

## Capitolo IV

### Forme bilineari e forme quadratiche

#### 1. Forme bilineari

Prima di addentrarci nell'argomento richiamiamo alcune nozioni che ci serviranno in seguito.

Una matrice  $A$  quadrata d'ordine  $n$  che sia invertibile è detta **ortogonale** se la sua inversa coincide con la sua trasposta .

$$A \text{ ortogonale} \iff A_t = A^{-1}$$

Indichiamo con  $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n$  le righe della matrice  $A$  e con  $\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 \dots \mathbf{a}^n$  le sue colonne.

Se  $A$  è ortogonale da  $A A_t = I$  segue che

$$(*) \quad \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e ciò mostra che le righe di  $A$  sono una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ . Viceversa se le righe di  $A$  sono una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  allora si ha  $A A_t = I$  e quindi  $A_t = A^{-1}$  il che mostra che  $A$  è una matrice ortogonale .

Analogamente se  $A$  è ortogonale da  $A_t A = I$  segue che

$$(*) \quad \mathbf{a}^i \times \mathbf{a}^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e ciò mostra che le colonne di  $A$  sono una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ . Viceversa se le colonne di  $A$  sono una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  allora si ha  $A_t A = I$  e quindi  $A_t = A^{-1}$  il che mostra che  $A$  è una matrice ortogonale .

Ricordiamo ora due utili definizioni.

Due matrici quadrate  $A$  ed  $A'$  d'ordine  $n$  sul campo  $K$  si dicono **simili** se esiste una matrice  $P$  invertibile tale che risulti :

$$A' = P^{-1} A P$$

si dicono **congruenti** se esiste una matrice  $P$  invertibile tale che risulti

$$A' = P^{-1} A P$$

Matrici simili, come già visto, hanno gli stessi autovalori e lo stesso rango mentre matrici congruenti hanno lo stesso rango ma in generale non gli stessi autovalori.

(Si prova infatti che :

**Proposizione.** Siano  $A \in K_{n,n}$  e  $B \in GL(n, K)$  due matrici quadrate sul campo  $K$ , con  $B$  invertibile. Si ha allora :  $r(A) = r(A B) = r(B A)$ .

**Dimostrazione.** Basta ricordare che il rango di  $A$ ,  $r(A)$ , coincide con la dimensione dello spazio immagine dell'endomorfismo  $F_A$  di  $K^n$ , tenere conto del fatto che, essendo  $B$  invertibile,  $F_B$  è un isomorfismo ed inoltre che  $F_{AB} = F_A \circ F_B$  e  $F_{BA} = F_B \circ F_A$ .

Sia  $V_n = V_n(\mathbb{R})$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo reale. Una applicazione

$$\begin{aligned} g : V_n \times V_n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto g(v, w) \end{aligned}$$

è detta una **forma bilineare** se valgono le seguenti proprietà :

1.  $g(\alpha v, w) = \alpha g(v, w)$
2.  $g(v + v', w) = g(v, w) + g(v', w)$
3.  $g(v, \alpha w) = \alpha g(v, w)$
4.  $g(v, w + w') = g(v, w) + g(v, w')$

La forma bilineare  $g$  è detta **simmetrica** se risulta

$$g(v, w) = g(w, v) \quad \text{per ogni coppia di vettori } v \text{ e } w.$$

Ovviamente se  $g$  è simmetrica le proprietà 1., 2. sono equivalenti alle proprietà 3., 4.

(Una forma bilineare simmetrica è anche detta : *prodotto scalare*).

Esempi di forme bilineari di  $\mathbb{R}^n$  si ottengono al seguente modo. Si consideri una matrice  $A = (a_{ij})$  reale quadrata d'ordine  $n$  e sia

$$g_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

l' applicazione così definita :

$$g_A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}_t A \underline{y} (= X_t A Y)$$

avendo al solito indicato con  $\underline{x}$  ed  $\underline{y}$  i vettori numerici

$$(X =) \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad (Y =) \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Esplicitamente è :

$$g_A(\underline{x}, \underline{y}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \dots + a_{2n}x_2y_n + \dots + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \dots + a_{nn}x_ny_n$$

Se la matrice A è simmetrica si ha :

$$g_A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}_t A \underline{y} = \underline{y}_t A_t \underline{x} = \underline{y}_t A \underline{x} = g_A(\underline{y}, \underline{x})$$

(infatti  $X_t A Y = (X_t A Y)_t = Y_t A_t X = Y_t A X$ )

e quindi la forma bilineare che essa definisce è simmetrica.

*(Osserviamo che ogni forma bilineare di uno spazio vettoriale di dimensione finita, in termini di componenti, si esprime sempre come la forma dell'esempio precedente. Infatti:)*

Sia  $V_n = V_n(\mathbb{R})$  uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo reale. e

$$g : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \rightarrow g(v, w)$$

una forma bilineare di  $V_n$ .

Come si può calcolare facilmente il numero  $g(v, w)$  ? Vediamo.

Fissiamo nello spazio vettoriale  $V_n$  una sua base (ordinata)  $B = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$ .  
Denotiamo per ogni  $i, j = 1, 2, \dots, n$  con

$$a_{ij} = g(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$$

e sia  $A = (a_{ij})$  la matrice così determinata. La matrice  $A$  così costruita si dice che rappresenta  $g$  nella base  $B$  (ed è detta : matrice di Gram associata a  $g$  nel riferimento  $B$  (cfr. "Appunti di Geometria", Cap. VIII, Par. 3)). Se  $v$  e  $w$  sono due vettori si ha :

$$v = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \quad , \quad w = y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_n \mathbf{e}_n$$

e quindi si ha, tenendo conto che  $g$  è bilineare ,

$$\begin{aligned} (**) \quad g(v, w) &= g(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_n \mathbf{e}_n) = \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \dots + a_{2n}x_2y_n + \dots + \\ &+ a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \dots + a_{nn}x_ny_n . \end{aligned}$$

Se indichiamo con

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

le coordinate dei vettori  $v$  e  $w$  nella base  $B$  allora l'espressione  $(**)$  sopra espressa può scriversi in forma matriciale al seguente modo :

$$g(v, w) = \underline{\mathbf{x}}_t A \underline{\mathbf{y}}$$

Quindi risulta

$$g(v, w) = \underline{\mathbf{x}}_t A \underline{\mathbf{y}} = g_G(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}})$$

Come cambia la matrice  $A$  cambiando la base  $B$  ? Vediamo.

Sia  $B' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$  un'altra base (*ordinata*) dello spazio vettoriale e sia  $P$  la matrice di passaggio dalla base  $B'$  alla base  $B$ . La matrice  $P$  ha per colonne le coordinate dei vettori  $\mathbf{e}'_i$  di  $B'$  rispetto alla base  $B$  ed è quindi invertibile. Si ha quindi

$$(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n) \begin{pmatrix} & & & \\ & P & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = (\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n)$$

Denotiamo con  $A'$  la matrice che rappresenta  $g$  nella base  $B'$  e per ogni coppia di vettori  $v$  e  $w$  con

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \underline{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \cdot \\ y'_n \end{pmatrix}$$

le coordinate dei vettori  $v$  e  $w$  nella base  $B'$ . Si ha

$$P \underline{x}' = \underline{x} \quad \text{e} \quad P \underline{y}' = \underline{y}$$

(cfr. "Appunti di Geometria", Cap. II, Par. 8)

Si ha allora

$$g(v, w) = \underline{x}'_t A \underline{y}' = \underline{x}'_t P_t A P \underline{y}' = \underline{x}'_t A' \underline{y}'$$

da cui segue

$$A' = P_t A P$$

Abbiamo così provato che cambiando la base  $B$  con la base  $B'$ , la matrice  $A$  legata alla base  $B$  cambia, e la nuova matrice  $A'$  legata alla nuova base  $B'$  è **congruente** alla matrice  $A$ . (Poiché, come si è già osservato, matrici congruenti hanno lo stesso rango, si ha che, al variare del riferimento  $B$ , il rango della matrice di Gram di  $g$  non varia. Tale rango è detto allora : rango della forma  $g$ ).

Una rappresentazione piuttosto semplice della forma bilineare  $g$  si ha quando essa è simmetrica. Vediamo.

Supponiamo quindi ora che la forma bilineare  $g$  sia **simmetrica**. Fissiamo una base  $B = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$  nello spazio vettoriale e sia  $A$  la matrice che rappresenta  $g$  nella base  $B$ . Poiché  $g$  è simmetrica la matrice  $A$  è simmetrica. La funzione lineare di  $\mathbb{R}^n$  in sè indotta da  $A$  che è così definita

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & A & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad (Y = A X)$$

è una funzione lineare simmetrica (*endomorfismo simmetrico di  $R^n$* ). Pertanto per quanto già visto essa è *ortogonalmente diagonalizzabile*, cioè ammette una base ortonormale di autovettori (cfr. "Appunti di Geometria", Cap. VIII, Par. 6). Esistono quindi  $n$  vettori  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  di  $R^n$  a due a due ortogonali e ciascuno di lunghezza uno che sono autovettori per la funzione  $F_A$ . Indicando con  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  gli autovalori degli autovettori  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  si ha quindi :

$$(***) \quad A \mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1 \quad A \mathbf{p}_2 = \lambda_2 \mathbf{p}_2, \dots, \quad A \mathbf{p}_n = \lambda_n \mathbf{p}_n$$

Sia  $P$  la matrice quadrata d'ordine  $n$  le cui colonne sono gli autovettori  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  e  $D$  la matrice diagonale avente sulla diagonale gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Se ci è utile possiamo disporre le colonne  $\mathbf{p}_i$  nella matrice  $P$  in modo che le prime  $s$  colonne siano costituite dagli autovettori con autovalore positivo, poi quelle con autovalore negativo ed infine quelle con autovalore zero. In tal modo sulla diagonale della matrice  $D$  appaiono nei primi  $s$  posti gli autovalori positivi, poi quelli negativi e poi sempre zero.

Le relazioni (\*\*\*) sopra scritte equivalgono alla seguente eguaglianza tra matrici

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & A & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \\ & P & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & P & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \\ & D & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Da  $AP = PD$  segue

$$P^{-1}AP = D \quad (\text{come già sapevamo}).$$

Poiché la matrice  $P$  è ortogonale si ha allora :

$$P^{-1}AP = P^t AP = D.$$

Se  $B' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$  è la base di  $V_n$  ottenuta attraverso l'uso della matrice ortogonale  $P$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} P \end{pmatrix} = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n),$$

(cioè  $B'$  è la base tale che  $P$  è la matrice di passaggio da  $B'$  a  $B$ ), per quanto abbiamo prima visto la matrice che rappresenta  $g$  nella base  $B'$  è la matrice  $D$  e quindi l'espressione di  $g$  nella base  $B'$  diventa :

$$(i) \quad g(v, w) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_t x_t y_t \quad t \leq n$$

avendo indicato con  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  gli autovalori non nulli della matrice  $A$ .

Poiché la matrice  $A$  è congruente alla matrice  $D$  essa ha lo stesso rango di  $D$  la quale ha rango pari al numero di autovalori diversi da zero.

Se al posto della base iniziale  $B$  avessimo scelto un'altra base  $B^\circ$  allora la nuova matrice  $A^\circ$  legata alla base  $B^\circ$  anch'essa, seguendo lo stesso procedimento, sarebbe stata congruente ad una matrice diagonale  $D^\circ$  avente sulla diagonale gli autovalori di  $A^\circ$ .

Poiché  $A$  ed  $A^\circ$  sono congruenti esse pur non avendo gli stessi autovalori hanno lo stesso rango e quindi  $D$  e  $D^\circ$  hanno lo stesso rango. Per tale ragione  $D$  e  $D^\circ$  avranno sulla diagonale lo stesso numero di elementi diversi da zero.

Si conclude così che nell'espressione

$$g(v, w) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_t x_t y_t \quad t \leq n$$

cambiando base possono cambiare i coefficienti ma resta invariato il numero di addendi di tale espressione in quanto non cambia il numero di autovalori diversi da zero.

## 2. Forme quadratiche.

Se

$$g : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$$

è una forma bilineare **simmetrica** si chiama **forma quadratica** associata a  $g$  l'applicazione

$$q : V_n \rightarrow \mathbb{R}$$





( Se  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  e  $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ , allora si ha :  $W = L(e_1, e_2, \dots, e_s)$  e  $T = L(e_{m+1}, e'_{m+2}, \dots, e'_n)$  ).

I due sottospazi sono evidentemente isomorfi il primo a  $\mathbb{R}^s$  ed il secondo a  $\mathbb{R}^{n-m}$ .

Pertanto per la formula di Grassmann si ha :

$$\dim(W \cap T) = \dim W + \dim T - \dim(W + T) \geq s + n - m - n = s - m > 0$$

(dato che  $\dim(W + T) \leq n$ ).

Esiste pertanto un vettore  $v$  non nullo comune a  $W$  e a  $T$ .

Calcolando allora  $q(v)$  si ha  $q(v) > 0$ , essendo le coordinate  $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n$  di  $v$  nella base  $B$  tutte nulle. Lo stesso vettore  $v$  nella base  $B'$  ha le coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_m$  tutte nulle e quindi è  $q(v) \leq 0$ . L'asserto è così provato.

Concludiamo con qualche utile osservazione :

Se  $A = (a_{ij})$  è una matrice reale quadrata d'ordine  $n$  abbiamo già visto che essa induce in  $\mathbb{R}^n$  una forma bilineare, che abbiamo indicato con  $g_A$ , ponendo :

$$g_A((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \dots + a_{2n}x_2y_n + \dots + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \dots + a_{nn}x_ny_n$$

Se indichiamo con  $B = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n)$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$  si ha facilmente

$$g_A(\underline{u}_i, \underline{u}_j) = a_{ij}$$

e così è  $A$  stessa la matrice che rappresenta  $g_A$  nella base canonica.

Ne segue che se  $A$  è una matrice non simmetrica per qualche coppia di indici  $i$  e  $j$  si ha  $a_{ij} \neq a_{ji}$  e quindi  $g_A(\underline{u}_i, \underline{u}_j) \neq g_A(\underline{u}_j, \underline{u}_i)$ . Pertanto **la forma bilineare è simmetrica se e solo se  $A$  è una matrice simmetrica.**

Se  $A$  è simmetrica l'espressione

$$g_A((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \dots + a_{2n}x_2y_n + \dots + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \dots + a_{nn}x_ny_n$$

quando la si calcoli sulla coppia  $((x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n))$  diventa

$$a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_nx_n$$

e tenendo conto che è  $a_{ij} = a_{ji}$  la forma quadratica associata ha la seguente espressione :

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n.$$

Si conclude che se si vuole risalire alla matrice  $A$  attraverso l'espressione della forma quadratica si deve tener conto che il numero che accompagna il monomio  $x_i x_j$  è il doppio di  $a_{ij}$ .

A titolo di esempio la matrice simmetrica associata alla seguente forma quadratica di  $\mathbb{R}^2$

$$q(\underline{x}) = 3x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_1x_2$$

è la seguente

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$