Appunti di Fondamenti di Scienza delle Costruzioni - Corso E

Enrico Babilio

E-mail address, per segnalare errori o imprecisioni: `ebabili@hotmail.com`

Contents

Part 1. 1

Chapter 1. Cenni di Algebra Vettoriale 3
1. Vettori nullo, unitario, opposto 3
2. Somma di vettori 3
3. Prodotto di un vettore per uno scalare 4
4. Componenti cartesiane di un vettore 4
5. Prodotto Scalare 5
6. Prodotto Vettoriale 5
7. Prodotto Misto 6
8. Cambiamento di riferimento 6

Chapter 2. Cenni di Cinematica del corpo rigido 7
1. L'ipotesi di piccoli spostamenti 9

Part 1

CHAPTER 1

Cenni di Algebra Vettoriale

Molte grandezze che caratterizzano un fenomeno fisico sono completamente definite attraverso la loro misura, cioè a mezzo di un numero reale e vengono chiamate *grandezze scalari* (ad es., la massa, la temperatura, il lavoro di una forza). I numeri reali che le rappresentano sono detti scalari

Per la completa caratterizzazione di altre grandezze (ad es. lo spostamento di un punto materiale) occorre precisare un numero reale (non negativo) detto *modulo*, una direzione e un verso. Tali grandezze vengono chiamate *grandezze vettoriali* e gli enti che le rappresentano si dicono vettori e si usa rappresentarli con segmenti orientati.

Definizione: Due segmenti orientati si dicono equipollenti se hanno la stessa lunghessa, la stessa direzione e lo stesso verso. Una classe di segmenti orientati equipollenti è atta a rappresentare un vettore.

I vettori per i quali si può prendere come rappresentazione la classe di segmenti orientati equipollenti sono detti anche *vettori liberi* e si indicano con lettere minuscole in grassetto ($\mathbf{u},\ \mathbf{v}, \mathbf{w}, \cdots$).

Poiché per alcune grandezze fisiche occorre specificare anche il punto di applicazione si definiscono i *vettori applicati*. Il vettore applicato è l'insieme di un vettore libero e di un punto di applicazione e si indica con $(\mathbf{u}, A)$, dove $\mathbf{u}$ è il vettore e A il punto di applicazione.

Ad esempio, l'effetto di una forza su di un corpo deformabile può variare notevolmente al variare del punto di applicazione. Queste considerazioni si traducono nel fatto che una forza è descritta matematicamente da un vettore applicato.

Il odulo del vettore $\mathbf{u}$ o del vettore $(\mathbf{u}, A)$ si indica con $||\mathbf{u}||$.

1. Vettori nullo, unitario, opposto

Il vettore che ha modulo nullo si dice vettore nullo e si indica con $\mathbf{0}$. Sono indeterminati la sua direzione e il suo verso.

Il vettore che ha modulo unitario si dice vettore unitario o *versore* e si indica con $\mathbf{1}$.

Dato il vettore $\mathbf{u}$ il vettore che ha lo stesso modulo, la stessa direzione ma verso opposto si dice vettore opposto di $\mathbf{u}$ e si inidca con $-\mathbf{u}$.

2. Somma di vettori

La somma di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è un vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ la cui direzione e verso si ottengono nel modo seguente:

si fissa il vettore $\mathbf{u}$ e, a partire dal suo punto estremo, si traccia il vettore $\mathbf{v}$. Il vettore che unisce l'origine di $\mathbf{u}$ con l'estremo di $\mathbf{v}$ fornisce il vettore somma $\mathbf{w}$.

Dalla definizione si deducono facilmente le seguenti proprietà:

- proprietà commutativa: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
- proprietà associativa: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;
- elemento neutro: $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.

3. Prodotto di un vettore per uno scalare

Dato uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ (numero reale) e un vettore $\mathbf{u}$ si definisce l'operazione che associa a questi due enti un vettore.

La moltiplicazione $\alpha\mathbf{u}$ (o $\mathbf{u}\alpha$) di un vettore a con il numero reale α è un vettore $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$, collineare ad $\mathbf{u}$, di modulo $|\alpha|\ ||\mathbf{u}||$ e verso coincidente con quello di $\mathbf{u}$ se $\alpha > 0$, opposto a quello di $\mathbf{u}$ se $\alpha < 0$. Nel caso che sia $\alpha = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ si ottiene $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Seguono dalla definizione le proprietà:

se $\alpha;\ \beta \in \mathbb{R}$

- proprietà associativa rispetto ai fattori numerici $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}a$;
- proprietà distributiva rispetto alla somma degli scalari $(\alpha+\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$;
- proprietà distributiva rispetto alla somma dei vettori $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$.

Si possono definire per i vettori altre operazioni

- prodotto scalare,
- prodotto vettoriale,
- prodotto misto

in forma assoluta lavorando simbolicamente e senza necessariamente individuare un sistema di riferimento.

Tuttavia, essendo comodo da un punto di vista computazionale rappresentare i vettori in un dato sistema di riferimento, in questa sede si preferirà introdurre tali operazioni dopo aver specificato il sistema di riferimento.

4. Componenti cartesiane di un vettore

Si consideri un sistema di assi mutuamente ortogonale, con origine in un dato punto O. In generale parleremo di un numero N di assi, arbitrariamente grande. Si associ ad ogni asse un vettore di modulo unitario (versore) e lo si indichi con $\hat{\mathbf{e}}_i$, dove l'indice i individua l'asse x_i cui il vettore è associato e si noti che il modulo unitario fa da "scala di misura" per l'asse

In un dato sitema di riferimento il vettore può essere rappresentato (in forma cartesiana) attraverso le sue componenti

$$\mathbf{u} = u_1\hat{\mathbf{e}}_1 + u_2\hat{\mathbf{e}}_2 \cdots u_N\hat{\mathbf{e}}_N = u_i\hat{\mathbf{e}}_i \tag{4.1}$$

dove è stata utilizzata la convenzione di sommatoria di Einstein sugli indici ripetuti.

Si noti che nella (4.1) sono state utilizzate le due operazioni di somma e prodotto per uno scalare. Gli scalari u_i si chiamano componenti e i vettori $u_1\hat{\mathbf{e}}_1,\ u_2\hat{\mathbf{e}}_2, \cdots, u_N\hat{\mathbf{e}}_N$ vettori componenti di $\mathbf{u}$.

Assegnato il riferimento, il vettore $\mathbf{u}$ può essere convenientemente rappresentato dalla lista delle sue componenti

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \cdots, u_N\} \tag{4.2}$$

L'operazione di somma fornisce

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \{u_1, u_2, \cdots, u_N\} + \{v_1, v_2, \cdots, v_N\} = \{w_1, w_2, \cdots, w_N\}, \tag{4.3}$$

e il prodotto per uno scalare

$$\alpha\mathbf{u} = \{\alpha u_1, \alpha u_2, \cdots, \alpha u_N\}. \tag{4.4}$$

5. Prodotto Scalare

Dati due vettori **u** e **v** si definisce il prodotto scalare tra di essi

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \cos\alpha, \tag{5.1}$$

essendo α l'angolo tra essi compreso. Si noti che il risultato di un prodotto scalare è un numero reale. Si noti che risulta nullo il prodotto scalare tra vettori ortogonali.

Date le componenti cartesiane dei due vettori il prodotto scalare vale

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_i\hat{\mathbf{e}}_i) \cdot (v_j\hat{\mathbf{e}}_j) = u_i v_j (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j) = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i, \tag{5.2}$$

avendo introdotto il simbolo δ_{ij}, che vale 1 per $i = j$ e 0 per $i \neq j$.

Il prodotto scalare può essere calcolato per vettori in dimensione qualunque.

Vale la proprietà commutativa

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$,
- per $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v})$.

Il prodotto scalare può essere applicato per il calcolo del modulo di un vettore.

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{(u_i\hat{\mathbf{e}}_i) \cdot (u_j\hat{\mathbf{e}}_j)} = \sqrt{u_i^2} \tag{5.3}$$

6. Prodotto Vettoriale

Dati due vettori **u** e **v** in uno spazio tridimensionale si definisce il prodotto vettoriale tra di essi. Il risultato del prodotto vettoriale è il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ avente modulo

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \sin\alpha, \tag{6.1}$$

essendo α l'angolo tra essi compreso, direzione ortogonale al piano individuato dai vettori **u** e **v** e verso ottenuto secondo la cosiddetta "regola del cavatappi" : $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ha il verso di avanzamento di un cavatappi fatto ruotare concordemente alla rotazione che sovrappone il primo vettore **u** sul secondo **v**, attraverso l'angolo convesso $\alpha < 180°$.

Si ribadisce che il risultato di un prodotto vettoriale è un vettore nello spazio tridimensionale.

Date le componenti cartesiane dei due vettori, il vettore ottenuto dal loro prodotto vettoriale è pari a

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Il modulo del vettore **w** è pari all'area del parallelogramma avente lati di lunghezza pari a $||\mathbf{u}||$ e $||\mathbf{v}||$.

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà

- proprietà anticommutativa:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \tag{6.3}$$

- proprietà associativa rispetto al fattore scalare:

$$\alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha\mathbf{v}) \ , \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{6.4}$$

- proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} \tag{6.5}$$

7. Prodotto Misto

Dati tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in uno spazio tridimensionale si definisce il prodotto misto tra di essi e il risultato è lo scalare $\alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. In un siffatto prodotto occorre calcolare prima il prodotto vettoriale tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e poi li prodotto scalare tra il risultato del prodotto vettoriale e il vettore $\mathbf{u}$.

Date le componenti cartesiane dei tre vettori si può scrivere

$$\alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

Il prodotto misto restituisce la misura di volume del prisma avente lati di lunghezza pari a $||\mathbf{u}||$, $||\mathbf{v}||$ e $||\mathbf{w}||$.

8. Cambiamento di riferimento

Dato un sistema di riferimento è spesso necessario passare ad un altro sistema di riferimento. Ai fini del corso si considerà solo il caso piano.

Dato un vettore $\mathbf{u}$ nel piano e due sistemi di riferimento Oxy e $Ox'y'$, note le componenti del vettore nel primo riferimento

$$\mathbf{u} = u_1\hat{\mathbf{e}}_1 + u_2\hat{\mathbf{e}}_2 \tag{8.1}$$

le componenti nell'altro riferimento valgono

$$u'_i = (u_j\hat{\mathbf{e}}_j) \cdot \hat{\mathbf{e}}'_i = A_{i'j}u_j \tag{8.2}$$

essendo $A_{i'j}$ le componenti della matrice $\mathbf{A}$ contenenti i coseni $\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}'_i = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$ degli angoli formati dagli asse dei due sistemi di riferimeto. In forma matriciale

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 & \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1'1} & A_{1'2} \\ A_{2'1} & A_{2'2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

CHAPTER 2

Cenni di Cinematica del corpo rigido

Un corpo continuo materiale è descritto da un insieme chiuso e connesso $\mathcal{B} \in \mathcal{E}$ che prende il nome di *configurazione di riferimento*. Con $\mathcal{E}$ si indica lo spazio euclideo tridimensionale. Sia $\mathcal{B}'$ una nuova configurazione del corpo che denominiamo *configurazione attuale* di $\mathcal{B}$. In tale configurazione il generico punto $P \in \mathcal{B}$ occupa la posizione P'. Assegnato il sistema di riferimento $\{O, x_1, x_2, x_3\}$ e indicando con $\mathbf{X}$ il vettore posizione di P e con $\mathbf{x}$ il vettore posizione di P', lo spostamento di P vale

$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{x}\mathbf{X}. \tag{0.4}$$

Si considerino dui punti P e Q (con i vettori posizione $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$) e le loro immagini P' e Q' nella configurazione attuale (con i vettori posizione $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$).

In generale le distanze mutue tra i punti variano nel passare da una configurazione all'altra.

Se vale

$$||\mathbf{X} - \mathbf{Y}|| = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \ , \quad \forall P, Q \in \mathcal{B} \tag{0.5}$$

allora si parla di spostamento rigido.

Corpi che possono esibire solo spostamenti rigidi si dicono *corpi rigidi*

Uno spostamento di $\mathcal{B}$ è definito piano se il vettore spostamento di tutti i punti di $\mathcal{B}$ è parallelo ad uno stesso piano π.

Nel seguito si supporrà che gli spostamenti siano piani e il piano π coinciderà con il piano contenente i versori $\hat{\mathbf{e}}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_2$

$$\mathbf{u}(P) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = 0, \quad \forall P \in \mathcal{B} \tag{0.6}$$

Si consideri un corpo rigido piano, ad esempio, senza perdita di generalità, di forma rettangolare. La posizione del rettangolo (rigido) resta univocamente determinata note le coordinate di uno dei suo vertici (ad es. A) e langolo che uno dei suoi lati forma con uno degli assi coordinati.

I tre parametri x_A, y_A e φ individuano, pertanto, univocamente la posizione del rettangolo nel piano xy.

È daltra parte evidente che la scelta dei tre parametri x_A, y_A e ϕ non è lunica possibile. La posizione del rettangolo si pu infatti fissare anche assegnando le coordinate di due suoi punti qualsiasi, ad esempio due spigoli A e B, nel qual caso la posizione stessa risulta immediatamente determinata una volta assegnati i valori dei quattro parametri x_A, y_A, x_B e y_B, legati dalla relazione di rigidità del tipo della (0.5)

Se si assegna il valore, ad esempio, di x_A, y_A e x_B il valore di y_B resta univocamente fissato dalla relazione di rigidità: anche con questa seconda scelta, il numero di parametri indipendenti che occorre assegnare per definire la posizione del rettangolo è pari a tre.

Pertanto mentre risulta inessenziale quali siano i parametri scelti per fissare una particolare posizione di un corpo rigido nel piano, il numero di tali parametri è pari a tre.

I parametri indipendenti necessari a individuare la posizione del corpo rigido prendono il nome di *coordinate generalizzate* o *lagrangiane* o *libere* del corpo.

Alle coordinate generalizzate possono assegnarsi valori arbitrari e tra loro indipendenti, per cui la variazione di ciascuna coordinata equivale a una possibilità di spostamento nel piano e, precisamente, dalla posizione individuata dal valore iniziale della coordinata alla posizione individuata dal valore della coordinata variata.

Si usa dire che un corpo rigido nel piano possiede 3 gradi di libert (6 *gdl* nello spazio 3D).

Si definisce *spostamento generalizzato* del rettangolo e si indica con:

$$\{S\} = \left\{ \begin{array}{c} x'_A - x_A \\ y'_A - y_A \\ \phi' - \phi \end{array} \right\} \tag{0.7}$$

la differenza tra il vettore posizione finale e il vettore posizione iniziale, ovvero il vettore che sommato alla posizione iniziale individua la posizione finale del corpo.

Uno spostamento rigido piano si definisce traslatorio quando tutti i punti del corpo subiscono lo stesso spostamento

$$\{S\} = \left\{ \begin{array}{c} x'_A - x_A \\ y'_A - y_A \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u_A \\ v_A \\ 0 \end{array} \right\} \tag{0.8}$$

Lo spostamento di un punto P qualsiasi del corpo, a partire dallo spostamento generalizzato, è

$$\mathbf{u} = u_A \hat{\mathbf{e}}_1 + v_A \hat{\mathbf{e}}_2 \tag{0.9}$$

Uno spostamento rigido piano si definisce rotatorio quando esiste un punto del piano, appartenente o meno al corpo, a cui compete spostamento nullo. Tale punto prende il nome di *centro di rotazione*.

$$\{S\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \phi' - \phi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{array} \right\} \tag{0.10}$$

dove ϑ è langolo di rotazione, ovvero la differenza tra le orientazioni finale e iniziale della base del rettangolo rispetto allasse delle ascisse.

Per ottenere lespressione che fornisce lo spostamento di un punto P qualsiasi del corpo, a partire dallo spostamento generalizzato, si osservi che, per effetto della rotazione attorno ad A, il punto P si sposta in P' muovendosi sullarco di circonferenza di centro A e raggio r pari alla distanza tra P e A: lo spostamento $\mathbf{u}(P)$ del punto P si identifica allora con la corda PP' sottesa dallarco di circonferenza percorso.

Lo spostamento $\mathbf{u}(P)$ si può scomporre nelle due direzioni radiale e tangente individuate dai due versori $\hat{\mathbf{e}}_r$ ed $\hat{\mathbf{e}}_t$ che si assumono positivi se concordi con i versi che vanno rispettivamente da P verso A e da P verso P':

$$\mathbf{u} = r(1 - \cos\varphi)\hat{\mathbf{e}}_r + r\sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_t \tag{0.11}$$

Gli spostamenti traslatori e rotatori esauriscono le possibili modalità di spostamento dei corpi rigidi nel piano, nel senso che uno spostamento rigido piano o è traslatorio o è rotatorio o è una combinazione di entrambi (roto–traslatorio).

1. L'ipotesi di piccoli spostamenti

I risultati sin qui ottenuti assumono una forma particolarmente semplice se si opera nellambito di validità dell*ipotesi di piccoli spostamenti*, giustificata dal fatto che gli spostamenti delle strutture reali devono essere effettivamente limitati per garantire la funzionalità in esercizio delle strutture stesse: un solaio non deve subire inflessioni eccessive sotto lazione del peso proprio e portato affinché non si danneggino, ad esempio, le tramezzature interne.

Da un punto di vista matematico, si richiede che

$$\frac{||\mathbf{u}||}{L} << 1 \ , \quad \nabla\mathbf{u}|| << 1 \tag{1.1}$$

dove L è una lunghezza caratteristica misurata tra due punti del corpo.

In sostanza sia la componente traslatoria dello spostamento che quella rotatoria devono essere tali che la configurazione finale occupata dal corpo si mantenga prossima a quella iniziale.

Conseguentemente, gli spostamenti sia traslatori che rotatori sono tali da poter approssimare le funzioni che li descrivono con il loro sviluppo in serie di Taylor troncato ai termini del primo ordine. Lo studio dello spostamento si riconduce, così, formalmente a quello della velocità il che consente di parlare indifferentemente di spostamento o *atto di moto*. La descrizione degli spostamenti traslatori non viene formalmente modificata dallassunzione che gli spostamenti siano quantità infinitesime dal momento che il campo di spostamenti (0.9) è uniforme. La descrizione degli spostamenti rotatori si semplifica notevolmente. Sostituendo alle funzioni seno e coseno che compaiono nella (0.11) il loro sviluppo in serie di Taylor, di punto iniziale $\varphi = 0$ e troncato ai termini del primo ordine:

$$\mathbf{u} = r\varphi\hat{\mathbf{e}}_t \tag{1.2}$$

ovvero, per effetto di una rotazione infinitesima di centro A, il punto P si sposta ortogonalmente alla congiungente P con A di una quantità pari allampiezza della rotazione moltiplicata per la distanza del punto dal centro di rotazione.

Si ricorda che lo sviluppo di una funzione $f(x)$ in serie (di potenze) di Taylor, di punto iniziale x_0 si scrive:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{f^{(i)}(x)|_{x=x_0}}{i!} \tag{1.3}$$

dove $f^{(i)}(x)|_{x=x_0}$ è la derivata i–esima di $f(x)$ valutata in x_0 e $i!$ si legge "i fattoriale" $(2! = 1\ 2 = 2, 3! = 1\ 2\ 3 = 6, 4! = 1\ 2\ 3\ 4 = 24)$

In tema di piccoli spostamenti, considerato il piano π e detta Ω la traccia di $\mathcal{B}$ in π si ha

$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{u}(Q) + \varphi\hat{\mathbf{e}}_3 \times (\mathbf{PQ}) \text{ per ogni } P, Q \in \Omega \tag{1.4}$$

dove $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ sono i vettori posizione che individuano i punti $P, Q \in \Omega$.