

# Segnali campionati

## 1 - Il teorema del campionamento

### Campionamento ideale

Il campionamento (*sampling*) di un segnale analogico  $s(t)$  consiste nel prenderne solo i valori  $s(iT_c)$  in corrispondenza a istanti ben precisi ( $iT_c$ ) detti istanti di campionamento.

Per esaminare le proprietà fondamentali è utile riferirsi al caso ideale in cui il campionamento è effettuato impiegando un treno di impulsi matematici.

In tale ipotesi, sia  $s(t)$  un generico segnale con spettro  $S(f)$  limitato in banda fino alla frequenza  $f_M$  (Fig.1.1).

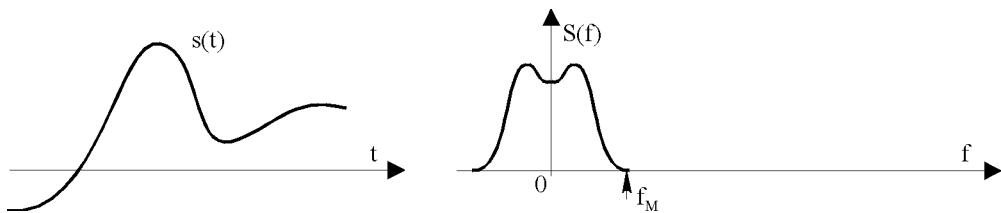


Fig.1.1 - Segnale a banda limitata.

Sia inoltre  $c(t)$  il treno di impulsi matematici di area unitaria (Fig.1.2), equispaziati dell'intervallo di campionamento  $T_c$  (e con frequenza  $f_c = 1/T_c$ ).

Lo spettro  $C(f)$  risulta ancora un treno di impulsi in frequenza.

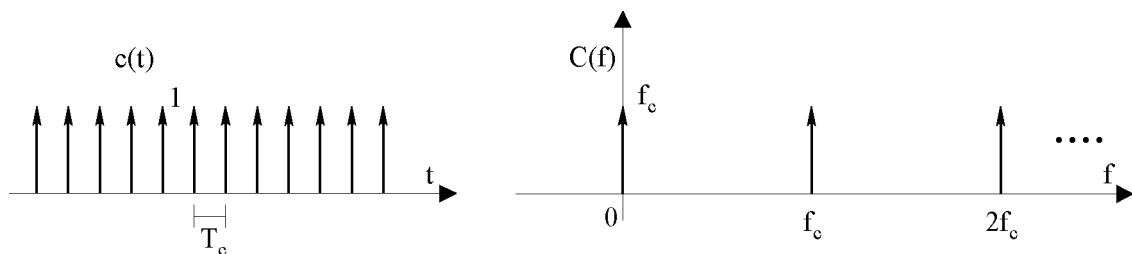


Fig.1.2 - Impulsi matematici di campionamento.

In definitiva esiste la seguente corrispondenza fra tempo e frequenza:

$$s(t) \Leftrightarrow S(f)$$

$$c(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - iT_c) \Leftrightarrow C(f) = f_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_c) \quad (1.1)$$

Il campionamento ideale consiste nel moltiplicare il segnale  $s(t)$  per il treno di impulsi  $c(t)$ :

$$s_c(t) = s(t) \cdot c(t) = s(t) \cdot \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - iT_c) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s(iT_c) \cdot \delta(t - iT_c) \quad (1.2)$$

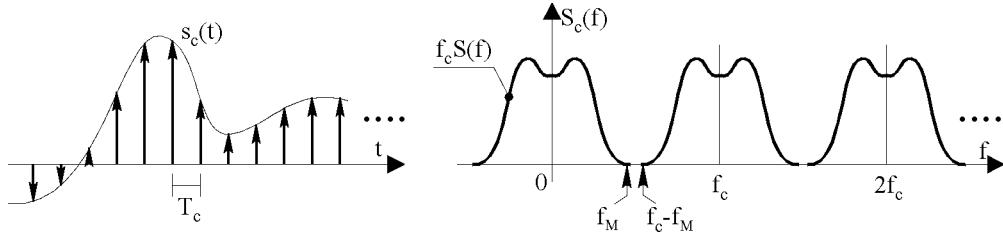
Per determinare lo spettro del segnale campionato è sufficiente ricordare che al prodotto algebrico nel tempo corrisponde il prodotto di convoluzione in frequenza:

$$s(t) \cdot c(t) \Leftrightarrow S(f) * C(f) \quad (1.3)$$

Pertanto la trasformata di Fourier del segnale campionato risulta:

$$S_c(f) = S(f) * f_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_c) = f_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kf_c) \quad (1.4)$$

Quindi lo spettro del segnale campionato (Fig.1.3) è formato dalle repliche dello spettro del segnale originario  $S(f)$ , traslate su frequenze multiple della frequenza di campionamento  $f_c$ . Inoltre le ordinate di tali repliche risultano tutte moltiplicate per un fattore di scala pari a  $f_c$ .



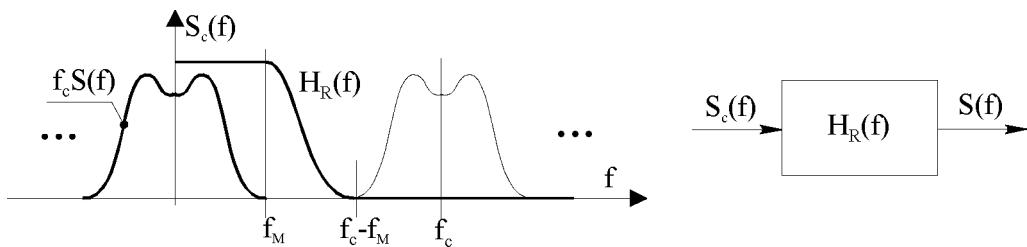
**Fig.1.3 - Segnale campionato e suo spettro.**

Affinchè non esistano sovrapposizioni fra le repliche, risulta evidente che il periodo di ripetizione in frequenza deve essere maggiore o al più uguale a  $2f_M$ :

$$f_c = \frac{1}{T_c} \geq 2f_M \quad (1.5)$$

### Il filtro di ricostruzione

Se la frequenza di campionamento  $f_c$  è maggiore almeno del doppio della massima frequenza  $f_M$  contenuta nel segnale, eseguendo il filtraggio della sequenza di impulsi con un filtro passabasso  $H_R(f)$  che abbia una risposta piatta da 0 a  $f_M$  e risposta nulla per  $f > (f_c - f_M)$ , si riottiene in uscita il segnale originario  $s(t)$ , in quanto se ne isola lo spettro  $S(f)$  in banda base (Fig.1.4).



**Fig.1.4 - Il filtro di ricostruzione.**

Per il corretto ripristino delle ampiezze, il guadagno del filtro di ricostruzione entro la banda piatta ( $0 \div f_M$ ) deve essere costante e pari a  $H_0 = 1/f_c$ .

### Aliasing

Se viceversa  $f_c < 2f_M$ , ossia i campioni sono troppo radi, non è possibile riottenere il segnale originario in alcun modo, a causa della sovrapposizione delle repliche che crea un disturbo da spettro adiacente. Tale fenomeno è detto *aliasing* (Fig.1.5A).

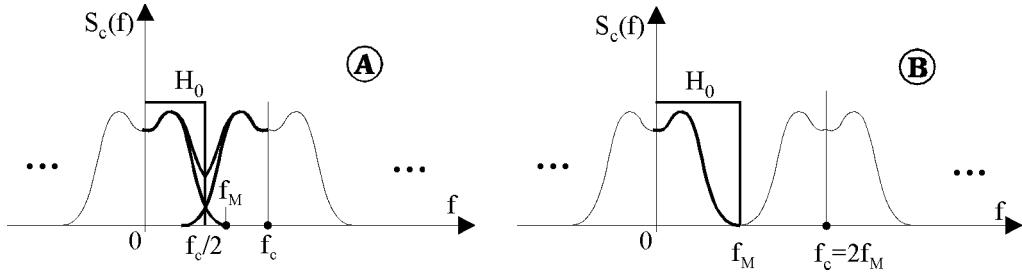


Fig.1.5 - A) Distorsione di aliasing; B) Ricostruzione con filtro passa-basso ideale.

Di particolare interesse è il caso limite in cui  $f_c = 2f_M$  (Fig.1.5B): in tal caso la ricostruzione è ancora possibile con un filtro passa-basso ideale senza alterazione dello spettro originario in banda base ( $0 \div f_M$ ). In queste condizioni si ha il minimo valore teorico per la frequenza di campionamento, cui corrisponde il massimo intervallo temporale fra i campioni:

$$T_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{2f_M} \quad (1.6)$$

La risposta del filtro passa basso-ideale alla sequenza di impulsi matematici di valore  $s(iT_c)$  riproduce dunque il segnale originario  $s(t)$ .

D'altra parte un filtro passa-basso ideale che ha la funzione di trasferimento pari ad  $H_0$  per  $f=(0 \div f_M)$  e zero altrove, ha la risposta impulsiva:

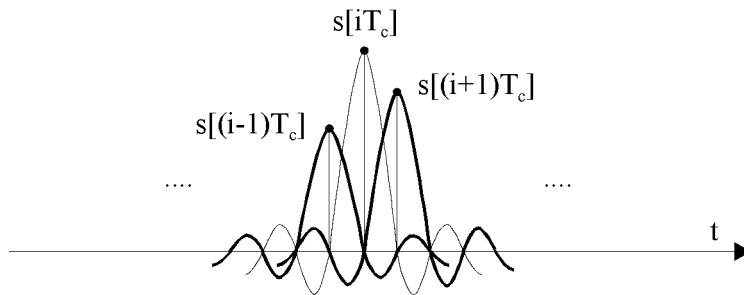
$$h(t) = (H_0 \cdot 2f_M) \frac{\sin(2\pi f_M t)}{(2\pi f_M t)} \quad (1.7)$$

Consegue che, adottando la massima velocità di campionamento consentita ( $f_c = 2f_M$ ) e facendo il guadagno  $H_0 = 1/f_c = 1/2f_M$ , il segnale  $s(t)$  può esprimersi direttamente come somma delle risposte a ciascuno degli impulsi costituenti la sequenza:

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s(iT_c) \frac{\sin[\pi f_c(t - iT_c)]}{[\pi f_c(t - iT_c)]} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s(iT_c) \operatorname{sinc}[\pi f_c(t - iT_c)] \quad (1.8)$$

La funzione  $\operatorname{sinc}(\pi f_c t) = \sin(\pi f_c t) / (\pi f_c t)$ , che consente di ricostruire il segnale  $s(t)$  dalla conoscenza dei suoi campioni  $s(iT_c)$ , è detta funzione interpolante o di campionamento.

La ricostruzione del segnale  $s(t)$  avviene mediante il contributo di tutte le funzioni *sinc* relative a tutti i campioni che formano la sequenza, tranne che negli istanti di campionamento. Un'interpretazione grafica di questo fatto è fornita nella Fig.1.6, dove è rappresentata la sovrapposizione delle funzioni *sinc* relative a tre campioni.



**Fig.1.6 - Ricostruzione del segnale campionato.**

### Prefiltraggio

Spesso i segnali hanno un contenuto armonico piuttosto esteso, ma le componenti armoniche a frequenza più alta sono di entità insignificante. In tali casi è usuale compiere un filtraggio che riduce la banda del segnale  $f_M$  a quella realmente significativa  $f_M'$ .

In tal modo la riduzione della massima frequenza del segnale da  $f_M$  a  $f_M'$  consente l'uso di frequenze di campionamento più basse ed evita il fenomeno di aliasing.

Il filtro antialiasing è di norma presente in tutti gli stadi di ingresso dei sistemi di misura digitali a campionamento.

## 2 - Aspetti pratici del campionamento

### Il campionamento reale

Gli impulsi matematici utilizzati per dimostrare il teorema del campionamento non sono evidentemente utilizzabili in pratica e costituiscono solo un mezzo analitico.

Se il fine della procedura di campionamento è quello di conoscere i valori  $s(iT_c)$  del segnale originario  $s(t)$  in precisi istanti di tempo ( $iT_c$ ), dovremo ricorrere a circuiti elettronici idonei a questo scopo. Nei casi pratici il campionamento di un segnale viene realizzato con un circuito di *sample & hold* che rileva il valore del segnale analogico ogni  $T_c$  secondi.

Il valore campionato viene mantenuto per il tempo necessario al convertitore *AD* per effettuare la conversione in forma numerica.

Se si rispetta il vincolo imposto dal teorema del campionamento, i campioni ottenuti in tal modo sono comunque sufficienti a conoscere esattamente (a parte il rumore di quantizzazione, che non dipende dal campionamento) tutta l'informazione contenuta nel segnale.

### Ricostruzione con impulsi rettangolari

Anche il processo di ricostruzione, esaminato in precedenza, non può in pratica ricorrere a impulsi matematici. D'altra parte, presenta notevole interesse pratico il caso in cui si debba produrre un segnale analogico  $s(t)$ , partendo da una sequenza di numeri  $s(iT_c)$  che ne rappresentano i campioni presi ogni  $T_c$  secondi.

Il campo di applicazione di tale tecnica si ha nei generatori programmabili di segnali.

Tali strumenti sono in grado di generare fisicamente dei segnali di tensione, con forma d'onda arbitraria. In essi si determina il valore numerico di ciascun campione del segnale che si vuole generare tramite una funzione matematica. I valori dei campioni così ottenuti vengono quindi attribuiti agli impulsi elementari di una sequenza, che possono essere rettangolari ma anche di altra forma, ottimizzata per specifiche applicazioni. Questi impulsi attraversano il successivo filtro passa-basso (di ricostruzione) che isola le componenti in banda base.

Per analizzare il fenomeno, si consideri il caso in cui si impieghino impulsi elementari  $c_0(t)$  di tipo rettangolare con ampiezza unitaria e durata  $\tau < T_c$ :

$$c_0(t) = 1 \cdot \text{rect}_\tau(t) \Leftrightarrow C_0(f) = 1 \cdot \tau \frac{\sin[\pi f \tau]}{[\pi f \tau]} = 1 \cdot \tau \text{sinc}[\pi f \tau] \quad (2.1)$$

Allora il segnale campionato  $s_c(t)$  risulta (vedi Fig.2.1):

$$\begin{aligned} s_c(t) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} s(iT_c) c_0(t - iT_c) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s(iT_c) c_0(t) * \delta(t - iT_c) \\ &= c_0(t) * \sum_{i=-\infty}^{\infty} s(iT_c) \delta(t - iT_c) = c_0(t) * s(t) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT_c) \end{aligned} \quad (2.2)$$

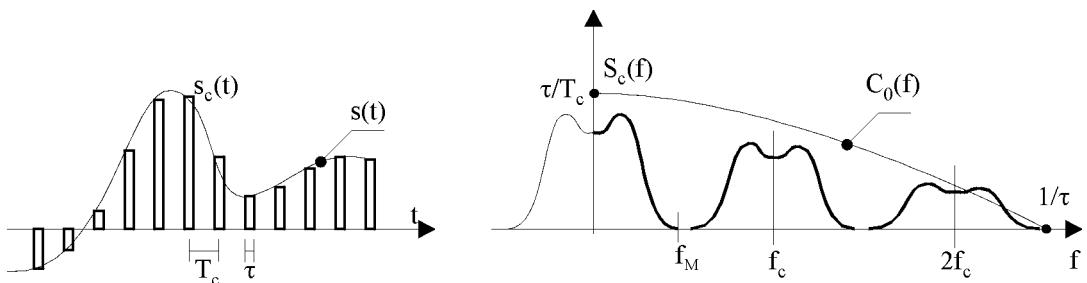


Fig.2.1 – Ricostruzione con impulsi rettangolari.

Tenendo presente la corrispondenza fra prodotto algebrico e prodotto di convoluzione, lo spettro  $S_c(f)$  del segnale campionato con impulsi rettangolari risulta (vedi Fig.2.1):

$$\begin{aligned} S_c(f) &= C_0(f) \cdot S(f) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_c \delta(f - kf_c) = C_0(f) \cdot f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f - kf_c) \\ &= \frac{\tau}{T_c} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f - kf_c) \right] \text{sinc}(\pi f \tau) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le repliche dello spettro del segnale originario non sono più di ampiezza costante in frequenza, ma vengono modellate secondo una funzione  $C_0(f)$  che ha andamento ancora una volta del tipo  $\sin(x)/x$ . Se gli impulsi sono molto stretti, questo fatto incide poco sulla replica centrata sull'origine delle frequenze (spettro in banda base), che verrà estratta con il filtro di ricostruzione senza apprezzabile distorsione.

Si tenga tuttavia presente che su tutto il diagramma in frequenza agisce un fattore di scala pari a  $\tau/T_c$  che potrebbe ridurre a valori inaccettabili il contenuto energetico del segnale, qualora questo fosse generato tramite impulsi rettangolari troppo stretti.

La migliore riproduzione del segnale analogico  $s(t)$  si ottiene evidentemente impiegando frequenze di campionamento  $f_c$  molto maggiori della banda  $f_M$  del segnale che si vuole produrre e facendo la durata  $\tau$  dell'impulso rettangolare pari a  $T_c$ .