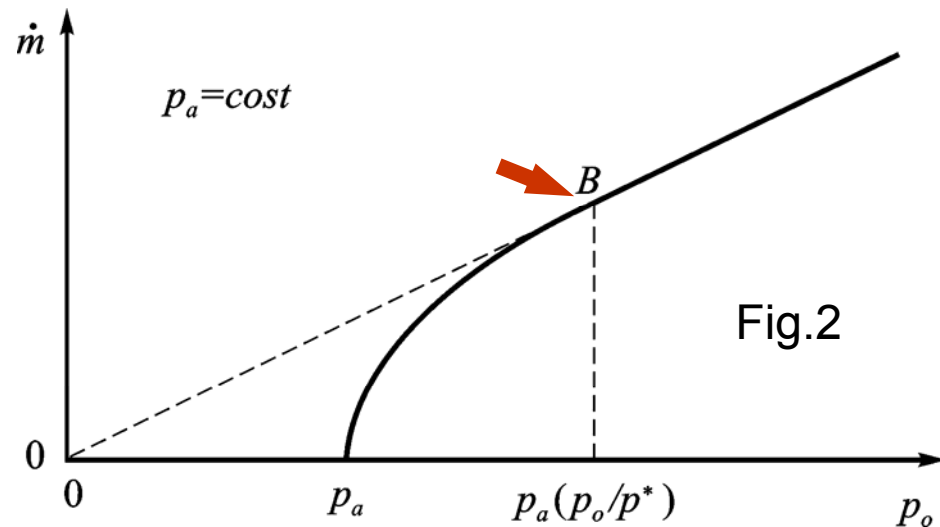
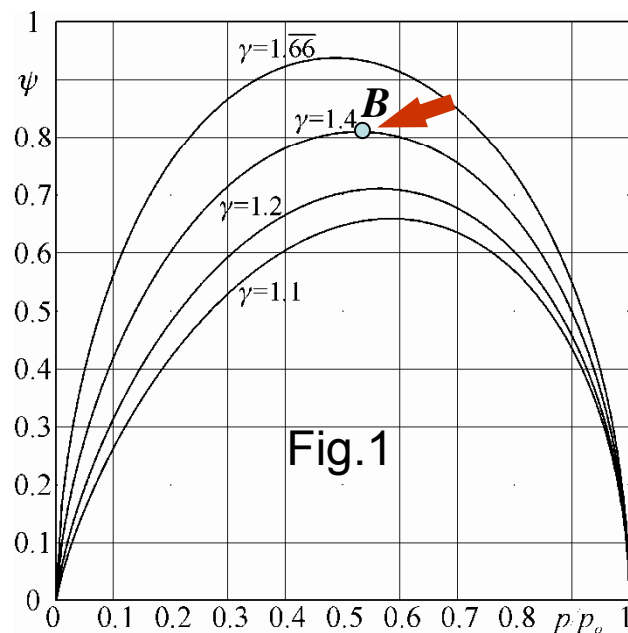
Ulteriori aumenti di  $p_o$ , poiché conducono a  $p_a/p_o < p^*/p_o$ , rendono  $p_u/p_o$  sempre uguale a  $p^*/p_o$ , e quindi bloccano il fattore di efflusso al valore  $\psi^*$ .

Ne consegue che la formula che si deve applicare dal punto  $B$  in poi è la:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

con **dipendenza lineare** della portata dalla  $p_o$  poiché  $\psi^*$  resta costante.

**La portata di massa dipende solo dalla pressione assoluta di ristagno.**



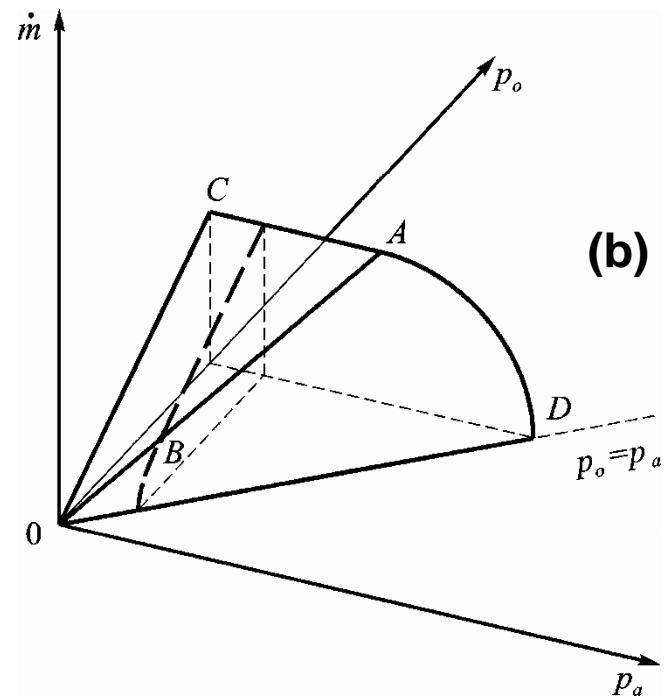
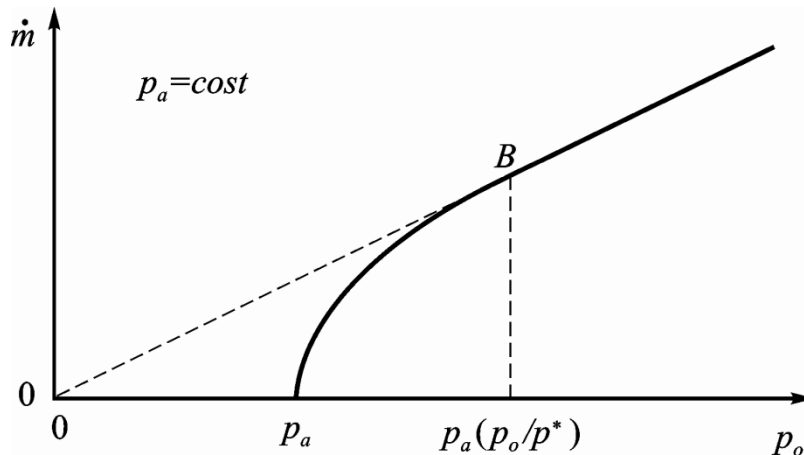
Questo fatto viene spesso utilizzato nell'industria per una **regolazione lineare della portata di massa con la pressione assoluta di ristagno**.

Si usano, inoltre, misuratori di portata di massa, cosiddetti **sonici**, nei quali la misura della sola  $p_o$  e della  $T_o$  (per poter calcolare la  $a_o$ ) con la:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

conduce alla misura della portata di massa.

**I due diagrammi prima visti non sono altro che due sezioni del cosiddetto solido della portata (rappresentato in assonometria in figura (b)), la cui superficie dà il valore della portata sia in funzione della pressione di ristagno che della pressione ambiente.**



La superficie del solido della portata è costituita dal triangolo  $OCA$  e dalla superficie conica (non circolare)  $OAD$  che con esso ha in comune il segmento  $OA$ .

In effetti si tratta di **una sola superficie conica** (perché anche il triangolo  $OCA$  può essere considerato tale), avente **vertice  $O$**  e **generatrice la curva  $CAD$**  che coincide con quella della Fig. 2.

Quest'ultima rappresenta una sezione retta del cono essendo per essa  $p_o = \text{cost}$  (cioè l'intersezione della superficie conica con un piano parallelo al piano  $\dot{m} - p_a$ ).

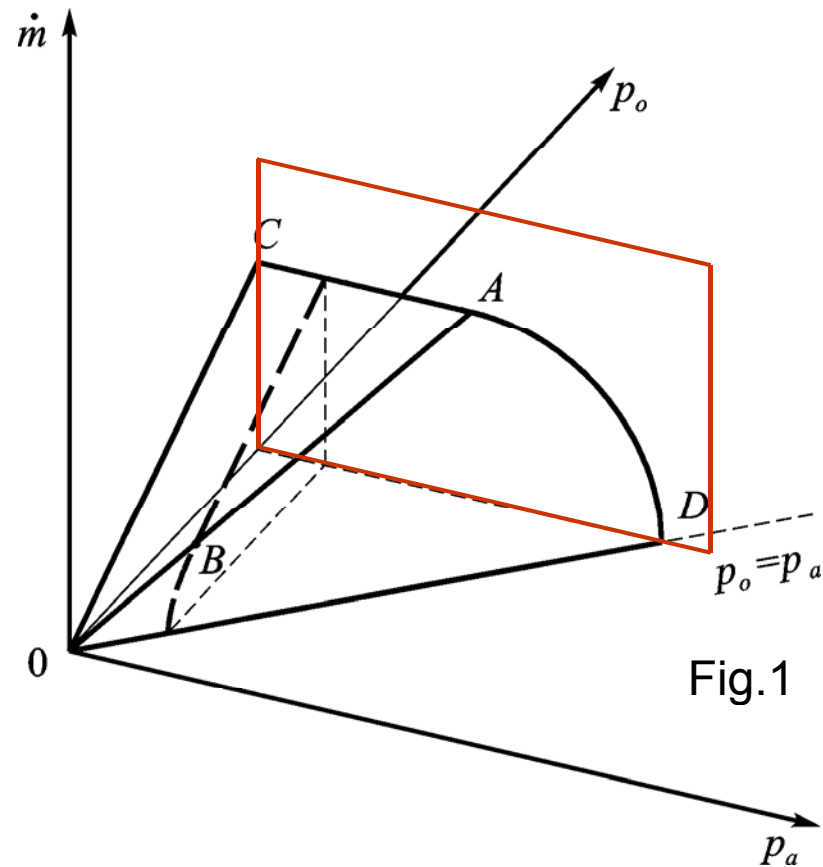


Fig.1

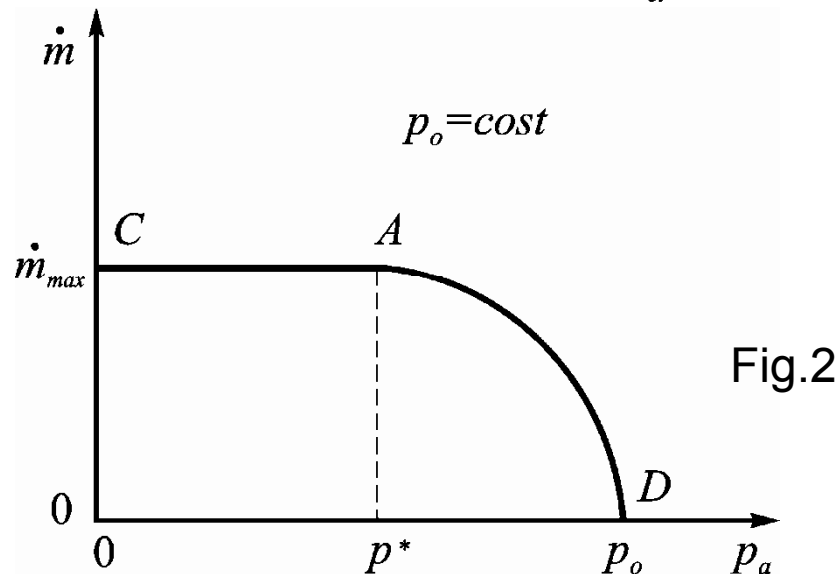


Fig.2

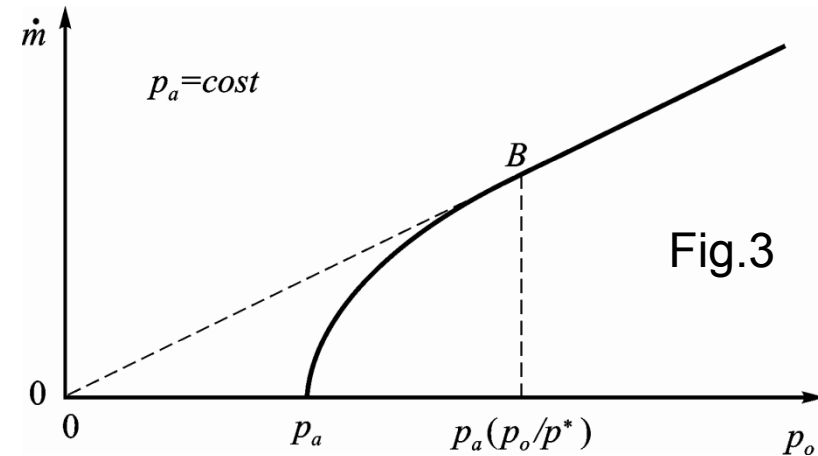


Fig.3

Nella Fig. 1 è anche rappresentata con linea tratteggiata la curva che si ottiene dall'**intersezione della superficie conica con un piano parallelo al piano  $\dot{m} - p$**  ( $cost$ ), che corrisponde al diagramma della Fig. 3.

Il segmento  $OD$  ( $p_o = p_a$ ), che dà luogo ad una portata nulla, appartiene, ovviamente, alla **bisettrice** del piano  $p_o - p_a$ .

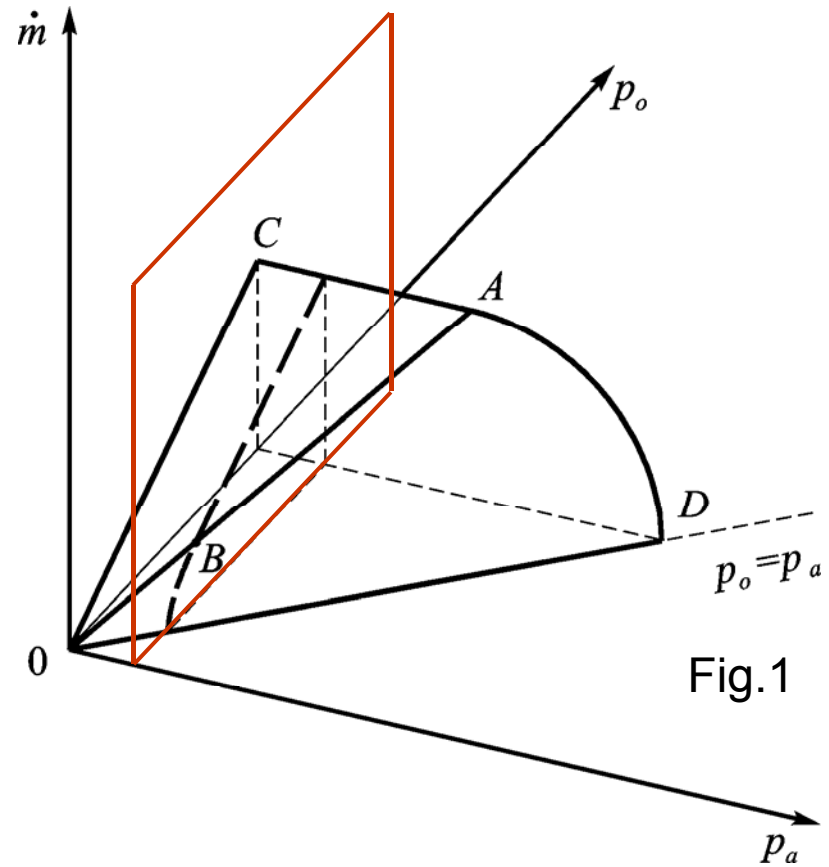


Fig.1

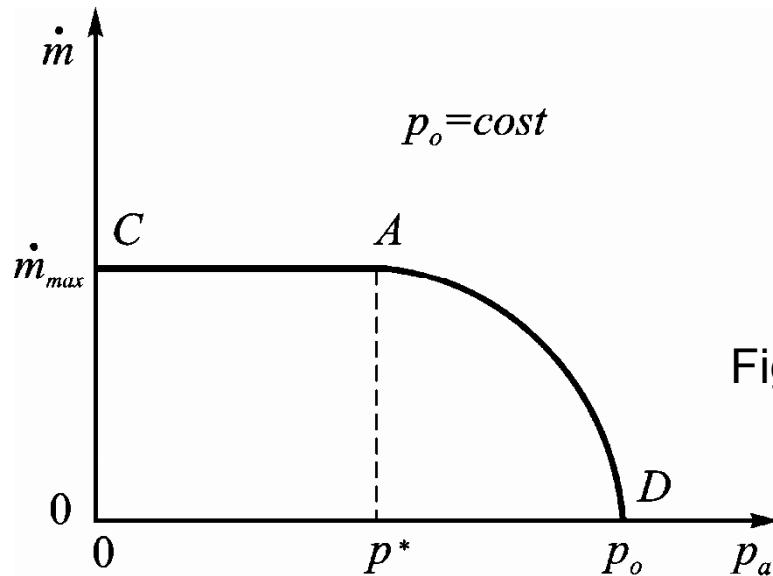


Fig.2

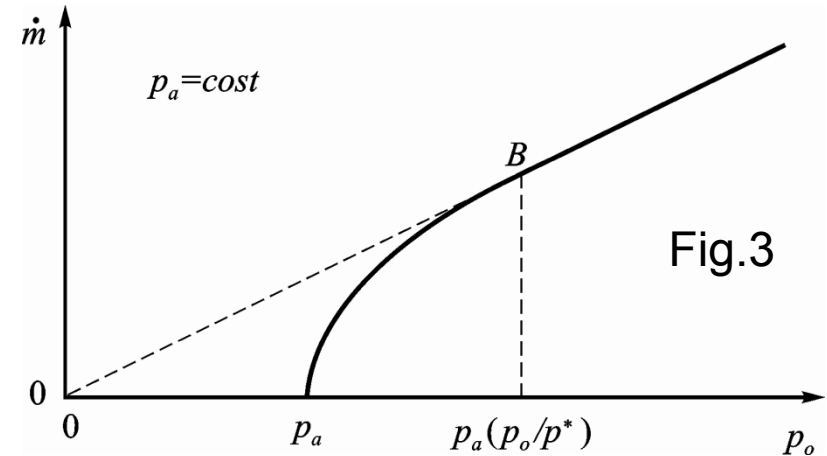


Fig.3

# ATTENZIONE

***Quanto detto in questo contesto si applica ovviamente a moti adiabatici, isoentropici, quasi-unidimensionali e quasi-stazionari.***

Per la prima ipotesi è necessario che ***gli ugelli non siano molto lunghi*** rispetto al loro diametro medio in modo tale che si possano trascurare gli effetti associati allo scambio termico e alla viscosità del fluido.

D'altro canto, la seconda ipotesi, che prevede una variazione graduale dell'area della sezione dell'ugello, richiede che ***l'ugello non sia molto corto.***

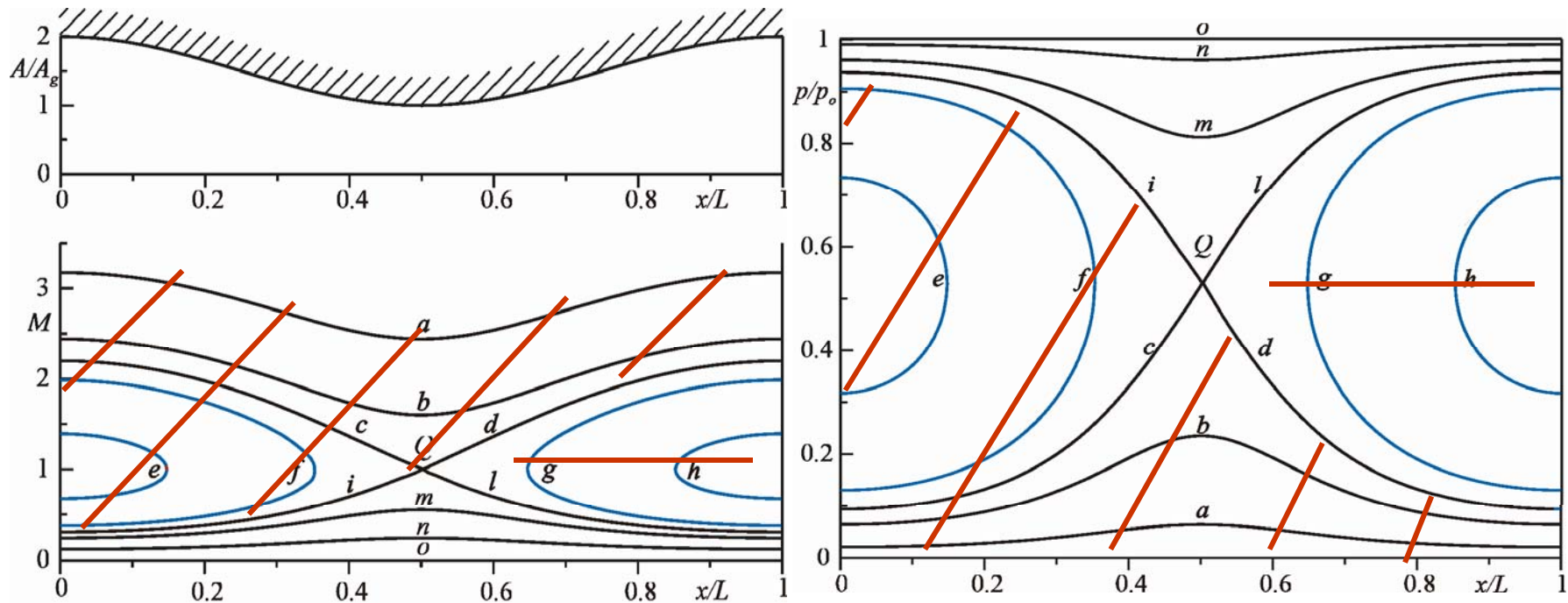
Va comunque osservato che per ugelli molto corti, al limite ***fori in una parete*** (caso limite di ugello convergente), ***gli aspetti salienti della trattazione restano validi salvo che è necessario introdurre dei coefficienti correttivi in particolare per la portata.***

Dell'applicabilità dell'ultima ipotesi (quasi-stazionarietà) si è già discusso in precedenza.

# UGELLO CONVERGENTE DIVERGENTE COLLEGATO AD UN SERBATOIO

Se paragonati a quelli di un ugello semplicemente convergente, i diversi comportamenti di un ugello convergente divergente collegato ad un serbatoio risultano molto più articolati.

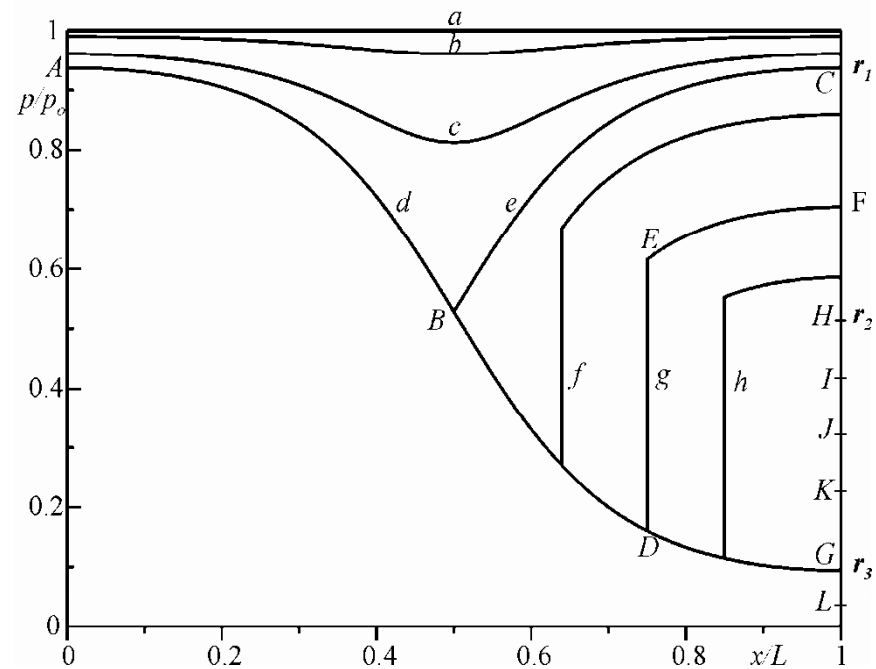
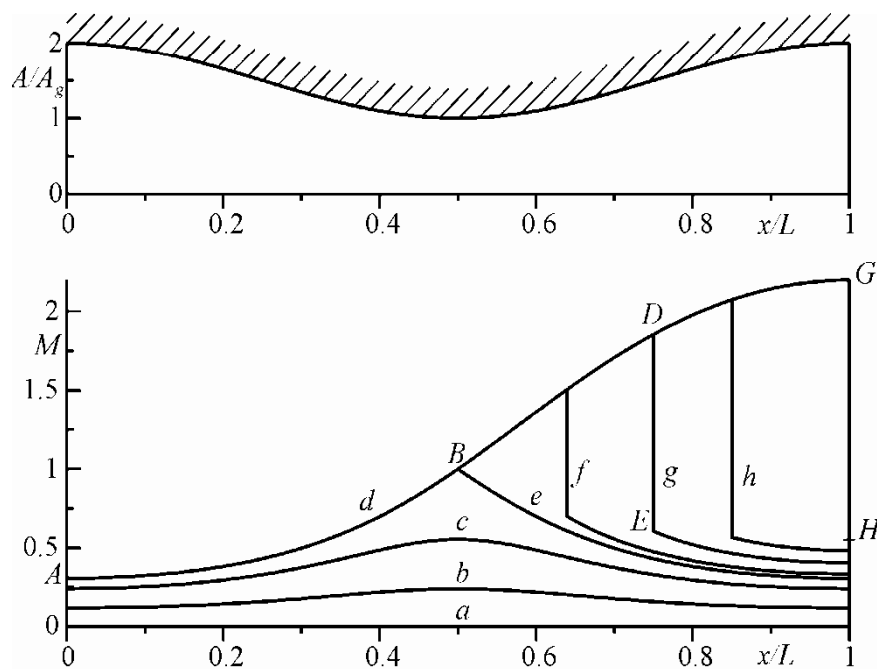
Anche in questo caso **conviene partire dalle curve soluzione per un moto quasi-unidimensionale, quasi-stazionario, omoenergetico e isoentropico in un condotto ad area variabile** riportate in figura, nelle quali occorre **escludere le curve del tipo *a, b, c, e, f, g* ed *h*** per gli stessi motivi esposti nel caso di un ugello convergente.



Le curve restanti sono rappresentate in figura, sempre per il caso di distribuzione cosinusoidale dell'area ed aree di ingresso e di uscita doppie rispetto a quella di gola) ***insieme ad altre di cui si dirà in seguito e che***, come si vedrà, ***non corrispondono ad un moto completamente isoentropico nell'ugello***, perchè prevedono la **presenza di onde d'urto**.

Sull'asse delle ordinate a destra del grafico  $p/p_o$ , sono indicati tre particolari valori del rapporto di pressione  $p_a/p_o$  contrassegnati con  $r_1, r_2$  ed  $r_3$  e di solito denominati **primo**, **secondo** e **terzo rapporto critico di pressione** rispettivamente.

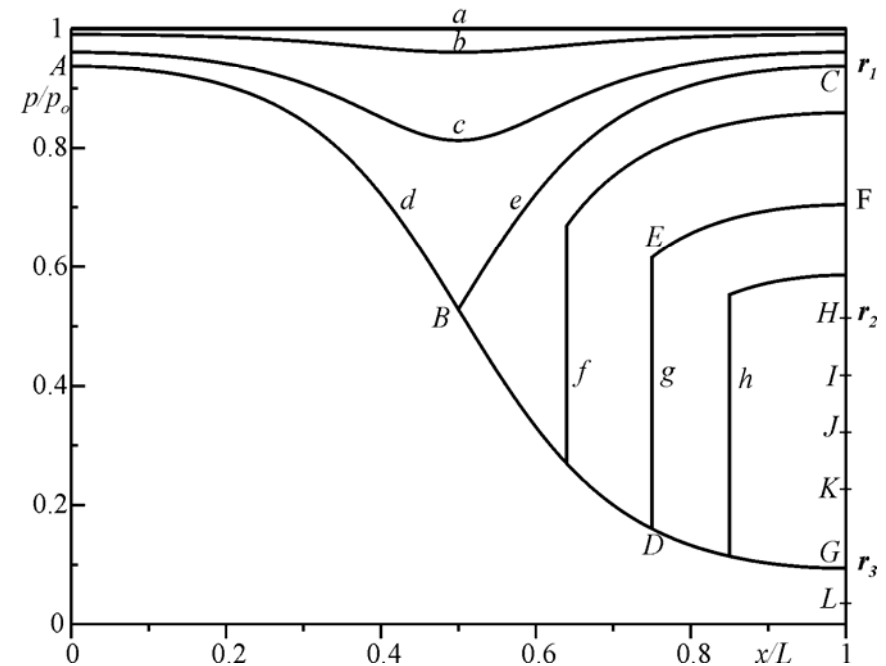
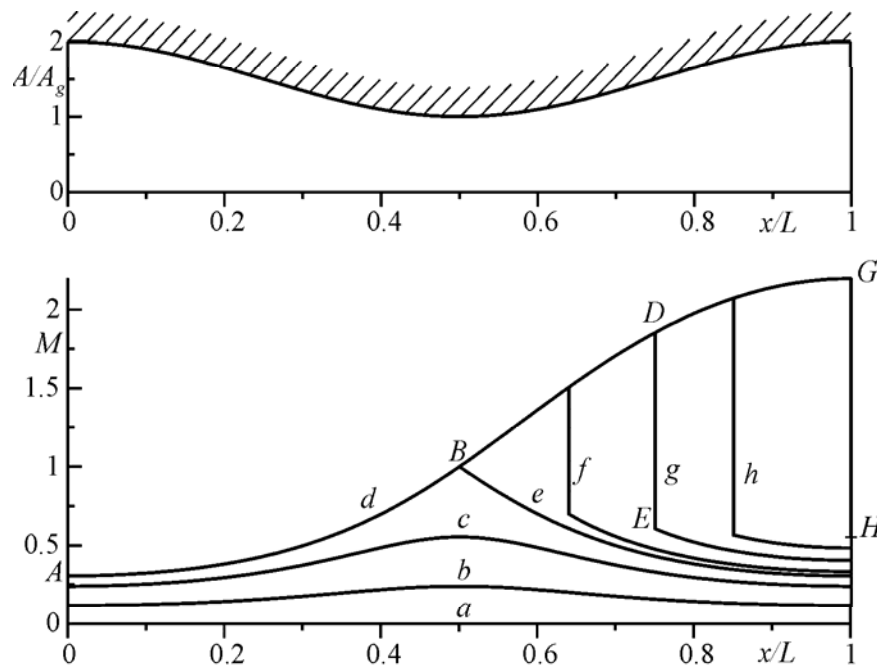
Come si vedrà, essi delimitano particolari campi di funzionamento dell'ugello.



Questi tre rapporti sono funzione del rapporto tra i calori specifici  $\gamma$  e del rapporto tra l'area di uscita dell'ugello e quella di gola. I tre rapporti sono relativi a funzionamenti dell'ugello per il quale si ha  $M = 1$  nella sezione di gola.

In particolare, **il rapporto  $r_1$  è relativo a condizioni di uscita subsoniche mentre  $r_3$  a condizioni di uscita supersoniche. Il rapporto  $r_2$  si ottiene moltiplicando il rapporto  $r_3$  per il rapporto tra le pressioni statiche a valle e a monte di un'onda d'urto normale stazionaria che si ha al numero di Mach corrispondente al punto  $G$** , cioè posta nella sezione di uscita dell'ugello.

I tre punti  $C$ ,  $H$  e  $G$  si chiamano **punti caratteristici** perché, come si vedrà in seguito, **delimitano diversi campi di funzionamento dell'ugello.**

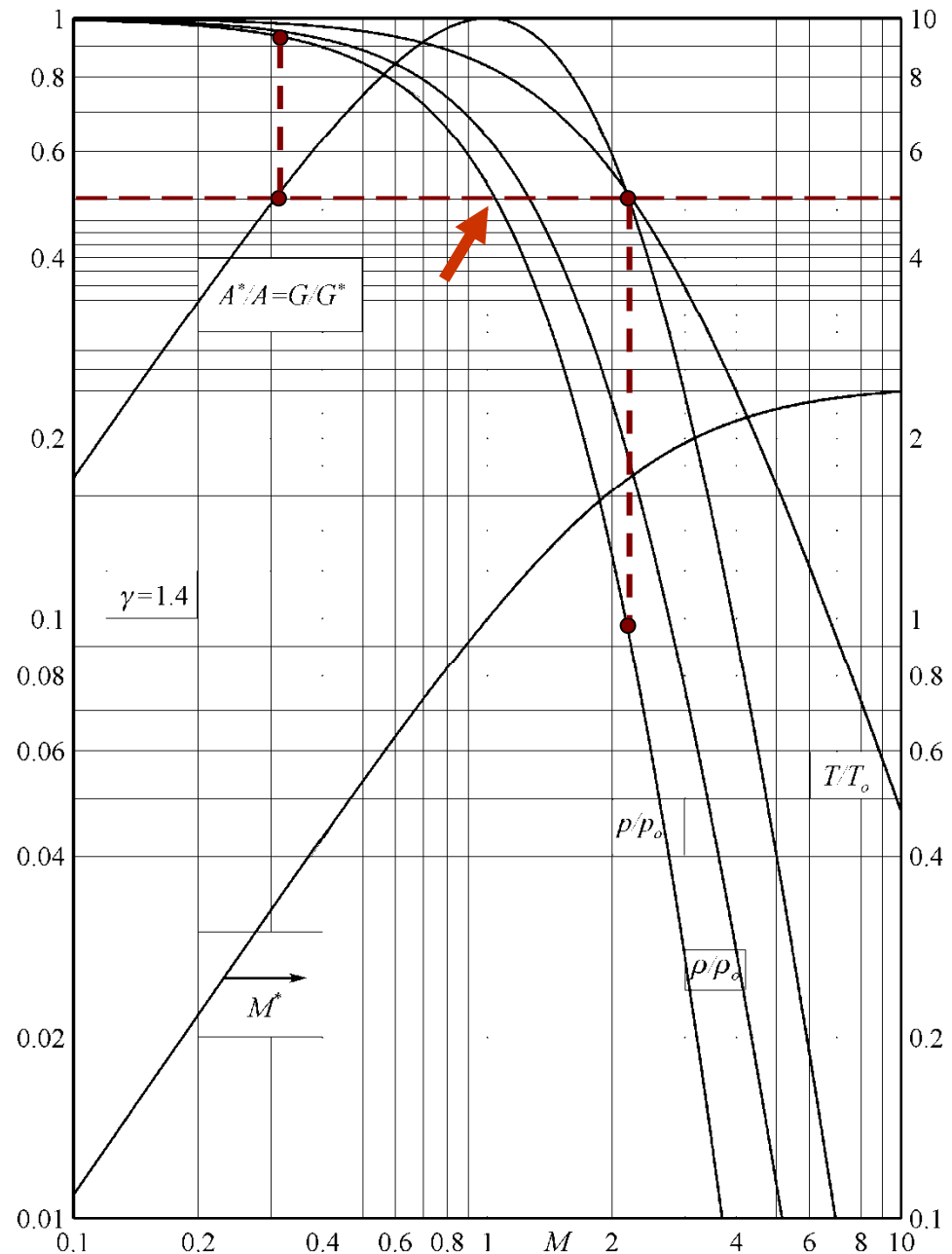


Con riferimento alla figura riportata i due rapporti  $r_1$  ed  $r_3$  si leggono sull'asse delle ordinate entrando dapprima nella figura con il rapporto assegnato tra l'area di gola e quella di uscita dell'ugello,  $A_g/A_u$  che, per l'ipotesi di funzionamento dell'ugello con  $M = 1$  nella sezione di gola, risulta pari ad  $A^*/A_u$ .

Questo valore del rapporto corrisponderà a **due valori** del numero di Mach, **uno in regime subsonico ed uno in regime supersonico**.

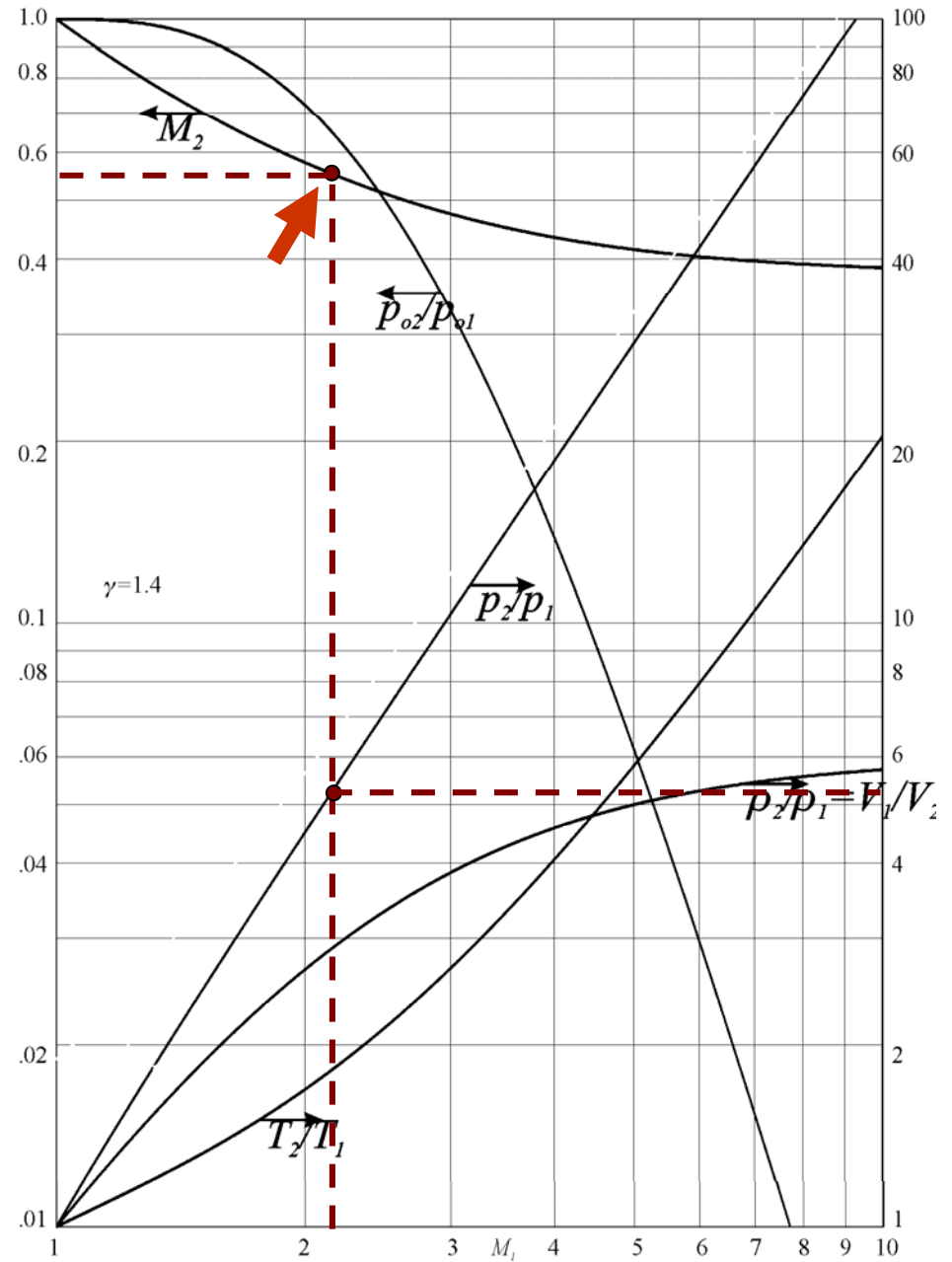
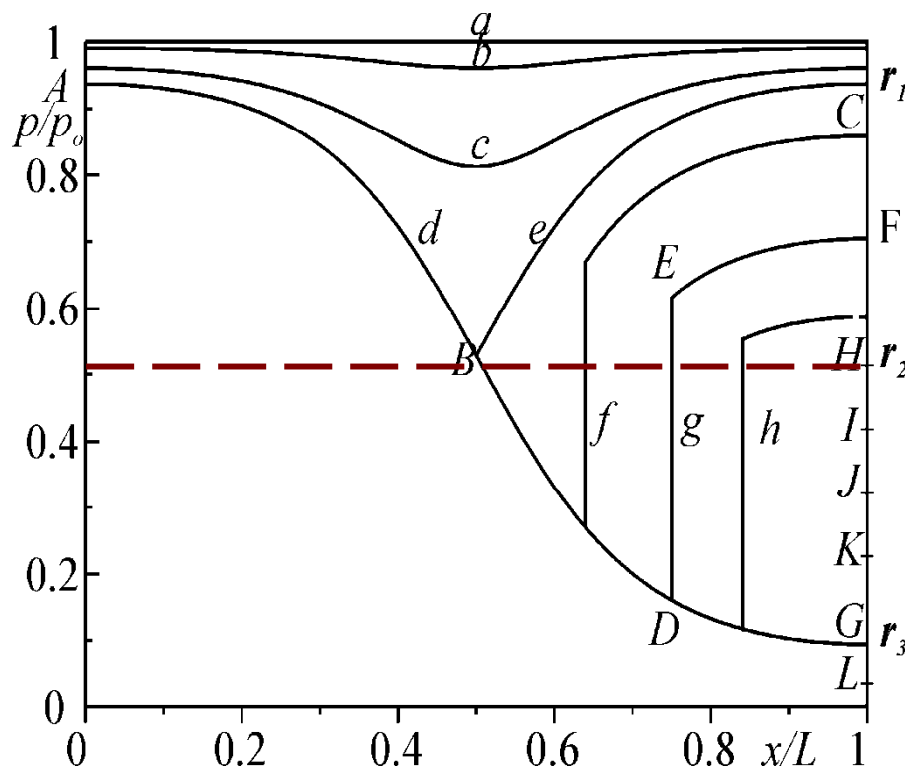
In corrispondenza di questi due valori del numero di Mach, si potranno leggere nella stessa figura i valori di  $r_1$  e  $r_3$ .

**Attenzione:**  $r_1$  risulta sempre maggiore di  $p^*/p_o$  ed  $r_3$  minore.



**Per calcolare il valore di  $r_2$ ,** occorre entrare nel grafico delle onde d'urto con il valore di  $M_G$  e leggere il rapporto  $p_2/p_1$ . Poiché la  $p_G$  non rappresenta altro che la  $p_1$  e la  $p_H$  la  $p_2$ , si avrà:

$$r_2 = r_3 \times p_2/p_1$$



Non deve meravigliare il fatto che  $r_2$  risulti minore di 0.5283 anche se il numero di Mach a valle dell'onda d'urto è circa 0.55, cioè è minore di uno.

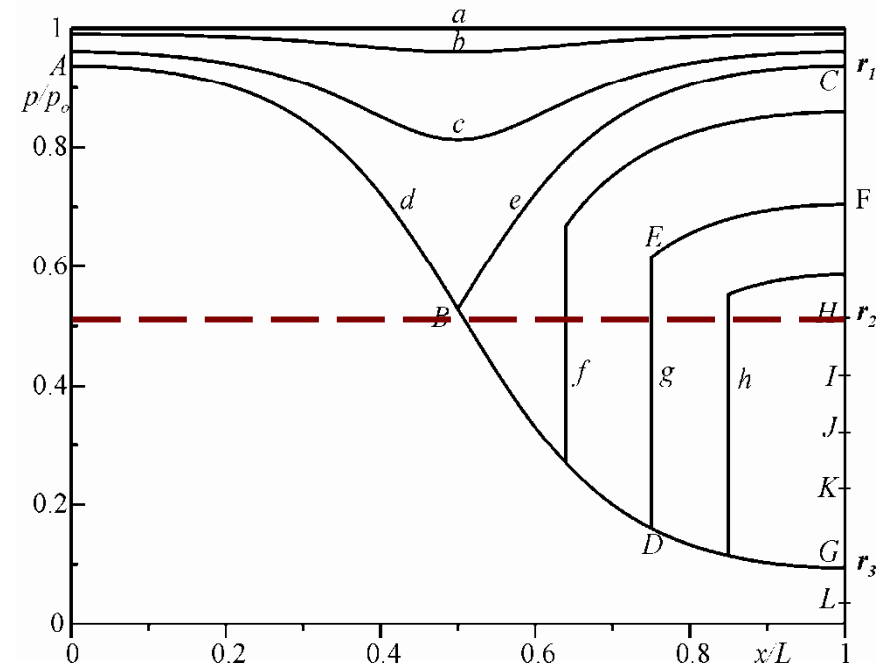
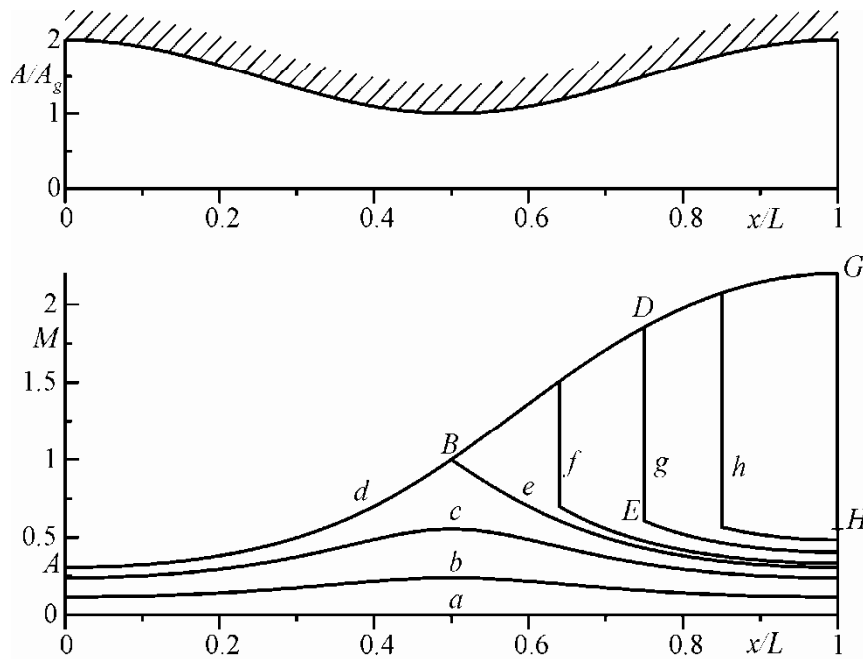
Infatti, il diagramma di figura adimensionalizza la pressione rispetto a quella nel serbatoio e non rispetto alla  $p_{o2}$ , riportando quindi la quantità:

$$p_2/p_{o1} = p_2/p_{o2} \times p_{o2}/p_{o1}$$

e, poiché:

$$p_{o2} / p_{o1} < 1$$

anche, per  $M_2 < 1$ , il prodotto può risultare **minore di 0.5283**.

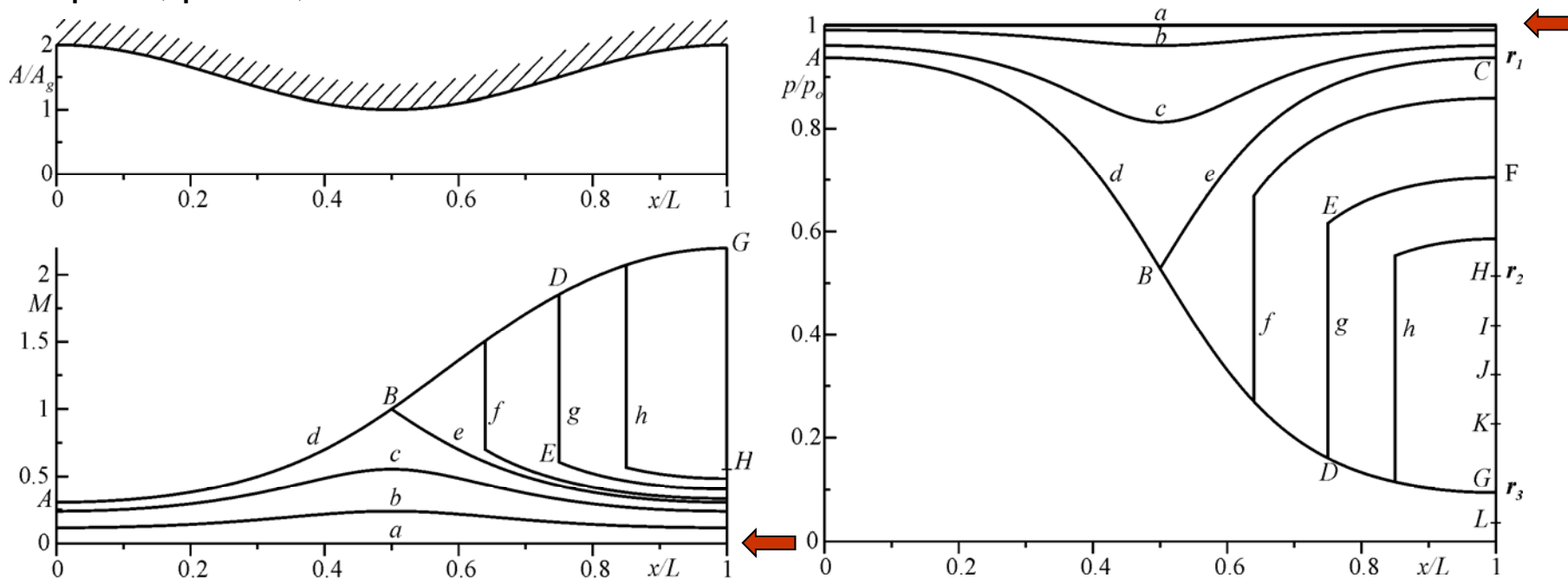


Di seguito si esamineranno i diversi comportamenti dell'ugello al variare del rapporto tra la pressione ambiente e quella di ristagno nel serbatoio.

Come nel caso dell'ugello convergente, si suppone che il serbatoio contenga un gas ad una pressione costante  $p_o = 1 \text{ ata}$  e che l'ugello scarichi in un ambiente in cui sia possibile far variare la pressione  $p_a$  da  $1 \text{ ata}$  in giù.

Le possibili generalizzazioni, cioè il caso di pressione di ristagno diversa, o pressione ambiente costante e pressione di ristagno variabile sono simili a quelle già discusse per l'ugello solamente convergente.

La curva  $a$ , corrispondente al caso  $p_u = p_a = p_o = 1 \text{ ata}$ , è sempre relativa alla condizione per la quale la pressione  $p$  è uguale a  $p_o$  lungo tutto l'ugello nel quale, perciò, **la velocità del fluido è identicamente nulla**.

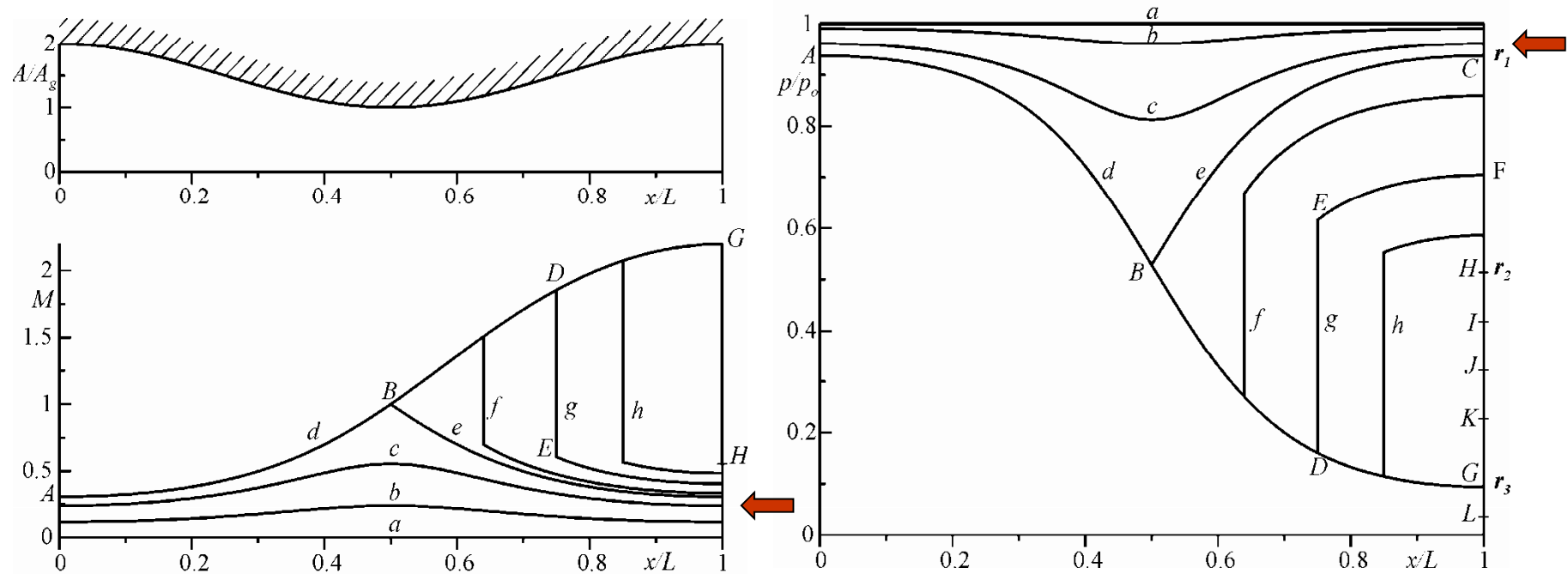


Al diminuire della pressione ambiente, l'ugello funziona secondo curve del tipo *b* o *c* e la pressione del fluido nella sezione di uscita dell'ugello, per quanto già detto per l'ugello convergente, deve rispettare la condizione di Kutta.

Il moto del gas è subsonico lungo tutto l'ugello **con un valore minimo della pressione** (valore massimo del numero di Mach) **nella sezione di gola**.

Per  $p_a/p_o = r_1$ , il fluido raggiunge per la prima volta condizioni critiche ( $M = 1$ , punto *B* di figura) nella sezione di gola, seguendo le curve *d* ed *e*.

Come si vedrà, **in queste condizioni l'ugello si strozza**. Ulteriori diminuzioni della pressione ambiente non cambiano lo stato *B* del gas nella gola e, quindi, per pressione nel serbatoio costante, **non cambia la portata**.



Se ora, a partire da  $p_a/p_o = r_1$  la pressione ambiente viene ulteriormente diminuita (ad es. punto  $F$  di figura), **le onde di espansione** (che si generano per la depressione esistente nella sezione di uscita dell'ugello e viaggiano alla velocità del suono) **riescono a risalire la corrente subsonica presente nel divergente facendo accelerare il fluido verso valle.**

È come se l'ugello tendesse a funzionare seguendo il ramo superiore della curva  $g$  o  $h$  di Fig.1, cosa che, peraltro, non può accadere perché queste curve prevedono  $M = 1$  in una sezione diversa da quella di gola.

In Fig.2 è, invece, rappresentato cosa accade, sia pure dal punto di vista unidimensionale, per tutte le condizioni  $r_2 < p_a/p_o < r_1$  (curve  $f, g$  ed  $h$ ).

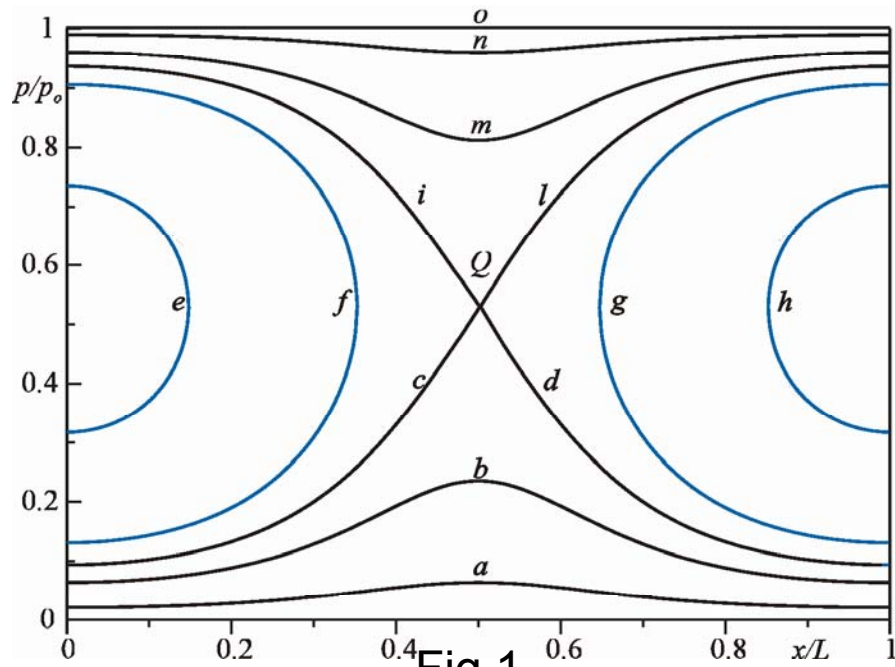


Fig.1

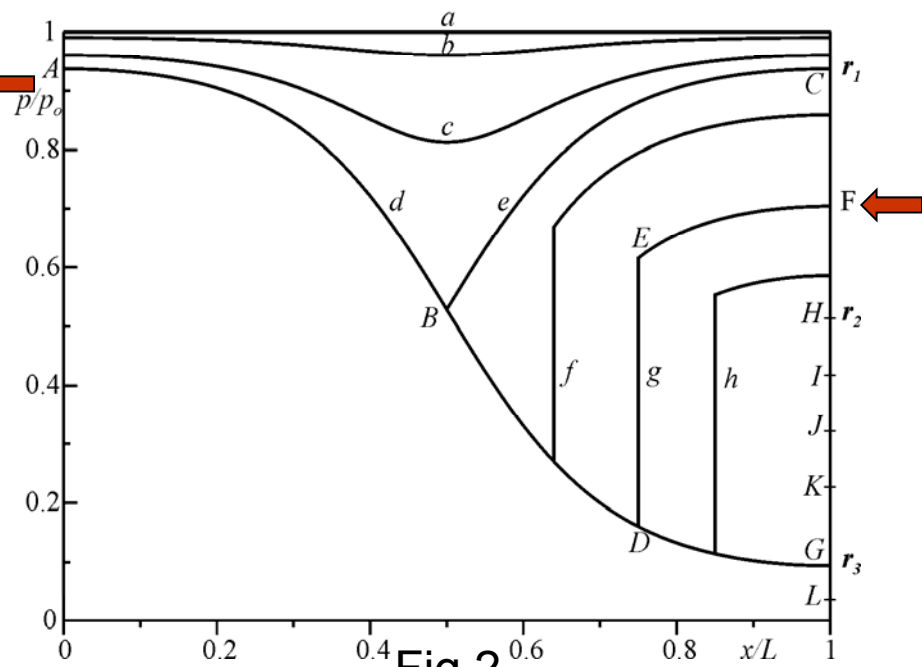
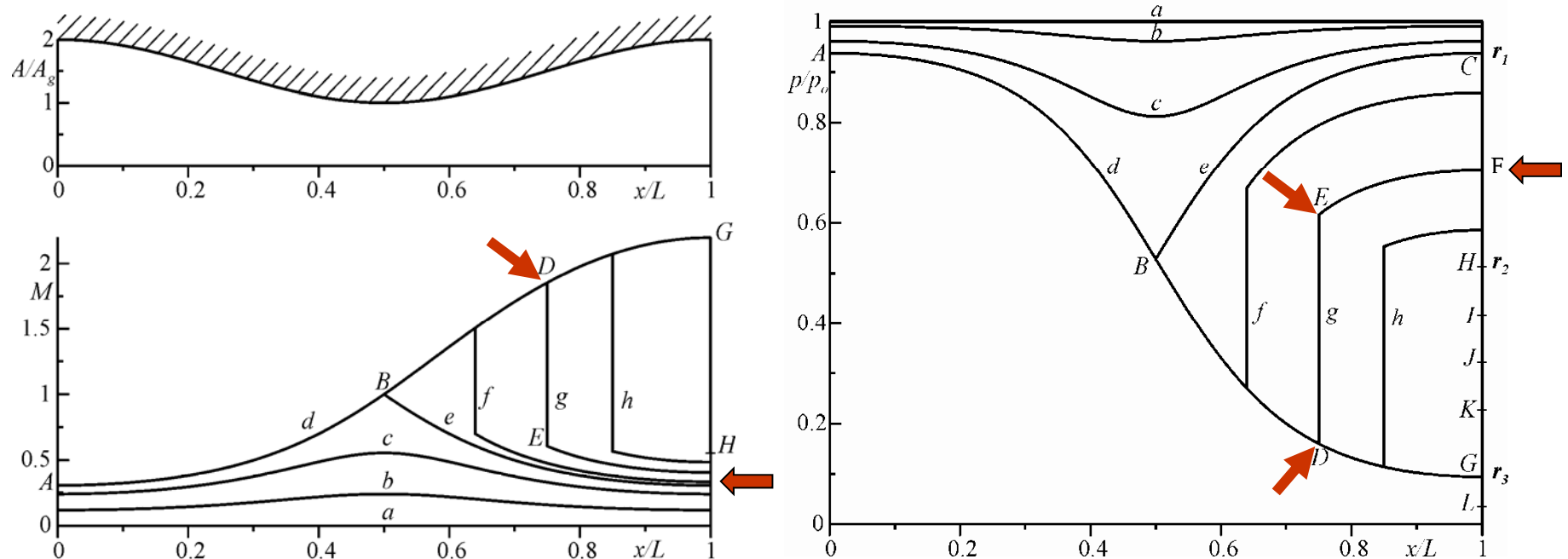


Fig.2

Si supponga, ad esempio, che il rapporto di pressione  $p_d/p_o$  sia quello corrispondente al punto  $F$  del diagramma. **La corrente**, che nel convergente segue la curva  $d$  (accelerando e contemporaneamente espandendosi), sino a  $M = 1$  (punto  $B$ ) **imbocca il divergente continuando ad accelerare (tratto  $BD$ ) raggiungendo in  $D$  un numero di Mach supersonico.**

**Nella sezione corrispondente al punto  $D$  si ha un'onda d'urto normale** che porta lo stato del fluido a quello **subsonico** rappresentato dal punto  $E$ .

**A valle di questa sezione si ha una graduale ricomprensione** (decelerazione isentropica) **del fluido sino alle condizioni  $F$** , poiché il fluido si trova a  $M < 1$  ed il condotto a valle è divergente.



Attenzione: L'onda d'urto fa cambiare la pressione di ristagno e quindi l'area critica. Per la:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

si ha:

$$A_D^*/A_E^* = p_{oE}/p_{oD} = p_{oE}/p_o$$

Il numero di Mach nella sezione di uscita si dovrà calcolare mediante la:

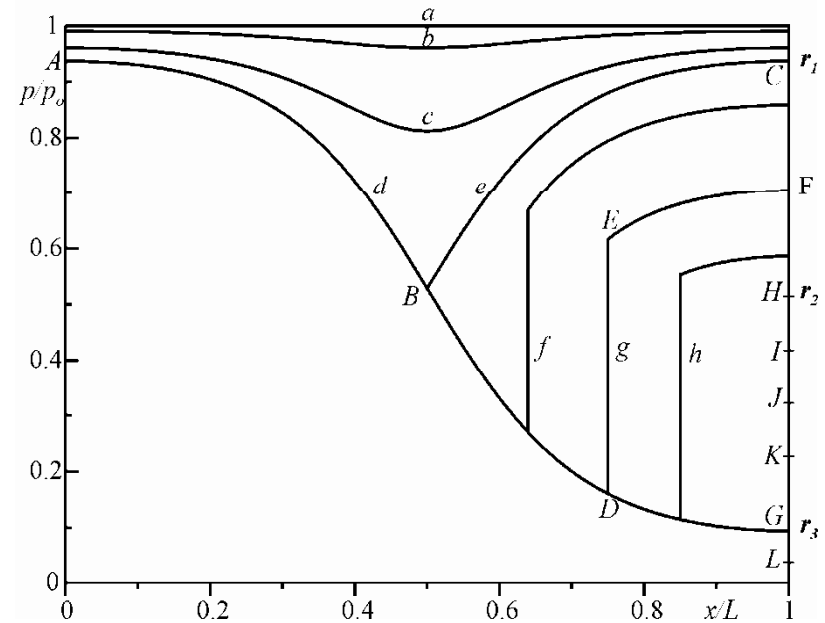
$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

sostituendovi il rapporto:

$$A_u / A_E^* = (A_u / A^*) \times (A^* / A_E^*)$$

Ovviamente, della  $A/A^*$  occorre considerare la **sola soluzione subsonica**, osservando che nella sua espressione è stato assunto:

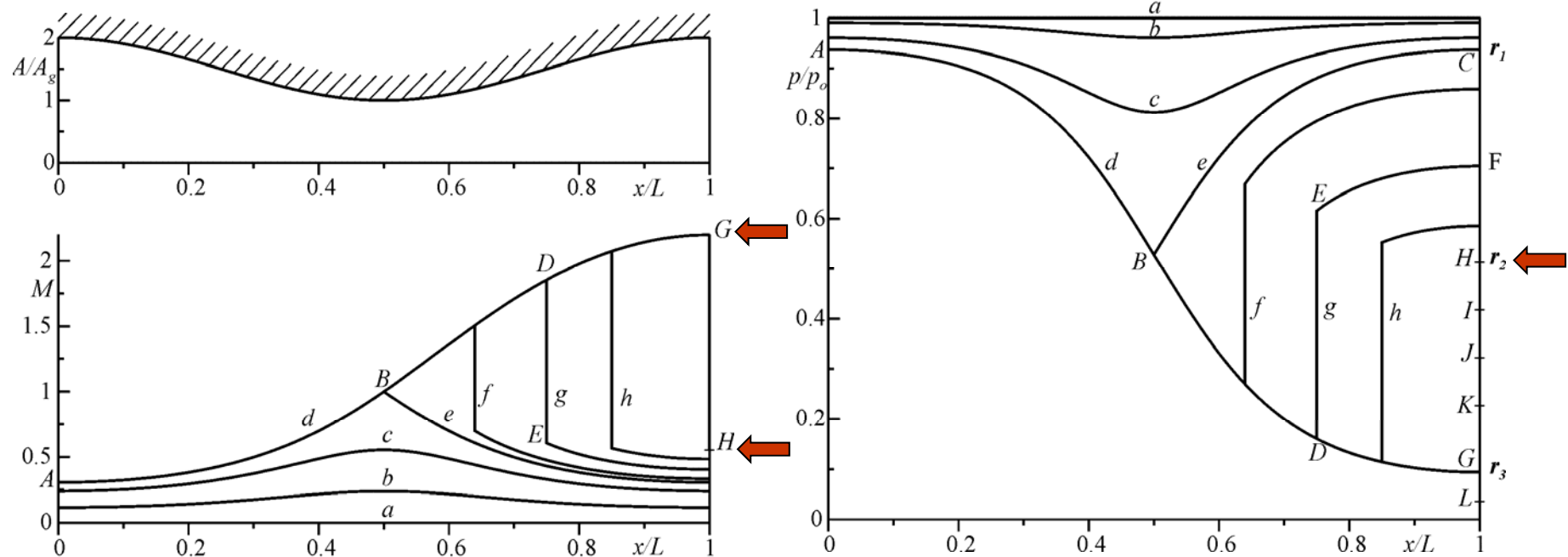
$$A^* = A_D^*$$



Al progressivo diminuire del rapporto di pressione dal valore  $r_1$  a quello  $r_2$ , l'**onda d'urto normale si muove lungo il divergente** dalla sezione corrispondente al punto  $B$  (onda di Mach normale ad effetto nullo) a quella del punto  $G$  (onda d'urto normale posta nella sezione di uscita dell'ugello) che porta ad  $H$ .

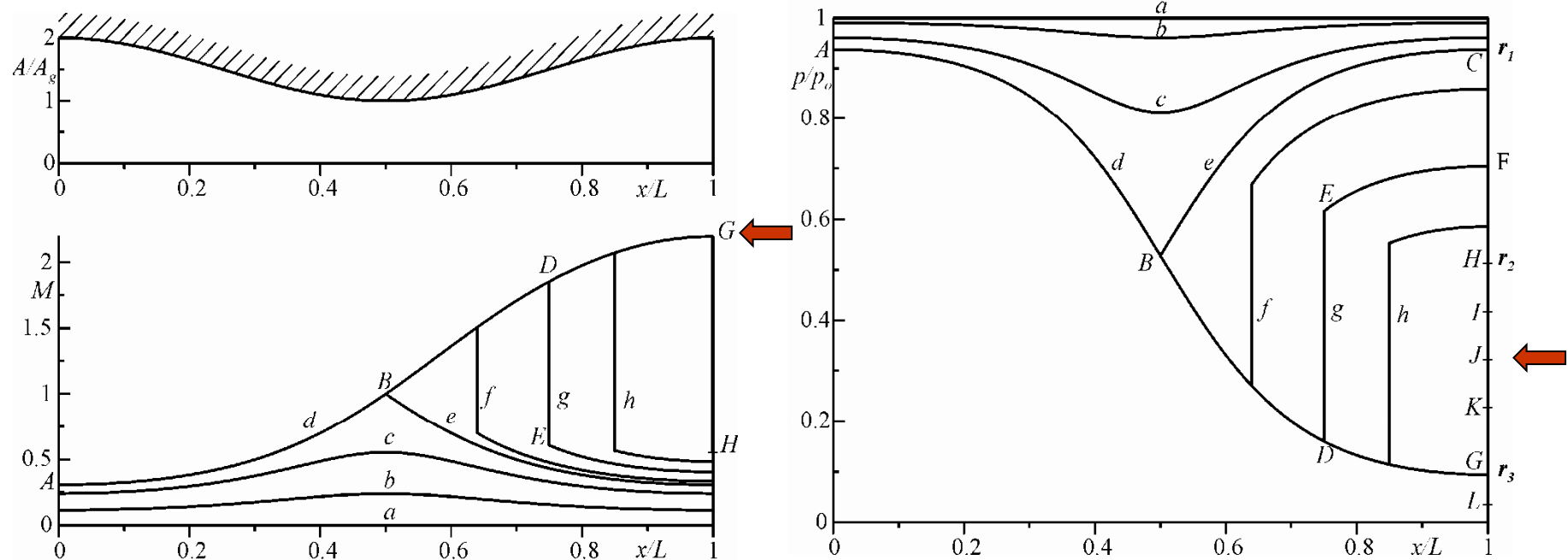
Per tutti questi valori di  $p_a/p_o$ , il moto nell'ugello non è **completamente isoentropico** per la presenza dell'onda d'urto, anche se **è ancora valida la condizione di Kutta** perché le condizioni del fluido nella sezione di uscita dell'ugello sono sempre subsoniche. Quindi, il rapporto  $r_2$  corrisponde ad un valore del rapporto  $p_a/p_o$  per il quale si ha un'onda d'urto normale nella sezione di uscita dell'ugello che porta le condizioni del fluido da  $G$  ad  $H$ .

Ovviamente si intende per  $p_o$  la quantità:  $P_{oA} = P_{oB} = P_{oD} = P_{oG} > P_{oH}$



Per ulteriori diminuzioni del rapporto di pressione  $p_d/p_o$ , da  $r_2$  a  $r_3$  (ad es. punti  $I, J$  e  $K$ ), l'onda d'urto normale provocherebbe una ricomprensione troppo forte; quindi nella sezione di uscita dell'ugello (in particolare, alla sua periferia direttamente a contatto con la pressione ambiente) **deve esistere un'onda d'urto obliqua che dia luogo alla sola ricomprensione necessaria.**

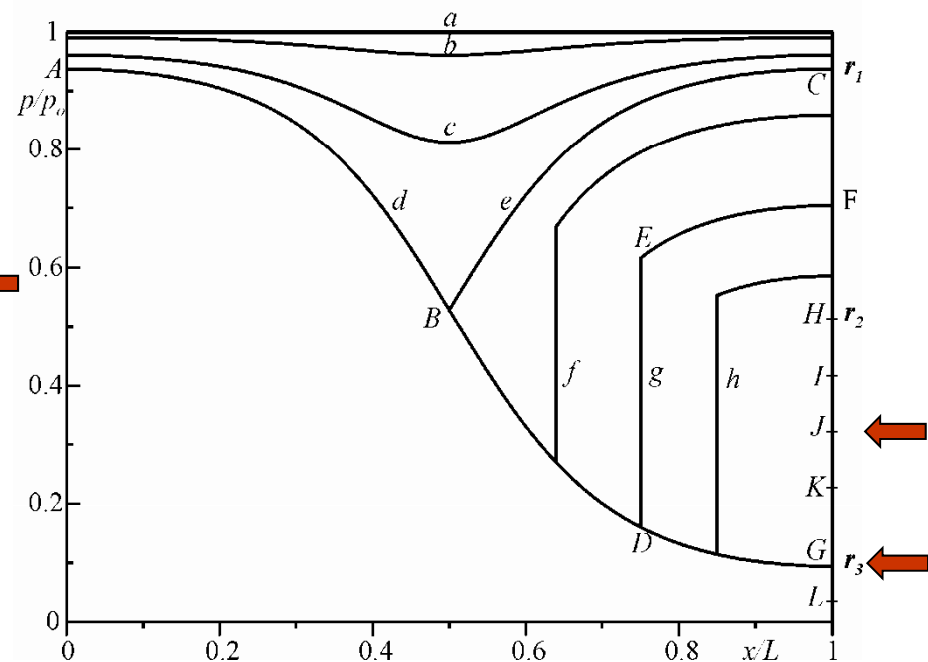
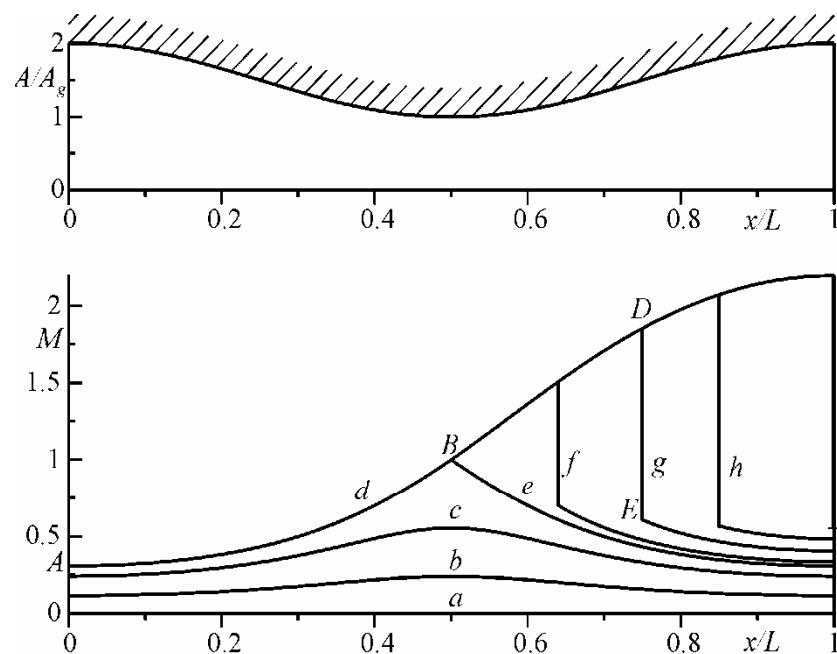
Al diminuire del rapporto  $p_d/p_o$ , l'angolo di inclinazione  $\varepsilon$  dell'onda d'urto rispetto alla corrente diminuisce (perché è necessaria una ricomprensione sempre minore) **dal valore di  $90^\circ$**  (corrispondente al secondo rapporto critico di pressione  $r_2$ ) **al valore  $\mu = \arcsin 1/M$**  (corrispondente al terzo rapporto critico di pressione  $r_3$ ), che è relativo ad un'onda di Mach.



L'onda d'urto obliqua parte dalla periferia della sezione di uscita dell'ugello e, poiché come si vedrà essa si sviluppa **al di fuori** di quest'ultima, il flusso nella sezione di uscita dell'ugello è **sempre supersonico** con numero di Mach corrispondente al punto  $G$ ; cioè, nell'ugello, il fluido segue sempre la curva  $ABG$ .

Quindi **non è più rispettata la condizione di Kutta** e l'ugello, in questa situazione, viene detto **sovraespanso**.

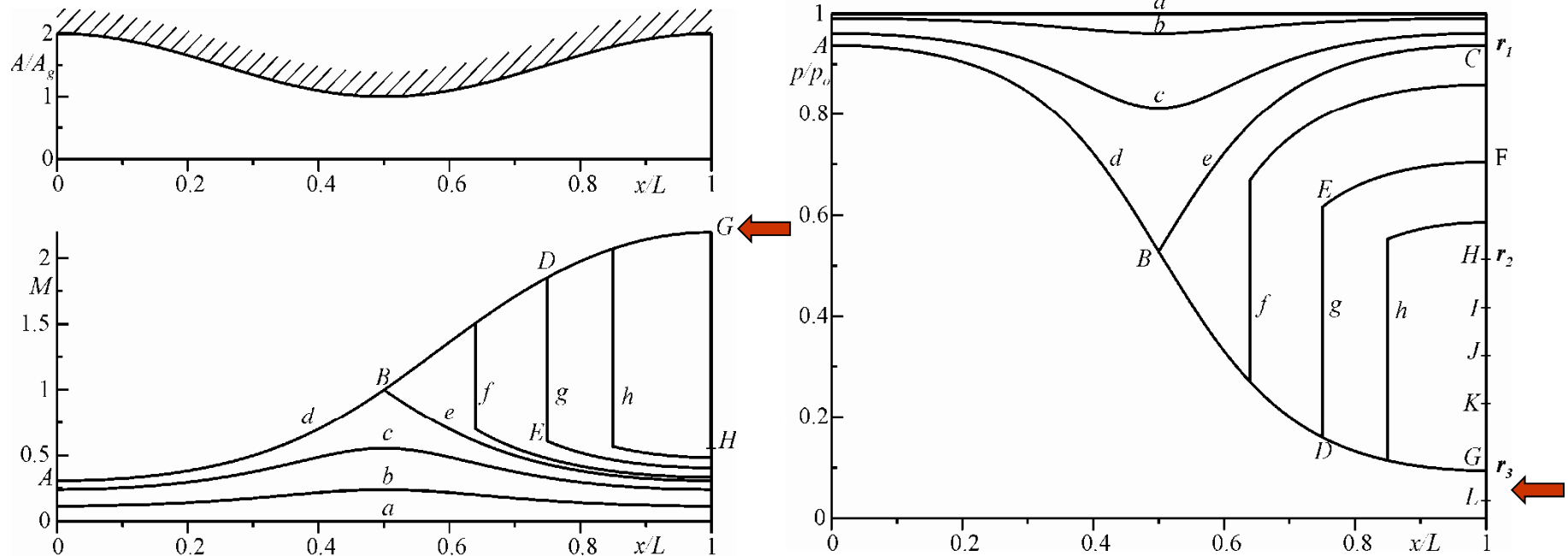
La condizione per la quale il rapporto è proprio quello corrispondente al punto  $G$  è anche detta **condizione di progetto dell'ugello convergente divergente** e l'espansione del gas nell'ugello è detta **espansione corretta**. Essa conduce nella sezione di uscita dell'ugello ad un flusso supersonico con una **pressione uguale a quella ambiente**. Per questo valore del rapporto di pressione viene **recuperata la condizione di Kutta**.



Come nell'ugello convergente per valori di  $p_d/p_o < p^*/p_o$ , nel caso di un ugello convergente divergente, quando si ha  $p_d/p_o < r_3$ , si genera un **ventaglio di espansione** a valle della sezione di uscita dell'ugello che parte dalla periferia della sezione di uscita ma, nell'ugello, il fluido continua a seguire la curva  $ABG$ .

**In questa situazione l'ugello viene detto sottoespanso perché  $p_u > p_a$ .**

A differenza di quanto avviene nell'ugello convergente, nel quale la prima onda del ventaglio di espansione è ortogonale alla corrente poichè il numero di Mach di uscita è pari ad 1, per un ugello convergente divergente **la prima onda di Mach del ventaglio è inclinata rispetto alla corrente di un angolo pari a  $\mu = \arcsin(1/M_G)$ .**

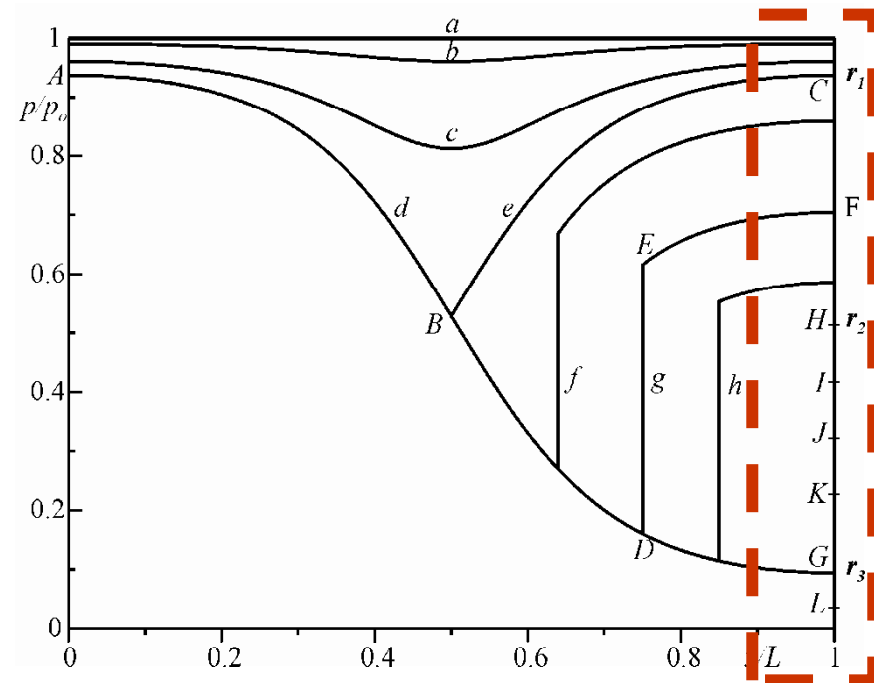
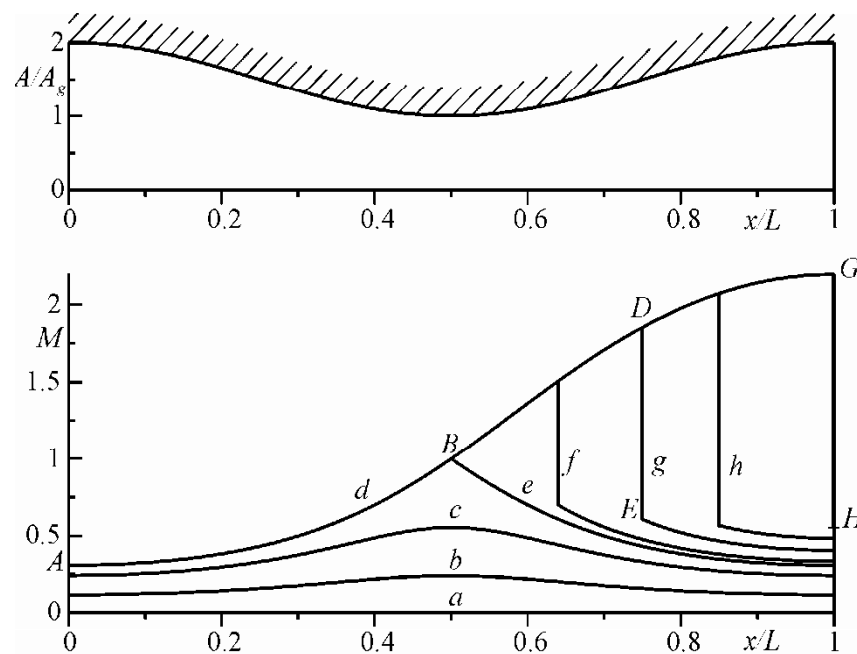


Si può quindi concludere che, per valori di  $p_a/p_o$  inferiori al primo rapporto critico di pressione  $r_1$ , si ha sempre  $M = 1$  nella sezione di gola.

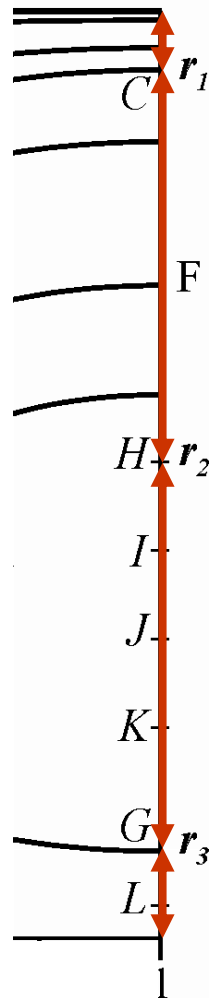
Invece, per valori di  $p_a/p_o$  inferiore al secondo rapporto critico di pressione  $r_2$ , all'interno dell'ugello non vi è alcun effetto della diminuzione della pressione ambiente sia sulla distribuzione del numero di Mach, che sulla distribuzione di pressione.

L'adattamento della corrente alla pressione ambiente avviene al di fuori dell'ugello e non interessa il moto all'interno dell'ugello stesso.

Per valori di  $p_a/p_o$  inferiore al secondo rapporto critico di pressione  $r_2$ , tranne che per  $p_a/p_o = r_3$ , non vale la condizione di Kutta.



In conclusione, il comportamento dell'ugello convergente divergente si può riassumere nei seguenti quattro regimi di funzionamento:



- $p_d/p_o < r_3$  - **ugello sottoespanso**; l'efflusso dall'ugello è supersonico, **la pressione nella sezione di uscita dell'ugello è maggiore di quella ambiente** e la corrente completa la sua espansione sino alla pressione ambiente al di fuori dell'ugello mediante un ventaglio di espansione;

**non è valida la condizione di Kutta.**

- $r_3 < p_d/p_o < r_2$  - **ugello sovraespanso**; l'efflusso dall'ugello è supersonico, **la pressione nella sezione di uscita dell'ugello è minore di quella ambiente** e la corrente si porta alla pressione ambiente fuori dell'ugello mediante un'onda d'urto obliqua;

**non è valida la condizione di Kutta.**

- $r_2 < p_d/p_o < r_1$  - **regime con onda d'urto nel divergente**; **la corrente raggiunge  $M = 1$  nella sezione di gola, percorre un tratto del divergente in regime supersonico, ma, per la presenza dell'onda d'urto, l'efflusso dall'ugello è subsonico**;

**è valida la condizione di Kutta.**

- $r_1 < p_d/p_o < 1$  - **regime alla Venturi**; **la corrente è ovunque subsonica nell'ugello** con un minimo della pressione (massimo della velocità e del numero di Mach) nella sezione di gola;

**è valida la condizione di Kutta.**

Il regime alla Venturi è, ad esempio, utilizzato nei **carburetori** dei motori alternativi ad accensione comandata.

In questo caso, la pressione di ristagno del comburente (aria aspirata dall'ambiente) è, ovviamente, la pressione atmosferica.

La depressione che si crea nella gola del Venturi, per l'accelerazione del fluido, serve a **richiamare il combustibile** (benzina).

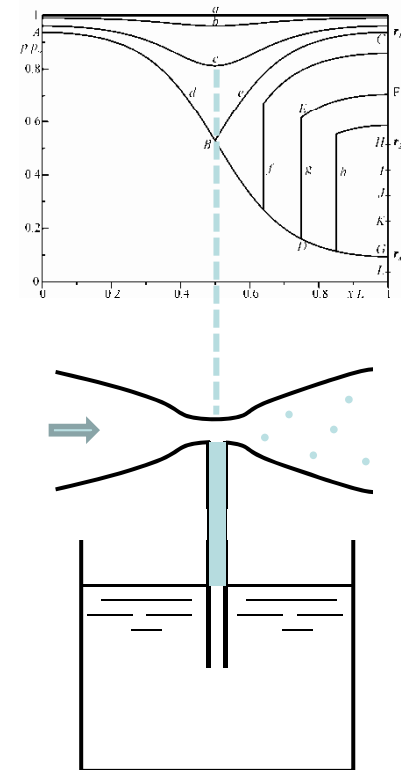
Questo, miscelandosi al comburente, dà luogo alla miscela pronta a "scoppiare" in camera di combustione con l'ausilio della scintilla prodotta dalla candela di accensione.

Lo stesso regime è anche utilizzato negli **spruzzaprofumi che hanno una pompetta a aria**.

A meno che non si sfrutti la presenza del minimo di pressione in gola, **non è conveniente utilizzare un ugello convergente divergente che funzioni con regime alla Venturi** perché i possibili fenomeni di separazione della corrente possono essere indesiderati.

**In quest'ultimo caso, invece, è preferibile utilizzare un ugello semplicemente convergente.**

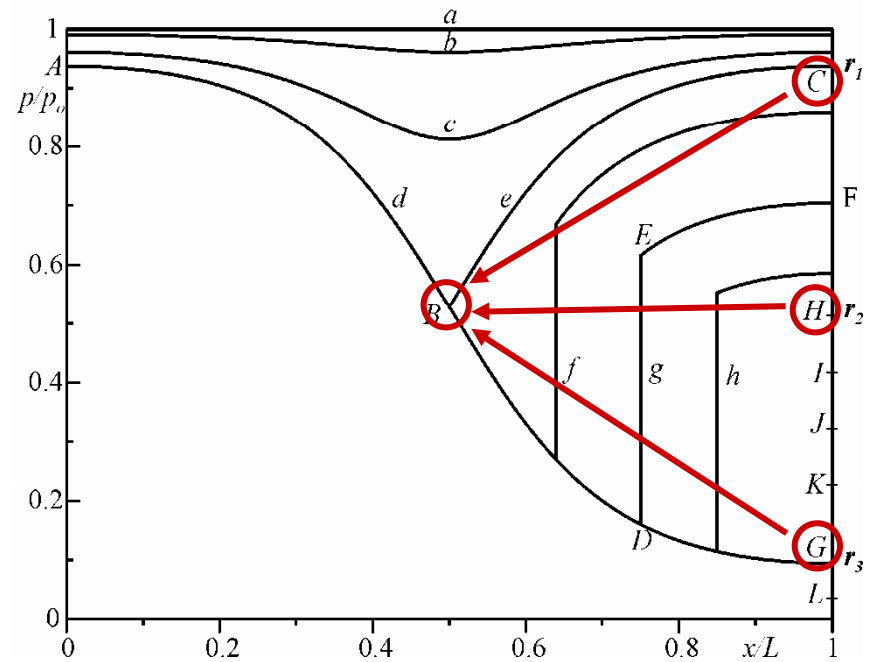
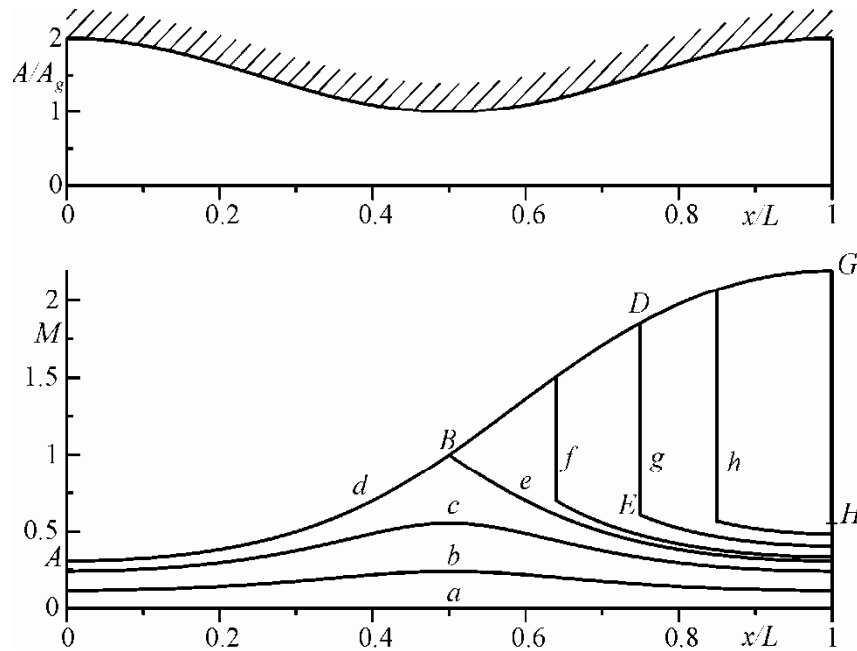
**Invece, nel caso di propulsione a razzo, è sempre preferibile un regime di funzionamento con espansione corretta dell'ugello.**



I punti  $C$ ,  $H$  e  $G$  del grafico delle pressioni, rappresentativi dei tre rapporti critici di pressione, proprio perché suddividono i diversi regimi di funzionamento dell'ugello, sono anche detti **punti caratteristici dell'ugello**, terminologia che viene adottata anche in altri modelli di moto.

Le relative curve di funzionamento che passano per essi sono anche chiamate **curve caratteristiche dell'ugello**.

Nel caso di un ugello solamente convergente si ha:  $C \equiv H \equiv G$  ed  $r_1 \equiv r_2 \equiv r_3 = p^*/p_0$

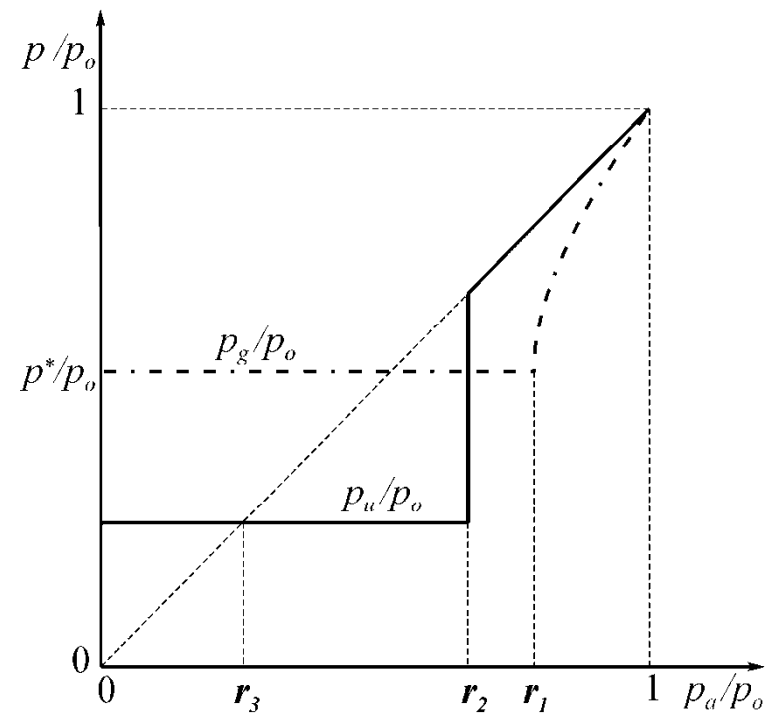
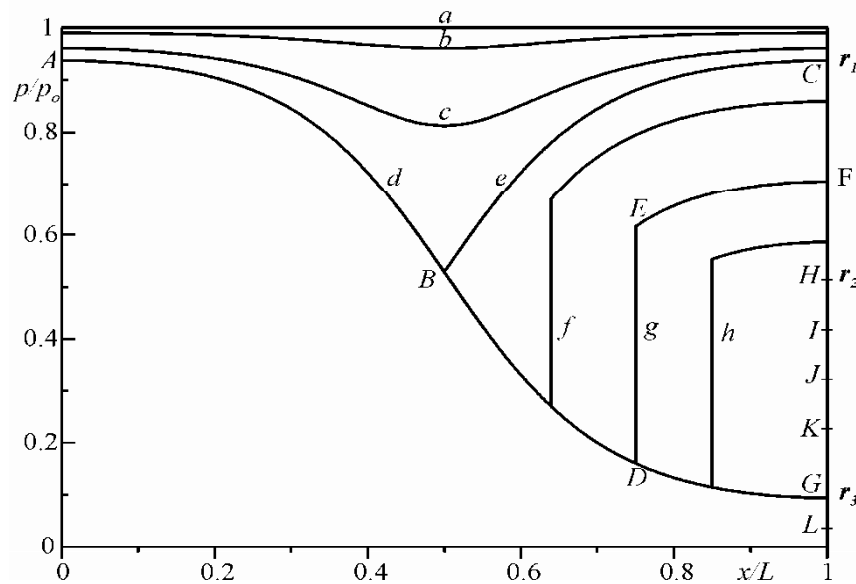


Il diagramma in basso sintetizza **gli andamenti della pressione nella sezione di uscita dell'ugello e della pressione nella gola dell'ugello in funzione della pressione ambiente**. Entrambe queste pressioni sono rese adimensionali rispetto alla pressione di ristagno.

In particolare si nota che, al diminuire della pressione ambiente, la  $p_g/p_o$  resta fissata al valore  $p^*/p_o$  per  $p_a/p_o \leq r_1$  cioè per un valore di  $p_a/p_o$  maggiore di  $p^*/p_o$ .

Invece, **il rapporto  $p_u/p_o$  rispetta la condizione di Kutta per  $p_a/p_o > r_2$ , dopo di ché resta costantemente bloccato al valore  $r_3$ .**

Ricordare che, come detto,  $r_2$  **può essere maggiore, minore, o uguale, a  $p^*/p_o$ .**



# PORTATA ATTRAVERSO UN UGELLO CONVERGENTE DIVERGENTE COLLEGATO AD UN SERBATOIO

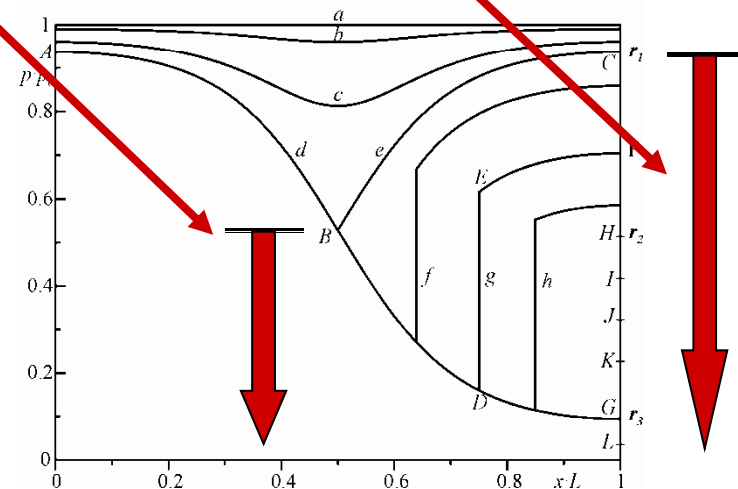
Una buona parte dei risultati già ottenuti per un ugello convergente, sono validi anche nel caso di un ugello convergente divergente collegato ad un serbatoio.

La differenza fondamentale tra questo caso e quello di un ugello solo convergente è che, mentre per quest'ultimo la relazione:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

è applicabile solo per valori di  $p_d/p_o \leq p^*/p_o$ , poiché un ugello convergente divergente raggiunge le condizioni di strozzamento per  $p_d/p_o = r_1 > p^*/p_o$ , questa relazione è applicabile per tutti i valori  $p_d/p_o < r_1$ .

Ne consegue che i diagrammi già visti in precedenza, sia a pressione di ristagno costante che con la pressione ambiente costante, si devono corrispondentemente modificare.



Il diagramma di Fig.1 si modifica così come rappresentato in Fig.2.

In particolare, il punto  $A$  di Fig. 1 viene ad essere spostato verso destra (poiché  $r_1 p_o > p^*$ ) e, quindi, il campo dei valori di  $p_a$ , per il quale la portata di massa resta costante ( $0 \leq p_a \leq r_1 p_o$ ), risulta **più esteso rispetto al caso di un ugello semplicemente convergente**.

**L'estensione dipende dalla geometria dell'ugello ed, in particolare, dal rapporto tra la sezione di uscita e quella di gola.**

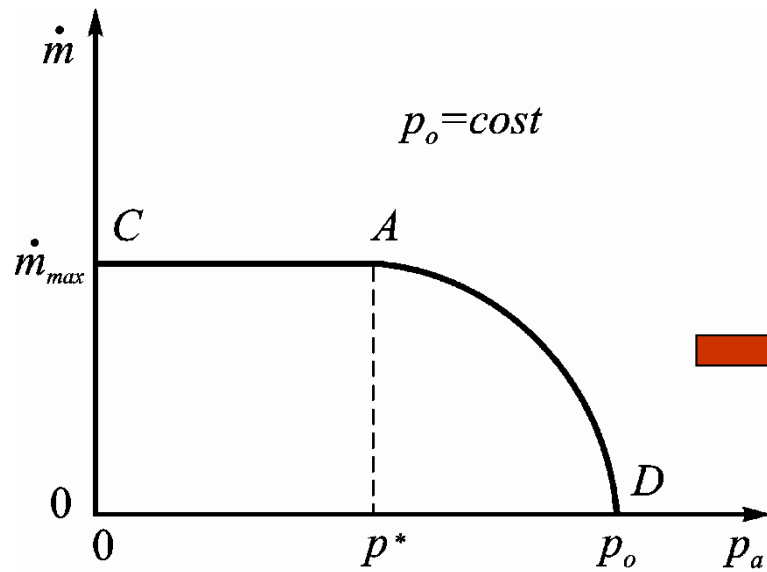


Fig.1

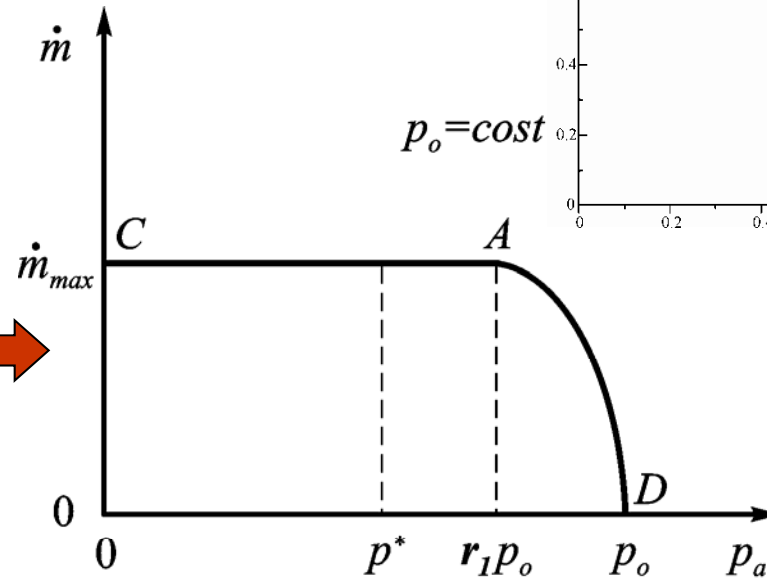
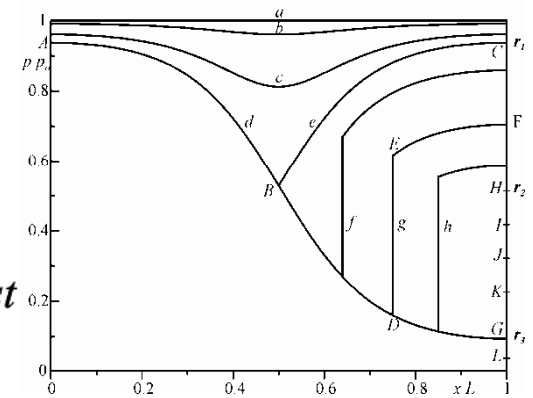


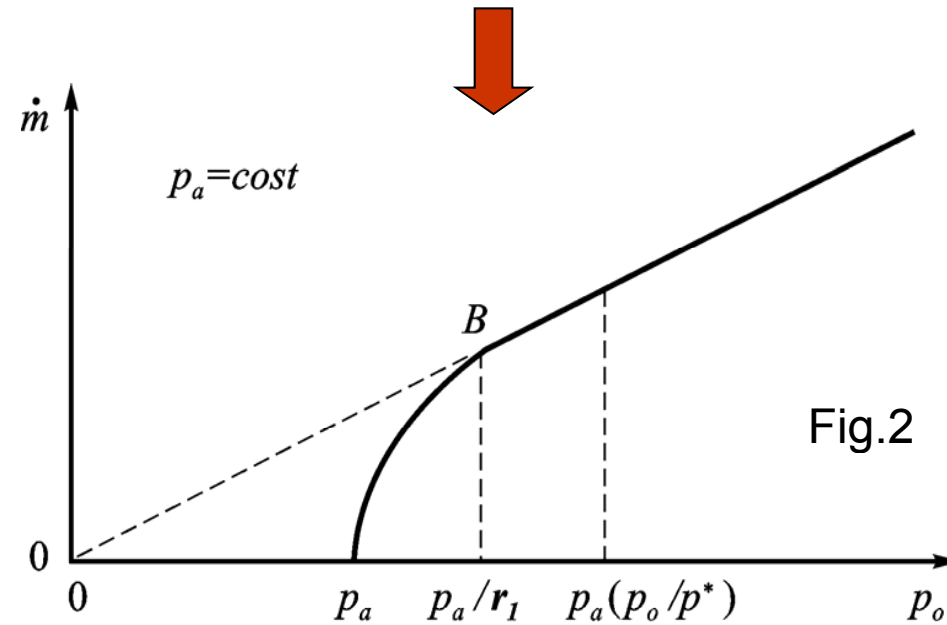
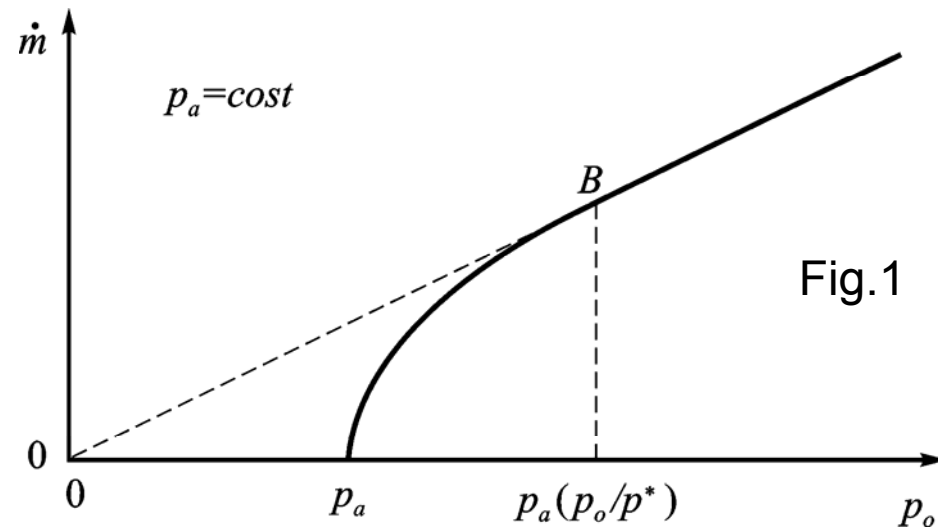
Fig.2



Per quanto riguarda invece il diagramma di Fig.1, nel caso di un ugello convergente divergente, esso viene ad essere modificato così come è mostrato nella Fig.2.

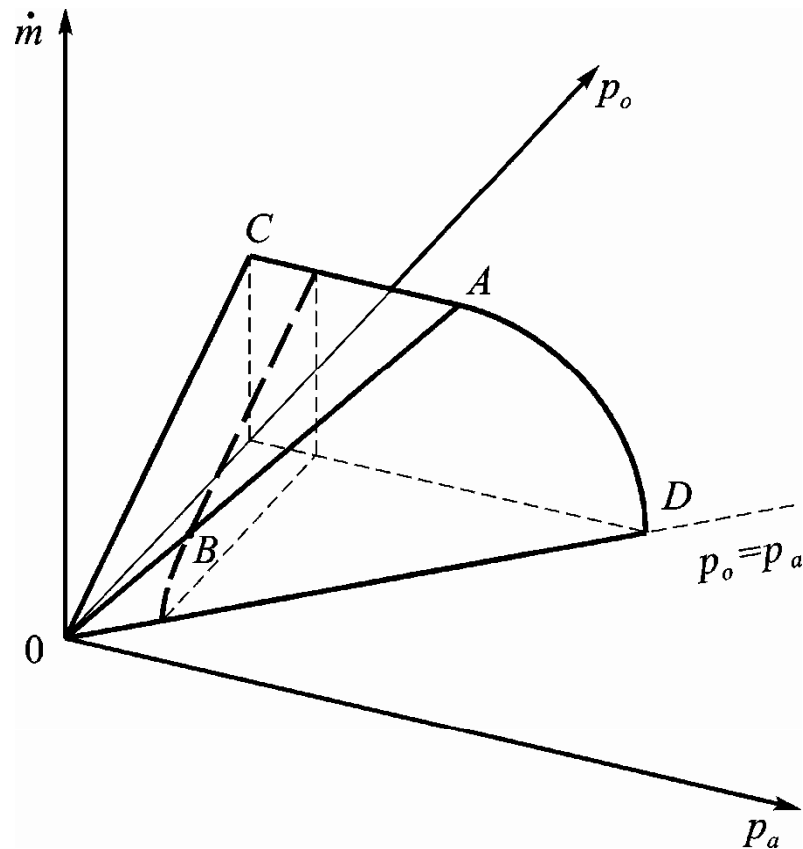
Il punto  $B$  di Fig.1 si sposta verso sinistra [poiché  $p_a/r_1 < p_a (p_o/p^*)$ ] e **la zona per la quale la portata di massa non dipende linearmente dalla pressione di ristagno si riduce conseguentemente.**

**La riduzione dipende dalla geometria dell'ugello ed, in particolare, dal rapporto tra la sezione di uscita e quella di gola.**



In definitiva, con riferimento al problema riguardante la portata di massa, l'ugello convergente divergente, poiché strozza ad un rapporto di pressione maggiore di quello dell'ugello semplicemente convergente, presenta un campo della pressione ambiente per il quale la portata resta costante (per  $p_o = cost$ ), ovvero un campo della pressione di ristagno per il quale la portata dipende linearmente dalla pressione di ristagno stessa (per  $p_a = cost$ ), entrambi più estesi di quelli relativi all'ugello convergente.

Corrispondentemente, il solido della portata di figura, valido per un ugello convergente, si modificherà presentando, in questo caso, la superficie triangolare  $OCA$  più estesa in quanto la semiretta determinata dal segmento  $OA$  ruoterà di una certa quantità (determinata da  $r_1$ ) verso il piano  $\dot{m} - p_a$ .

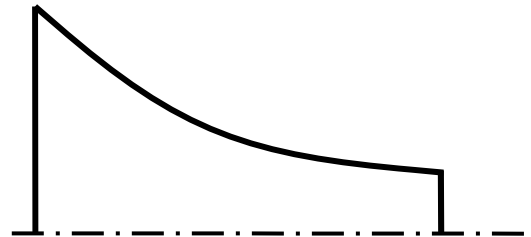


## UGELLO CONVERGENTE

Un ugello convergente a simmetria assiale ( $A_i = 10\text{cm}^2$ ,  $A_u = 5\text{cm}^2$ ), collegato ad un serbatoio contenente aria ( $R = 287\text{J/kgK}$ ,  $T_o = 300\text{K}$ ) in pressione, scarica a pressione ambiente ( $p_o = 101300\text{Pa}$ ).

Calcolare la velocità all'uscita dell'ugello, all'ingresso dell'ugello e la portata massica se:

- la pressione relativa, misurata da manometro ad U, all'interno del serbatoio vale  $10\text{cmH}_2\text{O}$ .
- la pressione assoluta all'interno del serbatoio vale  $170000\text{Pa}$
- la pressione assoluta all'interno del serbatoio vale  $500\text{kPa}$



**caso a)  $p_o$  relativa = 10 cm  $H_2O$**

$$p_o = p_a + \rho_m g H = 101300 + 1000 \times 9.81 \times 0.1 = \\ = 101300 + 981 = 102281 Pa$$

$$(p_o - p_a) / p_a = 981 / 101300 = 0.0097 \ll 1$$

$$p_a / p_o = 101300 / 102281 = 0.9904 \gg \text{IF} \gg M = 0.12$$

**MOTO INCOMPRESSIBILE**

$$V_u = \sqrt{\frac{4(p_o - p_a)RT_o}{p_o + p_a}} = \sqrt{\frac{4(981)287 \cdot 300}{102281 + 101300}} = 40.7 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = A_u \sqrt{2\rho \Delta p}$$

$$\dot{m} = A_u \sqrt{(p_o + p_a) \Delta p / RT_o} = \\ = 5E - 4 \times \sqrt{(102281 + 101300) \cdot 981 / 287 / 300} = 0.024 \text{ kg/s}$$

$$V_u A_u = V_i A_i$$

$$V_i = V_u A_u / A_i = 40.7 \times 5 / 10 = 20.35 \text{ m/s}$$

caso b)  $p_o = 170000 Pa$

La pressione assoluta all'interno del serbatoio vale  $170000 Pa$

$$(p_o - p_a) / p_a = 68700 / 101300 = 0.678 \gg \gg \text{ Moto Compressibile }$$

$$p_a / p_o = 101300 / 170000 = 0.596 > p^* / p_o = 0.5283$$

$$p_a / p_o \geq p^* / p_o, \text{ si ha: } p_u = p_a$$

*condizione di Kutta soddisfatta*

caso b)  $p_o = 170000Pa$

$$p_d/p_o = 0.596 \gg \mathbf{IF} \gg M_u = 0.89 ; T_u/T_o = 0.86 ; A_u/A^* = 1.011$$

$$V_u = M_u \sqrt{\gamma R T_u} = 0.89 \sqrt{1.4 \times 287 \times 300 \times 0.86} = 286.5 m/s$$

$$A_i/A^* = A_i/A_u \times A_u/A^* = 2 \times 1.011 = 2.022 \gg \mathbf{IF} \gg M_i = 0.30 ; T_i/T_o = 0.98$$

$$V_i = M_i \sqrt{\gamma R T_i} = 0.30 \sqrt{1.4 \times 287 \times 300 \times 0.98} = 104 m/s$$

$$A^* = A_u A^*/A_u$$

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

$$= 170000 \times 5 \times 10^{-4} / 1.011 \times 0.81 / \sqrt{1.4 \times 287 \times 300} = 0.196 kg/s$$

caso c)  $p_o = 500kPa$

$$(p_o - p_a)/p_a = 3.93 \quad \gg \gg \quad \underline{\text{Moto Compressibile}}$$

$$p_a/p_o = 101300 / 500000 = 0.20 < p^*/p_o = 0.5283$$

La condizione di Kutta non è soddisfatta –  $M_u = 1$  ;  $A_u = A^*$

$$T_u/T_o = T^*/T_o = 0.83$$

$$V_u = M_u \sqrt{\gamma R T_u} = 1 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 300 \times 0.83} = 317 m/s$$

$$A_i/A^* = A_i/A_u = 2 \quad \gg \quad \text{IF} \quad \gg \quad M_i = 0.31 ; \quad T_i/T_o = 0.98$$

$$V_i = M_i \sqrt{\gamma R T_i} = 0.31 \sqrt{1.4 \times 287 \times 300 \times 0.98} = 106.5 m/s$$

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

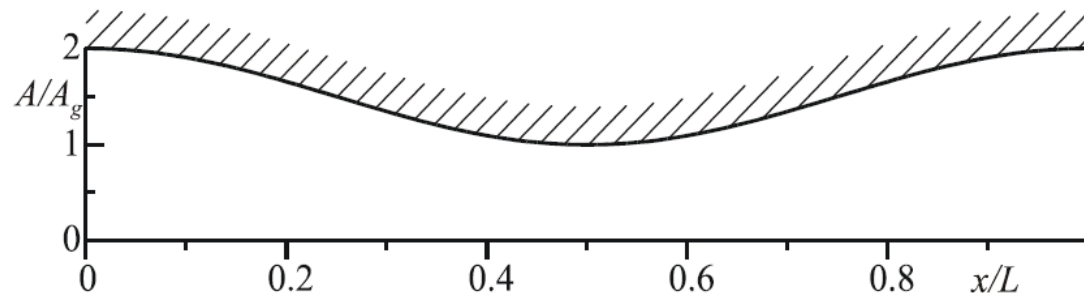
$$= 500000 \times 5 \times 10^{-4} \times 0.81 / \sqrt{1.4 \times 287 \times 300} = 0.583 kg/s$$

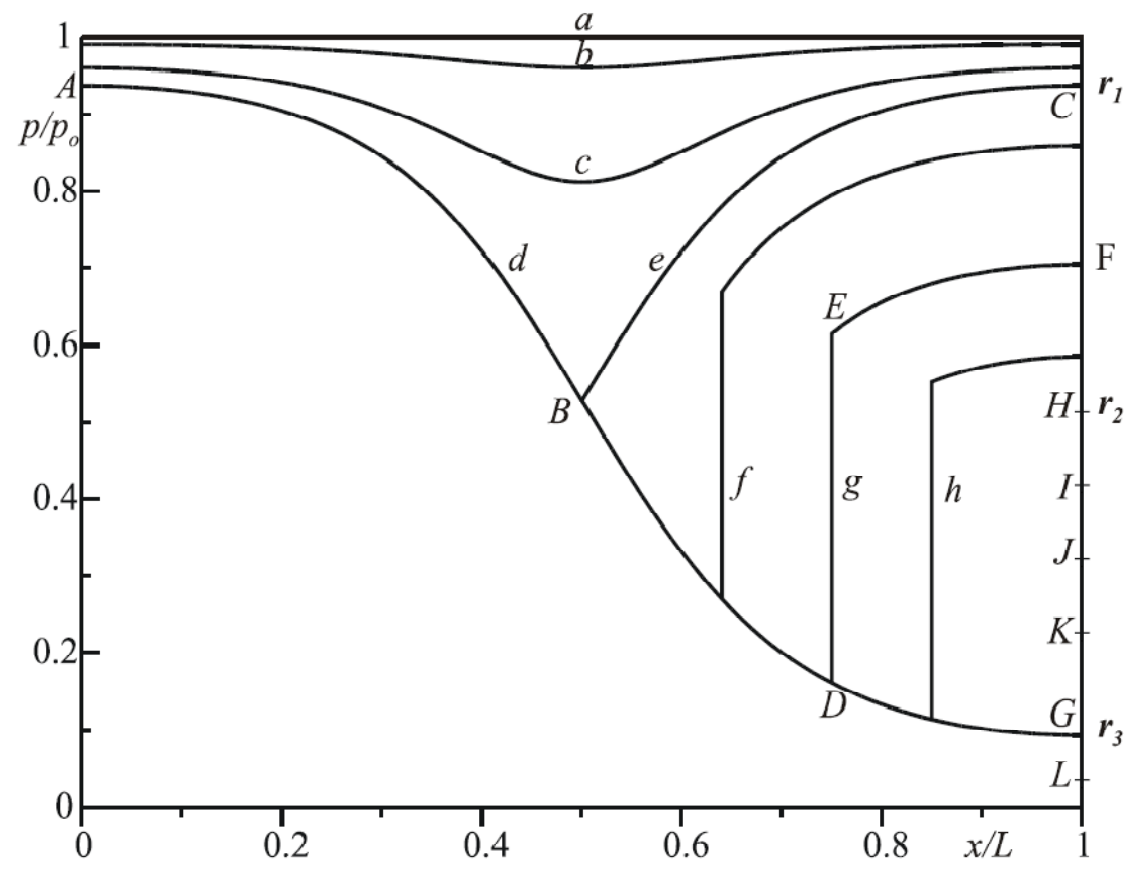
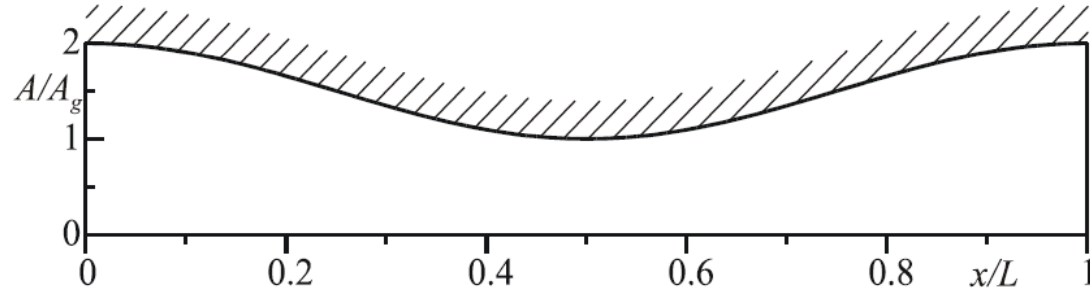
## UGELLO CONVERGENTE DIVERGENTE

Un ugello convergente divergente ( $D_i = 9.6mm$ ;  $D_g = 5mm$ ;  $D_u = 7mm$ ), collegato ad un serbatoio contenente aria ( $R = 287J/kgK$ ,  $T_o = 30^\circ C$ ) in pressione, scarica a pressione ambiente ( $p_a = 101300Pa$ ).

Calcolare la velocità all'uscita dell'ugello, all'ingresso dell'ugello, nella sezione di gola e la portata massica se:

- la pressione relativa, misurata da manometro ad U, all'interno del serbatoio vale  $40cm H_2O$ .
- la pressione assoluta all'interno del serbatoio vale  $160000Pa$
- la pressione assoluta all'interno del serbatoio vale  $250000Pa$
- la pressione assoluta all'interno del serbatoio vale  $2500000Pa$





$$A_i = \pi D_i^2 / 4 = 7.23e-5 m^2; \quad A_g = \pi D_g^2 / 4 = 1.96e-5 m^2;$$

$$A_u = \pi D_u^2 / 4 = 3.85e-5 m^2; \quad T_o = 303,15 K$$

$$A_i/A_g = 3.69; \quad A_u/A_g = 1.96; \quad A_i/A_u = 1.88$$

### Calcolo dei punti caratteristici $r_1, r_2, r_3$

$$A_u/A_g = A_u/A^* = 1.96 \gg IF \gg \text{(soluzione subsonica)}$$

$$M_u = 0.313; \quad r_1 = p_u/p_o = 0.934; \quad T_u/T_o = 0.981$$

$$A_u/A_g = A_u/A^* = 1.96 \gg IF \gg \text{(soluzione supersonica)}$$

$$M_u = 2.174; \quad r_3 = p_u/p_o = 0.097; \quad T_u/T_o = 0.514$$

***x,y condizioni monte-valle dell'onda d'urto nella sezione di uscita***

$$M_{u_x} = 2.174 \gg NSW \gg M_{u_y} = 0.551; \quad p_{u_y}/p_{u_x} = 5.349; \quad T_{u_y}/T_{u_x} = 1.834$$

$$r_2 = p_{u_y}/p_o = p_{u_y}/p_{u_x} \times r_3 = 0.521$$

**caso a):  $p_o = 40\text{cm H}_2\text{O}$  relativi**

$$p_o = p_a + \rho_m g H = 101300 + 1000 \times 9.81 \times 0.4 = 105224 \text{ Pa}$$

$$p_a/p_o = 101300 / 105224 = 0.963 > r_1$$

**Moto subsonico nell'ugello, condizione di Kutta soddisfatta:  $p_u = p_a$**

$$p_a/p_o = 0.963 \gg IF \gg M_u = 0.234; T_u/T_o = 0.989; A_u/A^* = 2.559$$

$$V_u = M_u \times \text{sqrt}(\gamma R T_u) = 81.10 \text{ m/s}$$

$$A_i/A^* = A_i/A_u \times A_u/A^* = 4,813 \gg IF \gg M_i = 0.121; T_i/T_o = 0.997$$

$$V_i = M_i \times \text{sqrt}(\gamma R T_i) = 42.27 \text{ m/s}$$

$$A_g/A^* = A_g/A_u \times A_u/A^* = 1.305 \gg IF \gg M_g = 0.598; T_g/T_o = 0.933$$

$$V_g = M_g \times \text{sqrt}(\gamma R T_g) = 201.49 \text{ m/s}$$

$$A^* = A_u/A_u/A^* = 1.50\text{E-}5 \text{ m}^2; \Psi^* = 0.81$$

$$\text{Portata} = p_o \times A^* \times \Psi^* / \text{sqrt}(\gamma R T_o) = 0.0037 \text{ kg/s}$$

**caso a):  $p_o = 40 \text{ cm H}_2\text{O}$  relativi - Soluzione con Bernoulli**

$$p_o = p_a + \rho_m g H = 101300 + 1000 \times 9.81 \times 0.4 = 105224 \text{ Pa}$$

$$p_a/p_o = 101300 / 105224 = 0.963 > r_1$$

**Moto ovunque subsonico nell'ugello**

**Condizione di Kutta soddisfatta  $p_u = p_a$**

$$(p_o - p_a)/p_a = 0.0387 \gg \gg \text{ moto incompressibile }$$

$$V_u = \sqrt{\frac{4(p_o - p_a)RT_o}{p_o + p_a}} = \sqrt{\frac{4(3924)287 \times 303.15}{105224 + 101300}} = 81.32 \text{ m/s}$$

$$V_u = M_u \times \text{sqrt}(\gamma R T_u) = 81.10 \text{ m/s}$$

**caso b):  $p_o = 160000 \text{ Pa}$**

$$p_a/p_o = 101300 / 160000 = 0.633$$

$$r_2 < p_a/p_o < r_1$$

**$M = 1$  in gola, onda d'urto normale nel divergente,**

**Condizione di Kutta soddisfatta**

$$A_i/A^* = A_i/A_g = 3.686 \gg IF \gg M_i = 0.159; \quad T_i/T_o = 0.995$$

$$V_i = M_i \times \text{sqrt}(\gamma R T_i) = 55.49 \text{ m/s}$$

$$A_g/A^* = 1 \gg IF \gg M_g = 1; \quad T_g/T_o = 0.833$$

$$V_g = M_g \times \text{sqrt}(\gamma R T_g) = 318.60 \text{ m/s}$$

$$A^* = A_g = 1.96 \text{ e-}5 \text{ m}^2; \quad \Psi^* = 0.81$$

$$Port = p_o A^* \Psi^* / \text{sqrt}(\gamma R T_o) = 0.0073 \text{ kg/s}$$

**caso c):  $p_o = 250000 \text{ Pa}$**

$$p_a/p_o = 101300 / 250000 = 0.405$$

**$r_3 < p_a/p_o < r_2$  Ugello sovraespanso,  $M = 1$  in gola, onda d'urto obliqua esterna all'ugello, condizione di Kutta non soddisfatta**

$$A_i/A^* = A_i/A_g = 3.686 \gg IF \gg M_i = 0.159 ; T_i/T_o = 0.995$$

$$V_i = M_i \times \text{sqrt}(\gamma R T_i) = 55.49 \text{ m/s}$$

$$A_g/A^* - 1 \gg IF \gg M_g = 1 ; T_g/T_o = 0.833$$

$$V_g = M_g \times \text{sqrt}(\gamma R T_g) = 318.60 \text{ m/s}$$

$$A_u/A^* = A_u/A_g = 1.960 \gg IF \gg M_u = 2.17 ; T_u/T_o = 0.514$$

$$V_u = M_u \times \text{sqrt}(\gamma R T_u) = 544.05 \text{ m/s}$$

$$A^* = A_g = 1.96 \text{e-}5 \text{ m}^2 ; \Psi^* = 0.81$$

$$Port = p_o \times A^* \times \Psi^* / \text{sqrt}(\gamma R T_o) = 0.0114 \text{ kg/s}$$

**caso d):  $p_o = 2500000 \text{ Pa}$**

$$p_d/p_o = 101300/2500000 = 0.0389$$

**$p_d/p_o < r_3$  Ugello sotto espanso,  $M = 1$  in gola, espansione esterna all'ugello (Prandtl-Meyer), condizione di Kutta non soddisfatta**

$$A_i/A^* = A_i/A_g = 3.686 \gg IF \gg M_i = 0.159 ; T_i/T_o = 0.995$$

$$V_i = M_i \times \text{sqrt}(\gamma R T_i) = 55.49 \text{ m/s}$$

$$A_g/A^* = 1 \gg IF \gg M_g = 1 ; T_g/T_o = 0.833$$

$$V_g = M_g \times \text{sqrt}(\gamma R T_g) = 318.60 \text{ m/s}$$

$$A_u/A^* = A_u/A_g = 1.960 \gg IF \gg M_u = 2.17 ; T_u/T_o = 0.514$$

$$V_u = M_u \times \text{sqrt}(\gamma R T_u) = 544.05 \text{ m/s}$$

$$A^* = A_g = 1.96 \text{e-}5 \text{ m}^2 ; \Psi^* = 0.81$$

$$Port = p_o \times A^* \times \Psi^* / \text{sqrt}(\gamma R T_o) = 0.1184 \text{ kg/s}$$