

# 1 Dinamica di un solido (con le ECD)

Consideriamo le ECD per il solido, nella forma del teorema del moto del baricentro e del teorema del momento angolare ( $O$  quindi o è un punto fisso o coincide con il baricentro  $G$ ):

$$\underline{R}^{(e)} = m\underline{a}_G, \quad (1)$$

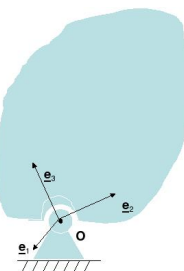
$$\underline{M}_O^{(e)} = \underline{\dot{K}}_O. \quad (2)$$

Per applicare la seconda equazione dobbiamo esprimere  $\underline{K}_O$  in termini dell'atto di moto del solido. Consideriamo il solido come costituito da tante particelle di posizione  $P_j$ , rigidamente legate le une alle altre (gli stessi risultati si otterrebbero anche trattandolo come un continuo, e sostituendo le somme con gli integrali). Supponiamo dapprima che  $O$  sia fisso. Siccome ad ogni istante  $t$  in un moto rigido  $\underline{v}_j = \underline{v}_O + \underline{\omega} \times (P_j - O)$ , e  $\underline{v}_O = 0$  poiché  $O$  è fisso, troviamo

$$\begin{aligned} \underline{K}_O &\stackrel{def}{=} \sum_j m_j (P_j - O) \times \underline{v}_j \\ &= \sum_j m_j (P_j - O) \times [\underline{\omega} \times (P_j - O)] \\ &= \sum_j m_j \{ (P_j - O)^2 \underline{\omega} - [(P_j - O) \cdot \underline{\omega}] (P_j - O) \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Calcoliamo ora l'energia cinetica del solido:

$$\begin{aligned} T &\stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \sum_j m_j \underline{v}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_j m_j \underline{v}_j \cdot [\underline{\omega} \times (P_j - O)] = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \sum_j m_j (P_j - O) \times \underline{v}_j \\ &= \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{K}_O. \end{aligned} \quad (4)$$



## 1.1 Il tensore d'inerzia come esempio di tensore doppio euclideo

Per le definizioni astratte generali di tensore e spazio tensoriale si parte generalmente da quella di prodotto tensoriale, come accenneremo nella sezione 1.2. Preferiamo partire piuttosto da una definizione meno astratta ma sostanzialmente equivalente per un particolare tipo di tensori, i *tensori doppi euclidei su  $E_n$* , identificandoli con gli *endomorfismi di uno spazio euclideo  $E_n$* . Il calcolo di  $\underline{K}_O$  ci dá un esempio concreto e fisicamente significativo di questo tipo di tensori.

**Definizione 1** Si chiama endomorfismo di uno spazio vettoriale  $E_n$ , o anche tensore (affine) su  $E_n$  di tipo (1,1), un'applicazione lineare di  $E_n$  in sé. In formule:

$$\underline{Y} : \underline{\omega} \in E_n \rightarrow \underline{Y}(\underline{\omega}) \in E_n, \quad \underline{Y}(a_1\underline{\omega}_1 + a_2\underline{\omega}_2) = a_1\underline{Y}(\underline{\omega}_1) + a_2\underline{Y}(\underline{\omega}_2). \quad (5)$$

Se  $E_n$  é euclideo questo tensore si dice anche piú semplicemente doppio (euclideo).

La formula (3) definisce evidentemente un endomorfismo dello spazio euclideo  $E_3$ , o equivalentemente un tensore doppio euclideo su  $E_3$ , che prende il nome di *tensore d'inerzia del solido rispetto al polo O*. Ad ogni vettore (velocità angolare)  $\underline{\omega}$  esso associa il vettore  $\underline{Y}(\underline{\omega}) = \underline{K}_O$  pari al corrispondente momento angolare del solido con punto fisso  $O$ .

Data la sua linearità, un endomorfismo  $\underline{Y}$  è completamente determinato dalle  $n$  immagini  $\underline{Y}(\underline{e}_i)$  dei vettori di una base  $\{\underline{e}_i\} \equiv \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$  di  $E_n$ :

$$\underline{\omega} = \sum_{i=1}^n \omega^i \underline{e}_i \quad \Rightarrow \quad \underline{Y}(\underline{\omega}) = \sum_{i=1}^n \omega^i \underline{Y}(\underline{e}_i). \quad (6)$$

Chiamiamo  $Y$  la matrice i cui elementi intervengono come coefficienti nella decomposizione dei vettori  $\underline{Y}(\underline{e}_i)$  nella suddetta base:  $\underline{Y}(\underline{e}_i) = \sum_j Y_i^j \underline{e}_j$ . Riassumendo, la matrice  $Y$  determina gli  $\underline{Y}(\underline{e}_i)$ , e quindi  $\underline{Y}$  stesso:

$$\underline{Y}(\underline{\omega}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Y_i^j \underline{e}_j \omega^i. \quad (7)$$

Gli  $n^2$  elementi di matrice  $Y_i^j$  sono dette componenti di  $\underline{Y}$  nella base  $\{\underline{e}_i\}$ . Al contrario di  $\underline{Y}$ , esse dipendono dalla scelta della base, come accade per la  $n$ -pla delle componenti di un vettore. Vediamo come. Se operiamo un cambiamento di base  $\{\underline{e}_j\} \rightarrow \{\underline{e}'_j\}$ , con

$$\underline{e}'_j = \sum_{h=1}^n \underline{e}_h A_j^h \quad \Leftrightarrow \quad (\underline{e}'_1 \dots \underline{e}'_n) = (\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) A \quad (8)$$

le componenti di  $\underline{\omega}, \underline{Y}$  devono cambiare secondo le leggi

$$\omega'^j = \sum_{k=1}^n A^{-1j}_k \omega^k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$Y'^j_i = \sum_{h,k=1}^n A^{-1j}_k Y^k_h A_i^h = \sum_{h,k=1}^n (A^{-1} Y A)_i^j \quad \Leftrightarrow \quad Y' = A^{-1} Y A \quad (10)$$

(il prodotto di matrici si intende riga per colonna) affinché il risultato della decomposizione nelle due basi sia lo stesso:

$$\sum_{j=1}^n \omega'^j \underline{e}'_j = \sum_{h=1}^n \omega^h \underline{e}_h = \underline{\omega}, \quad \sum_{i,j=1}^n Y'^j_i \underline{e}'_j \omega'^i = \sum_{h,k=1}^n Y^k_h \underline{e}_k \omega^h = \underline{Y}(\underline{\omega}).$$

Viceversa, una  $n$ -pla, (risp. una matrice) che dipende dalla base secondo questa legge determina tramite questa formula un vettore (risp. un endomorfismo) di  $E_n$ . La (10) è quindi

un *criterio di tensorialitá* per la matrice  $Y$ . Un altro criterio di tensorialitá si ricava dalla (7) stessa: se per ogni  $\underline{\omega} \in E_n$  le  $\omega^j := \sum_{i=1}^n Y_i^j \omega^i$  sono le componenti di un vettore [e quindi trasformano secondo la (9)], allora  $Y$  è la matrice delle componenti di un endomorfismo (cioé di un tensore doppio euclideo, se  $E_n$  è euclideo).

Se  $E_n$  é euclideo ed entrambe le basi  $\{\underline{e}_j\}, \{\underline{e}'_j\}$  sono ortonormali il calcolo di  $A^{-1}$  si semplifica, poiché la matrice  $A$  é *ortogonale*, cioè  $A^{-1} = A^T$  (la trasposta di  $A$ )<sup>1</sup>.

Si dota in modo naturale l'insieme  $L(E_n)$  degli endomorfismi di  $E_n$  di struttura di spazio vettoriale definendo una combinazione lineare di endomorfismi attraverso la combinazione lineare dei loro risultati, o equivalentemente delle loro componenti:

$$\left[ a_1 \underline{Y}_1 + a_2 \underline{Y}_2 \right] (\underline{\omega}) \stackrel{def}{=} a_1 \underline{Y}_1(\underline{\omega}) + a_2 \underline{Y}_2(\underline{\omega}) \quad \Leftrightarrow \quad \left[ a_1 \underline{Y}_1 + a_2 \underline{Y}_2 \right]^{ij} \stackrel{def}{=} a_1 Y_1^{ij} + a_2 Y_2^{ij}. \quad (11)$$

Nel caso del tensore d'inerzia il significato fisico di una combinazione vettoriale è il seguente. La moltiplicazione di  $\underline{Y}$  per lo scalare  $a$  corrisponde ad un cambiamento delle masse  $m_j$  (o della densitá di massa  $\mu(P)$ ) di uno stesso fattore  $a$ , come si ottiene per es. considerando due solidi omogenei di stessa geometria, ma materiali diversi; quanto alla somma, se il solido  $\mathcal{S}$  si ottiene per unione di due parti disgiunte  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  sará  $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ .

Una qualsiasi applicazione  $\underline{X} : (\underline{u}, \underline{\omega}) \in E_n \times E_n \rightarrow \underline{X}(\underline{u}, \underline{\omega}) \in \mathbb{R}$  bilineare (cioè lineare sia in  $\underline{u}$ , sia in  $\underline{\omega}$ ) si dice anche un tensore (affine) di tipo (0,2). È immediato verificare che è determinata dalla matrice  $X$  dt elementi  $X_{ji} := \underline{X}(\underline{e}_j, \underline{e}_i)$ , tramite la formula  $\underline{X}(\underline{u}, \underline{\omega}) = \sum_{i,j=1}^n X_{ji} u^j \omega^i$ . Se  $E_n$  é euclideo, dato un endomorfismo  $\underline{Y}$  posso associare a  $(\underline{u}, \underline{\omega}) \in E_n \times E_n$  il prodotto scalare  $\underline{u} \cdot [\underline{Y}(\underline{\omega})] \in \mathbb{R}$ ; l'applicazione<sup>2</sup>

$$\underline{X} : (\underline{u}, \underline{\omega}) \in E_n \times E_n \rightarrow \underline{u} \cdot [\underline{Y}(\underline{\omega})] = \sum_{i,j=1}^n Y_i^j u_j \omega^i \in \mathbb{R} \quad (12)$$

é bilineare, cioè è un tensore di tipo (0,2), e la corrispondenza  $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$  é biunivoca. Quindi posso vedere un tensore doppio euclideo anche come un'applicazione bilineare  $\underline{X} : E_n \times E_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Viceversa, considerando le leggi di trasformazione delle componenti  $u_i, \omega^i$  di due vettori  $\underline{u}, \underline{\omega}$ , si dimostra il seguente altro *criterio di tensorialitá*: se  $Y$  é una matrice tale che  $\sum_{i,j=1}^n u_i Y_j^i \omega^j$  é uno scalare (cioé un numero reale indipendente dalla scelta della base) per ogni coppia  $(\underline{u}, \underline{\omega})$  allora  $Y_j^i$  sono le componenti di un tensore doppio. (Si noti che se  $\underline{Y}$  é il tensore d'inerzia su  $E_3$  di un solido con  $O$  fisso, e scelgo  $\underline{u} = \underline{\omega}/2$  lo scalare che ottengo è proprio la sua energia cinetica  $T$ ). Come accenneremo piú avanti, un terzo modo equivalente di vedere un tensore doppio euclideo anche come un'applicazione lineare  $\underline{Z} : \mathbb{R} \rightarrow E_n \times E_n$ .

Il prodotto scalare  $\underline{u} \cdot [\underline{Y}(\underline{\omega})]$ , visto come una funzione di  $\underline{\omega}$ , é un esempio di *contrazione* di un tensore doppio euclideo ed un vettore, il cui risultato é a sua volta un vettore  $\underline{v}$  di componenti  $v_j = \sum_i u_i Y_j^i$ , che si indica generalmente con  $\underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{Y}$ , tale che  $\underline{v} \cdot \underline{\omega} = \underline{u} \cdot \underline{Y}(\underline{\omega})$ .

<sup>1</sup>Applicando l'identitá  $\underline{x} = \sum_i (\underline{x} \cdot \underline{e}_i) \underline{e}_i$  a  $\underline{x} = \underline{e}'_j$  si trova  $\underline{e}'_j = \sum_i (\underline{e}'_j \cdot \underline{e}_i) \underline{e}_i$ , da cui per confronto con (8),  $A_j^i = \underline{e}'_j \cdot \underline{e}_i$ . La matrice  $A^{-1}$  interviene nella trasformazione inversa  $\{\underline{e}'_j\} \rightarrow \{\underline{e}_j\}$ , in cui i ruoli delle due basi sono scambiati, e quindi  $A^{-1}{}^i_j = \underline{e}_j \cdot \underline{e}'_i = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j = A_j^i = A^T{}^i_j$  (nella seconda uguaglianza si é usata la simmetria del prodotto scalare), cioè  $A^{-1} = A^T$ .

<sup>2</sup>Le  $u_j$  sono le componenti covarianti di  $\underline{u}$  nella base  $\{\underline{e}_j\}$ . Se questa é ortonormale,  $u_j = u^j$ ,  $X_{ji} = Y_i^j$ .

Viceversa, considerando le leggi di trasformazione delle  $v_i, u_i$  si dimostra il seguente altro *criterio di tensorialità*: se  $Y$  é una matrice tale che  $v_j = \sum_i u_i Y_j^i$  sono le componenti di un vettore  $\underline{v}$  per ogni vettore  $\underline{u}$  allora  $Y_j^i$  sono le componenti di un tensore doppio.

## 1.2 Spazio vettoriale duale. Cenni di algebra tensoriale

Dato uno spazio vettoriale  $E_n$  si chiama *covettore* (o *forma lineare*) un'applicazione lineare  $\overline{F}$  di  $E_n$  in  $\mathbb{R}$ . In formule:

$$\overline{F} : \underline{\omega} \in E_n \rightarrow \overline{F}(\underline{\omega}) \in \mathbb{R}, \quad \overline{F}(a_1 \underline{\omega}_1 + a_2 \underline{\omega}_2) = a_1 \overline{F}(\underline{\omega}_1) + a_2 \overline{F}(\underline{\omega}_2). \quad (13)$$

Per la linearit ,  $\overline{F}$  é completamente determinato dalla  $n$ -pla di immagini  $F_i \stackrel{def}{=} \overline{F}(\underline{e}_i) \in \mathbb{R}$  dei vettori di una base  $\{\underline{e}_i\}$  di  $E_n$ :

$$\underline{\omega} = \sum_{i=1}^n \omega^i \underline{e}_i \quad \Rightarrow \quad \overline{F}(\underline{\omega}) = \sum_{i=1}^n \omega^i F_i. \quad (14)$$

Si dota in modo naturale l'insieme  $\tilde{E}_n$  dei covettori di struttura di spazio vettoriale definendo una combinazione lineare di covettori attraverso la combinazione lineare dei loro risultati, o equivalentemente delle loro componenti:

$$[a_1 \overline{F}_1 + a_2 \overline{F}_2](\underline{\omega}) \stackrel{def}{=} a_1 \overline{F}_1(\underline{\omega}) + a_2 \overline{F}_2(\underline{\omega}) \quad \Leftrightarrow \quad [a_1 \overline{F}_1 + a_2 \overline{F}_2]^{ij} \stackrel{def}{=} a_1 Y_1^{ij} + a_2 Y_2^{ij}. \quad (15)$$

$\tilde{E}_n$  si dice *spazio vettoriale duale* di  $E_n$ . Si verifica facilmente che il sistema di  $n$  covettori  $\{\overline{e}^j\} \equiv \{\overline{e}^1, \dots, \overline{e}^n\}$  definiti dalla condizione  $\overline{e}^j(\underline{e}_i) = I_i^j$  ( $I$  é la matrice unitaria; l'elemento di matrice  $I_i^j$  si denota pi  spesso col *simbolo di Kronecker*  $\delta_i^j$ ) é una base di  $\tilde{E}_n$ , detta *duale* della base  $\{\underline{e}_i\}$ . Quindi anche  $\tilde{E}_n$  ha dimensione  $n$ . A seguito del cambiamento di base (8) la base duale cambia secondo la legge

$$\overline{e}'^j = \sum_{k=1}^n A^{-1j}_k \overline{e}^k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \overline{e}'^1 \\ \vdots \\ \overline{e}'^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \overline{e}^1 \\ \vdots \\ \overline{e}^n \end{pmatrix}, \quad (16)$$

delle stessa forma della (9). Per la linearit  di  $\overline{F}$ , le  $F_i$  invece trasformano di nuovo come le  $\underline{e}_i$  in (8). Poich   $(A^{-1})^{-1} = A$ ,  $\{\underline{e}_i\}$  e la base duale  $\widetilde{\underline{e}_i}$  della duale si trasformano allo stesso modo; si possono quindi identificare gli spazi isomorfi  $\tilde{E}_n$  e  $E_n$ ,  $\tilde{E}_n \equiv E_n$  e queste basi.

Se  $E_n$  é euclideo, ogni  $\underline{x} \in E_n$  determina un covettore  $\overline{F}_x$  tramite la definizione  $\overline{F}_x(\underline{\omega}) = \underline{x} \cdot \underline{\omega}$ . Se la base  $\{\underline{e}_i\}$  di  $E_n$  é ortonormale, per i covettori della base duale vale evidentemente l'uguaglianza  $\overline{e}^j = \overline{F}_{\underline{e}_j}$ . Se inoltre entrambe le basi  $\{\underline{e}_j\}, \{\underline{e}'_j\}$  sono ortonormali la (16) ha la stessa forma della (8), poich   $A^{-1} = A^T$ . Si possono quindi identificare gli spazi isomorfi  $\tilde{E}_n$  e  $E_n$ ,  $\tilde{E}_n \equiv E_n$ , e queste basi.

**Definizione 2** *Dati tre spazi vettoriali  $E_n, E_m, E_{nm}$  di dimensione risp.  $n, m, nm$  si chiama prodotto tensoriale un'applicazione*

$$f_{\otimes} : (\underline{x}, \underline{y}) \in E_n \times E_m \rightarrow \underline{x} \otimes \underline{y} \in E_{nm} \quad (17)$$

bilineare (cioè lineare sia in  $\underline{x}$ , sia in  $\underline{y}$ ) e tale che se  $\{\underline{e}_i\} \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\{\underline{u}_\alpha\} \equiv \{u_1, \dots, u_m\}$  sono basi di  $E_n, E_m$  allora  $\{\underline{e}_i \otimes \underline{u}_\alpha\}$  è una base di  $E_{nm}$  [nel denotare  $f_\otimes(\underline{x}, \underline{y})$  con  $\underline{x} \otimes \underline{y}$  abbiamo adottato una notazione pressoché universale]. Allora si dice che  $E_{nm}$  è il prodotto tensoriale di  $E_n$  per  $E_m$ ,  $E_n \otimes E_m$  (si legge anche:  $E_n$  tensor  $E_m$ ), e che gli elementi  $\underline{T} \in E_{nm} = E_n \otimes E_m$  sono tensori.

Da  $\underline{x} = \sum_{i=1}^n x^i \underline{e}_i$ ,  $\underline{y} = \sum_{\alpha=1}^m u^\alpha \underline{u}_\alpha$  segue per la bilinearità  $\underline{x} \otimes \underline{y} = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m x^i y^\alpha (\underline{e}_i \otimes \underline{u}_\alpha)$ . Quindi  $f_\otimes$  non è suriettiva; il codominio è costituito da tutte e sole le *diadi* (o *elementi decomponibili*)  $\underline{x} \otimes \underline{y}$ , cioè quegli elementi  $\underline{T} = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m T^{i\alpha} (\underline{e}_i \otimes \underline{u}_\alpha)$  di  $E_{nm} \equiv E_n \otimes E_m$  aventi componenti della forma  $T^{i\alpha} = x^i y^\alpha$ , con  $\underline{x} \in E_n$ ,  $\underline{y} \in E_m$ . Dalla bilinearità segue per i cambiamenti di base  $\{\underline{e}_j\} \rightarrow \{\underline{e}'_j\}$ ,  $\{\underline{u}_\beta\} \rightarrow \{\underline{u}'_\beta\}$ ,  $\{\underline{e}_j \otimes \underline{u}_\beta\} \rightarrow \{\underline{e}'_j \otimes \underline{u}'_\beta\}$  l'implicazione

$$\underline{e}'_j = \sum_{h=1}^n A_j^h \underline{e}_h, \quad \underline{u}'_\beta = \sum_{\alpha=1}^m B_\beta^\alpha \underline{u}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \underline{e}'_j \otimes \underline{u}'_\beta = \sum_{h=1}^n \sum_{\alpha=1}^m A_j^h B_\beta^\alpha (\underline{e}_h \otimes \underline{u}_\alpha), \quad (18)$$

e, dall'invarianza delle decomposizioni, che le  $T^{j\beta}$  cambiano come i prodotti  $x^j y^\beta$ :

$$T'^{j\beta} = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m A^{-1j}_i B^{-1\beta}_\alpha T^{i\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad T' = A^{-1} T B^{-1T} \quad (19)$$

Viceversa, una matrice  $n \times m$   $T$  che dipende dalle basi secondo questa legge determina tramite questa formula un tensore  $\underline{T} \in E_n \otimes E_m$ . La (19) è quindi un *criterio di tensorialità* per la matrice  $T$  (come detto, esso è automaticamente soddisfatto per una  $T$  della forma  $T^{i\alpha} = x^i y^\alpha$ , ove  $x^i, y^\alpha$  sono componenti di vettori:  $T$  determina la diade  $\underline{x} \otimes \underline{y}$ ).

L'iterazione del prodotto tensoriale è associativa. Dato un ulteriore spazio vettoriale  $E_p$ , il prodotto tensoriale  $E_{nm} \otimes E_p$  si indica anche con  $E_n \otimes E_m \otimes E_p$ , e così via. Le leggi di trasformazione delle basi e delle componenti generalizzano le (18), (19). Viceversa, componenti che soddisfano le leggi generalizzate determinano tensori, e quindi le leggi generalizzate sono *criteri di tensorialità*. Criteri di tensorialità alternativi si formulano utilizzando *contrazioni* di questi tensori con potenze tensoriali di  $\tilde{E}_n, \tilde{E}_m, \tilde{E}_p$  etc.

**Proposizione-Definizione 1** *Dato uno spazio vettoriale  $E_n$ , si dicono tensori (affini) su  $E_n$   $r$  volte controvarianti ed  $s$  volte covarianti [più brevemente, di tipo  $(r, s)$ ] gli elementi dello spazio tensoriale*

$$E_n^{(r,s)} \stackrel{def}{=} \underbrace{E_n \otimes \dots \otimes E_n}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{\tilde{E}_n \otimes \dots \otimes \tilde{E}_n}_{s \text{ volte}}. \quad (20)$$

Dalla definizione di  $\tilde{E}_n$  segue che un elemento di  $T \in E_n^{(r,s)}$  è un'applicazione

$$T : \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_{s \text{ volte}} \rightarrow \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_{r \text{ volte}} \quad (21)$$

lineare in tutti i suoi  $s$  argomenti. I tensori di rango  $(0,0)$  sono gli scalari. I tensori di tipo  $(1,0)$  e  $(0,1)$  sono risp. i vettori di  $E_n$  ed i corrispondenti covettori (elementi di  $\tilde{E}_n$ ).

Verifichiamo l'affermazione (21) per  $r = s = 1$  scegliendo per  $E_n, \tilde{E}_n$  basi duali. Applicando al vettore  $\underline{\omega} = \omega^h e_h$  i secondi fattori tensoriali (che sono covettori) nella decomposizione  $\underline{T} = \sum_{i,j=1}^n T^{ij} (e_i \otimes \bar{e}^j) \in E_n \otimes \tilde{E}_n$  trovo per la linearit  dei  $\bar{e}^j$  un altro vettore

$$\sum_{i,j,h=1}^n T^{ij} \omega^h e_i \bar{e}^j (e_h) = \sum_{i,j,h=1}^n T^{ij} \omega^h e_i I_h^j = \sum_{i,j=1}^n T^{ij} \omega^j e_i \stackrel{def}{=} \underline{T}(\underline{\omega});$$

l'applicazione  $\underline{T}$    evidentemente lineare, cio  un endomorfismo. Per la dualit  delle basi   anche  $B^{-1T} = A$ , e la (19) si riduce alla (10), come doveva. Riassumendo,  $L(E_n) = E_n \otimes \tilde{E}_n$ : gli endomorfismi sono tensori di tipo (1,1).

Un'applicazione bilineare  $\underline{X} : E_n \times E_n \rightarrow \mathbb{R}$    invece un tensore di tipo (0,2), cio  un elemento di  $\tilde{E}_n \otimes \tilde{E}_n$ , mentre un'applicazione bilineare  $\underline{Z} : \mathbb{R} \rightarrow E_n \times E_n$    un tensore di tipo (2,0), cio  un elemento di  $E_n \otimes E_n$ .  $\underline{X}, \underline{Z}$  si dicono (*anti*)*simmetrici* se tali sono le matrici  $X, Z$ ; si noti che l'(anti)simmetria   preservata dalle leggi di trasformazione  $X' = A^T X A$ ,  $Z' = A^{-1} X A^{-1T}$ , quindi basta verificarla in una base perch  sia garantita in ogni base. Se  $E_n$    euclideo, l'isomorfismo  $\tilde{E}_n \approx E_n$  permette di identificare non solo  $\tilde{E}_n, E_n$  (cio  vettori e covettori), ma anche questi tre spazi, e quindi i tre tipi di tensori, che chiamiamo semplicemente tensori doppi euclidei. Se inoltre la base  $\{e_i\}$    ortonormale trovo  $X_{ij} = Y_j^i = Z^{ij}$  per le componenti delle tre corrispondenti matrici  $X, Y, Z$ : le componenti 2 volte covarianti, miste, 2 volte controvarianti del tensore doppio coincidono, cos  come nella corrispondenza  $\underline{x} \leftrightarrow \bar{F}_{\underline{x}}$  le componenti  $x^i, F_{xi}$  di  $\underline{x}, \bar{F}_{\underline{x}}$  risp. nelle basi  $\{e_i\}, \{\bar{e}^i\}$  coincidono. Considerazioni analoghe valgono per i tensori euclidei tripli, quadrupli, etc.

Infine un tensore che dipende dalla posizione  $P$  ed eventualmente dal tempo  $t$  si chiama *campo tensoriale*. Tra gli esempi di campi tensoriali doppi che si incontrano nei corsi di studio di ingegneria citiamo il tensore di deformazione, che descrive lo stato di deformazione di un corpo esteso nel punto  $P$  all'istante  $t$ , il tensore di Cauchy, che descrive il corrispondente stato di tensione in  $P$  a  $t$ , o anche il tensore (antisimmetrico, sullo spazio  $E_4$  di Minkowski) elettromagnetico, che ha per componenti quelle dei campi elettrico e magnetico. Einstein   stato il primo a sottolineare l'importanza che tutte le leggi fondamentali della fisica siano scritte nella forma di equazioni in ciascuna delle quali tutti i termini sono tensori (o campi tensoriali) dello stesso tipo; gli esempi pi  semplici sono le equazioni scalari (es. l'equazione di stato dei gas perfetti  $PV = nRT$ ) e quelle vettoriali (es. la  $\underline{F} = m\underline{a}$  o le ECD). Questo garantisce che la formulazione delle equazioni non dipenda dal sistema di riferimento (covarianza delle equazioni), anche se i termini vi dipendono.

### 1.3 Calcolo della matrice d'inerzia di un solido con un punto fisso

Ricordiamo la definizione di momento d'inerzia di un sistema materiale discreto o continuo (in particolare un solido) rispetto a una retta  $r$

$$I_r := \sum_j m_j \delta_j^2 \qquad I_r := \int_V dV \mu(P) [\delta(P)]^2, \qquad (22)$$

ove  $\delta_j, \delta(P)$  sono risp. le distanze da  $r$  di  $P_j$  e dell'elemento di volume  $dV$  con centro  $P$ . Fissando una terna ortonormale  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  risulta  $P_j - O = x_j \underline{e}_1 + y_j \underline{e}_2 + z_j \underline{e}_3$  e

$$\begin{aligned} K_O^x &= \sum_{j=1}^n m_j [(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2) \omega^x - (x_j \omega^x + y_j \omega^y + z_j \omega^z) x_j] \\ &= \sum_{j=1}^n m_j [(y_j^2 + z_j^2) \omega^x - (y_j \omega^y + z_j \omega^z) x_j] \\ &= I_x \omega^x - J_{xy} \omega^y - J_{xz} \omega^z, \end{aligned}$$

ove abbiamo definito

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_j m_j (y_j^2 + z_j^2) & I_y &= \sum_j m_j (x_j^2 + z_j^2) & I_z &= \sum_j m_j (x_j^2 + y_j^2) \\ J_{xy} &= \sum_j m_j x_j y_j & J_{xz} &= \sum_j m_j x_j z_j & J_{yz} &= \sum_j m_j y_j z_j. \end{aligned} \quad (23)$$

È facile riconoscere che  $I_x, I_y, I_z$  non sono altro che i *momenti di inerzia* del solido rispetto agli assi  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ , mentre  $J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$  sono detti *prodotti d'inerzia* del solido rispetto agli stessi assi. Per le altre componenti si troverá ovviamente

$$K_O^y = -J_{xy} \omega^x + I_y \omega^y - J_{yz} \omega^z \quad K_O^z = -J_{xz} \omega^x - J_{yz} \omega^y + I_z \omega^z.$$

Introducendo la *matrice d'inerzia*

$$Y(O) := \begin{pmatrix} I_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & I_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & I_z \end{pmatrix} \quad (24)$$

( $Y$  é evidentemente simmetrica), queste tre relazioni si possono scrivere piú sinteticamente nella forma

$$K_O^a = \sum_{b=1}^a Y^{ab}(O) \omega_b, \quad a = 1, 2, 3. \quad (25)$$

Riassumendo, il momento angolare  $\underline{K}_O$  e l'energia cinetica  $T$  si esprimono come funzioni della velocità angolare e del tensore d'inerzia. I momenti e prodotti d'inerzia, e quindi anche il tensore d'inerzia, sono funzioni delle masse e posizioni delle particelle, cioè della distribuzione di materia, del solido.

**Proposizione 1** *In una qualsiasi terna ortonormale  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  risulta*

$$\underline{K}_O = \sum_{a,b=1}^3 Y^{ab}(O) \underline{e}_a \omega_b, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^3 Y^{ab}(O) \omega_a \omega_b, \quad (26)$$

o, in termini di vettori-riga o vettori-colonna delle componenti e prodotti riga per colonna,

$$\begin{pmatrix} K_O^1 \\ K_O^2 \\ K_O^3 \end{pmatrix} = Y(O) \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{2} (\omega^1, \omega^2, \omega^3) Y(O) \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \quad (27)$$

La (26)<sub>1</sub> mostra che la matrice d'inerzia  $Y(O)$  é la matrice delle componenti del tensore d'inerzia nella terna ortonormale  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . Essa gioca un ruolo analogo a quello della massa nella determinazione della quantità di moto ed energia cinetica di un punto materiale.

Siccome l'atto di moto del solido all'istante  $t$  è rotatorio e l'asse istantaneo  $\mathcal{A}_t$  di rotazione passa per  $O$ , risulta  $\underline{\omega} = \omega \underline{e}$  con  $\underline{e}$  versore di  $r$ ,  $\omega^a = \omega \alpha^a$ , ove abbiamo indicato con  $\alpha^a$  le componenti di  $\underline{e}$  nella terna prefissata, da cui, sostituendo nella (26)<sub>2</sub>,  $T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{a,b=1}^3 Y^{ab}(O) \alpha_a \alpha_b$ . D'altro canto all'istante  $t$  l'atto di moto, e quindi anche l'energia cinetica, sono gli stessi di quelli del solido in rotazione con velocità angolare  $\omega$  attorno a quell'asse fisso  $r$  che coincide con  $\mathcal{A}_t$ ; per quest'ultimo avevamo dimostrato  $T = I_r \omega^2 / 2$ , da cui per confronto

$$I_r = \sum_{a,b=1}^3 Y^{ab}(O) \alpha_a \alpha_b = I_x \alpha_1^2 + I_y \alpha_2^2 + I_z \alpha_3^2 - 2J_{xy} \alpha_1 \alpha_2 - 2J_{xz} \alpha_1 \alpha_3 - 2J_{yz} \alpha_2 \alpha_3, \quad (28)$$

che prende il nome di *legge di variazione di  $I_r$  per  $r \in$  stella di centro (proprio)  $O$* . Essa ci dice che  $I_r$ , per le infinite rette  $r$ , è sempre combinazione dei sei momenti e prodotti d'inerzia rispetto alla terna prescelta.

## 1.4 IIECD per un solido con un punto $O$ fisso

Il solido ha tre gradi di libertà, cioè bastano 3 coordinate angolari (es. gli angoli di Eulero  $\varphi, \vartheta, \psi$ ) per individuare la disposizione del solido nello spazio; vogliamo mostrare che la IIECD (2) ne determina il moto, cioè la dipendenza dal tempo  $\varphi(t), \vartheta(t), \psi(t)$ . Osserviamo innanzitutto che anche le  $\omega_a(t)$  sono funzione solo degli angoli di Eulero e delle loro derivate prime rispetto al tempo. Possiamo scrivere la IIECD in tanti riferimenti. Quale ci conviene scegliere? Uno solidale al solido, così che gli elementi della matrice di inerzia non dipendono da  $t$ . Allora, ricordando le formule di Poisson  $\dot{e}_a = \underline{\omega} \times \underline{e}_a$ , essa diventa

$$\underline{M}_O^{(e)} = \underline{\dot{K}}_O \equiv \sum_{a,b=1}^3 Y^{ab}(O) [\underline{\omega} \times \underline{e}_a \omega_b + \underline{e}_a \dot{\omega}_b] \quad (29)$$

$$= \underline{\omega} \times \underline{K}_O + \sum_{a,b=1}^3 Y^{ab}(O) \underline{e}_a \dot{\omega}_b; \quad (30)$$

una volta espresse le  $\omega_a(t)$  in funzione degli angoli di Eulero e delle loro derivate, questa equazione vettoriale dá tre equazioni differenziali del secondo ordine nelle sole tre incognite  $\varphi(t), \vartheta(t), \psi(t)$ , che ammettono una ed una sola soluzione una volta assegnate le condizioni iniziali, come affermato.

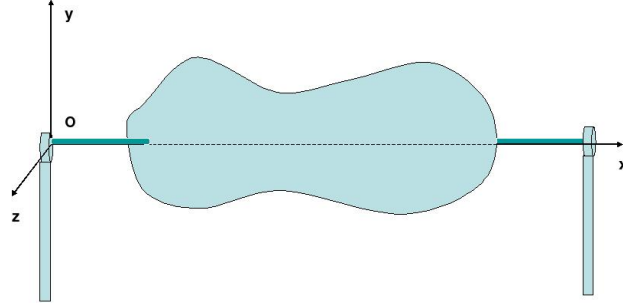
## 1.5 Dinamica di un solido con un asse fisso $\mathcal{A}$

Supponiamo ora che sia fisso non solo un punto del solido, ma un intero asse  $\mathcal{A}$ ; il solido ha quindi 1 solo grado di libertà, corrispondente alle rotazioni attorno ad  $\mathcal{A}$ . Come sistema di riferimento solidale scegliamo per semplicità un sistema di riferimento con origine  $O$  su  $\mathcal{A}$  e asse  $\vec{x} \equiv \mathcal{A}$ . In questo modo, da  $\underline{\omega} \parallel \mathcal{A}$  segue  $\underline{\omega} \equiv (\omega^x, 0, 0) \equiv (\dot{\theta}, 0, 0)$  (abbiamo indicato

con  $\theta$  l'angolo tra due piani per  $\mathcal{A}$ , uno fisso e uno solidale al corpo), e quindi dalla relazione precedente

$$\underline{K}_O = (I_x \underline{e}_1 - J_{xy} \underline{e}_2 - J_{xz} \underline{e}_3) \dot{\theta}, \quad (31)$$

$$\underline{\dot{K}}_O = (I_x \underline{e}_1 - J_{xy} \underline{e}_2 - J_{xz} \underline{e}_3) \ddot{\theta} + [J_{xz} \underline{e}_2 - J_{xy} \underline{e}_3] \dot{\theta}^2. \quad (32)$$



Scriviamo le tre componenti della ECD:

$$\begin{aligned} M_O^{(e)x} &= I_x \ddot{\theta} \\ M_O^{(e)y} &= -J_{xy} \ddot{\theta} + J_{xz} \dot{\theta}^2 \\ M_O^{(e)z} &= -J_{xz} \ddot{\theta} - J_{xy} \dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Possiamo riformulare l'equazione (33)<sub>1</sub> in modo indipendente dalla scelta del sistema di riferimento, come segue. Data una qualsiasi retta  $r$  ed un punto  $O \in r$ , l'equazione delle rotazioni attorno all'asse fisso  $r$  si scrive

$$I_r \ddot{\theta} = M_O^{(e)r}. \quad (34)$$

Distinguiamo ora le forze agenti sul solido in attive e vincolari, e indichiamo con  $\underline{M}_O^{(a)}$ ,  $\underline{M}_O^{(v)}$  i rispettivi momenti rispetto a  $O$ , con  $\underline{R}^{(a)}$ ,  $\underline{R}^{(v)}$  le loro rispettive risultanti.

### 1.5.1 Caso del vincolo liscio

Se il vincolo di asse fisso (cerniera cilindrica) é liscio, risulta  $M_O^{(v)x} = 0$ , e quindi la prima equazione, non contenendo piú le incognite reazioni vincolari, diventa

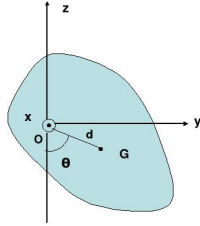
$$I_x \ddot{\theta} = M_O^{(a)x}, \quad (35)$$

e può essere senz'altro risolta. Essa ammette una ed una sola soluzione, una volta assegnate le condizioni iniziali.

Il moto di rotazione attorno all'asse é determinato quindi dalla prima equazione. Questa é un'equazione simile alla  $m\ddot{x} = F^x$ : al posto della componente  $x$  della forza c'è la componente  $x$  del momento risultante delle forze agenti sul solido, al posto dell'accelerazione lineare lungo  $x$  c'è l'accelerazione angolare attorno a  $\vec{x}$ , al posto della massa (inerziale) c'è il momento d'inerzia rispetto a  $\vec{x}$ : tanto piú esso é grande, tanto piú il solido oppone resistenza alla variazione della velocità angolare. Osserviamo che la condizione di equilibrio per il solido é che  $M_O^{(a)x} = 0$ .

## Pendolo composto

Scriviamo l'equazione nel caso particolare di un solido pesante ruotante attorno ad un asse orizzontale liscio (che scegliamo come asse  $\vec{x}$ ). L'unica forza attiva é evidentemente la forza peso,  $(G, mg)$ . Indichiamo con  $\theta$  l'angolo tra il piano  $\pi$  passante per  $\vec{x}$  e verticale (e quindi fisso) ed il piano  $\pi'$  passante per  $\vec{x}$  e  $G$  (e quindi solidale al solido). Detta  $d$  la distanza di  $G$  da  $\vec{x}$  (la supporremo  $> 0$ ), il braccio di  $(G, mg)$  rispetto a  $\vec{x}$  risulta evidentemente  $h = d \sin \theta$ .



Quindi l'equazione (35) diventa

$$\ddot{\theta} = -\Omega^2 \sin \theta, \quad \text{ove } \Omega^2 := mgd/I_x. \quad (36)$$

Questa é la stessa equazione differenziale che regola il moto di un pendolo semplice, la pulsazione  $\Omega$  di quest'ultimo essendo definita da  $\Omega^2 = g/l!$  In altri termini, il solido si muove come un pendolo semplice di lunghezza  $l = I_x/md!$  Per questo motivo suole chiamarsi "pendolo composto", ed  $l$  *lunghezza equivalente* del pendolo composto.

Se si vincola il solido pesante a ruotare non attorno a  $\vec{x}$  ma attorno ad un asse  $r' \parallel \vec{x}$  posto a distanza  $l$  nel piano  $G\vec{x}$ ,  $\Omega^2$  non cambia (*reversibilitá* del pendolo composto)! Per dimostrarlo basta usare il teorema di Steiner-Huygens. Ciò suggerisce un metodo per misurare  $g$  con grande precisione senza bisogno di misurare  $I_x$ , semplicemente da  $g = \Omega^2 l$ . Si osservi innanzitutto che le frequenze  $\Omega$  si possono misurare con grande precisione pur di disporre di un tempo sufficiente per contare tanti periodi. Si puó inoltre determinare con grande precisione l'asse  $r' \parallel \vec{x}$  che dá lo stesso periodo per approssimazioni successive, spostandolo con metodi micrometrici.

## Le restanti reazioni vincolari

Torniamo alla discussione generale. A che servono le IECD (2) e le altre due equazioni di (33)? La IECD ci serve a determinare  $\underline{R}^{(v)}$ :

$$\underline{R}^{(v)} = -\underline{R}^{(a)} + m\underline{a}_G$$

Entrambi i termini a secondo membro sono ora noti, perché noto ormai il moto del solido (e quindi anche di  $G$ ).  $m\underline{a}_G$  é la risultante dei cosiddetti *cimenti dinamici*, il sistema di forze che il corpo esercita sul vincolo per effetto del moto. Si puó renderla nulla? Sí, evidentemente deve essere  $\underline{a}_G \equiv 0$ , cioè  $\underline{v}_G \equiv \text{costante}$ , ma essendo il moto un moto di rotazione, ciò é possibile solo se  $\underline{a}_G \equiv 0 \equiv \underline{v}_G$ , e questo accade solo se  $G \in \mathcal{A}$ , cioè se si sceglie come  $\mathcal{A}$  un asse baricentrale. Si effettua cosí il cosiddetto *bilanciamento statico* dei cimenti dinamici. Sostituendo invece la soluzione  $\theta(t)$  nelle altre due equazioni di (33) troviamo ora le incognite

$M_O^{(v)y}, M_O^{(v)z}$ :

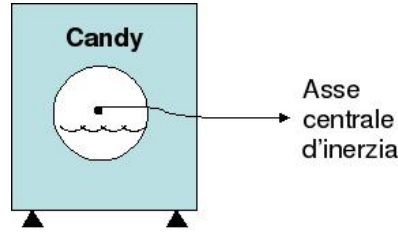
$$M_O^{(v)y} = -M_O^{(a)y} - J_{xy}\ddot{\theta} + J_{xz}\dot{\theta}^2, \quad (37)$$

$$M_O^{(v)z} = -M_O^{(a)z} - J_{xz}\ddot{\theta} - J_{xy}\dot{\theta}^2; \quad (38)$$

infatti, i secondi membri sono ora completamente noti.  $-J_{xy}\ddot{\theta} + J_{xz}\dot{\theta}^2$  e  $-J_{xz}\ddot{\theta} - J_{xy}\dot{\theta}^2$  sono le componenti  $y, z$  del *momento dei cimenti dinamici*. Si possono rendere nulle? SÍ, condizione necessaria e sufficiente é che  $J_{xy} = 0 = J_{xz}$ , cioè che  $\vec{x}$  sia asse principale d'inerzia! Adottando una tale scelta di  $\mathcal{A}$  si effettua il cosiddetto *bilanciamento dinamico* dei cimenti dinamici, le reazioni vincolari devono bilanciare solo le forze attive, perché l'effetto del moto scompare:

$$M_O^{(v)y} = -M_O^{(a)y} \quad M_O^{(v)z} = -M_O^{(a)z}. \quad (39)$$

Il bilanciamento sia statico sia dinamico (in cui il vincolo esercita - e quindi per reazione é soggetto - alla "minima" sollecitazione possibile), si ottiene ora evidentemente se e solo se  $\mathcal{A}$  è asse centrale d'inerzia! É il motivo per cui per esempio la centrifuga di una lavatrice é costruita in modo da essere vincolata a ruotare attorno al suo asse di simmetria, che é asse centrale di inerzia.



In particolare, consideriamo ora il caso che  $\underline{M}_O^{(a)} = 0$  (cioé in assenza di forze attive, o piú in generale con forze attive aventi momento risultante nullo) e  $\mathcal{A}$  sia liscio e principale di inerzia. Troviamo  $\underline{M}_O^{(v)} = 0$ , cioè l'asse fisso  $\mathcal{A}$  esercita una sollecitazione equivalente solo a  $(O, \underline{R}^{(v)})$ , e l'equazione (35) diventa ora  $I_x\ddot{\theta} = 0$ , che ha soluzione

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t, \quad (40)$$

ove  $\theta_0, \omega_0$  sono l'angolo e la velocità angolare iniziali: il solido ruota attorno all'asse fisso con velocità costante. Se ora rimuovessimo parzialmente il vincolo, piú precisamente lasciassimo solo il punto  $O$  di  $\mathcal{A}$  fisso (con una cerniera sferica liscia in  $O$ ), che succederebbe? Nulla, il nuovo vincolo eserciterebbe una sollecitazione del tutto equivalente, quindi l'ECD sarebbero ugualmente soddisfatte, e avremmo la stessa soluzione (40): il solido, messo a ruotare all'istante  $t = 0$  attorno all'asse principale d'inerzia  $\mathcal{A}$  con velocità angolare iniziale  $\underline{\omega}_0$ , vi continua a ruotare attorno con velocità costante! Ritroveremo questo risultato anche nella sezione seguente (rotazioni permanenti). Se invece  $\underline{\omega}_0, \mathcal{A}$  non sono paralleli allora il moto di rotazione é molto piú complicato. Sottolineiamo che queste considerazioni valgono anche se  $O \equiv G$ .

## 1.6 Dinamica di un solido con un punto fisso $O$

Specializzo la (30) prendendo come terna solidale una principale di inerzia cosí  $Y^{ij}(O)$  mi viene diagonale:

$$\underline{\underline{Y}}(O) = \begin{bmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{bmatrix} \quad (41)$$

Chiaramente  $\{\underline{e}'_i\}$  ruotano rispetto alla terna fissa, e valgono le formule di Poisson  $\frac{d}{dt}\underline{e}'_i = \underline{\omega} \times \underline{e}'_i$ . Come consuetudine, indichiamo con  $p, q, r$  le componenti di  $\underline{\omega}$  in  $\{\underline{e}'_i\}$ ; sono quindi le componenti nel riferimento solidale della velocità angolare rispetto al riferimento fisso. Risulta di conseguenza

$$\underline{\omega} = p\underline{e}'_1 + q\underline{e}'_2 + r\underline{e}'_3 \quad (42)$$

$$\underline{K}_O = Ape'_1 + Bqe'_2 + Cre'_3 \quad (43)$$

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \quad (44)$$

$$\dot{\underline{K}}_O = A\dot{p}e'_1 + B\dot{q}e'_2 + C\dot{r}e'_3 + \underline{\omega} \times \underline{K}_O \quad (45)$$

Le tre componenti della IIECD in  $(O, \underline{e}'_j)$  sono le *equazioni di Eulero*:

$$\begin{aligned} A\dot{p} - (B - C)qr &= M_O^{(e)'1} \\ B\dot{q} - (C - A)rp &= M_O^{(e)'2} \\ C\dot{r} - (A - B)pq &= M_O^{(e)'3}; \end{aligned} \quad (46)$$

sono tre equazioni del primo ordine in sei incognite  $p, q, r, \varphi, \vartheta, \psi$  ( $\underline{M}'_O$  può dipendere in generale da tutte e sei). Per pareggiare bisogna aggiungere le tre relazioni, puramente cinematiche, che collegano  $p, q, r$  a  $\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= f(p, q, r, \varphi, \vartheta, \psi) := (p \sin \psi + q \cos \psi) / \sin \theta \\ \dot{\vartheta} &= g(p, q, r, \varphi, \vartheta, \psi) := p \cos \psi - q \sin \psi \\ \dot{\psi} &= h(p, q, r, \varphi, \vartheta, \psi) := r - \cot \theta (p \sin \psi + q \cos \psi) \end{aligned} \quad (47)$$

Solo quando  $\underline{M}_O$  non dipende da  $\varphi, \vartheta, \psi$  (in particolare, quando é nullo) allora le (46) sono disaccoppiate e possono essere risolte separatamente.

### 1.6.1 Moti di Poinsot

Quando  $\underline{M}_O^{(e)} = 0$  il moto di rotazione é libero (moto di “Poinsot”) e le equazioni possono essere integrate esattamente. Ciò accade per esempio se il punto fisso é liscio e non ci sono forze attive. Innanzitutto cerchiamo soluzioni delle equazioni di Eulero del tipo:  $p, q, r = \text{cost}$ ,

$$p(t) = p_0, \quad q(t) = q_0, \quad r(t) = r_0. \quad (48)$$

Le equazioni di Eulero diventano

$$(B - C)q_0r_0 = (C - A)r_0p_0 = (A - B)p_0q_0 = 0. \quad (49)$$

Amnesso che ne esistano, esse corriponderanno a rotazioni uniformi attorno ad asse invariabile (*rotazioni permanenti*). Infatti per le formule di Poisson si avrà

$$\dot{\underline{\omega}} = p_0 \underline{e}'_1 + q_0 \underline{e}'_2 + r_0 \underline{e}'_3 = \underline{\omega} \times (p_0 \underline{e}'_1 + q_0 \underline{e}'_2 + r_0 \underline{e}'_3) = \underline{\omega} \times \underline{\omega} = \underline{0}$$

che implica che  $\underline{\omega} = cost$ , e quindi l'asse di rotazione  $\mathcal{A}_t \parallel \underline{\omega}$  ha direzione costante, ma dovendo passare per  $O$  sarà invariante e la velocità angolare  $\dot{\varphi} = cost$ . Mostriamo ora effettivamente l'esistenza di questo tipo di soluzioni distinguendo i tre casi possibili.

1. Se  $A = B = C$  (ellissoide di inerzia sferico) le (49) sono automaticamente soddisfatte qualunque siano  $p_0, q_0, r_0$ . Anzi tutte le soluzioni delle equazioni di Eulero sono di questo tipo. È possibile quindi il moto di rotazione uniforme attorno ad un asse arbitrario (che ricordiamo in questo caso è sempre principale di inerzia).
2. Se  $A, B, C$  sono tutti differenti le (49) ammettono soluzioni costanti con due delle tre costanti  $p_0, q_0, r_0$  uguali a zero. Queste tre soluzioni corrispondono a moti di rotazione uniforme attorno ai tre (soli) assi principali. Se  $A < B < C$ , si può mostrare che le rotazioni attorno al primo e al terzo asse sono stabili, quelle attorno al secondo sono instabili.
3. Supponiamo ora che l'ellissoide d'inerzia sia rotondo, e perciò due dei momenti principali di inerzia  $A, B, C$  sono uguali, per es.  $A = B$ . Le (49) saranno soddisfatte se

$$p_0 = q_0 = 0, \quad r_0 \text{ arbitrario} \quad \text{oppure} \quad r_0 = 0, \quad p_0, q_0 \text{ arbitrari.}$$

La prima darà la rotazione uniforme attorno all'asse principale di inerzia di direzione  $\underline{e}'_3$ , la seconda darà la rotazione uniforme attorno a un asse giacente nel piano  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2$ , che anche sarà principale di inerzia, perché l'ellissoide d'inerzia è rotondo attorno a  $\underline{e}'_3$ . Analoghi risultati si troveranno se  $B = C$  oppure  $A = C$ .

Possiamo riassumere i tre casi dicendo che le rotazioni permanenti sono possibili solo attorno ad assi principali d'inerzia.

Restano da determinare le soluzioni differenti da queste nei casi 2,3. Si possono integrare esprimendo due tra le  $p, r, q$  in funzione delle costanti del moto  $T, \underline{K}_O^2$  e sostituendole nelle equazioni di Eulero. Rimarrà un'unica equazione del primo ordine in forma normale, che si potrà integrare. Il risultato andrà sostituito nelle (47), che andranno anch'esse integrate.

Se due momenti di inerzia sono uguali (giroscopio), per fissare le idee  $A = B$ , la terza eq. ha soluzione  $r(t) = r_0$ . Sostituendola nelle prime due, e derivando la prima rispetto a  $t$  otteniamo

$$A\ddot{p} \stackrel{(46)_1}{=} (A - C)\dot{q}r_0 \stackrel{(46)_2}{=} r_0^2(C - A)\left(1 - \frac{C}{A}\right)p \quad \Rightarrow \quad \ddot{p} + \mu^2 p = 0$$

avendo posto

$$\mu = \left(1 - \frac{C}{A}\right)r_0. \tag{50}$$

Le soluzioni sono del tipo  $p(t) = c \sin(\mu t + \varphi)$ , che implica  $q = \mu^{-1}\dot{p} = c \cos(\mu t + \varphi)$ . Ruotando gli assi di riferimento di  $\varphi$  nel piano  $xy$  essi restano principali di inerzia e la soluzione prende la forma

$$r(t) = r_0 \quad p(t) = q_0 \sin(\mu t) \quad q(t) = q_0 \cos(\mu t). \tag{51}$$

Si potrebbe sostituire queste relazioni in (47) e risolverle. Diamo invece una descrizione qualitativa della soluzione. Da

$$\text{cost} = \underline{K}_O = A(p\dot{e}'_1 + q\dot{e}'_2) + Cre'_3 = A\underline{\omega} + (C - A)r_0\dot{e}'_3$$

segue

$$\underline{\omega} = \frac{\underline{K}_O}{A} + \mu\dot{e}'_3 \equiv \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2. \quad (52)$$

Il primo termine é  $\text{cost}$  nel rif. fisso, e descrive quindi un moto di rotazione uniforme attorno alla direzione di  $\underline{K}_O$ , il secondo é costante nel rif. solidale e descrive quindi un moto di rotazione uniforme attorno alla direzione di  $\dot{e}'_3$ . Il moto é loro composizione: il giroscopio ruota con velocità  $\omega_2$  attorno al suo *asse giroscopico*  $\dot{e}'_3$ , il quale a sua volta descrive un cono attorno all'asse  $\underline{K}_O$  con velocità  $\omega_1$  (infatti dalle formule di Poisson  $\dot{e}'_3 = \underline{\omega}_1 \times \dot{e}'_3$ ).

La relazione precedente implica che  $\underline{K}_O, \underline{\omega}, \dot{e}'_3$  sono complanari e che perciò gli ultimi due, visti dallo spazio fisso ruotano attorno alla direzione (fissa) di  $\underline{K}_O$  con la stessa velocità angolare (di precessione)  $\omega_1$ . Con la costruzione di Poinsot ciò si può descrivere come il moto di puro rotolamento dell'ellisse di eq. energia cinetica  $T = \text{cost}$  (simile a quello d'inerzia  $E_O$ ), con origine  $O$  fissa, sul piano perpendicolare a  $\underline{K}_O$  con punto di contatto  $P$  tale che  $OP \parallel \underline{\omega}$ , essendo la traiettoria sul piano una circonferenza.

Se  $A, B, C$  sono tutti differenti le soluzioni saranno funzioni ellittiche (ottenute invertendo integrali ellittici di prima specie). Con la costruzione di Poinsot la traiettoria di  $P$  nel moto di puro rotolamento anzidetto è ora una curva trascendente, che in generale non si chiude.

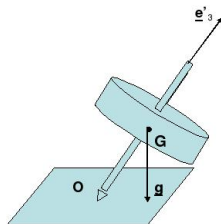
### 1.6.2 Effetto giroscopico

Se  $E_O$  è rotondo attorno a un asse  $r$  il solido si dice a struttura giroscopica attorno a  $r$ . Più in generale si chiama giroscopio un qualsiasi solido con ellissoide centrale d'inerzia  $E_G$  rotondo attorno ad un asse  $r$  (asse giroscopico). Per la legge di trasformazione del tensore d'inerzia sotto traslazione di una terna baricentrale si trova che  $E_O$  é anch'esso rotondo attorno a  $r$  (e quindi il solido ha struttura giroscopica)  $\forall O \in r$ . Sceglieremo la terna solidale in modo che  $\dot{z}'$  coincida con  $r$ .

Sia  $A = B$  (struttura giroscopica attorno a  $\dot{e}'_3$ ). Supponiamo che a  $t = 0$  il giroscopio ruoti attorno al suo asse con velocità angolare  $r_0$ , e applichiamo a partire da questo istante delle forze esterne con momento risultante  $\underline{M}_O^{(e)}$  tale che

$$M_O^3 = 0, \quad (53)$$

per esempio esercitando una forza direttamente sul suo asse. (Esempi: trottola con forza peso, volano ruotante su un asse ruotante a sua volta attorno ad un punto, v. libro).



Se fosse  $r_0 = 0$ , l'asse si riorienterebbe in modo da assecondare la forza, p. es. la trottola cadrebbe. Per grandi  $r_0$  si osserva invece

1. Tenacia dell'asse di rapida rotazione: Il giroscopio si oppone ad un riorientamento del suo asse in misura tanto maggiore quanto maggiore é  $r_0$ . (Se l'applicazione delle forze esterne é di breve durata, come per esempio a causa di vibrazioni del vincolo, il riorientamento é impercettibile)
2. Tendenza al parallelismo con  $\underline{M}_O^{(e)}$ : l'asse giroscopico si riorienta (molto lentamente) tendendo al parallelismo con il momento della sollecitazione esterna,  $\underline{K}_O \parallel \underline{e}'_3$ , senza necessariamente raggiungerlo. Se p. es. sto applicando una forza  $\underline{F}$  all'asse, il riorientamento avviene  $\perp$  a  $\underline{F}$ . La trottola pesante per esempio compie un moto di precessione.

Come si spiega? Lo faremo solo in modo euristico. Per la (53), di nuovo (46)<sub>3</sub> implica

$$r(t) = r_0 \quad (54)$$

Consideriamo prima per semplicitá il caso  $A \ll C$ . Allora risulta approssimativamente

$$\underline{K}_O \approx Cr_0 \underline{e}'_3 \quad \Rightarrow \quad \underline{M}_O^{(e)} = \frac{d}{dt} \underline{K}_O \approx Cr_0 \frac{d}{dt} \underline{e}'_3$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} \underline{e}'_3 = \frac{\underline{M}_O^{(e)}}{Cr_0}. \quad (55)$$

La derivata del versore dell'asse é quindi inversamente proporzionale a  $Cr_0$ , che spiega la *tenacia* del giroscopio, ed ha la direzione di  $\underline{M}_O^{(e)}$ , che spiega la *tendenza al parallelismo*.

Mostriamo euristicamente che nel caso generale la (55) é generalizzata da

$$\frac{d}{dt} \underline{e}'_3 = \underline{M}_O^{(e)} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \varepsilon := \frac{1}{Cr_0}, \quad (56)$$

che spiega lo stesso l'effetto purché  $\varepsilon$  sia molto piccolo. Il secondo termine a secondo membro indica l'errore dell'approssimazione. Inoltre risulta

$$\begin{aligned} p(t, \varepsilon) &= -\varepsilon M_O'^2 + O_p(\varepsilon^2) \\ q(t, \varepsilon) &= \varepsilon M_O'^1 + O_q(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (57)$$

con  $O_p, O_q$  funzioni infinitesime di ordine  $\geq 2$  in  $\varepsilon$  e limitate in  $t$ .

Adottiamo a questo scopo le idee della teoria delle perturbazioni. Ci aspettiamo che  $p, q$  siano regolari (continue con un certo numero di derivate) in  $\varepsilon$  attorno  $\varepsilon = 0$ , perché questo é il limite in cui la sollecitazione esterna si può trascurare. Attorno a  $\varepsilon = 0$  ci aspettiamo quindi che  $p(t, \varepsilon), q(t, \varepsilon)$  siano approssimate bene dai primi termini del loro sviluppo con la formula di Taylor:

$$\begin{aligned} p(t, \varepsilon) &= p_0(t) + p_1(t)\varepsilon + \dots + p_n(t)\varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1}) \\ q(t, \varepsilon) &= q_0(t) + q_1(t)\varepsilon + \dots + q_n(t)\varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1}) \end{aligned} \quad (58)$$

Ci basterá prendere  $n = 1$ . Ponendo questi sviluppi nella  $(46)_1$ , dopo averla motiplicata per  $\varepsilon$  troviamo l'equazione

$$\begin{aligned} 0 &= A\varepsilon[\dot{p}_0(t) + \dot{p}_1(t)\varepsilon + \dots] + [q_0(t) + q_1(t)\varepsilon + \dots] - M'_O{}^1\varepsilon \\ &= q_0(t) + \varepsilon[A\dot{p}_0(t) + q_1(t) - M'_O{}^1] + \varepsilon^2[A\dot{p}_1(t) + q_2(t)]\dots \end{aligned}$$

Dovendo essere verificata  $\forall\varepsilon$ , devono essere nulli i coefficienti delle varie potenze. Stesso discorso per la  $(46)_2$ . Troviamo quindi

$$\begin{aligned} p_0(t) &= q_0(t) \equiv 0, \\ q_1(t) &= M'_O{}^1 \quad p_1(t) = -M'_O{}^2 \\ q_2(t) &= -A\dot{p}_1(t) = AM'_O{}^2 \quad p_2(t) = -Aq_1(t) = -AM'_O{}^1 \\ &\dots \end{aligned}$$

che dá il risultato annunciato. Si noti che l'equazione differenziale é risolta in modo puramente algebrico, ad ogni ordine in  $\varepsilon$ . Lo sviluppo trovato dá la soluzione fino ad un'ordine di approssimazione prefissato. In teoria delle perturbazioni si studia se la serie perturbativa (cioé la serie di potenze in  $\varepsilon$ ) converge e qual' é il suo raggio di convergenza. Ovviamente per  $\varepsilon$  grandi tutto va a quel paese; questo puo' accadere anche se  $r_0$  e' molto grande ma  $(C - A) \approx 0$ .

Applichiamo ora questi risultati al

### Giroscopio pesante (trottola)

Cosnideriamo un giroscopio con un punto punto  $O$  del suo asse vincolato senza attrito a rimanere fisso .

La forza peso, che si puó considerare applicata in  $G$  non lo fa cadere anche se l'asse é inclinato, ma fa ruotare quest'ultimo attorno alla verticale.  $\underline{F} = m\underline{g}$ ,

$$\underline{M}_O = (G - O) \times \underline{F} = z'_G m \underline{e}'_3 \times \underline{g} = z'_G m (\underline{e}'_2 g'_1 - \underline{e}'_1 g'_2)$$

cioé

$$M'_O{}^1 = -z'_G m g'_2 \quad M'_O{}^2 = z'_G m g'_1, \quad (59)$$

che assieme alle (57) implica

$$\begin{aligned} \underline{\omega} &= p\underline{e}'_1 + q\underline{e}'_2 + r\underline{e}'_3 \\ &= -z'_G m \varepsilon (\underline{e}'_1 g'_1 + \underline{e}'_2 g'_2) + r_0 \underline{e}'_3 + O(\varepsilon^2) \\ &= -z'_G m \varepsilon \underline{g} + [r_0 + z'_G m \varepsilon g'_3] \underline{e}'_3 + O(\varepsilon^2) \\ &= \underline{\omega}_2 + \underline{\omega}_1 + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (60)$$

ove abbiamo posto

$$\underline{\omega}_1 := [r_0 + z'_G m \varepsilon g'_3] \underline{e}'_3 \approx r_0 \underline{e}'_3 \quad \underline{\omega}_2 := -z'_G m \varepsilon \underline{g}. \quad (61)$$

La  $\underline{\omega}_2$  é costante nello spazio fisso,  $\underline{\omega}_1$  nello spazio solidale. Quindi il moto della trottola é di precessione regolare, cioé di composizione dei due, con asse di precessione verticale ed asse giroscopico quello di figura. Inoltre si noti che  $\omega_2$  é inversamente proporzionale a  $\omega_1$ . ecco perché, quando  $\omega_1$  diminuisce (a causa degli attriti),  $\omega_2$  aumenta, finché cade.

Non è difficile dimostrare in questo caso che le (57), utilizzando gli integrali del moto energia e  $K_O^z$ .

## Applicazioni

Bussola giroscopica. Stabilizzatore di volo su missili, aerei da combattimento, per indicare variazioni di inclinazione (anche con la nebbia). Per proiettili (ecco perché li mettono in rotazione), etc

### 1.7 Moti di un solido libero

Consideriamo le ECD per il solido, nella forma del teorema del moto del baricentro e del teorema del momento angolare:

$$\underline{R}^{(e)} = m\underline{a}_G \quad (62)$$

$$\underline{M}_G^{(e)} = \underline{K}_G = A\underline{p}e'_1 + B\underline{q}e'_2 + C\underline{r}e'_3 + \underline{\omega} \times \underline{K}_G. \quad (63)$$

La dipendenza delle forze esterne agenti sul solido dalle posizioni e dalle velocità dei punti di applicazione si può esprimere in termini di 6 coordinate corrispondenti ai 6 gradi di libertà del solido, e le loro derivate, per esempio  $G, \dot{G}, \varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$ ; quindi  $\underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(e)}(G, \dot{G}, \varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}; t)$ ,  $\underline{M}_G^{(e)} = \underline{M}_G^{(e)}(G, \dot{G}, \varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}; t)$ . Una volta espresse, tramite le (47), le componenti di  $\underline{\omega}$  in termini di queste variabili le ECD diventano un sistema di 6 equazioni del secondo ordine in 6 incognite, che ammettono una ed una sola soluzione una volta assegnate le condizioni iniziali.

Se  $\underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(e)}(G, \dot{G}; t)$ , allora il problema del moto di  $G$  si disaccoppia dal moto di rotazione attorno a  $G$ , più precisamente è formalmente identico al problema del moto di un punto materiale in presenza di una forza esterna, e può essere determinato indipendentemente dal moto di rotazione. In particolare il moto di  $G$  sarà rettilineo uniforme se  $\underline{R}^{(e)} = 0$ , come accade per un solido (in particolare un satellite, o una navicella spaziale) così lontano da altri corpi massicci (terra, astri, etc) da poter trascurare la loro forza gravitazionale. Se più in generale il campo gravitazionale esercitato da questi corpi massicci non è trascurabile, ma si può comunque considerare costante entro la regione occupata dal solido ad un certo istante (a questo scopo basta che le dimensioni del solido siano  $\ll$  delle distanze di  $G$  dai baricentri di questi corpi), allora  $\underline{R}^{(e)}(G, \dot{G}; t)$  si può calcolare concentrando la massa del solido in  $G$  ed applicando la legge di gravitazione universale; se in particolare il moto del solido viene considerato solo entro una regione in prossimità della terra di dimensioni  $\ll$  del raggio terrestre, allora  $\underline{R}^{(e)} = m\underline{g} = \text{cost}$  ed il moto di  $G$  entro questa regione sarà uniformemente accelerato.

Determinato  $G(t)$ , per sostituzione  $\underline{M}_G^{(e)}$  diventa una funzione  $\underline{M}_G^{(e)}(\varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}; t)$  soltanto. Siccome  $\underline{K}_G = \underline{K}' = \underline{K}'_G$ , la (63) diventa  $\underline{M}_G^{(a)} = \underline{K}'_G$ , cioè l'equazione del moto del solido in un riferimento con origine in  $G$  ed assi ad orientamento fisso; ma in quest'ultimo  $G$  appare come un punto fisso, quindi l'equazione diventa quella di un solido con un punto fisso, e possiamo applicare i risultati trovati nella sezione 1.6.

Se, come prima, le forze esterne sono solo quelle gravitazionali esercitate da corpi grandi e massicci, e quindi si possono considerare costanti entro la regione occupata dal solido ad un certo istante, allora risulta  $\underline{M}_G^{(a)} = 0$ , e le soluzioni della IIECD saranno i moti alla Poincot. Tra queste ci sono in particolare le già trovate *rotazioni permanenti* attorno agli assi principali di inerzia passanti per  $G$ , cioè *attorno agli assi centrali d'inerzia*.

Quindi per esempio per un sasso lanciato in aria il moto del suo baricentro  $G$  è uniformemente accelerato (traiettoria parabolica), mentre per un satellite in orbita attorno alla terra

il moto di  $G$  é di tipo Kepleriano (orbita ellittica, etc). Il moto di rotazione del solido attorno a  $G$  è piú complicato, a meno che il solido non venga lanciato in modo che all'istante iniziale ruoti attorno ad un asse centrale d'inerzia: allora continuerá a ruotare uniformemente attorno a questo asse, che non cambierà di orientamento durante il moto. Nel caso che il solido abbia due momenti centrali di inerzia uguali (solido giroscopico), i restanti moti alla Poinsot saranno invece di tipo giroscopico.

## 2 Meccanica generale dei sistemi vincolati

### 2.1 Sistemi di punti vincolati

Supponiamo inizialmente che il sistema  $\mathcal{S}$  sia un sistema discreto di  $N$  punti materiali  $\mathcal{P}_i$  di masse  $m_i$  soggetti a certi vincoli. Alla fine considereremo il caso che  $\mathcal{S}$  sia costituito anche da corpi rigidi.

$\underline{R}_i^{(v)}$   $\equiv$  risultante delle forze *vincolari* agenti su  $\mathcal{P}_i$ ,  $\underline{R}_i^{(a)}$   $\equiv$  risultante delle forze *attive* agenti su  $\mathcal{P}_i$  (potranno eventualmente comprendere quelle fittizie), e per comodità definiamo la forza *inerziale* agente su  $\mathcal{P}_i$  tramite  $\underline{R}_i^{(m)} := -m_i \underline{a}_i$ . Possiamo riscrivere l'equazione del moto (II legge della dinamica) così

$$\underline{R}_i^{(a)} + \underline{R}_i^{(v)} + \underline{R}_i^{(m)} = \underline{0}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (64)$$

Ricordiamo che uno *spostamento virtuale*  $\delta P$  di un punto materiale  $\mathcal{P}$  ad un certo istante  $t$  è definito come uno spostamento infinitesimo compatibile con i vincoli, se questi sono fissi, e compatibile con i vincoli “congelati” nella configurazione che essi hanno a  $t$ , se questi sono mobili.

(64)  $\cdot \delta P_i$  implica

$$\delta L_i^{(a)} + \delta L_i^{(v)} + \delta L_i^{(m)} = 0, \quad \forall \delta P_i \quad (65)$$

ove  $\delta L_i^{(a)} := \underline{R}_i^{(a)} \cdot \delta P_i$  è il lavoro virtuale compiuto da  $\underline{R}_i^{(a)}$ , etc. Sommando su  $i$  troviamo

$$\delta L^{(a)} + \delta L^{(v)} + \delta L^{(m)} = 0 \quad \forall \delta \mathcal{S}; \quad (66)$$

$\delta L^{(a)}$ ,  $\delta L^{(v)}$ ,  $\delta L^{(m)}$  indicano rispettivamente il lavoro virtuale compiuto dal sistema delle forze attive, vincolari e inerziali in corrispondenza di  $\delta \mathcal{S}$ .

Supponiamo d'ora in poi che i vincoli soddisfino il

#### Principio delle reazioni vincolari:

Le reazioni esplicabili dai vincoli sono tutte e sole quelle per cui

$$\delta L^{(v)} \geq 0 \quad \forall \delta \mathcal{S} \quad (67)$$

(ricordiamo che se  $\delta\mathcal{S}$  è reversibile ciò implica  $\delta L^{(v)} = 0$ ). In particolare ciò accadrà se i vincoli sono lisci.

**Proposizione 2** *In un sistema soggetto a vincoli soddisfacenti il Principio delle reazioni vincolari (in particolare lisci) condizione necessaria e sufficiente affinché i moti delle particelle siano “naturali”, cioè le loro leggi orarie soddisfino le equazioni del moto (64), è che sia soddisfatta la **Relazione simbolica della dinamica, o di d’Alembert e Lagrange**:*

$$\delta L^{(a)} + \delta L^{(m)} \leq 0 \quad \forall \delta\mathcal{S}, \quad (68)$$

Dim.: La necessità segue immediatamente da (66) e (67). Per la sufficienza, consideriamo un insieme di leggi orarie  $\{P_1(t), \dots, P_N(t)\}$  soddisfacenti la (68), e definiamo per ogni  $i$   $\underline{\phi}_i(t) := -\underline{R}_i^{(a)} - \underline{R}_i^{(m)}$ . Il sistema di forze  $\Sigma = \{(P_1, \underline{\phi}_1), \dots, (P_N, \underline{\phi}_N)\}$  soddisferà (67), per cui sarà un sistema di reazioni esplicabili dai vincoli, e quindi sarà effettivamente il sistema di reazioni vincolari esplicate all’istante considerato:  $\underline{R}_i^{(v)} = \underline{\phi}_i$ . Dalla definizione di  $\underline{\phi}_i$  segue ora che le leggi orarie soddisfano le (64).  $\square$

La (68) implica

$$\delta L^{(a)} + \delta L^{(m)} = 0 \quad \text{se } \delta\mathcal{S} \text{ è reversibile}$$

che è detta **equazione simbolica della dinamica**. Se i vincoli sono anche bilaterali allora tutti i  $\delta\mathcal{S}$  sono reversibili e quindi vale la

**Proposizione 3** *In un sistema soggetto a vincoli bilaterali soddisfacenti il Principio delle reazioni vincolari (in particolare lisci) condizione necessaria e sufficiente affinché i moti delle particelle siano “naturali” è che sia soddisfatta l’equazione simbolica della dinamica*

$$\delta L^{(a)} + \delta L^{(m)} = 0 \quad \forall \delta\mathcal{S} \quad (69)$$

### 2.1.1 Caso statico: dimostrazione del principio dei lavori virtuali

Consideriamo ora il caso particolare che i vincoli siano fissi. Assegnate le leggi di forza delle forze attive ricordiamo che se il sistema, posto all’istante  $t_0$  con atto di moto nullo (cioè in quiete) in una certa configurazione  $\mathcal{S}_0$ , vi rimane anche negli istanti successivi, si dice che  $\mathcal{S}_0$  è di *equilibrio* per il sistema<sup>3</sup>. In queste condizioni  $\underline{a}_i = 0 = \underline{R}_i^{(m)}$  e quindi  $\delta L_i^{(m)} = 0 = \delta L^{(m)}$ . Abbiamo dimostrato la necessità nel

### Principio dei lavori virtuali

*Una certa configurazione  $\mathcal{S}_0$  di un sistema soggetto a vincoli olonomi, fissi e soddisfacenti il principio delle reazioni vincolari (in particolare lisci) è di equilibrio se e solo se*

$$\delta L^{(a)} \leq 0 \quad \forall \delta\mathcal{S} \quad (70)$$

<sup>3</sup>Piú correttamente, che  $\mathcal{S}_0$  sia di equilibrio significa in generale solo che il sistema *puó* rimanervi fermo se postovi con atto di moto nullo. Solo se le leggi di forza delle forze attive in gioco garantiscono l’unicità delle soluzioni delle equazioni del moto, come accade normalmente, allora effettivamente l’unica possibilità è che il sistema rimanga fermo. Per esempio, casi del tipo  $F \propto x^a$ , con  $0 < a < 1$ , cioè non lipschitziani, sono quindi esclusi. Per essi il problema di Cauchy con condizioni iniziali nulle ammette infatti infinite soluzioni,

$$x_\tau(t) \propto \begin{cases} 0 & t \leq \tau \\ (t - \tau)^{\frac{2}{1-a}} & t > \tau \end{cases}$$

*spostamento virtuale attorno a  $\mathcal{S}_0$ ;  $\delta L^{(a)}$  denota il corrispondente lavoro virtuale compiuto dalle forze attive per atto di moto nullo. Ne segue che se  $\delta L^{(a)} < 0$  allora  $\delta \mathcal{S}$  è irreversibile. Se  $\delta \mathcal{S}$  è reversibile allora  $\delta L^{(a)} = 0$ ; se i vincoli sono bilaterali allora ciò vale  $\forall \delta \mathcal{S}$ .*

Dim. della sufficienza: Supponiamo che al generico istante  $t_0$  il sistema sia nella configurazione  $\mathcal{S}_0$  con atto di moto nullo. Mostriamo che la legge oraria identicamente nulla  $\mathcal{S}(t) \equiv \mathcal{S}_0$  soddisfa non solo le condizioni iniziali, ma anche le equazioni del moto (64), e perciò descrive l'effettiva evoluzione della configurazione del sistema al passar del tempo, implicando la sua quiete. In effetti  $\mathcal{S}(t) \equiv \mathcal{S}_0$  implica che tutte le accelerazioni sono nulle, e quindi soddisfa  $\delta L^{(m)} = 0$  per ogni  $\delta \mathcal{S}$ ; siccome per ipotesi vale la (70), sommando membro a membro si trova che essa soddisfa anche la (68), e quindi le equazioni del moto, vista la proposizione 2.  $\square$

Il PLV vale in generale, come mostreremo piú avanti. Esso dice in modo generale un fatto molto intuitivo: se in una configurazione  $\mathcal{S}_0$  i vincoli consentono al sistema di muoversi solo in una direzione che contrasta quella in cui lo spingerebbero a muoversi le forze attive, allora  $\mathcal{S}_0$  è di equilibrio. Lo illustriamo nel semplicissimo esempio di un punto materiale  $\mathcal{P}$  soggetto ad una forza costante verticale  $\underline{F}$  posto al di sopra della superficie liscia in figura e vincolato a non oltrepassarla:

É chiaro che posizioni di equilibrio esisteranno solo se  $\underline{F}$  é diretto verso il basso (come nel caso che  $\underline{F} = m\underline{g}$  sia la forza peso), e che le posizioni di equilibrio sono (solo)  $P_1, P_2, P_3$  (solo  $P_1, P_2$  di equilibrio stabile). Questo coincide con quanto previsto dal PLV, perché (solo) a partire da queste posizioni la superficie vincolare consente a  $\mathcal{P}$  di muoversi esclusivamente in una direzione che forma un angolo retto o ottuso con direzione e verso della forza  $\underline{F}$ .

La particolare importanza del PLV deriva dal fatto che: 1) dá delle condizioni di equilibrio *pure*, cioè in esse non compaiono le incognite reazioni vincolari; 2) le potrà formulare di volta in volta nelle coordinate (lagrangiane) piú opportune.

Nel caso di vincoli scabri la (70) è comunque importante, perché fornisce una condizione *sufficiente*, anche se non necessaria, affinché  $\mathcal{S}_0$  sia di equilibrio. Infatti, una reazione esplicabile da vincoli lisci (per es.  $\perp$  a vincolo=superficie) è esplicabile anche da vincoli scabri. Adottare anche per vincoli scabri una tale configurazione quale configurazione di equilibrio gioca a favore della sua stabilità; nella scienza delle costruzioni ciò si traduce in una maggior sicurezza. In presenza di vincoli scabri esistono poi in generale anche altre configurazioni di equilibrio di interesse; è il caso delle posizioni di equilibrio di una scala carica, appoggiata ad una parete e un pavimento scabro (v. figura), che non esisterebbero se essi fossero lisci.

### 2.1.2 Caso dinamico: equazioni di Lagrange per sistemi a vincoli lisci, olonomi e bilaterali

Siano  $q^h$ ,  $h = 1, 2, \dots, n$ , le coordinate lagrangiane del sistema; sar   $P_i = P_i(q, t)$ ,  $P_i(t) = P_i(q(t), t)$  e

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q^h} \delta q^h, \quad (71)$$

$$\underline{v}_i = \dot{P}_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial P_i}{\partial t}, \quad (72)$$

$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}^h} = \frac{\partial P_i}{\partial q^h}. \quad (73)$$

Sostituendo la (71) nella definizione di lavoro virtuale relativa alle forze attive e di inerzia si trova

$$\delta L^{(a)} = \sum_{h=1}^n Q_h \delta q^h, \quad \delta L^{(m)} = \sum_{h=1}^n \Theta_h \delta q^h \quad (74)$$

ove le *componenti lagrangiane*  $Q_h(q, t)$ ,  $\Theta_h(q, t)$  risp. delle forze attive e delle forze d'inerzia sono definite da

$$Q_h(q, \dot{q}, t) := \sum_i R_i^{(a)} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q^h} \quad (75)$$

$$\Theta_h := \sum_i R_i^{(m)} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q^h} = - \sum_i m_i \underline{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q^h}. \quad (76)$$

Data la completa arbitrariet  delle  $\delta q^h$ , le (69) prendono la forma

$$Q_h + \Theta_h = 0 \quad h = 1, 2, \dots, n. \quad (77)$$

Sostituendo la (72) nella definizione dell'energia cinetica  $T := \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$  si trova

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} = \sum_i m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}^h} = \sum_i m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q^h}, \quad (78)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^h} = \sum_i m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial q^h}. \quad (79)$$

Sostituendo questo risultato nella (76) si trova

$$\Theta_h = - \sum_i m_i \left( \frac{d}{dt} \underline{v}_i \right) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q^h} = - \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q^h} \right) + \sum_i m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial q^h} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} + \frac{\partial T}{\partial q^h} \quad (80)$$

Infine, sostituendo questo risultato nella (77) si trovano le *equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial T}{\partial q^h} = Q_h \quad (81)$$

Queste sono  $n$  equazioni del secondo ordine nelle  $n$  incognite  $q^h(t)$ . Il termine del secondo ordine è  $\sum_{k=1}^n a_{hk} \ddot{q}^k$ , con

$$a_{hk} := \sum_i m_i \frac{\partial P_i}{\partial q^h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q^k}, \quad (82)$$

e la matrice  $a_{hk}(q, t)$  è invertibile, per la definizione stessa di vincolo. Perciò moltiplicando il sistema (81) per la matrice inversa  $a^{-1}$  è possibile ridurlo in *forma normale*

$$\ddot{q}^k = g^k(q, \dot{q}, t). \quad k = 1, \dots, n$$

Ciò garantisce che, in ipotesi di regolarità ed assegnate le condizioni iniziali, il sistema delle equazioni di Lagrange ammetta una e una sola soluzione.

Nel caso di forze attive derivanti da un potenziale  $U(\{P_i\})$ , cioè  $R_i^{(a)} = \frac{\partial U}{\partial P_i}$ , posto  $U(q, t) := U(\{P_i(q, t)\})$  risulta  $Q_h = \sum_i \frac{\partial U}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q^h} = \frac{\partial U}{\partial q^h}$ , mentre  $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^h} = 0$ , per cui le (81) si possono riscrivere nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial L}{\partial q^h} = 0, \quad (83)$$

ove  $L := T + U$  è la *lagrangiana* del sistema.

## 2.2 Sistemi di punti e solidi vincolati

Quanto detto nelle due sezioni precedenti, in particolare (66), (67), la RSD (68), il PLV (70), le eq. di Lagrange (81), (83), valgono anche se il sistema  $\mathcal{S}$  è costituito non solo da punti materiali isolati, ma anche da un certo numero di solidi vincolati tra di loro o con l'esterno con vincoli olonomi lisci, come andiamo ora sommariamente a mostrare.<sup>4</sup>

Infatti, un siffatto sistema si può considerare come un sistema di soli punti materiali vincolati, precisamente i punti materiali isolati di  $\mathcal{S}$  e tutte le particelle componenti ciascuno dei solidi di  $\mathcal{S}$ , purché tra i suoi vincoli si annoverino anche dei vincoli che tengono legate a distanza fissa due qualsiasi particelle  $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$  di ciascuno dei solidi  $\mathcal{C}_i$  (per es. dei pendoli di massa trascurabile che colleghino  $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ ). Le forze interne  $\underline{f}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'}$  tra  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  figureranno allora come forze vincolari.

Bisogna però mostrare che il principio delle reazioni vincolari, alla base di tutte le nostre

<sup>4</sup>Nel caso di vincoli anolonomi, anche scabri, ma con punti di contatto con velocità relative nulle, per es. in condizioni di moto di puro rotolamento, solo le eq. di Lagrange andranno leggermente modificate.

deduzioni, vale anche per le reazioni vincolari *interne* a  $\mathcal{S}$ , ma tra diversi corpi di  $\mathcal{S}$ . Dati due corpi  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  qualsiasi di  $\mathcal{S}$  (di cui almeno uno, diciamo  $\mathcal{C}_1$ , sia un solido, mentre  $\mathcal{C}_2$  potrebbe anche essere anche un punto materiale isolato) a contatto in un punto  $P$ , siano  $\underline{R}_1, \underline{R}_2$  le reazioni vincolari esercitate su  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  rispettivamente da  $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1$  in  $P$ . Per il III principio  $\underline{R}_1 + \underline{R}_2 = 0$ . Se li prendiamo singolarmente, (al più) uno dei due contributi  $\underline{R}_1 \cdot \delta P_1, \underline{R}_2 \cdot \delta P_2$  a  $\delta L^{(v)}$  potrebbe essere negativo, perchè potrebbe essere ottuso l'angolo tra i vettori corrispondente. Mostriamo tuttavia che la loro somma non è mai negativa, in accordo con il PRV (il punto è che, per costituire uno spostamento virtuale,  $\delta P_1, \delta P_2$  non sono indipendenti, ma sono adattati l'uno all'altro).

Consideriamo il moto nel sistema di riferimento fisso  $\mathcal{T} = (Oxyz)$  e in quello  $\mathcal{T}' = (O'x'y'z')$  solidale a  $\mathcal{C}_1$ . Per la formula dei moti relativi

$$\underline{u}_2(P, t) = \underline{u}'_2(P, t) + \underline{u}_1(P, t) \quad \Rightarrow \quad dP_2 = dP'_2 + dP_1 \quad \Rightarrow \quad \delta P_2 = \delta P'_2 + \delta P_1$$

( $\underline{u}_1(P, t)$  gioca il ruolo di velocità di trascinamento). Il contributo di  $\underline{R}_1, \underline{R}_2$  al lavoro virtuale  $\delta L^{(v)}$  totale sarà

$$\delta L^{(v)} = \underline{R}_1 \cdot \delta P_1 + \underline{R}_2 \cdot \delta P_2 = (\underline{R}_1 + \underline{R}_2) \cdot \delta P_1 + \underline{R}_2 \cdot \delta P'_2 \stackrel{III}{=} \underline{R}_2 \cdot \delta P'_2 \geq 0$$

La disuguaglianza vale perché nel moto relativo a  $\mathcal{C}_1$  quest'ultimo appare come vincolo fisso, e quindi il corrispondente lavoro virtuale soddisferà anche in questo caso alla caratterizzazione (67), come volevamo dimostrare.

Osserviamo infine che, siccome il lavoro infinitesimo compiuto dalle forze interne ad un solido è nullo per ogni spostamento infinitesimo, in particolare per uno virtuale (cioè compatibile anche con i vincoli esterni al solido, considerati come se fossero fissi nella loro configurazione attuale), anche il lavoro virtuale  $\delta L^{(i,v)}$  compiuto da queste forze vincolari interne sarà nullo, e quindi non contribuirà a  $\delta L^{(v)}$ . Nelle formule (66), (67)  $\delta L^{(v)}$  si può quindi valutare prendendo in conto soltanto le forze vincolari con l'esterno e tra diversi corpi (solidi o punti materiali isolati) del sistema.