

## Esercizi su Coniche e Quadriche

**Esercizio 1** *Provare che la conica  $\mathcal{C}$  di equazione  $x^2 + 2xy + 4y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$  è un'ellisse reale e determinarne gli assi. Ridurla a forma canonica.*

**Esercizio 2** *Data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione  $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 6x + 4y - 15 = 0$ ,*

- *determinare centro e assi di  $\mathcal{C}$ ;*
- *disegnare il grafico di  $\mathcal{C}$ .*
- *determinare le equazioni del cambiamento di riferimento che riducono  $\mathcal{C}$  a forma canonica.*

**Esercizio 3** *Data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione  $4x^2 - 4y^2 - 6xy + 10x - 15 = 0$ ,*

- se ne trovino assi e centro;*
- si rappresenti graficamente il supporto di  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{E}^2$ .*

**Esercizio 4** *Dato il fascio di coniche  $\mathcal{C}_h$  ( $h \in \mathcal{R}$ ):*

$$2hxy + (1 - h^2)y^2 - 4x + 2y + 4 = 0,$$

- classificare le coniche  $\mathcal{C}_h$ , al variare di  $h \in \mathcal{R}$ ;*
- verificato che, per  $h = 2$ ,  $\mathcal{C}_2$  è un'iperbole, determinarne gli assi e gli asintoti.*

**Esercizio 5** *Data la conica  $\Gamma$  di equazione  $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y = 0$*

- provare che è una parabola;*
- trovarne l'asse;*
- disegnarne il grafico.*

**Esercizio 6** *Data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione  $x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 1 = 0$ ,*

- classificarla;*
- disegnarne il grafico;*
- dire se la retta  $2x - y + 1 = 0$  può essere un diametro di  $\mathcal{C}$ .*

**Esercizio 7** *Data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione  $4xy - 3y^2 - 4x + 2y = -4$ ,*

- classificarla;*
- trovarne gli assi;*
- disegnarne il grafico;*

**Esercizio 8** *Data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione  $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$  (rispetto ad un fissato riferimento cartesiano  $S$  su  $\mathcal{E}^2$ ),*

- si verifichi che  $\mathcal{C}$  è una parabola avente per vertice l'origine di  $S$ ;*
- si determini il diametro di  $\mathcal{C}$  passante per il polo dell'asse  $x$ .*

**Esercizio 9** *Data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione  $-3y^2 + 4xy + 2y + 1 = 0$  (rispetto ad un fissato riferimento cartesiano  $S$  su  $\mathcal{E}^2$ ),*

- trovarne gli assi;*
- trovare il polo, rispetto a  $\mathcal{C}$ , della retta di equazione  $x + 2y = 0$ .*

**Esercizio 10** Data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione  $x^2 - 2y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$  (rispetto ad un fissato riferimento cartesiano  $S$  su  $\mathcal{E}^2$ ),

(a) provare che  $\mathcal{C}$  è un'iperbole;

(b) determinare il polo, rispetto a  $\mathcal{C}$ , della retta  $x - 2y + 1 = 0$ .

**Esercizio 11** Data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione  $y^2 + 2y - 2x + 1 = 0$  (rispetto ad un fissato riferimento cartesiano  $S$  su  $\mathcal{E}^2$ ),

(a) provare che  $\mathcal{C}$  è una parabola e determinarne il vertice;

(b) determinare il polo della retta  $x + y = 0$ , rispetto a  $\mathcal{C}$ .

**Esercizio 12** Determinare gli assi della conica  $\mathcal{C}$  di equazione  $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 3 = 0$ . Inoltre, determinare il polo, rispetto a  $\mathcal{C}$ , dell'asse  $x$  del riferimento.

**Esercizio 13** Provare che, per ogni  $\alpha \in \mathcal{R}$ , le quadriche  $\mathcal{Q}_\alpha : \alpha x^2 + 2xy + z^2 - 2x + 2z = 0$  sono iperboloidei iperbolici. Esistono valori di  $\alpha$  per i quali il piano  $x - y + z + 1 = 0$  è un piano principale rispetto a  $\mathcal{Q}_\alpha$ ?

**Esercizio 14** Provare che le coniche  $\mathcal{C}_h$  di equazione  $x^2 - y^2 + 2hxy - 2hx - 1 = 0$ , con  $h \in \mathcal{R}$ , sono tutte iperboli. Inoltre,

(a) determinare gli asintoti di  $\mathcal{C}_0$  ( $h = 0$ );

(b) determinare gli assi di  $\mathcal{C}_1$  ( $h = 1$ );

**Esercizio 15** Sia  $\mathcal{Q}$  la quadrica di  $\mathcal{E}^3$  di equazione  $y^2 - z^2 + 4xy - 2xz + 2yz - 2x - 4y + 1 = 0$ .

(a) Provare che  $\mathcal{Q}$  è un iperboloide iperbolico.

(b) Determinare l'iperpiano  $\pi$  tangente a  $\mathcal{Q}$  nel punto  $P \equiv (1, 1, 0)$  del suo supporto.

(c) Scrivere le equazioni delle rette costituenti la conica sezione di  $\mathcal{Q}$  su  $\pi$ .

**Esercizio 16** Si dica se esistono valori del parametro  $h \in \mathcal{R}$  per i quali le quadriche di  $\mathcal{E}^3$  aventi equazione  $x^2 + hy^2 - 2hz^2 + 4xy - 2xz + 4y - 2z + 1 = 0$  sono ellissoidi reali. Verificato che, per  $h = 1$ , la conica intersezione con il piano  $z = 1$  è un'iperbole, si determinino i suoi vertici.

**Esercizio 17** Si classifichino, le coniche  $\mathcal{C}_h$  non specializzate di  $\mathcal{E}^2$  aventi equazione  $h^2 x^2 + y^2 + 2(h+1)xy + 2x - 2y + h = 0$  in funzione del parametro reale  $h$ . Esistono valori per i quali  $\mathcal{C}_h$  è una circonferenza reale?

**Esercizio 18** Si classifichino le coniche di equazione  $y^2 + (k+1)xy + (1-2k)x - 2y + 1 = 0$  in funzione del parametro reale  $k$ . Si determinino gli assi della conica ottenuta per  $k = 1$ .