Lezioni di ISTITUZIONI di MATEMATICA (gruppo 3)

Nicola Durante

2011-12

Abstract

1 Insiemi numerici (Lezione del 5.10.11)

1.1 Cenni di teoria degli insiemi

Richiamiamo brevemente alcuni simboli usati in teoria degli insiemi.
Per indicare che un elemento x appartiene a un insieme S scriveremo: $x \in S$.
Pertanto il simbolo $\mathbf{x} \notin S$ denoterá che l'elemento x non appartiene all'insieme S.
Se l'insieme A é un sottoinsieme di un altro insieme B scriveremo: $A \subseteq B$.
Con il simbolo $\emptyset$ denoteremo l'insieme vuoto, ossia l'insieme privo di elementi.
L'intersezione tra due insiemi A e B si denota con $A \cap B$ ed é l'insieme contenente tutti gli elementi in comune tra A e B.
L'unione tra due insiemi A e B si denota con $A \cup B$ ed é formato da tutti gli elementi di A e da tutti gli elementi di B.
Con il simbolo $A - B$ denoteremo la differenza tra A e B, ossia l'insieme ottenuto cancellando dagli elementi di A quelli che stanno anche in B.
Altri simboli che saranno usati nel corso sono $\forall$ che vuol dire "per ogni", $\exists$ che vuol dire "esiste."

1.2 I numeri reali

R *campo ordinato e completo dei numeri reali* é un insieme con due operazioni $+$ di somma e $\cdot$ di prodotto. Devono essere verificati i seguenti assiomi:

- $(a+b)+c = a+(b+c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (proprietá associativa di $+$ e $\cdot$);

- $a+b=b+a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ (proprietá commutativa di $+$ e $\cdot$);
- $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (proprietá distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$);
- $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ (esistenza elemento neutro rispetto a $+$ e a $\cdot$);
- $a + (-a) = 0$ (opposto) e $a \cdot 1/a = 1$ (inverso) per ogni $a \neq 0$.

per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$. Con questi assiomi appena visti l'insieme $\mathbf{R}$ con le due operazioni di somma $+$ e prodotto $\cdot$ é un *campo*.
Ora introduciamo gli assiomi di ordinamento: per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$ deve valere:

- $a \leq b$ oppure $b \leq a$;
- $a \leq b$ ed anche $b \leq a$ allora $a = b$;
- $a \leq b$ allora per ogni c si ha $a + c \leq b + c$;
- $a \geq 0$, $b \geq 0$ allora $a + b \geq 0$ e $ab \geq 0$.

infine l'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali verifica l'assioma di completezza:

- **Assioma di completezza**. Se $A, B \subset \mathbf{R}$ e se per ogni $a \in A$ e $b \in B$ si ha $a \leq b$ allora esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$.

I numeri reali possono essere disposti su una retta orizzontale r con una fissata unitá di misura. Positionato il numero 0 e il numero 1 ad ogni punto della retta r resta associato un solo numero reale e viceversa.
Possiamo chiederci: l'assioma di completezza é ovvio ? la risposta é no.
" Se $A, B \subset \mathbf{R}$ e tutti i numeri in A sono minori o uguali di tutti i numeri in B allora esiste sempre un numero $c \in \mathbf{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$. Infatti basta scegliere il piú grande numero in A oppure il piú piccolo in B".
Il ragionamento tra virgolette é sbagliato perché nei sottoinsiemi di numeri reali non sempre esiste il piú grande numero e non sempre esiste il piú piccolo numero.
Facciamo un esempio.

$$B = \{1, 1/2, 1/3, ..., 1/n, ...\}_{n \in \mathbf{N}}$$

Questo insieme B contiene il piú grande numero che é 1 ma non contiene il piú piccolo.

1.3 I naturali, gli interi, i razionali

Nell'insieme $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ dei *numeri naturali* c'é il piú piccolo numero che é 1 ma non c'é il piú grande. Anche in $\mathbf{N}$ ci sono le due operazioni di somma e di prodotto. I numeri naturali verificano tutti gli assiomi che verificavano i numeri reali ? No non tutti. In particolare nessun numero naturale ha opposto e nessun numero naturale, tranne 1, ha inverso.
Sia $\mathbf{Z} = \{...., -n, ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ l'insieme dei numeri *interi.* In $\mathbf{Z}$ non c'é il piú piccolo numero e neanche il piú grande. I numeri interi verificano tutti gli assiomi dei numeri reali ? No non tutti. In particolare nessun numero intero, tranne 1 e -1 ha inverso.
Sia

$$\mathbf{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$$

l'insieme dei numeri *razionali.* Essi verificano tutti gli assiomi dei numeri reali ? No non tutti. Sono verificati tutti tranne quello di completezza. Infatti sia

$$A = \{a \in \mathbf{Q} : a \geq 0, a^2 \leq 2\} \text{ e sia } B = \{b \in \mathbf{Q} : b > 0, b^2 \geq 2\}$$

l'unico numero reale c che verifica $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ é il numero $c = \sqrt{2}$. Ma il numero $\sqrt{2}$ é un numero di $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Infatti vale la seguente:

Proposizione 1.1 *Il numero* $\sqrt{2}$ *non appartiene a* $\mathbf{Q}$

Dim. Poniamo $c = \sqrt{2}$ allora $c^2 = 2$ se per assurdo $c \in \mathbf{Q}$ allora $c = m/n$ con $m, n \in \mathbf{N}$ $n \neq 0$ e supponiamo di aver scritto la frazione in forma ridotta quindi l'abbiamo giá semplificata. Quindi MCD$(m, n) = 1$ (m ed n sono coprimi). Se eleviamo al quadrato c viene: $c^2 = m^2/n^2 = 2$ allora $m^2 = 2n^2$ quindi m^2 é un numero pari. [se ho un numero dispari $2h+1$ e lo elevo al quadrato $(2h+1)^2 = 4(h^2+h)+1$ é dispari] quindi poiché m^2 é pari allora m é pari. $m = 2k$ da $m^2 = 2n^2$ abbiamo $(2k)^2 = 2n^2$ quindi $4k^2 = 2n^2$ dividendo per 2 abbiamo $2k^2 = n^2$ quindi n^2 é pari e allora anche n é pari. Ma in una frazione ridotta con MCD$(m, n) = 1$ non puó essere che sia m che n sono pari. ASSURDO. $\square$

Da questa proposizione segue che $\mathbf{Q}$ non é completo. Ossia non verifica l'assioma di completezza.

2 Estremo superiore e inferiore (Lezione del 6.10.11)

2.1 Forma decimale dei numeri reali

Come visto nella lezione di ieri $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.
I numeri razionali $\frac{m}{n}$, $n \neq 0$ si possono porre in forma decimale come ad es. $3/4 =$

$0,75$ o $1/3 = 0,3333333..... = 0,\overline{3}$ in cui le cifre dopo la virgola sono in numero finito (seguito eventualmente da tutti 0) o in numero infinito ma seguono una periodicitá. Ad es. in $1,\overline{32}$ il 32 dopo la virgola si ripete all'infinito.
I numeri di $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ sono detti *irrazionali* come ad es. $\sqrt{2}, e, \pi$. I numeri irrazionali si possono porre sotto forma decimale ma le cifre dopo la virgola sono infinite e non hanno una periodicitá. Ad es. $\sqrt{2} = 1,4142.....$, $\pi = 3,14159.....$, $e = 2,71.....$
Cosí se chiediamo la miliardesima cifra dopo la virgola di $3/4$ o di $1,\overline{32}$ la sappiamo dire é 0 nel primo caso ed é 2 nel secondo caso, mentre di $e, \pi, \sqrt{2}$ non la conosciamo.

2.2 Il valore assoluto di un numero reale

Per ogni numero reale a si definisce *valore assoluto* di a il numero a se $a \geq 0$ il numero $-a$ se $a < 0$. Si scrive $|a|$ per denotare il valore assouto di a. Si ha:

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$

$$|a| > b \Leftrightarrow a < -b \text{ oppure } a > b$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a-b|$$

$$|ab| = |a||b|.$$

2.3 Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$ diamo le seguenti definizioni:

$$M = MaxA :\Leftrightarrow \begin{cases} M \in A \\ M \geq a \quad \forall \quad a \in A \end{cases}$$

$$m = minA :\Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ m \leq a \quad \forall \quad a \in A \end{cases}$$

Esistono sottoinsiemi A di $\mathbf{R}$ che non hanno massimo o che non hanno minimo.
Ad esempio $A = \{1, 1/2, 1/3, ..., 1/n, ...\}_{n \in \mathbf{N}}$ non ha minimo, max $A = 1$.
$A = \{a \in \mathbf{R} : a > 0\}$ non ha minimo e non ha massimo.
$A = \{a \in \mathbf{R} : a < 7\}$ non ha minimo e non ha massimo.

Se un sottoinsieme A di $\mathbf{R}$ ha minimo esso é unico.
Infatti se $m_1, m_2 \in A$ sono due minimi di A allora poiché m_1 é minimo di A allora

$m_1 \leq a$ per ogni $a \in A$ ma $m_2 \in A$ quindi $m_1 \leq m_2$. Poiché m_2 é minimo di A allora $m_2 \leq a$ per ogni $a \in A$ ma $m_1 \in A$ quindi $m_2 \leq m_1$. Pertanto $m_1 = m_2$.

Analogamente se un sottoinsieme A ha massimo esso é unico.
Dato un sottoinsieme A di $\mathbf{R}$ un numero L si dice un *maggiorante* di A se $L \geq a$ per ogni $a \in A$.
Un numero ℓ si dice un *minorante* di A se $\ell \leq a$ per ogni $a \in A$.
Ad esempio l'insieme $A = \{a \in \mathbf{R} : a > 0\}$ non ha massimo e non ha maggioranti. Ha per minoranti tutti i numeri negativi e lo 0.
L'insieme $A = \{a \in \mathbf{R} : a < 7\}$ ha per maggioranti tutti i numeri maggiori o uguali a 7. Non ha minoranti.
$A = \{a \in \mathbf{R} : a < 5\} \cup \{a \in \mathbf{R} : a > 10\}$ non ha maggioranti né minoranti.
Un insieme A si dice *limitato superiormente* se ha maggioranti.
Un insieme A si dice *limitato inferiormente* se ha minoranti.
Un insieme A si dice *limitato* se é limitato sia superiormente che inferiormente. In simboli:

$$A \text{ é limitato } \Leftrightarrow \exists \ell, L \in \mathbf{R} : \ell \leq a \leq L \text{ per ogni } a \in A$$

Proposizione 2.1 (Teorema dell'estremo superiore) *Se $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ limitato superiormente allora esiste sempre il minimo nell'insieme dei maggioranti di A.*

Dim. Sia $B = \{$ maggioranti di $A\} = \{L \in \mathbf{R} : L \geq a$ per ogni $a \in A\}$. Poiché A é limitato superiormente $B \neq \emptyset$. Inoltre per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si ha $a \leq b$ allora per l'assioma di completezza esiste un numero $c \in \mathbf{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$.
Ora da $a \leq c$ per ogni $a \in A$ segue che c é un maggiorante di A quindi $c \in B$ e dalla seconda disuguaglianza $c \leq b$ per ogni $b \in B$ si ha che c é il minimo di B. □

$\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ limitato superiormente $c \in \mathbf{R}$ si dice *estremo superiore* di A se é il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.
Ne segue che questo numero c, l'estremo superiore di A é un maggiorante di A ma é il piú piccolo dei maggioranti di A quindi per ogni numero $\epsilon > 0$ (piccolo a piacere) e considero il numero $c - \epsilon$ questo non é piú un maggiorante di A vuol dire che esiste un numero $a \in A$ tale che $c - \epsilon < a$. In simboli:

$$c = SupA :\Leftrightarrow \begin{cases} c \geq a & \forall & a \in A \\ \forall \epsilon > 0 & \exists a \in A : & a > c - \epsilon \end{cases}$$

Analogamente se $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ é limitato inferiormente allora l'insieme dei minoranti di A ha un massimo c che é detto *estremo inferiore* di A. In simboli:

$$c = infA :\Leftrightarrow \begin{cases} c \leq a & \forall \quad a \in A \\ \forall \epsilon > 0 & \exists a \in A : \quad a < c + \epsilon \end{cases}$$

Se A non é limitato superiormente ossia non ha maggioranti si pone estremo superiore di A $+\infty$.
Se A non é limitato inferiormente ossia non ha minoranti si pone estremo inferiore di A $-\infty$. In simboli:

$$\text{Sup } A = +\infty \Leftrightarrow \text{ per ogni } L \in \mathbf{R} \text{ eiste } a \in A : a > L$$

$$\inf A = -\infty \Leftrightarrow \text{ per ogni } \ell \in \mathbf{R} \text{ eiste } a \in A : a < \ell$$

Ad es. $A = \{\frac{n-1}{n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ ha minimo 0 non ha massimo ma l'estremo superiore é 1.
$A = \{\frac{n+1}{n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ ha massimo 2 non ha minimo ma l'estremo inferiore é 1.