

## Appendice Analisi in frequenza dei segnali

### 1 - Segnali periodici

#### Sviluppo in serie di Fourier

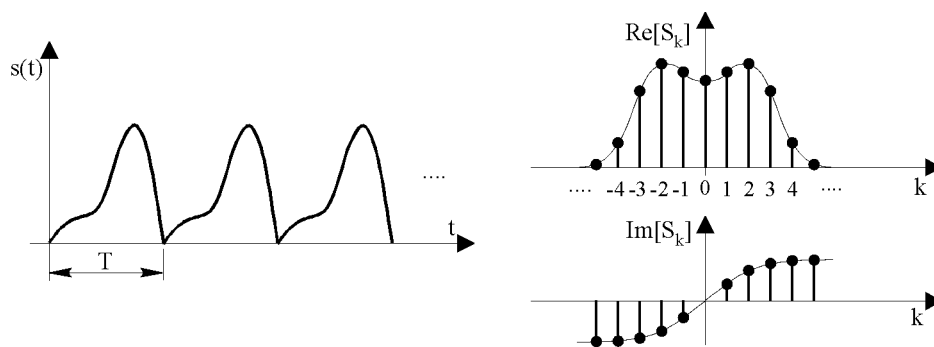
Un segnale è periodico nel tempo quando si ripete ogni  $T$  secondi.

Si veda, come esempio, il segnale  $s(t)$  in Fig.1.1 dove  $T$  è il periodo.

Un segnale periodico può essere, in generale, caratterizzato nel seguente modo:

$$s(t) = s(t + iT) \tag{1.1}$$

L'indice  $i = 1, 2, 3 \dots$  rappresenta la replica del segnale elementare che si succede identica nel tempo, ogni periodo di  $T$  secondi.



**Fig1.1** - Segnale periodico  $s(t)$  e coefficienti  $S_k$  dello sviluppo in serie di Fourier.

Se  $T$  è il periodo,  $f_1 = 1/T$  è frequenza fondamentale,  $\omega_1 = 2\pi f_1$  è pulsazione fondamentale.

Per i segnali periodici la rappresentazione più usata nel dominio della frequenza è costituita dalla scomposizione in serie di Fourier, mediante componenti armoniche a frequenze  $kf_1$  multiple della frequenza fondamentale  $f_1$ .

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{j2\pi k f_1 t} \tag{1.2}$$

#### Valutazione dei coefficienti dello sviluppo in serie

I coefficienti  $S_k$  dello sviluppo in serie di Fourier possono essere determinati moltiplicando membro a membro l'Eq.1.2 per la funzione  $\exp(-j2\pi k' f_1 t)$  e mediando nel periodo  $T$ .

Al secondo membro risulteranno pertanto termini del tipo  $\exp[j2\pi(k-k')f_1 t]$ .

Valutiamo quindi la media di questi termini nel periodo  $T$ . Se  $k'$  è diverso da  $k$ , la media di una funzione sinusoidale in un tempo multiplo intero del periodo  $T$  è sempre nulla.

Se viceversa  $k' = k$ , otterremo un risultato diverso da zero e pari a uno.

Tenuto conto di questi fatti si ha:

$$\begin{aligned}
 S_k &= \frac{1}{T} \int_T s(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt = \\
 &= \frac{1}{T} \int_T s(t) \cos(2\pi k f_1 t) dt - j \frac{1}{T} \int_T s(t) \sin(2\pi k f_1 t) dt = \\
 &= \text{Re}[S_k] + j \text{Im}[S_k] = [|S_k|, \varphi_k]
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

**Spettro bilatero**

I coefficienti  $S_k$  dello sviluppo in serie di Fourier risultano quindi quantità complesse. L'insieme di tali coefficienti, rappresentati in funzione delle frequenze discrete  $k f_1$  o più semplicemente in funzione dell'ordine  $k$  della generica armonica, è lo spettro a righe del segnale periodico  $s(t)$ .

Lo spettro di parte reale  $\text{Re}[S_k]$  è una funzione pari della frequenza, mentre lo spettro di parte immaginaria  $\text{Im}[S_k]$  è una funzione dispari.

Dalla conoscenza degli spettri di parte reale ed immaginaria si deducono anche gli spettri di modulo e fase,  $|S_k|$  e  $\varphi_k$ , che presentano le stesse caratteristiche di simmetria.

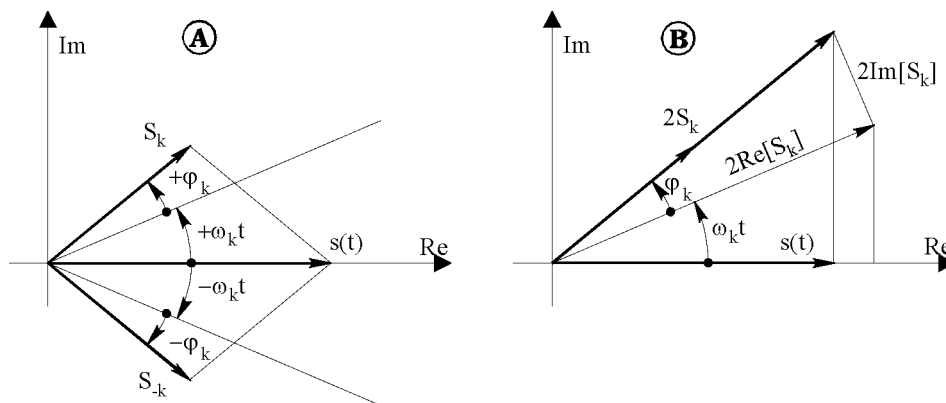
Tali condizioni di simmetria si possono anche esprimere brevemente, introducendo la forma coniugata, indicata con l'asterisco (\*):

$$S_{-k} = S_k^*
 \tag{1.4}$$

La serie esponenziale utilizza anche le frequenze negative. Tali frequenze sono tuttavia prive di significato fisico. Il loro impiego nella pratica costituisce solamente una rappresentazione analitica comoda e compatta. Per tale serie si usa spesso il termine di spettro bilatero.

**Sviluppo in serie trigonometrica**

Lo spettro bilatero presenta caratteristiche di simmetria, valide sia per la rappresentazione con parte reale ed immaginaria ( $\text{Re}[S_k]$   $\text{Im}[S_k]$ ), sia per la rappresentazione in modulo e fase ( $|S_k|$   $\varphi_k$ ). Tenendo conto di queste proprietà si ottengono sviluppi con funzioni trigonometriche.



**Fig.1.2 - Rappresentazioni vettoriali dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier.**

Infatti, osservando la Fig.1.2A, dove è data un'interpretazione vettoriale di una generica coppia di termini della serie esponenziale, per le frequenze  $\pm \omega_k = \pm 2\pi k f_1$ , si deduce:

$$s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|S_k| \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (1.5)$$

che contiene solo indici  $k$  positivi. Inoltre, con riferimento alla Fig.1.2B, se poniamo:

$$A_k = 2 \operatorname{Re}[S_k] = \frac{2}{T} \int_T s(t) \cos(2\pi k f_1 t) dt$$

$$B_k = -2 \operatorname{Im}[S_k] = \frac{2}{T} \int_T s(t) \sin(2\pi k f_1 t) dt \quad (1.6)$$

si ottiene il noto sviluppo in termini di seno e coseno:

$$s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t] \quad (1.7)$$

### Segnale a onda rettangolare

Come esempio di rappresentazione in frequenza di un segnale periodico, si consideri l'onda quadra  $s(t)$  di Fig.1.3, ottenuta replicando ogni  $T$  secondi un impulso rettangolare di ampiezza  $A$  e durata  $\tau$ . Il segnale si può scrivere nella forma:

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A \cdot \operatorname{rect}_{\tau}(t - iT) \quad (1.8)$$

Le componenti del suo spettro bilatero risultano:

$$S_k = \frac{1}{T} \int_T s(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} A e^{-j2\pi k f_1 t} dt$$

$$= \frac{A}{T} \left[ \frac{e^{-j2\pi k f_1 t}}{-j2\pi k f_1} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \frac{A}{T} \tau \frac{\sin \pi k f_1 \tau}{\pi k f_1 \tau} = Q f_1 \frac{\sin \pi k f_1 \tau}{\pi k f_1 \tau} \quad (1.9)$$

essendo:  $Q=A\tau$  l'area dell'impulso rettangolare elementare.

Nell'esempio riportato in Fig.1.3 si è scelto  $\tau = T/2$ .

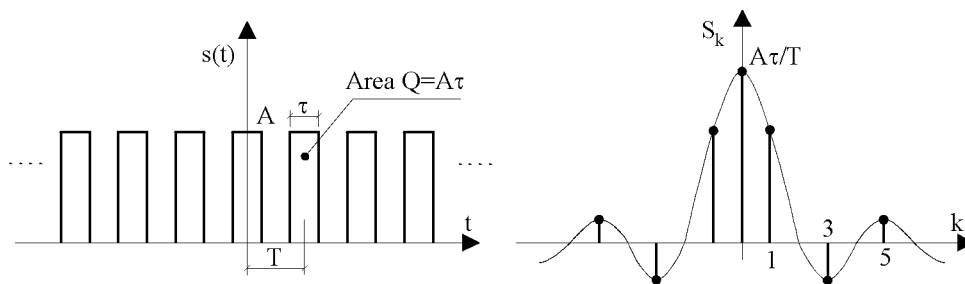


Fig.1.3 - Segnale rettangolare e suo spettro.

### Sequenza di impulsi matematici

Poniamo, nell'esempio precedente, l'ampiezza  $A=1/\tau$ .

Riducendo la durata  $\tau$  dell'impulso elementare, si perviene a un caso limite particolarmente significativo dell'onda rettangolare, il treno di impulsi matematici:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t-iT) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau} \text{rect}_{\tau}(t-iT) \tag{1.10}$$

dove l'ampiezza  $A=1/\tau$  diverge al limite per  $\tau \rightarrow 0$ , mentre l'area  $Q$  dell'impulso matematico elementare rimane costante e di valore pari ad uno (Fig.1.4).

Lo spettro della sequenza di impulsi matematici di area unitaria e frequenza  $f_1$  si ottiene quindi passando al limite le componenti  $S_k$  dell'Eq.1.9 per  $\tau \rightarrow 0$ , mantenendo l'area  $Q$  dell'impulso elementare pari a uno.

Risultano pertanto componenti armoniche tutte uguali, con valore reale  $S_k=f_1$ .

Sussiste in definitiva, per una sequenza di impulsi matematici, lo sviluppo in serie:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t-iT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_1 e^{j2\pi k f_1 t} \tag{1.11}$$

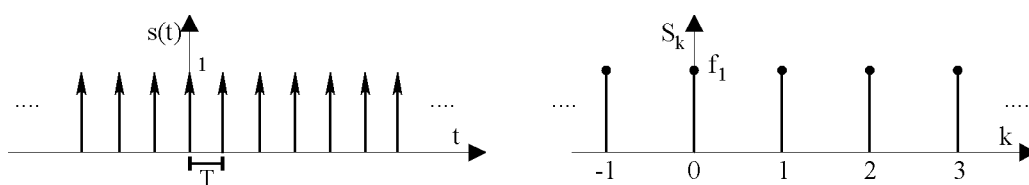


Fig.1.4 - Sequenza di impulsi matematici e coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier.

## 2 - Segnali aperiodici

I segnali aperiodici sono caratterizzati dall'aver energia finita. Per tale fatto sono detti anche segnali impulsivi, diversamente dai segnali periodici che si ripetono indefinitamente.

In Fig.2.1 è riportato, come esempio, un segnale  $s(t)$  con durata limitata.

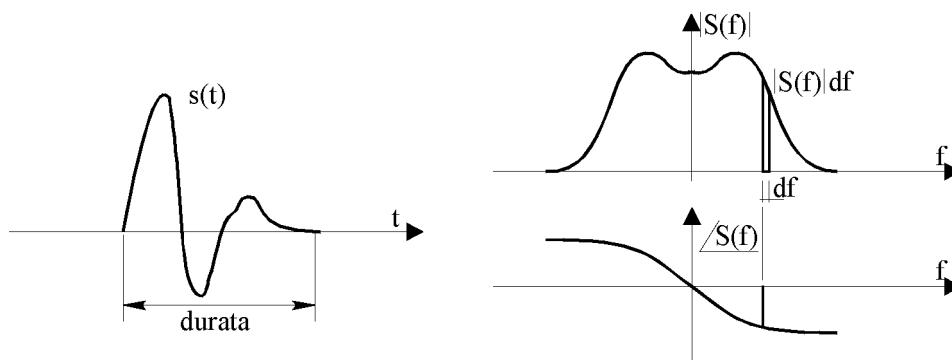


Fig.2.1 - Segnale aperiodico e suo spettro.

Per i segnali aperiodici perde significato lo sviluppo in serie di Fourier, mancando il principale presupposto: la periodicità. Per i segnali impulsivi, l'analisi in frequenza viene condotta mediante la trasformata (diretta e inversa) di Fourier.

**Trasformata e antitrasformata di Fourier**

I segnali aperiodici sono caratterizzati in frequenza tramite la trasformata di Fourier  $S(f)$ . Mediante l'antitrasformata si ricostruisce viceversa il segnale nel tempo  $s(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathfrak{T}[s(t)] \\ s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df = \mathfrak{T}_{-1}[S(f)] \end{aligned} \right\} s(t) \Leftrightarrow S(f) \quad (2.1)$$

Poichè la trasformata di Fourier  $S(f)$  è una funzione continua nel dominio della frequenza, esiste un'infinità di componenti armoniche di ampiezza infinitesima  $|S(f)|df$  e fase  $\angle S(f)$ .

**Proprietà sulle aree**

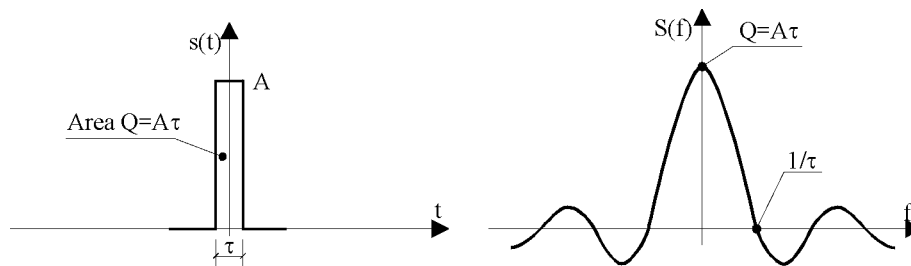
La componente continua dello spettro  $S(f)$  rappresenta l'area sottesa dal segnale  $s(t)$  nel dominio del tempo, mentre l'area sottesa dallo spettro fornisce l'ordinata all'origine del segnale nel tempo. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} S(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt = \text{area di } s(t) \\ s(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f \cdot 0} df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df = \text{area di } S(f) \end{aligned} \quad (2.2)$$

**Spettro dell'impulso rettangolare**

Applicando la definizione di trasformata di Fourier all'impulso rettangolare di Fig.2.2, con ampiezza  $A$  e durata  $\tau$  (area  $Q=A\tau$ ), si ottiene:

$$s(t) = A \cdot \text{rect}_{\tau}(t) \Leftrightarrow S(f) = A\tau \frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau} \quad (2.3)$$



**Fig.2.2 - Impulso rettangolare e suo spettro.**

**L'impulso matematico**

Lo spettro di un impulso matematico temporale di area unitaria ( $Q=1$ ) si ottiene passando al limite ( $\tau \rightarrow 0$ ) la durata dell'impulso rettangolare, mantenendone costante l'area ( $A=1/\tau \rightarrow \infty$ ). Estrapolando gli andamenti di Fig.2.2 si vede che lo spettro si riduce a una costante per tutte le frequenze con valore pari all'area unitaria ( $Q=1$ ).

Lo spettro dell'impulso matematico ha quindi un'estensione infinitamente ampia:

$$\mathfrak{T}[\delta(t)] = 1 = \text{costante} \quad \forall f \quad (2.4)$$

È vero anche il duale: a una costante di valore unitario nel tempo corrisponde un impulso

matematico nel dominio della frequenza:

$$\mathfrak{F}[1, \forall t] = \delta(f) \quad (2.5)$$

Si conferma che un segnale costante nel tempo presenta solo una componente continua in frequenza.

### Dualità tempo-frequenza

Per un segnale nel tempo di tipo reale, lo spettro di modulo  $|S(f)|$  è una funzione pari, mentre lo spettro di fase  $\angle S(f)$  è una funzione dispari.

Se, come caso particolare, il segnale nel tempo oltre che reale è anche pari, consegue che lo spettro  $S(f)$  si riduce al solo spettro di modulo  $|S(f)|$ , mentre lo spettro di fase  $\angle S(f)$  è identicamente nullo.

In tal caso sussiste l'intercambiabilità fra le variabili  $t$  ed  $f$ .

Utilizzando la proprietà di dualità si può determinare immediatamente l'andamento temporale che corrisponde a uno spettro rettangolare in frequenza. Infatti, dato lo spettro rettangolare in frequenza, rappresentato in Fig.2.3, dove  $f_M$  rappresenta la larghezza di banda dello spettro, il segnale corrispondente nel tempo risulta del tipo  $\sin(x)/x$ .

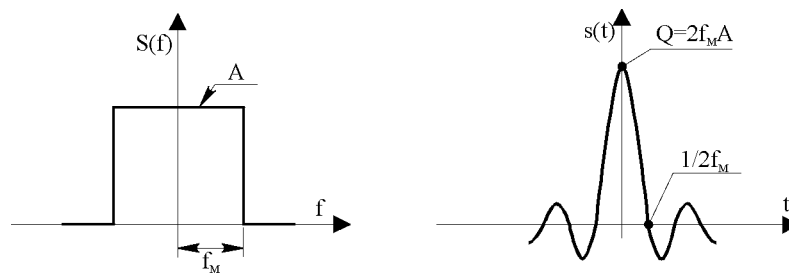


Fig.2.3 - Spettro rettangolare e corrispondente segnale nel tempo,  $\sin(x)/x$ .

### Proprietà di traslazione

La traslazione di un segnale *nel tempo* della quantità  $t_0$  introduce una variazione lineare di fase nello spettro del segnale originario. Infatti:

$$\begin{aligned} s(t - t_0) &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = \quad [\text{posto : } \alpha = t - t_0] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\alpha) e^{-j2\pi f(\alpha + t_0)} d\alpha = S(f) e^{-j2\pi ft_0} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Traslare uno spettro *in frequenza* di una quantità  $f_0$  fa perdere le caratteristiche di simmetria rispetto all'origine, con la conseguenza che il segnale nel tempo non è più reale. Infatti:

$$\begin{aligned} S(f - f_0) &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} S(f - f_0) e^{j2\pi ft} dt = \quad [\text{posto : } \beta = f - f_0] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\beta) e^{-j2\pi(\beta + f_0)t} d\beta = s(t) e^{j2\pi f_0 t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

D'altra parte, traslando lo spettro originario della stessa quantità  $\pm f_0$  sia a destra che a sinistra dell'origine, il segnale corrispondente (a causa della ripristinata simmetria in frequenza) risulta reale. Si ottiene infatti:

$$S(f - f_0) + S(f + f_0) \Leftrightarrow s(t) e^{j2\pi f_0 t} + s(t) e^{-j2\pi f_0 t} = 2s(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (2.8)$$

Questa operazione corrisponde a moltiplicare il segnale originario  $s(t)$  nel tempo per un'oscillazione cosinusoidale di frequenza  $f_0$ .

### 3 - Trasformata di Fourier di segnali periodici

Si è mostrato che per un segnale periodico esiste lo sviluppo in serie di Fourier. Ciascun termine della serie è una costante  $S_k$  moltiplicata per un esponenziale. Allora:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \mathfrak{F}[S_k] &= S_k \delta(f) \\
 \text{b) } \mathfrak{F}[S_k e^{j2\pi k f_1 t}] &= S_k \delta(f - k f_1) \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

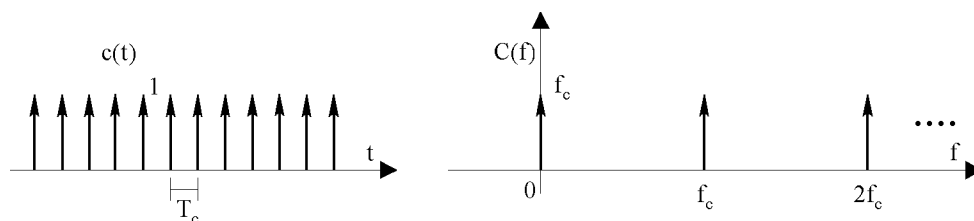
quindi  $\mathfrak{F}[s(t)] = \mathfrak{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k e^{j2\pi k f_1 t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k \delta(f - k f_1)$

Infatti:

- a) la trasformata di Fourier di una costante  $S_k$  è un impulso matematico,
  - b) la presenza di un esponenziale si traduce in una traslazione in frequenza:
- Si conclude che anche per i segnali periodici esiste la trasformata di Fourier, seppure in senso limite. Questa conclusione è interessante in quanto consente di utilizzare le trasformate di Fourier, oltre che per i segnali aperiodici, anche per quelli periodici, consentendo di unificare il metodo di trattamento dei segnali nel dominio della frequenza, laddove ciò appaia conveniente.

#### Trasformata di Fourier del treno di impulsi matematici

Si consideri infine il treno di impulsi matematici  $c(t)$ , con periodo  $T_c$  e ampiezza unitaria, come rappresentato in Fig.3.1.



**Fig.3.1** - Sequenza di impulsi matematici e relativa trasformata di Fourier.

Questo segnale, in quanto periodico, può essere sviluppato in serie di Fourier e, per quanto appena visto, presenta anche la trasformata di Fourier. Risulta quindi:

$$\begin{aligned}
 c(t) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - iT_c) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_c e^{j2\pi k f_c t} \\
 C(f) &= \mathfrak{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_c e^{j2\pi k f_c t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_c \delta(f - k f_c)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si conclude che un treno di impulsi nel tempo è rappresentato da un treno di impulsi anche in frequenza (vedi Fig.3.1). Tale risultato è utile nella trattazione dei segnali campionati. Il campionamento infatti rappresenta il primo passo per l'elaborazione digitale dei segnali.