Note di geometria

Prof. Domenico Olanda

Anno accademico 2008-09

Prefazione

Questo testo raccoglie alcune lezioni di geometria da me svolte negli anni accademici 2008-2009 per gli studenti del corso di laurea in Matematica dell' Università degli studi di Napoli " Federico II ".

Il primo capitolo è dedicato alla geometria analitica del piano e dello spazio.

Nel secondo capitolo , attraverso le nozioni di piano affine e proiettivo, c'è un approccio ai fondamenti della geometria del piano reale.

Un approccio simile è dedicato allo spazio nel quinto capitolo.

I capitoli terzo e quarto sono dedicati allo studio delle coniche del piano proiettivo complesso.

Il sesto capitolo è dedicato allo studio delle quadriche dello spazio proiettivo complesso di dimensione tre.

L' ultima parte è una sintetica esposizione delle nozioni più importanti di topologia generale.

Il libro si conclude con una personale valutazione dei nuovi ordinamenti didattici.

Prof. Domenico Olanda

Capitolo I

La geometria analitica del piano e dello spazio

1. Introduzione

In questo capitolo analizzeremo alcuni risultati di geometria analitica utilizzati nelle applicazioni. Spesso ci sarà il solo riferimento al risultato senza la sua dimostrazione.

Prima di addentrarci nell'esposizione ,allo scopo di facilitare la lettura di questo argomento, è utile ricordare due risultati di algebra lineare acquisiti nella prima parte .

Il primo risultato che richiamiamo è un semplice, ma molto utile teorema .

Teorema. *Se in uno spazio vettoriale h vettori* $\{ v_1, v_2, \dots\dots v_h\}$ *sono indipendenti mentre* $\{v_1, v_2, \dots v_h, w\}$ *sono dipendenti allora il vettore w dipende dai vettori* $v_1, v_2, \dots\dots v_h$.

Il secondo risultato che richiamiamo è il seguente .

Indichiamo con V = R[x, y ,z] lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più uno nelle variabili x,y,z a coefficienti reali. L' applicazione

$$f : V \dashrightarrow R^4$$

$$(ax + by + cz + d) \dashrightarrow (a, b, c, d)$$

che associa al polinomio ax + by + cz + d la quaterna dei suoi coefficienti è un ***isomorfismo*** tra gli spazi vettoriali V ed R^4 .

Per tale ragione la dipendenza tra polinomi può essere ricondotta alla corrispondente dipendenza tra i vettori numerici dei loro coefficienti.

Così a titolo di esempio il polinomio ax + by + cz + d dipende dai polinomi a'x + b'y + c'z + d' e a"x + b"y + c"z + d" se e solo se la quaterna (a , b , c , d) dipende dalle due quaterne (a' , b' , c' , d') e (a" , b" , c" , d") .

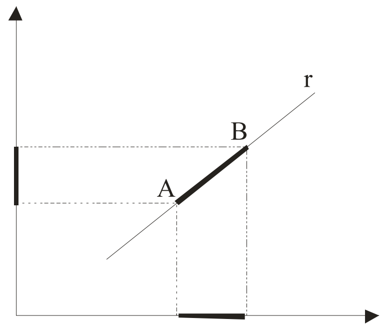
Il risultato che abbiamo ora richiamato vale ovviamente in generale , può essere cioè esteso allo spazio vettoriale dei polinomi in n variabili , e l'averlo ricordato per i polinomi a tre variabili è motivato dalla circostanza che ci troveremo spesso in questa situazione .

Svilupperemo la nostra rassegna analizzando contemporaneamente risultati di geometria piana e dello spazio allo scopo di evidenziare l'unità dei metodi usati nell'uno e nell'altro caso e l' identità di risultati quando si ha a che fare con rette di un piano o con piani dello spazio. Supporremo noto il concetto di riferimento cartesiano nel piano e nello spazio e la capacità di assegnare in un riferimento fissato le coordinate ai punti del piano o dello spazio. Ricordiamo solo che nel piano le coordinate di un punto sono costituite da una coppia ordinata di numeri reali mentre nello spazio le coordinate di un punto sono una terna ordinata di numeri reali.

Riterremo d'ora in poi che sia sempre fissato un riferimento *monometrico ortogonale*.

Se r è una retta del piano ed A e B sono due suoi punti *distinti* le *componenti* del vettore (AB) nel riferimento fissato sono date dai seguenti due numeri reali :

$$\lambda = x_B - x_A \qquad \mu = y_B - y_A$$



Questi due numeri reali non entrambi nulli (essendo A e B distinti) forniscono la misura relativa dei segmenti evidenziati in neretto in figura, proiezioni di (AB) sugli assi del riferimento. Si noti che se si ruota “un poco“ (AB) questi due numeri cambiano e precisamente uno dei due aumenta e l'altro diminuisce. Pertanto questi due numeri aumentano entrambi o diminuiscono entrambi se e solo se si allunga o si accorcia (AB) ; di più esse ,ad esempio, si triplicano se (AB) si triplica , si dimezzano se (AB) si dimezza e così via.

I numeri reali (λ , μ) vengono chiamati ***numeri direttori*** della retta r e la loro determinazione è molto utile per le applicazioni . Se i punti A e B vengono sostituiti da altri due punti distinti C e D allora è (CD) = ρ (AB) (dove ρ è un numero reale non nullo) e quindi è :

$$\lambda' = (x_D - x_C) = \rho\, (x_B - x_A) = \rho\, \lambda \qquad , \qquad \mu' = (y_D - y_C) = \rho\, (y_B - y_A) = \rho\, \mu$$

Pertanto i numeri direttori di r sono una coppia di numeri reali non entrambi nulli e definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Analogamente se siamo nello spazio ed r è una sua retta scelti due punti distinti A e B su r , i tre numeri reali (non tutti e tre nulli)

$$\lambda = x_B - x_A \quad , \qquad \mu = y_B - y_A \quad , \qquad \nu = z_B - z_A$$

sono chiamati i *numeri direttori di r* . Per le stesse argomentazioni precedenti i numeri (λ , μ , ν) *numeri direttori di r sono mai tutti e tre nulli contemporaneamente e sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo* .

I numeri direttori , una volta noti , possono essere utilizzati per valutare l'eventuale parallelismo tra rette sia nel piano e sia nello spazio. Sussistono infatti le seguenti equivalenze :

Teorema 1 . *Due rette r ed r' del piano sono parallele se e solo se esse hanno gli stessi numeri direttori (cioè i numeri direttori (λ, μ) di r sono eguali o proporzionali ai numeri (λ', μ') direttori di r')* .

Teorema 2 . *Due rette r ed r' dello spazio sono parallele se e solo se esse hanno gli stessi numeri direttori (cioè i numeri direttori (λ, μ, , ν) di r sono eguali o proporzionali ai numeri direttori (λ', μ', , ν') di r')* .

Ricordiamo che se (AB) e (CD) sono due vettori non nulli del piano o dello spazio, si definisce loro prodotto scalare il numero reale ξ che si ottiene eseguendo il seguente calcolo

$$\xi = |AB|\,|CD|\cos\varphi$$

avendo indicato con $|AB|$ e $|CD|$ le lunghezze dei due segmenti e con φ l'angolo che essi formano. Ovviamente i due segmenti risultano tra loro ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare si annulla . Avendo scelto il riferimento monometrico ed ortogonale allora è ben noto che risulta

$$\xi = |AB|\,|CD|\cos\varphi = \lambda\lambda' + \mu\mu'$$

avendo indicato con (λ, μ) le componenti di (AB) e con (λ', μ') le componenti di (CD). Analogamente se (AB) e (CD) sono vettori dello spazio risulta

$$\xi = |AB|\,|CD|\cos\varphi = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'$$

avendo indicato con (λ, μ, ν) le componenti di (AB) e con (λ', μ', ν') le componenti di (CD).

I numeri direttori una volta noti possono essere quindi utilizzati per valutare l'eventuale ortogonalità tra rette sia nel piano e sia nello spazio.

Sussistono infatti le seguenti equivalenze :

Teorema I . *Due rette r ed r' del piano sono ortogonali se e solo se risulta :*

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' = 0$$

Teorema II . *Due rette r ed r' dello spazio sono ortogonali se e solo se risulta :*

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$$

Questi teoremi mostrano come sia essenziale saper determinare di una retta i suoi numeri direttori . Si possono dedurre tali numeri da una rappresentazione della retta ? Vediamo.

Intanto , come *si rappresenta una retta* ? C'è un modo di rappresentare allo stesso modo una retta sia che essa sia una retta del piano o dello spazio. Vediamo come .

Sia r una retta del piano e siano A e B due suoi punti distinti . Un punto P(x,y) del piano appartiene ad r se e solo se risulta

$$(AP) = \rho \ (AB)$$

o equivalentemente se e solo se :

$$(x- x_A \ , \ y - y_A) = \rho \ (x_B - x_A \ , y_B - y_A)$$

Pertanto le coordinate di (x,y) di P sono espresse dalle seguenti relazioni

(1)
$$\begin{cases} x = x_A + \rho \ (x_B - x_A) \\ y = y_A + \rho \ (y_B - y_A) \end{cases}$$

Le (1) forniscono al variare del parametro ρ nel campo reale le coordinate (x,y) dei punti di r e per questo motivo vengono chiamate le *equazioni parametriche di r* .

Si noti che nelle (1) i due numeri che accompagnano il parametro ρ sono i numeri direttori di r. Pertanto se la retta r è rappresentata parametricamente i numeri direttori sono i due numeri che accompagnano il parametro ρ .

Sia ora r una retta dello spazio e siano A e B due suoi punti distinti . Un punto P(x,y,z)) dello spazio appartiene ad r se e solo se risulta

$$(AP) = \rho \ (AB)$$

o equivalentemente se e solo se :

$$(x- x_A \ , y - y_A \ , z - z_A) = \rho \ (x_B - x_A \ , y_B - y_A \ , z_B - z_A)$$

Pertanto le coordinate di (x,y,z) di P sono espresse dalle seguenti relazioni

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} x = x_A + \rho(x_B - x_A) \\ y = y_A + \rho(y_B - y_A) \\ z = z_A + \rho(z_B - z_A) \end{cases}$$

Le (2) forniscono al variare del parametro ρ nel campo reale le coordinate (x,y,z) dei punti di r e per questo motivo vengono chiamate le *equazioni parametriche di r* .

Si noti che nelle (2) i tre numeri che accompagnano il parametro ρ sono i numeri direttori di r. Pertanto se la retta r è rappresentata parametricamente i numeri direttori sono i tre numeri che accompagnano il parametro ρ .

Sia r una retta del piano ed A e B due suoi punti distitnti . Un punto P (x,y) del piano appartiene ad r se e solo se risulta (AP) = ρ (AB) cioè se e solo se i due vettori AP ed AB sono dipendenti . Poiché il passaggio alle componenti di un vettore è un isomorfismo allora la dipendenza dei due vettori (AP) ed (AB) equivale alla dipendenza dei vettori numerici $(x- x_A \ , y - y_A)$, $(x_B - x_A \ , y_B - y_A)$. Questi due vettori numerici sono dipendenti se e solo se risulta :

$$\text{(1*)} \qquad \det \begin{pmatrix} x - x_A , & y - y_A \\ x_B - x_A , & y_B - y_A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Sviluppando tale determinante si ottiene un'equazione di primo grado in x ed y del tipo

(i) $$ax + by + c = 0$$

soddisfatta da tutte e sole le coppie (x, y) coordinate dei punti di r . La (i) è detta la *rappresentazione cartesiana di r* . Ovviamente ogni equazione proporzionale alla (i) avendo le stesse soluzioni di (i) rappresenta sempre la retta r .

Si prova facilmente che , viceversa , un'equazione di primo grado in x e y rappresenta una retta del piano.

Quindi una retta del piano può essere rappresentata o in forma parametrica o in forma cartesiana.

Per esempio rappresentiamo la retta per i punti A(2,5) e B (4 , 8) .

Usando la (1) tale retta si rappresenta con

(a) $$\begin{cases} x = 2 + 2\rho \\ y = 5 + 3\rho \end{cases}$$

Usando (1*)

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

si ha :

(b) $$3x - 2y + 4 = 0.$$

Si noti che all'equazione (b) si poteva pervenire anche usando la rappresentazione parametrica (a). Infatti da (a) segue

$$\rho = \frac{x-2}{2} \qquad \rho = \frac{y-5}{3}$$

e quindi eguagliando si ha l'equazione (b).

Ora se la retta r è rappresentata con l'equazione

$$ax + by + c = 0$$

come si possono calcolare i suoi numeri direttori ? Vediamo .
Se A (x_A , y_A) e B (x_B , y_B) sono due punti di r allora le loro coordinate verificano l'equazione $ax + by + c = 0$ e pertanto si ha :

$$a\, x_B + b\, y_B + c = 0$$

$$a\, x_A + b\, y_A + c = 0$$

Sottraendo membro a membro le due relazioni sopra scritte si ha :

$$a\,(x_B - x_A) + b\,(y_B - y_A) = 0$$

o equivalentemente

$$\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ -b & a \end{pmatrix} = 0$$

La relazione sopra scritta mostra che la coppia (- b , a) è proporzionale alla coppia
($x_B - x_A$, $y_B - y_A$) che è appunto una coppia di numeri direttori di r . Pertanto se la retta è rappresentata dall'equazione $ax + by + c = 0$ allora una coppia di numeri direttori di r è data dalla coppia (-b , a).

Possiamo allora riformulare i teoremi 1 ed I al seguente modo :

Teorema 2 . Due rette del piano r ed r' rappresentate da

r : $ax + by + c = 0$

r' : $a'x + b'y + c' = 0$

sono parallele se e solo se risulta $(-b , a) = (-b' , a')$ o equivalentemente

$$(j) \qquad (a , b) = \rho (a' , b') .$$

A questa conclusione si poteva pervenire direttamente senza utilizzare il teorema 1 in quanto la condizione (j) equivale a

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$$

e tale condizione è necessaria e sufficiente affinché il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

abbia infinite soluzioni o nessuna soluzione.

Il teorema I può quindi essere così altresì enunciato

Teorema II ' . Due rette del piano r ed r' rappresentate da

r : $ax + by + c = 0$

r' : $a'x + b'y + c' = 0$

sono ortogonali se e solo se risulta

$$aa' + bb' = 0$$

Concludiamo tale numero cercando di rappresentare tutte le rette che passino per un fissato punto $A(x_o , y_o)$. Tale insieme di rette viene chiamato *fascio di rette di centro A* .

Siano r ed r' due rette per $A (x_o , y_o)$ rappresentate da :

r : $ax + by + c = 0$

r' : $a'x + b'y + c' = 0$

Poichè A appartiene sia ad r che ad r' le sue coordinate soddisfano entrambe le equazioni. Ne consegue che se consideriamo un'equazione del tipo

(**) $$\alpha(ax + by + c) + \beta (a'x + b'y + c') = 0$$

con $(\alpha , \beta) \neq (0 , 0)$ ottenuta combinando linearmente le due equazioni date, essa rappresenta una retta ancora per il punto A in quanto le coordinate di A la soddisfano qualunque sia la scelta dei coefficienti α e β . Se ogni retta per A si ottiene mettendo nella (**) un opportuno valore di α ed un opportuno valore di β allora al variare di questi due parametri α e β la (**) descrive tutte le rette per A e quindi rappresenta il fascio di rette di centro A.
Sia quindi r'' una qualunque retta per A rappresentata dall'equazione :

r'' : $a''x + b''y + c'' = 0$

Il sistema formato dalle tre equazioni

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0 \end{cases}$$

risulta compatibile in quanto la coppia (x_o , y_o) è una sua soluzione. Ne consegue che la matrice completa ha lo stesso rango di quella incompleta e quindi ha rango due .

Risulta allora

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0$$

Le tre righe di tale matrice sono quindi dipendenti e poiché le prime due sono indipendenti allora la terza è combinazione lineare delle prime due e così si ha l'asserto.

Due rette per il punto A(x_o , y_o) di semplice rappresentazione sono quelle per A parallele agli assi coordinati cioè le rette di equazione

$$x - x_o = 0 \quad \text{ed} \quad y - y_o = 0$$

e pertanto, per ciò che precede, l'equazione

$$\alpha\ (x - x_o) + \beta\ (y - y_o) = 0$$

al variare di α , β rappresenta tutte le rette per A e per tale motivo viene chiamata *l'equazione del fascio di rette di centro A*.

2. Rette e piani dello spazio.

Sia ora π un piano dello spazio e siano A, B , C tre punti di π distinti e non allineati. Un punto P(x,y,z) dello spazio appartiene al piano π se e solo se i vettori
(AP) , (AB), (AC) sono dipendenti o equivalentemente se e solo se le tre terne

$(x- x_A\ ,\ y - y_A , z - z_A), (x_B - x_A , y_B - y_A\ , z_B - z_A) , (x_C - x_A\ , y_C - y_A\ , z_C - z_A)$

sono dipendenti. Ma allora il punto P(x,y,z) dello spazio appartiene al piano se e solo se risulta

$$\det\begin{pmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{pmatrix} = \det$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante sopra scritto si ottiene un' equazione di primo grado in x, y , z del tipo

$$ax + by + cz + d = 0$$

soddisfatta da tutte e sole le terne (x, y, z) coordinate dei punti P di π . Ovviamente ogni equazione proporzionale ad essa avendo le stesse soluzioni rappresenta pur sempre il piano π.
Si prova facilmente che , viceversa , un'equazione di primo grado in x . y, z rappresenta un piano dello spazio .

A titolo di esempio si voglia rappresentare il piano π per i tre punti A (1 , 0 , 0) B (0 , 1 , 2) C(1 , 1 , 3). Per le argomentazioni precedenti l'equazione di tale piano si ottiene sviluppando il determinante :

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Si ha quindi che il piano richiesto ha equazione : $x + 3y - z - 1 = 0$.

Siano π e π' due piani dello spazio rappresentati rispettivamente da :

$\boldsymbol{\pi}$: $\quad ax + by + cz + d = 0$

$\boldsymbol{\pi'}$: $\quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$

E’ ben noto che il sistema S

$$S : \quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

formato dalle due equazioni che rappresentano i piani π e π' ha soluzioni se e solo se le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso rango .

Se il rango di A è due allora anche A’ ha rango due e quindi il sistema S ha infinite soluzioni. In questo caso quindi i due piani hanno una retta in comune ed il sistema S fornisce una ***rappresentazione di tale retta .***

Se la matrice A ha rango uno allora bisogna controllare il rango di A’ . Se anche A’ ha rango uno allora le due righe di A’ sono proporzionali e quindi i due piani dati coincidono e sono quindi *paralleli* (*impropriamente*) . Se il rango di A’ è due il sistema S non ha soluzioni e quindi i due piani non avendo punti in comune sono tra loro *paralleli* (*propriamente*). La conclusione delle nostre argomentazioni può essere riassunta nel seguente teorema analogo al teorema 1.1 già stabilito per due rette di un piano .

Teorema 2.1 *Siano π e π' due piani dello spazio rappresentati rispettivamente da :*

$$\pi : \quad ax + by + cz + d = 0$$

$$\pi' : \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

I piani π e π' sono paralleli se e solo se risulta

$$(a , b , c) = \rho (a' , b' , c')$$

Abbiamo così visto che una retta r dello spazio può essere rappresentata in due modi : in forma parametrica oppure con un sistema di due equazioni rappresentative di due piani distinti che la contengono.

Sia r una retta dello spazio rappresentata dal seguente sistema S:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Come si possono dedurre i numeri direttori di r da tale rappresentazione ? Vediamo.

Se $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ sono due punti di r allora le loro coordinate verificano il sistema S che rappresenta r , e quindi valgono le seguenti relazioni :

$$a\,x_B + b\,y_B + c\,z_B + d = 0$$
$$a\,x_A + b\,y_A + c\,z_A + d = 0$$

$$a'\,x_B + b'\,y_B + c'\,z_B + d' = 0$$
$$a'\,x_A + b'\,y_A + c'\,z_A + d' = 0$$

Dalle relazioni sopra scritte , sottraendo membro a membro , si ha :

$$\text{(ii)} \qquad \begin{cases} a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A) = 0 \\ a'(x_B - x_A) + b'(y_B - y_A) + c'(z_B - z_A) = 0 \end{cases}$$

Le (ii) mostrano che i tre numeri direttori $(x_B - x_A, \; y_B - y_A, \; z_B - z_A)$ che stiamo cercando sono una soluzione non nulla del sistema omogeneo (nelle incognite ℓ , m n) seguente :

$$\begin{cases} a\ell + bm + cn = 0 \\ a'\ell + b'm + c'n = 0 \end{cases}$$

e quindi essi ***possono ottenersi (*** *come già visto nel capitolo III*) ***calcolando, a segno alterno, i determinanti delle matrici***

$$\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

ottenute dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

dei coefficienti cancellando la prima ,la seconda e la terza colonna.

Siano r una retta dello spazio rappresentata parametricamente da :

$$r : \quad \begin{cases} x = x_o + \rho\lambda \\ y = y_o + \rho\mu \\ z = z_o + \rho\upsilon \end{cases}$$

e π un piano rappresentato dall' equazione $ax + by + cz + d = 0$. Un punto P della retta r ha coordinate $(x_o + \rho\lambda, y_o + \rho\mu, z_o + \rho\nu)$ e tale punto appartiene anche al piano se le sue coordinate soddisfano l'equazione del piano cioè se vale la seguente eguaglianza :

$$\text{(jjj)} \qquad a(x_o + \rho\lambda) + b(y_o + \rho\mu) + c(z_o + \rho\nu) + d = 0 .$$

Quindi ogni valore di ρ che renda soddisfatta la (jjj) dà luogo ad un punto della retta che giace anche nel piano. Bisogna quindi determinare le soluzioni della (jjj) pensata come equazione in ρ .
La (jjj) come equazione in ρ è di primo grado e del tipo :

(jjj) $$A\rho + B = 0$$

Avendo posto :

$$A = a\lambda + b\mu + c\nu \quad \text{e} \quad B = a x_o + + b y_o + c z_o + d \ .$$

Ora se risulta $A \neq 0$ l'equazione (jjj) ha una sola soluzione data da $\rho = \dfrac{-B}{A}$ ed in tal caso il piano e la retta hanno un solo punto in comune quello corrispondente al valore $\rho = \dfrac{-B}{A}$ trovato.

Se invece $A = 0$ ed è $B = 0$ allora ogni valore di ρ soddisfa (jjj) e quindi ogni punto della retta giace nel piano . Quindi se $A = 0$ e $B = 0$ la retta giace nel piano . Se $A = 0$ ma è $B \neq 0$ allora la (jjj) non ha soluzioni e quindi nessun punto della retta giace nel piano.

Le argomentazioni sopra fatte portano quindi ad enunciare il seguente teorema.

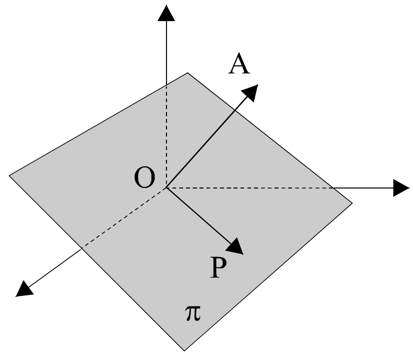
Teorema 2.2 *Una retta r dello spazio di numeri direttori (λ , μ , ν) ed un piano π rappresentato dall'equazione $ax + by + cz + d = 0$ sono paralleli se e solo se risulta :*

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0.$$

Sia π un piano passante per l'origine delle coordinate e sia

$$ax + by + cz = 0$$

l'equazione che lo rappresenta .



Consideriamo il punto A (a, b , c) di coordinate (a,b,c). Tale punto è distinto dall'origine, essendo (a, b , c) $\neq$ (0,0,0) e non appartiene al piano π in quanto aa + bb + cc > 0 .

Se P (x , y , z) è un punto del piano π risulta ax + by + cz = 0 e ciò mostra che i due vettori OA ed OP sono tra loro ortogonali . Abbiamo così mostrato che il vettore OA è ortogonale ad ogni vettore OP del piano e quindi OA è ortogonale al piano . La retta OA che ha numeri direttori (a, b , c) è quindi ortogonale al piano di equazione ax + by + cz = 0 . Ovviamente un piano parallelo a π conserva gli stessi coefficienti (a , b , c) ed una retta parallela alla retta OA conserva gli stessi numeri direttori e così è provato il seguente teorema :

Teorema 2.3 *Una retta r di numeri direttori (λ , μ , ν) risulta ortogonale ad un piano di equazione ax + by + cz + d = 0 se e solo se risulta*

$$(\lambda , \mu , \nu) = \rho \ (a, b , c)$$

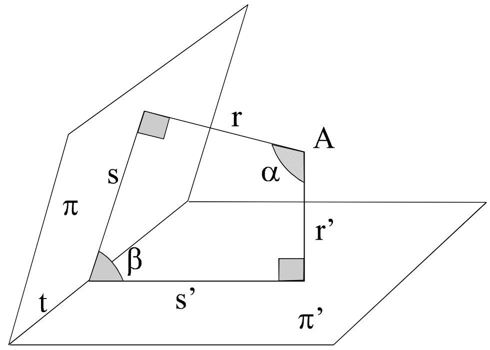
Siano ora dati due piani π e π' distinti e non paralleli e sia t la retta ad essi comune.

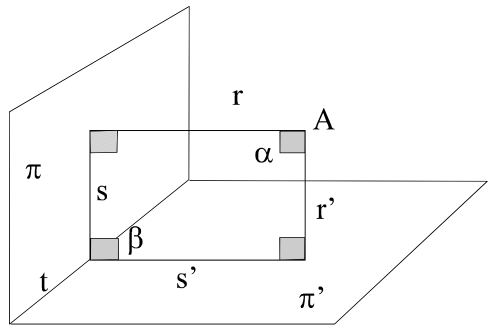
I piani π e π' siano rappresentati rispettivamente da

$$\pi : \qquad ax + by + cz + d = 0$$

$$\pi' : \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

Si consideri un punto A non appartenente ai due piani e siano r la retta per A ortogonale a π ed r' la retta per A ortogonale a π' . La retta r essendo ortogonale a π ha numeri direttori (a , b , c) ed r' essendo ortogonale a π' ha numeri direttori (a' , b' , c'). Il piano determinato da r ed r' è ortogonale alla retta t e contiene il quadrilatero di lati r, r’,s, s’ , avendo indicato con s la retta $\pi \cap \pi''$ e con s’ la retta $\pi' \cap \pi''$.





Facendo riferimento alla figura gli angoli α e β opposti tra loro in questo quadrilatero sono ovviamente tra loro supplementari essendo retti gli altri due. Inoltre i piani π e π’ sono tra loro ortogonali se e solo se β è un angolo retto. Valgono così le seguenti equivalenze :

$$\pi \perp \pi' \iff \beta = \frac{\pi}{\mathbf{2}} \iff \alpha = \frac{\pi}{\mathbf{2}} \iff r \perp r'$$

Ne segue che i due piani sono ortogonali se e solo se tali risultano le due rette r ed r’. Tenendo conto del teorema II di pagina 4 resta provato il seguente

Teorema 2.4 *Due piani π e π’ rappresentati rispettivamente da*

π : $$ax + by + cz + d = 0$$

π' : $$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sono tra loro ortogonali se e solo se risulta

$$a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0$$

3. Fasci di piani

Sia r una retta rappresentata dal sistema

$$r: \quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

l' insieme di tutti i piani che contengono la retta r è chiamato ***fascio di piani di asse r.***
Sia $P(x_o, y_o, z_o)$ un punto qualsiasi di r . Allora P con le sue coordinate soddisfa entrambe le equazioni del sistema . Ne consegue che se consideriamo un'equazione del tipo

$$(**) \qquad \alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

con $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ottenuta combinando linearmente le due equazioni date, essa rappresenta ancora un piano per la retta r in quanto le coordinate di P soddisfano tale equazione qualunque sia la scelta dei coefficienti α e β . Se ogni piano per r si ottiene mettendo nella (**) un opportuno valore di α ed un opportuno valore di β allora al variare di questi due parametri α e β la (**) descrive tutti i piani per r e quindi rappresenta il fascio di piani di asse r .
Sia quindi **π''** un qualunque piano per r rappresentato dall'equazione :

$$\pi'' \qquad a''x + b''y + c''z + d'' = 0 .$$

Il sistema formato dalle tre equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni fornite dalle coordinate dei punti di r . Pertanto le due matrici del sistema hanno lo stesso rango . Ora la matrice incompleta

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

ha rango due altrimenti il sistema avrebbe una unica soluzione e così anche quella completa

$$A' =\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

deve avere rango due . Pertanto le tre righe di A' sono dipendenti e poiché le prime due sono indipendenti si ha che la terza riga è combinazione delle prime due. Si ha così l'asserto.

4. – Stelle di piani .

In tale numero cercheremo di rappresentare tutti i piani che passino per un fissato punto $A(x_o , y_o , z_o)$. Tale insieme di piani viene chiamato *stella di piani di centro A* .

Siano π , π' e π'' tre piani per A ed aventi in comune il ***solo punto A***. I piani π , π' e π'' siano rappresentati da

π : $$ax + by + cz + d = 0$$

π' : $$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

π'' : $$a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

Poiché i tre piani dati hanno in comune il solo punto A allora il sistema formato dalle tre equazioni che rappresentano i tre piani π , π' e π'' ha una sola soluzione e quindi la sua matrice incompleta

ha il determinante diverso da zero.
Inoltre poichè A appartiene sia a π sia a π' e sia a π'' le sue coordinate soddisfano tutte e tre le equazioni. Ne consegue che se consideriamo un'equazione del tipo

$$(*) \qquad \alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a'x + b'y + c'z + d') + \gamma(a''x + b''y + c''z + d'') = 0$$

con $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ ottenuta combinando linearmente le tre equazioni date, essa rappresenta un piano, ancora per il punto A, in quanto le coordinate di A la soddisfano qualunque sia la scelta dei coefficienti α, β e γ. Se ogni piano per A si ottiene mettendo nella (*) un opportuno valore di α, un opportuno valore di β ed un opportuno valore di γ allora al variare dei parametri α, β e γ la (*) descrive tutti i piani per A e quindi rappresenta la *stella di piani di centro A*.
Sia quindi π_0 un qualunque piano per A rappresentato dall'equazione :

$$\pi_0 : \qquad a_o x + b_o y + c_o z + d_o = 0$$

Il sistema formato dalle quattro equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a_o x + b_o y + c_o z + d_o = 0 \end{cases}$$

risulta compatibile in quanto la terna (x_o, y_o, z_o) è una sua soluzione. Ne consegue che la matrice completa ha lo stesso rango di quella incompleta e quindi ha rango tre.
Risulta allora

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a_o & b_o & c_o & d_o \end{pmatrix} = 0$$

Le quattro righe di tale matrice sono quindi dipendenti e poiché le prime tre sono indipendenti allora la quarta è combinazione lineare delle prime tre e così si ha l'asserto.
Tre piani per il punto $A(x_o, y_o, z_o)$ di semplice rappresentazione sono quelli per A paralleli ai

piani coordinati cioè i piani rappresentati da :

$$x - x_o = 0 \qquad y - y_o = 0 \qquad z - z_o = 0$$

pertanto, per ciò che precede, l'equazione

$$\alpha\,(x - x_o) + \beta\,(y - y_o) + \gamma\,(z - z_o) = 0$$

al variare di α , β e γ rappresenta tutti i piani per A e per tale motivo viene chiamata *l'equazione della stella di piani di centro A* .

Concludiamo con alcuni esercizi . Prima di far ciò evidenziamo alcune semplici proprietà d'incidenza tra, punti , rette e piani dello spazio utili per le applicazioni .

1. Siano dati un punto A ed una retta r non contenente A.

a) C' è una sola retta per A parallela ad r .

b) C' è un sol piano che contiene A ed r . In tale piano giacciono tutte le rette per A incidenti r .

c) C' è un sol piano per A ortogonale ad r . In tale piano giacciono tutte le rette per A ortogonali ad r .

2. Siano dati un punto A ed un piano π non contenente A.

a) C'è un sol piano per A parallelo a $\boldsymbol{\pi}$ *. Tale piano contiene tutte le rette per A parallele a* $\boldsymbol{\pi}$ *.*

b) C' è una sola retta per A ortogonale a $\boldsymbol{\pi}$ **.**

3. Siano dati una retta r ed un piano π non contenente r . La retta r sia incidente il *piano ma non sia ortogonale al piano*

a) C'è un sol piano per r ortogonale a $\boldsymbol{\pi}$.

***4. Si**ano date due rette r ed s tra loro sghembe.*

a) C' è un sol piano per r parallelo ad s .

Concludiamo con qualche esercizio .

Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, siano dati il punto A (1 , 1, 2) il piano $\boldsymbol{\pi}$ rappresentato da $2x + y -3z + 1 = O$ e la retta r rappresentata da

$$r : \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Si rappresentino

1. La retta per A parallela ad r .

2. La retta per A ortogonale a π

3. Il piano per A parallelo a π *.*

4. Il piano per A ortogonale ad r

5. Il piano per A ed r .

6. Il piano per r ortogonale a π*.*

7. La retta per A incidente r e parallela a π *.*

8. La retta per A incidente r ed ortogonale ad r .

Soluzioni .

Come già detto i numeri direttori di r si ottengono attraverso i minori (presi a segno alterno) della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e pertanto sono (-2 , -1 , 2) o una terna proporzionale come ad esempio (2 , 1 , -2).

Quesito 1.

La retta richiesta dovendo essere parallela ad r deve avere gli stessi numeri direttori di r quindi essa si rappresenta parametricamente al seguente modo:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\rho \\ y = 1 + \rho \\ z = 2 - 2\rho \end{cases}$$

Quesito 2 .

La retta richiesta per essere ortogonale a π deve avere numeri direttori proporzionali ai coefficienti (a,b,c) dell'equazione del piano. Pertanto la retta richiesta si rappresenta parametricamente al seguente modo:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\rho \\ y = 1 + \rho \\ z = 2 - 3\rho \end{cases}$$

Quesito 3.

Il piano richiesto , dovendo passare per A ha una rappresentazione del tipo

$a(x-1) + b(y-1) + c(z-2) = 0$ (*stella di piani di centro A*)

Inoltre tale piano dovendo essere parallelo a π deve soddisfare la condizione di parallelismo tra piani. Bisogna pertanto scegliere (a , b ,c) proporzionali a (2 , 1 , -3). Il piano richiesto ha quindi equazione $2(x-1) + (y-1) -3(z-2) = 0$ cioè $2x + y -3z + 3 = 0$.

Quesito 4 .

Il piano richiesto , dovendo passare per A ha una rappresentazione del tipo

$a(x-1) + b(y-1) + c(z-2) = 0$ (*stella di piani di centro A*)

Inoltre tale piano dovendo essere ortogonale ad r deve avere i coefficienti (a ,b,c) proporzionali ai numeri direttori di r che sono (2, 1, -2). Il piano richiesto ha quindi equazione

$$2(x-1) + (y-1) -2(z-2) = 0$$

cioè $$2x + y -2z + 1 = 0.$$

Quesito 5.

Un qualunque piano per la retta r si rappresenta (al variare dei parametri h e k) con l'equazione

$$h(x-2y) + k(x+z-2) = 0 .$$

Tale piano $(h+k)x - 2hy + kz - 2k = 0$ contiene il punto A se le coordinate di A sono una sua soluzione quindi se $h + k - 2k + 2k - 2k = h - k = 0$. Quindi è $h = k$ e pertanto il piano richiesto è (scegliendo $h = k = 1$) $2x - 2y + z - 2 = 0$.

Quesito 6.

Un qualunque piano per la retta r si rappresenta (al variare dei parametri h e k) con l'equazione

$$h(x-2y) + k(x+z-2) = 0 .$$

Tale piano $(h+k)x - 2hy + kz - 2k = 0$ è ortogonale al piano π se è soddisfatta la condizione di ortogonalità tra piani cioè se è $2(h+k) - 2h - 3k = -k = 0$. Quindi è $k = 0$ e pertanto il piano richiesto è (scegliendo $h = 1$) $x - 2y = 0$.

Quesito 7

La retta richiesta dovendo passare per A ed incidere r si trova sul piano che contiene A ed r. Dovendo inoltre passare per A ed essere parallela a π si trova sul piano per A parallelo a π. Quindi la retta richiesta dovendo stare su questi due piani è la retta comune a questi due piani e quindi si rappresenta con

$$\begin{cases} 2x - 2y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

Quesito 8

La retta richiesta dovendo passare per A ed incidere r si trova sul piano che contiene A ed r. Dovendo inoltre passare per A ed essere ortogonale ad r si trova sul piano per A ortogonale a r. Quindi la retta richiesta dovendo stare su questi due piani è la retta comune a questi due piani e quindi si rappresenta con

$$\begin{cases} 2x - 2y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Capitolo II

Piani affini e proiettivi

1. ***Piani affini e proiettivi.***

Un ***piano affine*** è una coppia (α , $\mathcal{R}$) dove α è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti *punti* ed $\mathcal{R}$ è una famiglia di parti proprie, ognuna di cardinalità almeno due , i cui elementi sono detti *rette* verificante le seguenti proprietà :

1. *due punti appartengono ad una unica retta.*
2. *dati una retta ℓ ed un punto p non appartenente ad ℓ esiste una sola retta per p ad intersezione vuota con ℓ (unicità della parallela)*
3. *esistono tre punti non allineati.*

Sia (α , $\mathcal{R}$) un piano affine . Due rette r ed r' le diciamo *parallele* se è r = r' oppure è $r \cap r' = \emptyset$. Tale relazione è, come è facile controllare , una relazione d'equivalenza nell'insieme $\mathcal{R}$ delle rette del piano.

Per la proprietà 2 (unicità della parallela) una retta r insieme a tutte le sue parallele fornisce una partizione dei punti del piano.

Inoltre una retta r e tutte le sue parallele definiscono un *fascio improprio* di rette del piano.

L'insieme di tutte le rette passanti per un fissato punto p viene chiamato *fascio proprio* di rette *di centro p.*

Un ***piano proiettivo*** è una coppia (π, $\mathcal{L}$) dove π è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti *punti* ed $\mathcal{L}$ è una famiglia di parti proprie di π i cui elementi sono detti *rette* verificante le seguenti proprietà :

a) *due punti appartengono ad una unica retta.*
b) *due rette distinte si intersecano in un unico punto.*
c) *esistono quattro punti a tre a tre non allineati .*

Le proprietà a) , b) , c) sono equivalenti ad

a) *due punti appartengono ad una unica retta.*
b) *due rette distinte si intersecano in un unico punto.*
c') *ogni retta ha almeno tre punti .*

Dimostrazione.

Supponiamo che siano verificate le proprietà a) , b) , c) e siano A , B , C , D i quattro punti a tre a tre non allineati che il piano possiede. Sia L una retta qualsiasi di π . Uno dei punti A , B , C , D non appartiene ad L e sia , per fissare le idee , il punto A. Poiché A , B , C , D sono punti a tre a tre non allineati allora risultano distinte le tre rette AB , AC , AD . Tali rette intersecano L in tre punti distinti e così L ha almeno tre punti.

Viceversa supponiamo siano verificate le proprietà a) , b) , c') . Siano L ed L' due rette distinte (esse esistono perché le rette sono parti proprie) e sia O il punto che hanno in comune. Poiché ogni retta ha almeno tre punti possiamo scegliere su L – {O } due punti distinti A e B e su L' – {O } due punti distinti C e D . I quattro punti A, B, C , D sono a tre a tre non allineati e l'asserto è così provato.

Il primo risultato importante relativo a tali strutture è il seguente :

Proposizione 1.1. *Le rette di un piano affine sono equipotenti . Le rette di un piano proiettivo sono equipotenti.*

Dimostrazione . Sia (α , $\mathcal{R}$) un piano affine e siano r ed r' due sue rette tra loro incidenti. Sia y il punto comune ad r ed r'. Siano p un punto di r distinto da y e sia p' un punto di r' distinto da y . Sia t la retta pp'. Per ogni punto x di r sia t' la retta per x parallela a t e sia x' il punto di incontro tra t' ed r'. La corrispondenza x → x' è biettiva onde è | r | = | r' | . Se le rette r ed r' sono tra loro parallele si consideri la retta t che unisce un punto p di r con un punto p' di r'. Essendo la retta t incidente sia r che r' risulta per ciò che precede | r | = | t | e | r' | = | t | onde è ancora | r | = | r' | .

Sia ora (π , $\mathcal{L}$) un piano proiettivo e siano r ed r' due rette distinte incidenti tra loro nel punto y . Siano p un punto di r distinto da y e sia p' un punto di r' distinto da y . Sia t la retta pp'. Poiché t ha almeno tre punti c'è su t un punto z distinto da p e p'. Il punto z non appartiene quindi né ad r né ad r' . Per ogni punto x di r sia x' il punto di r' intersezione tra la retta r' e la retta [x z]. La corrispondenza x→ x' è biettiva onde è | r | = | r' | .

Per gli scopi di questa trattazione supporremo che gli insiemi α e π sostegni dei due piani ,affine e proiettivo, siano infiniti e che tali risultino le loro rette.

Due piani affini (α , $\mathcal{R}$) e (α' , $\mathcal{R}'$) si dicono ***isomorfi*** se esiste una biezione

$f : \alpha \rightarrow \alpha'$ tra i sostegni α ed α' che trasforma rette di α in rette di α' .

E' facile controllare che se f è un isomorfismo anche la funzione inversa f^{-1} è un isomorfismo in quanto trasforma le rette di α' nelle rette di α .

Evidentemente se due piani affini sono isomorfi allora la cardinalità delle rette di α eguaglia la cardinalità delle rette di α'

Due piani proiettivi (π , $\mathcal{L}$) e (π' , $\mathcal{L}'$) si dicono ***isomorfi*** se esiste una biezione

$f : \pi \rightarrow \pi'$ tra i sostegni π ed π' che trasforma rette di π in rette di π' .

E' facile controllare che se f è un isomorfismo, anche la funzione inversa f^{-1} è un isomorfismo in quanto trasforma le rette di π' nelle rette di π .

Evidentemente se due piani proiettivi sono isomorfi allora la cardinalità delle rette di π eguaglia la cardinalità delle rette di π' .

Osservando le due definizioni date, di piano affine e piano proiettivo, si osserva che la differenza di fondo è che in un piano affine ci sono rette ad intersezione vuota (rette *parallele* tra loro) mentre in un piano proiettivo due rette hanno sempre un punto in comune.

L' aspetto comune è che in entrambe le strutture per due punti passa una sola retta.

Mostreremo ora come ogni piano affine possa , con l'aggiunta di opportuni *nuovi punti* e *nuove rette*, essere trasformato in un piano proiettivo . E' chiaro a priori che i punti che aggiungeremo dovranno far sì che due rette che nel piano affine hanno intersezione vuota nel nuovo piano abbiano un punto in comune.

Vediamo come si effettua questa costruzione.

Sia r una retta del piano affine . Indichiamo con O_r un oggetto da noi scelto e che chiamiamo *punto improprio* ed ampliamo la retta r aggiungendo ad essa questo nuovo punto . Ogni retta del piano ha quindi un nuovo punto ed il criterio che seguiremo per tale attribuzione è il seguente :

$$O_r = O_s \quad \Leftrightarrow \quad r \text{ è parallela ad } s$$

(**esplicitamente** : il punto O_r aggiunto ad r coincide col punto O_s aggiunto ad s se e solo se r ed s sono rette tra loro parallele)

Pertanto con tale criterio una retta s parallela ad r sarà ampliata con lo stesso punto che abbiamo aggiunto ad r ed in tal modo le due rette r ed s , prima tra loro parallele, risultano ora incidenti nel punto O_r che è ad esse comune .

Indichiamo con Δ l'insieme di tutti i punti impropri O_r al variare di r nel piano . Che cardinalità ha Δ ? Vediamo .

Si consideri un punto p del piano e sia F_p il fascio proprio di rette di centro p . Per ogni retta r di F_p indichiamo sempre con O_r il suo ***punto improprio*** . E' chiaro che i punti O_r al variare di r in Fp sono tutti distinti tra loro ed esauriscono come ora vedremo l'insieme Δ . Infatti sia t una retta del piano non passante per p . Se r è l'unica retta per p parallela a t allora il punto O_t aggiunto alla retta t coincide con il punto O_r aggiunto alla retta r.

Pertanto i punti impropri sono tanti quante le rette per p . Chiameremo Δ *retta impropria*. Sia r una retta del piano e pensiamola ampliata col suo punto improprio O_r . Sia p un punto non appartenente ad r . Le rette per p sono tante quanti i punti di r ampliata . Infatti la corrispondenza

$$x \in r \quad \to \quad [p,x] \in F_p$$

che associa ad un punto x di r la retta [p,x] che unisce p ed x è biettiva.

Pertanto anche una retta r del piano quando la si pensi ampliata col suo punto improprio ha tanti punti quante le rette di un fascio proprio.

Si consideri ora l'insieme $\pi = \alpha \cup \Delta$ ottenuto aggiungendo ad α i nuovi punti , quelli impropri. Per distinguere i punti di π tra vecchi e nuovi , chiameremo *propri* i punti di π che sono punti di α ed *impropri* i punti π di che sono punti di Δ . Sia ora $\mathcal{L}$ la seguente famiglia di parti di π . Chiameremo *rette* gli elementi di $\mathcal{L}$. Per ogni retta r del piano affine indichiamo con $r^* = r \cup \{ O_r \}$ il sottoinsieme di π ottenuto aggiungendo ad r il suo punto improprio O_r . Le rette di π elementi di $\mathcal{L}$ sono Δ , detta *retta impropria* , e tutte le rette ampliate r* al variare di r nel piano affine (α , $\mathcal{R}$). Le rette r* sono dette *proprie.* Ora proveremo che la coppia (π , $\mathcal{L}$) è un piano proiettivo.

Siano p e p' due punti distinti di π . Se p e p' sono entrambi propri , detta r la retta di α per essi, allora r* è l' unica retta di π che contiene tali due punti. Se p e p' sono entrambi impropri allora Δ è l'unica retta che contiene tali due punti. Se p è proprio e $p' = O_s$ è improprio allora detta r l'unica retta di (α , $\mathcal{R}$) per p parallela ad s si ha che r* è l' unica retta di π che contiene i due punti p e p' .

Siano ora ℓ ed ℓ' due rette distinte di (π , $\mathcal{L}$). Se una delle due è la retta impropria, per esempio sia $\ell' = \Delta$ allora la retta ℓ essendo propria possiede un solo punto improprio che è quindi l'unico punto che essa ha in comune con ℓ' . Possiamo quindi supporre che entrambe le rette ℓ ed ℓ' siano proprie . Poniamo quindi $\ell = r \cup \{ O_r \}$ ed $\ell' = s \cup \{O_s\}$. Se le rette r ed s del piano (α , $\mathcal{R}$) sono parallele allora è $O_r = O_s$ e quindi ℓ ed ℓ' hanno in comune tale punto O_r . Se r incide s nel punto p allora p è il punto comune ad ℓ ed ℓ' .

Poiché ogni retta r di (α , $\mathcal{R}$) ha almeno due punti allora ogni retta r* ampliata ha almeno tre punti e così ogni fascio proprio di rette con centro un punto p di α ha almeno tre rette. Ne segue che anche la retta Δ ha almeno tre punti.

Abbiamo così provato che la coppia (π , $\mathcal{L}$) è un piano proiettivo.

Il piano proiettivo così ottenuto viene chiamato ***l'ampliamento proiettivo del piano affine.***

Possiamo ora far vedere che ogni piano proiettivo è isomorfo ad uno ottenuto come ampliamento di un piano affine . Vediamo.

Sia quindi (π , $\mathcal{L}$) un piano proiettivo e sia L_o una sua retta. Priviamo il piano proiettivo della retta L_o e di tutti i suoi punti . Quindi consideriamo ciò che rimane dopo questa depauperazione . Denotiamo con α l'insieme ottenuto privando π dei punti di L_o . Le rette di α sono le rette L di π , distinte da L_o , ciascuna privata del punto che essa ha in comune con L_o. Indicando con

$$\mathfrak{R} = \{ \ell = L - (L \cap L_o) \ , \ L \neq L_o \ \ L \in \mathcal{L} \}$$

la famiglia di tali rette possiamo ora far vedere che la coppia (α , $\mathfrak{R}$) è un piano affine .
Siano p e p' due punti distinti di α . Essendo p e p' punti distinti di π c'è una sola retta L nel piano proiettivo che contiene questi due punti . La retta $\ell = L - (L \cap L_o)$ è quindi l'unica retta di α per tali due punti. Sia ora $\ell = L - L \cap L_o$ una retta di α e p un punto di α non appartenente ad ℓ . Sia L' la retta del piano proiettivo che unisce i punti p e $p_o = L \cap L_o$.
La retta $\ell' = L' - \{p_o\}$ è l'unica retta di α per p parallela ad ℓ.
Poiché in α esistono almeno due rette esistono tre punti non allineati. La coppia (α , $\mathfrak{R}$) è quindi un piano affine .
Sia p_o un punto di L_o . Consideriamo tutte le rette L di π distinte da L_o passanti per p_o , Ognuna di tali rette , privata del punto p_o , dà luogo ad una retta ℓ del piano affine. Ne segue che tutte le rette ℓ ottenute in corrispondenza alle rette L per p_o sono tra loro a due a due parallele e costituiscono quindi nel piano α un fascio improprio. Se si aggiunge ad ognuna di tali rette il punto p_o come loro punto improprio si ottiene un piano proiettivo isomorfo al piano (π , $\mathcal{L}$) (l'identità realizza infatti un isomorfismo tra questi due piani) .

Mostreremo ora due esempi . Il primo sarà un esempio di piano affine .Il secondo sarà un esempio di piano proiettivo. Per entrambi gli esempi ci serviremo del campo dei numeri reali (perché questo è utile ai nostri scopi) ma la costruzione che faremo sarebbe ***possibile ed eguale*** se sostituissimo il campo reale con un altro campo .

2. Esempio di piano affine: ***Il piano affine numerico reale.***

Sia **R** il campo dei numeri reali . Sia $\alpha = \mathbf{R}^2$ l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali . Chiameremo ***punti*** gli elementi di α . Se $p = (x , y)$ è un punto i due numeri x e y saranno chiamati le sue *coordinate* . Il numero x è chiamato l'*ascissa* di p mentre il numero y è chiamato l'*ordinata* di p .

Consideriamo una terna ordinata di numeri reali (a , b , c) con la condizione che $(a, b) \neq (0 , 0)$. Con la nostra scelta , i tre numeri (a , b , c) ci consentono di poter considerare la seguente equazione di primo grado nelle variabili x ed y :

$$(1) \qquad a x + b y + c = 0$$

Ci sono infinite coppie (x_1 , y_1) che sono soluzioni dell'equazione (1) anzi tali coppie sono in numero pari alla cardinalità $| \mathbf{R} |$ di **R** . Infatti se è ad esempio $a \neq 0$ le coppie soluzioni della (1) sono al variare di y in **R** tutte e sole le seguenti $\left(\frac{-by-c}{a} , y \right)$.

Tutte le soluzioni dell'equazione (1), essendo infinite coppie ordinate di numeri reali ,sono quindi un sottoinsieme infinito di α . Tale sottoinsieme r sarà chiamato ***retta*** e l'equazione (1) che l'ha definito sarà chiamata la sua ***equazione***. Si dice anche che l'equazione (1) *rappresenta tale retta.*

E' chiaro che se (a' , b' , c') è proporzionale ad (a , b , c) e si ottiene da (a , b , c) moltiplicando questa per un numero diverso da zero allora le due equazioni

$$a x + b y + c = 0 \qquad e \qquad a' x + b' y + c' = 0$$

hanno le stesse soluzioni e quindi definiscono la stessa retta .

La famiglia di tutte le rette r di $\mathbf{R}^2$ sarà indicata con $\mathfrak{R}_{\mathbf{R}}$.

Se r è una retta ed

$$(1) \qquad a x + b y + c = 0$$

è l'equazione che l'ha definita possiamo descrivere i punti di r al seguente modo . Ricordiamo che i punti di r sono le coppie (x_1 , y_1) che sono soluzioni dell'equazione $a x + b y + c = 0$.

Ora se (x_0 , y_0) è un punto di r allora (x_0 , y_0) è una soluzione dell'equazione

$a x + b y + c = 0$. Per quanto visto nel capitolo riguardante lo studio dei sistemi di equazioni lineari, tutte le soluzioni $\mathbb{S}$ dell' equazione (1) si ottengono aggiungendo ad una sua soluzione tutte le soluzioni dell'equazione

(2) $$a x + b y = 0$$

omogenea associata. D'altra parte lo spazio delle soluzioni di $a x + b y = 0$ è un sottospazio $\mathbb{S}_o$ di $\mathbf{R}^2$ di dimensione uno e quindi tali soluzioni sono determinate tutte attraverso la conoscenza di una soluzione non nulla . La coppia (-b , a) è una soluzione non nulla dell'equazione

$$a x + b y = 0$$

e quindi per quanto detto, essa è una base dello spazio $\mathbb{S}_o$ delle soluzioni , che sono quindi tutte del tipo $\rho (-b , a)$ con ρ numero reale . Per semplicità di scrittura poniamo

$$\lambda = -b \qquad \mu = a$$

e tale coppia (λ , μ) (base di $\mathbb{S}_o$) sarà chiamata coppia di *numeri direttori di r* . E' evidente che una coppia (λ' , μ') proporzionale a (λ , μ) secondo un fattore di proporzionalità non nullo è anch'essa base di $\mathbb{S}_o$ e quindi è anch'essa una coppia di numeri direttori di r . I numeri direttori di r sono quindi *non unici* , ***non entrambi nulli,*** *e definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.*

Abbiamo ricordato che tutte le soluzioni dell'equazione $a x + b y + c = 0$ si ottengono sommando ad una sua soluzione (x_0 , y_0) tutte le soluzioni dell'equazione $a x + b y = 0$ omogenea associata. Conservando le notazioni sopra introdotte si ha allora che le coppie (x , y) soluzioni dell'equazione $a x + b y + c = 0$ sono tutte descrivibili al seguente modo :

$$(x , y) = (x_0 , y_0) + \rho (\lambda , \mu)$$

Si conclude quindi che i punti (x , y) di r si ottengono al variare del parametro reale ρ con le seguenti formule

(3) $$\begin{cases} x = x_0 + \rho\lambda \\ y = y_0 + \rho\mu \end{cases}$$

Quando si rappresentino i punti di una retta r in questo modo si dice che r è stata *rappresentata parametricamente (in quanto è il parametro* ρ *che variando in* $\mathbf{R}$ *permette di descrivere tutti i suoi punti).*

E' utile osservare che le infinite coppie (x, y) che si ottengono al variare di ρ in $\mathbf{R}$ con formule del tipo

$$\begin{cases} x = & x_0 & +\rho\lambda \\ y = & y_0 & +\rho\mu \end{cases}$$

dove è $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ sono i punti di una retta in quanto tali coppie sono le soluzioni di un'equazione del tipo $ax + by + c = 0$. Infatti supposto che sia ad esempio $\lambda \neq 0$ si ha :

$$\rho = \frac{x - x_o}{\lambda}$$

e quindi

$$y = y_0 + \frac{x - x_o}{\lambda}\mu$$

Pertanto le coppie (x, y) descritte da $\begin{cases} x = & x_0 & +\rho\lambda \\ y = & y_0 & +\rho\mu \end{cases}$ sono le soluzioni dell'equazione

$$\mu x - \lambda y + \lambda y_0 - \mu x_0 = 0$$

e quindi sono i punti di una retta .

Siano ora r ed r' due rette e siano

(1) $$a x + b y + c = 0$$

ed

(2) $$a' x + b' y + c' = 0$$

le equazioni che definiscono r ed r' . Vogliamo stabilire quando r incide r' o quando r è parallela ad r' . Un punto (x_0, y_0) appartiene sia ad r che ad r' se la coppia (x_0, y_0) è soluzione di entrambe le equazioni e quindi se essa è soluzione del sistema S formato dalle due equazioni assegnate. Viceversa una soluzione di tale sistema S fornisce un punto comune alle due rette.

Occorre quindi discutere il sistema S formato dalle due equazioni :

$$S : \quad \begin{cases} a x + b y + c = 0 \\ a' x + b' y + c' = 0 \end{cases}$$

Siano

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

le due matrici , incompleta e completa , del sistema S.

Se

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$$

allora il sistema S ha una sola soluzione e quindi le due rette r ed r' sono tra loro incidenti.

Se $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$ allora il rango di A è uno . Se A' ha rango due il sistema S non ha soluzioni e quindi le due rette sono tra loro parallele. Se A' ha rango uno allora le sue righe sono proporzionali e quindi le due rette r ed r' sono coincidenti e quindi pur sempre parallele.

In ogni caso detA = 0 comporta che r ed r' sono parallele. Viceversa se r ed r' sono parallele, per ciò che precede , è necessariamente det A = 0.

Abbiamo così provato la seguente :

Proposizione 2.1 *Due rette r ed r' rappresentate da*

$$r: \quad ax + by + c = 0$$
$$r': \quad a'x + b'y + c' = 0$$

sono parallele se e solo se risulta $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$ *o equivalentemente se e solo se la coppia (a , b) è proporzionale alla coppia (a' , b').*

Poichè risulta

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -b & a \\ -b' & a' \end{pmatrix}$$

allora ricordando che (-b , a) è una coppia di numeri direttori di r e (-b' , a') è una coppia di numeri direttori di r' possiamo riformulare la proposizione 1.1 al seguente modo :

Proposizione 2.2 *Due rette r ed r' rappresentate da*

$$r: \quad ax + by + c = 0$$
$$r': \quad a'x + b'y + c' = 0$$

sono parallele se e solo se esse hanno gli stessi numeri direttori.

Sia r una retta rappresentata dall'equazione $ax + by + c = 0$. Per quanto precede l'equazione

$$(1.1) \qquad ax + by + k = 0$$

rappresenta ,al variare di k in **R** , tutte le rette parallele ad r . Per questa ragione essa rappresenta il fascio improprio costituito da r e da tutte le sue parallele.

Concludiamo tale numero cercando di rappresentare tutte le rette che passino per un fissato punto $P =(x_o , y_o)$. Tale insieme di rette viene chiamato *fascio proprio di rette di centro P* .

Siano r ed r' due rette per (x_o , y_o) rappresentate da :

$$r : \qquad ax + by + c = 0$$

$$r' : \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

Poichè il punto (x_o , y_o) appartiene sia ad r che ad r' le sue coordinate soddisfano entrambe le equazioni. Ne consegue che se consideriamo un'equazione del tipo

$$(**) \qquad \alpha(ax + by + c) + \beta (a'x + b'y + c') = 0$$

con $(\alpha , \beta) \neq (0 , 0)$ ottenuta combinando linearmente le due equazioni date, essa rappresenta una retta ancora per il punto (x_o , y_o) in quanto le coordinate di tale punto la soddisfano qualunque sia la scelta dei coefficienti α e β . Se ogni retta per (x_o , y_o) si ottiene mettendo nella (**) un opportuno valore di α ed un opportuno valore di β allora al variare di questi due parametri α e β la (**) descrive tutte le rette per (x_o , y_o) e quindi rappresenta il fascio di rette di centro tale punto.
Sia quindi r'' una qualunque retta per (x_o , y_o) rappresentata dall'equazione :

r” : $a''x + b''y + c'' = 0$

Il sistema formato dalle tre equazioni

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0 \end{cases}$$

risulta compatibile in quanto la coppia (x_o , y_o) è una sua soluzione. Ne consegue che la matrice completa ha lo stesso rango di quella incompleta e quindi ha rango due .
Risulta allora

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0$$

Le tre righe di tale matrice sono quindi dipendenti e poiché le prime due sono indipendenti allora la terza è combinazione lineare delle prime due e così si ha l’asserto.
Due rette per il punto (x_o , y_o) di semplice rappresentazione sono

$$x - x_o = 0 \quad \text{ed} \quad y - y_o = 0$$

e pertanto, per ciò che precede, l’equazione

$$\alpha(x - x_o) + \beta (y - y_o) = 0 \tag{3}$$

al variare di α e β con $(\alpha , \beta) \neq (0 , 0)$ rappresenta tutte le rette per il punto (x_o , y_o) .
L’ equazione (3) è chiamata *l’equazione del fascio proprio di rette di centro* (x_o , y_o) .
Siamo ora in grado di provare la seguente :

Proposizione 2.2 *La coppia* $(\boldsymbol{R}^2 , \mathcal{R}_{\boldsymbol{R}})$ *è un piano affine.*

Dimostrazione. Siano (x_1 ,y_1) e (x_2 ,y_2) due punti distinti. Una retta che contenga tali due punti deve essere rappresentata da una equazione $ax + by + c = 0$ che abbia le due coppie (x_1 ,y_1)

e (x_2, y_2) tra le sue soluzioni. Pertanto dovrà essere :

(**) $$\begin{cases} a\,x_1 + b\,y_1 + c = 0 \\ a\,x_2 + b\,y_2 + c = 0 \end{cases}$$

Tale sistema omogeneo nelle incognite (a, b, c) ha la matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$$

di rango due in quanto i due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono distinti . Le soluzioni del sistema (**) sono quindi un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di dimensione uno ed una sua base si ottiene attraverso i minori d'ordine due della matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$ presi a segni alterni.

Le terne (a, b, c) non nulle da noi cercate sono quindi infinite e tutte proporzionali tra loro. Esse quindi definiscono tutte la stessa retta che è quindi l'unica passante per i due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) distinti assegnati.

Sia ora ℓ una retta definita dall'equazione $ax + by + c = 0$ e sia (x_o, y_o) un punto non appartenente ad ℓ . Per ciò che precede una qualunque retta per (x_o, y_o) è rappresentata da un'equazione del tipo

$$\alpha(x - x_o) + \beta(y - y_o) = 0$$

Tra esse l'unica retta parallela ad ℓ è quella che si ottiene scegliendo α e β proporzionali ad a e b . Pertanto c'è una sola retta per (x_o, y_o) parallela ad ℓ ed essa è rappresentata dall'equazione

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$$

Poiché una retta r è un sottoinsieme proprio di $\mathbf{R}^2$ allora tre punti , due scelti su r ed uno fuori da r , sono tre punti non allineati del nostro piano α .

Resta così provato che la coppia ($\mathbf{R}^2$, $\Re_{\mathbf{R}}$) è un piano affine. Tale piano affine è detto ***piano affine numerico reale***.

Per le applicazioni è molto utile la seguente osservazione .

Dalla dimostrazione fatta segue che l'equazione della retta che congiunge i punti distinti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) si ottiene sviluppando il seguente determinante :

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

3. ***Il piano affine numerico complesso***.

Abbiamo già detto che la costruzione fatta per ottenere il piano affine numerico reale ($\mathbf{R}^2$, $\Re_{\mathbf{R}}$) è indipendente dal fatto che il campo usato sia quello dei numeri reali. Lo stesso risultato si ottiene se si considera al posto del campo reale un qualsiasi campo K.

A noi interessa ora il caso in cui il campo K sia il campo dei numeri complessi **C** .

Partendo dal campo complesso **C** possiamo quindi costruire un piano affine ($\mathbf{C}^2$, $\Re_{\mathbf{C}}$) che ha come punti le coppie ordinate (a, b) di numeri complessi e come rette i sottoinsiemi di $\mathbf{C}^2$ ognuno dei quali è l'insieme delle soluzioni di un'equazione

$$ax + by + c = 0 \qquad a , b , c \in \mathbf{C} \quad , (a , b) \neq (0 , 0)$$

di primo grado non identica a coefficienti complessi.

Un punto (a,b) di $\mathbf{C}^2$ si dirà *reale* se (a, b) sono entrambi numeri reali . Il punto (a,b) di $\mathbf{C}^2$ si dirà *immaginario* se i due numeri complessi non sono entrambi reali

Osserviamo che il piano affine reale ($\mathbf{R}^2$, $\Re_{\mathbf{R}}$) è contenuto nel piano affine ($\mathbf{C}^2$, $\Re_{\mathbf{C}}$) nel senso ora precisato.

Sia

$$ax + by + c = 0 \qquad a , b , c \in \mathbf{R} \quad , (a , b) \neq (0 , 0)$$

un' equazione a coefficienti reali . Essa determina due rette ℓ ed L la prima del piano ($\mathbf{R}^2$, $\Re_{\mathbf{R}}$) e la seconda del piano ($\mathbf{C}^2$, $\Re_{\mathbf{C}}$) a seconda che si vogliano considerare le sue soluzioni reali o le sue soluzioni complesse.

$$\ell = \{ (x , y) \in \mathbf{R}^2 \ , \ ax + by + c = 0 \}$$
$$L = \{ (x , y) \in \mathbf{C}^2 \ , \ ax + by + c = 0 \}$$

E' ovvio che è $\ell \subset L$ quindi ogni retta del piano reale è parte di una retta del piano complesso. La retta L si può quindi pensare come un "allungamento" di ℓ . Non tutte le rette del piano complesso sono allungamenti di quelle reali. Vediamo.

Una retta L del piano complesso rappresentata dall'equazione

$$ax + by + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbf{C} \quad , (a, b) \neq (0, 0)$$

si dirà ***reale*** se (a , b , c) è proporzionale ad una terna di numeri reali. Quando la retta è reale essa ha quindi infiniti punti reali ed infiniti punti immaginari.

E' ben noto che il campo complesso è dotato di un automorfismo non identico detto *coniugio* che si ottiene associando ad ogni numero complesso $z = a + ib$ il numero complesso $\overline{z} = a - ib$.

Quando z è un numero reale (cioè è $b = 0$) allora risulta $z = \overline{z}$. Viceversa se risulta $z = \overline{z}$ allora è $2ib = 0$ e quindi $b = 0$ e pertanto z è reale .

Associando ad ogni punto (z_1, z_2) del piano complesso $\mathbf{C}^2$ il punto di $(\overline{z}_1, \overline{z}_2)$ si ottiene un isomorfismo del piano complesso in sé . Tale isomorfismo trasforma la retta

$$L : \quad ax + by + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbf{C} \quad , (a, b) \neq (0, 0)$$

nella retta $\overline{L}$, detta *coniugata* di L , seguente :

$$\overline{L} \quad : \quad \overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c} = 0$$

Ricordiamo ora che l'equazione della retta che congiunge i punti distinti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) si ottiene sviluppando il seguente determinante :

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Pertanto è facile controllare che la retta che congiunge due punti reali è reale ed è reale altresì la retta che congiunge due punti complessi e coniugati.

Da ciò segue allora facilmente che:

Proposizione 3.1 *Una retta è reale se e solo se essa coincide con la sua complessa coniugata.*

Se una retta L non è reale essa , per ciò che precede , ha al più un punto reale.

Facilmente si ha che :

Proposizione 3.2 *Una retta L non reale ha un punto reale se e solo se essa incide la sua complessa coniugata.*

A titolo di esempio la retta

$$L: \qquad i x - y = 0$$

ha (0,0) come suo unico punto reale . Infatti se $x \neq 0$ è reale , $y = ix$ è non reale e quindi (x, y) è immaginario. Se x è non reale ancora (x, y) è immaginario.

Sempre per esemplificare la retta $x + y + i = 0$ non ha punti reali ed è infatti parallela alla sua coniugata $x + y - i = 0$.

4. *Nozione di riferimento reale* .

In questo numero col simbolo (α_o , $\mathcal{R}_o$) rappresenteremo il piano della geometria elementare che viene sempre nella nostra mente identificato coi punti e le rette di una qualunque superficie piana che ricada sotto i nostri sensi. Questi punti e rette (che sono parti proprie del piano) si assumono come concetti primitivi e non vengono definiti ma si ritiene che essi abbiano le due proprietà seguenti.

a) *due punti distinti appartengono ad una unica retta.*
b) *Dati una retta **r** e un punto **p** fuori di **r** c'è una unica retta per **p** ad intersezione vuota con **r**.*

Pertanto l'idea di piano che abbiamo "interiorizzato" è quella di piano affine. L'unico problema che spesso si ha è che per tracciare delle linee o dei cerchi , per misurare angoli, segmenti etc .su tale piano occorre avere a disposizione degli strumenti (riga , compasso, goniometro, metro etc.) . Sembra quindi utile disporre di un piano affine isomorfo a (α_o , $\mathcal{R}_o$) in cui queste stesse operazioni si possano eseguire solo attraverso l'utilizzo di regole di calcolo che ci preoccuperemo appunto di acquisire. Vediamo come si procede.

Per realizzare il nostro scopo occorre intanto introdurre la nozione di riferimento su una retta , e la nozione di riferimento in un piano .

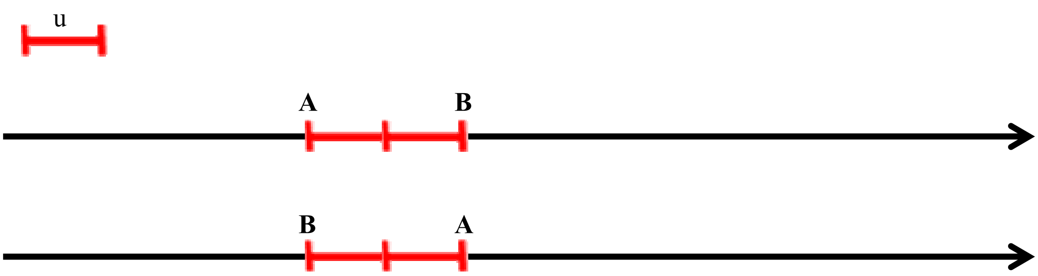
Iniziamo col definire un riferimento su una retta.

Sia **r** una retta del piano. Scegliamo come positivo uno dei due versi in cui si può percorrere la retta **r** .Scegliamo poi un punto **O** sulla retta e fissiamo una unità di misura **u** .Il verso scelto sia indicato con $\vec{v}$. La terna $\mathfrak{R} = (\mathbf{O} , \mathbf{u} , \vec{v})$ è detta un ***riferimento reale della retta r*** .

Il punto **O** è chiamato *origine del riferimento*.

A che serve fissare un riferimento su **r** ? Vediamo.

Se A e B sono due punti di **r** indicheremo con $|AB|$ la misura assoluta del segmento AB fatta rispetto all' unità **u** .



Nel disegno fatto i punti A e B scelti hanno, nei due casi, posizioni reciproche diverse e però individuano entrambi un segmento di lunghezza due .

Pertanto la conoscenza della lunghezza assoluta del segmento AB non ci fornisce informazioni sulla posizione reciproca dei due punti. Per ovviare a questa difficoltà si introduce il concetto di *misura relativa* di un segmento. Siano quindi A e B due punti della retta r. Quando A=B il segmento AB è detto nullo ed ad esso si attribuisce misura nulla. Supponiamo quindi A distinto da B . La misura relativa del segmento AB che viene indicata con (AB) è il numero reale seguente :

$(AB) = |AB|$ se A precede B nel verso fissato

$(AB) = -|AB|$ se A segue B nel verso fissato.

Riferendoci sempre al disegno fatto si ha quindi nel primo caso $(AB) = 2$ e nel secondo caso $(AB) = -2$.

Sussiste la seguente proprietà di cui omettiamo la dimostrazione .

Per ogni terna A , B , C di punti di r si ha :

(4.1) $$(AB) + (BC) = (AC) .$$

Introdotta la nozione di misura relativa di un segmento , possiamo ora associare ad ogni punto P della retta r il numero reale $\mathbf{x_P}$ = (OP) che chiamiamo l' *ascissa* di P nel riferimento $\mathcal{R}$.

Per la definizione data il punto **O** ha ascissa zero i punti che seguono **O** hanno ascissa positiva e quelli che precedono **O** hanno ascissa negativa. E' evidente che la corrispondenza introdotta

$$\mathbf{c}: \quad P \in r \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_P} \in \mathbf{R}$$

è biettiva ed è chiamata *coordinazione* della retta **r .**

Si osservi esplicitamente che l'utilizzo del riferimento ha reso possibile istituire la corrispondenza **c** .

Utilizzando la proprietà (1.1) si ha

$$(OA) + (AB) = (OB)$$

da cui segue :

(4.2) $$(AB) = (OB) - (OA) = \mathbf{x_B} - \mathbf{x_A}.$$

Conoscendo l' ascissa di ogni punto è possible quindi calcolare la misura relativa di un segmento utlizzando la formula (4.2).

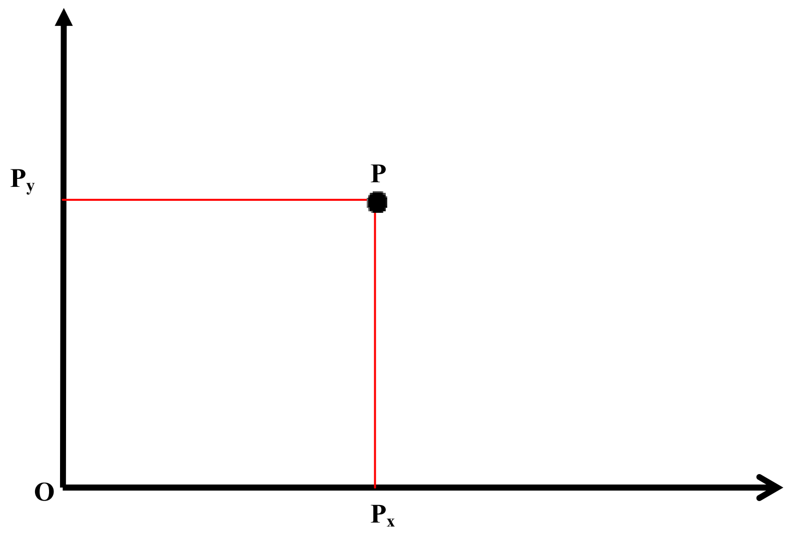
Parliamo ora di riferimento del piano.

Siano **x** ed **y** due rette del piano incidenti tra loro. Sia O il punto comune alle due rette **x** ed **y** . Fissiamo su **x** un verso $\vec{v_x}$ positivo e su **y** un verso $\vec{v_y}$ positivo . Fissiamo infine una unità di misura **u** .

La terna $\mathcal{R}_\mathbf{x} = (\mathbf{O} , \mathbf{u} , \vec{v_x})$ è un riferimento della retta **x** ed analogamente la terna $\mathcal{R}_\mathbf{y} = (\mathbf{O} , \mathbf{u} , \vec{v_y})$ è un riferimento della retta **y** .

La quaterna $\mathcal{R} = (\mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathcal{R}_\mathbf{x} , \mathcal{R}_\mathbf{y})$ è chiamata ***riferimento reale*** (*monometrico*) del piano. Quando le due rette **x** ed **y** sono ortogonali il riferimento è detto ***ortogonale***.

Per ogni punto P del piano indichiamo con $P_\mathbf{x}$ la proiezione di P su **x** lungo la direzione di **y** e con $P_\mathbf{y}$ la proiezione di P su **y** lungo la direzione di **x** .



La corrispondenza

$$P \in \alpha_o \quad \to \quad (P_x , P_y) \in \mathbf{x} \times \mathbf{y}$$

è ovviamente biettiva.

Ma P_x che sta su **x** , determina un numero reale a = (O P_x) (la sua ascissa nel riferimento $\mathcal{R}_x$) e P_y che sta su **y** , determina un numero reale b = (O P_y) (la sua ascissa nel riferimento $\mathcal{R}_y$ di **y**).

Pertanto possiamo associare al punto P la coppia ordinata di numeri reali (a , b) corrispondente alla coppia di punti (P_x , P_y).

La corrispondenza

$$(P_x , P_y) \to (a , b) \in \mathbf{R}^2$$

è ovviamente biettiva e quindi la corrispondenza

$$(*) \qquad \mathbf{c} : \quad P \in \alpha_o \quad \to \quad (a , b) \in \mathbf{R}^2$$

è anch'essa biettiva. I due numeri a e b associati a P sono chiamati le ***coordinate*** di P nel riferimento $\mathcal{R}$. Il numero a = (O P_x) è detto l'***ascissa*** di P , il numero b = (O P_y) è detto l'***ordinata*** di P .

Mostreremo più in avanti che quando P descrive una retta del piano le sue coordinate (x,y) sono tutte e sole le soluzioni di un'equazione di primo grado non identica in due variabili del tipo

$$ax + by + c = 0$$

Quando avremo acquisito questo risultato la corrispondenza (*) diviene un isomorfismo tra il piano affine (α_o , $\mathcal{R}_o$) ed il piano affine numerico reale $\alpha(\mathbf{R}) = (\mathbf{R}^2 , \mathcal{R}_\mathbf{R})$ ampiamente descritto in precedenza.

Osserviamo inoltre che attraverso l'isomorfismo **c** descritto in (*) ad ogni isomorfismo ψ del piano (α_o , $\mathcal{R}_o$) in sè corrisponde un isomorfismo $\mathbf{c} \circ \psi \circ \mathbf{c}^{-1}$ del piano ($\mathbf{R}^2$, $\mathcal{R}_\mathbf{R}$) in sè e viceversa ad ogni isomorfismo φ del piano ($\mathbf{R}^2$, $\mathcal{R}_\mathbf{R}$) in sè corrisponde un isomorfismo $\mathbf{c}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{c}$ del piano (α_o , $\mathcal{R}_o$) in sé.

Pertanto l'aver descritto tutti gli isomorfismi del piano ($\mathbf{R}^2$, $\mathcal{R}_\mathbf{R}$) in sè consente altresì una rappresentazione del gruppo degli isomorfismi del piano (α_o , $\mathcal{R}_o$) in sé.

5. Le coordinate omogenee.

Abbiamo già visto che un piano affine può divenire , con l'aggiunta di nuovi punti (*i punti impropri*) ed una nuova retta (*retta impropria*) un piano proiettivo.

Nel piano reale della geometria elementare che indicheremo sempre con (α_o , $\mathcal{R}_o$) se si fissa un riferimento reale ogni punto determina due coordinate (x , y) che sono due numeri reali . Viceversa ogni coppia (x, y) di numeri reali determina un punto del piano. In tale rappresentazione i punti del piano sono in corrispondenza biettiva con le coppie ordinate di numeri reali ed i punti di una retta sono in corrispondenza biettiva con le soluzioni di una equazione di primo grado del tipo $ax + by + c = 0$.

Ora se aggiungono i punti impropri come si può estendere la coordinazione anche ai nuovi punti ? Come si rappresentano le rette ampliate col loro punto improprio ? Vediamo.

Bisogna per far ciò introdurre le coordinate omogenee di un punto sia esso proprio o improprio in un riferimento reale $\mathcal{R}$ fissato.

Sia P un punto proprio e supponiamo che nel riferimento $\mathcal{R}$ esso abbia coordinate (2 , 3) . Chiameremo ***coordinate omogenee*** di P nel riferimento $\mathcal{R}$ una terna ordinata (x_1 , x_2 , x_3) di numeri reali con $x_3 \neq 0$ e tale che sia :

$$(*) \qquad \frac{x_1}{x_3} = 2 \qquad \frac{x_2}{x_3} = 3$$

Ovviamente una terna (x_1 , x_2 , x_3) " facile " che verifica la proprietà (*) è la terna (2, 3 , 1)

ma anche (4 , 6 , 2) va bene e così ogni terna del tipo $(2\rho , 3\rho , \rho)$ con $\rho \neq 0$. Una qualsiasi di queste terne attraverso le formule (*) restituisce la coppia (2,3) e quindi il punto P .
Pertanto le coordinate omogenne di un punto ***proprio*** P di coordinate (x_o , y_o) sono tre numeri (x_1 , x_2 , x_3) con $x_3 \neq 0$ e verificanti la seguente proprietà :

(*) $$\frac{x_1}{x_3} = \mathbf{x_o} \qquad \frac{x_2}{x_3} = \mathbf{y_o}$$

La terna (x_1 , x_2 , x_3) avendo $x_3 \neq 0$ è non nulla e dovendo verificare le (*) è non unica ma determinata a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.
Se il punto $P=O_r$ è improprio ed è quello aggiunto alla retta r di equazione $ax + by + c = 0$ allora si definiscono coordinate omogenee di P tre numeri (x_1 , x_2 , x_3) con $x_3 = 0$ e con $(x_1 , x_2) = (\lambda , \mu)$ eguali ad una coppia di numeri direttori di r . Tenendo conto che anche i numeri direttori di una retta sono non entrambi nulli e definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, allora anche le terne $(\lambda , \mu , 0)$ usate per rappresentare P (***improprio***) sono non nulle e definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.
Ricordando che (-b ,a) è una coppia di numeri direttori di r , il punto improprio di r si rappresenta con la terna (-b , a , 0) o una ad essa proporzionale.
E’ facile controllare che si passa a tale rappresentazione per i punti del piano ampliato allora anche le rette vengono rappresentate in modo diverso .
Si consideri un’equazione omogenea di primo grado non identica ed in tre variabili (x , y , t) del tipo

(**) $$ax + by + ct = 0$$

E’ chiaro che se (x_1 , x_2 , x_3) è una soluzione non nulla dell’equazione $ax + by + ct = 0$ anche la terna $(\rho x_1 , \rho x_2 , \rho x_3)$ con $\rho \neq 0$, è soluzione della stessa equazione per cui ha senso dire che un punto del piano ampliato verifica con le sue coordinate omogenee l’equazione data. E’ altresì evidente che due equazioni $ax + by + ct = 0$ ed $a'x + b'y + c't = 0$ hanno le stesse soluzioni se e solo se esse sono proporzionali.
Ciò premesso, se risulta (a, b) = (0 , 0) l’ equazione $ax + by + ct = 0$ diventa

$$t = 0$$

Tale equazione ha come soluzioni tutte le terne (h , k , 0) e queste rappresentano tutti i punti impropri del piano . Quindi $t = 0$ rappresenta la retta impropria del piano .
Se invece è $(a, b) \neq (0 , 0)$ allora l’equazione $ax + by + c = 0$ rappresenta una retta r del

piano non ampliato . I punti di tale retta r quando siano rappresentati in coordinate omogenee verificano l'equazione omogenea

$$ax + by + ct = 0.$$

Poiché soddisfa tale equazione anche la terna (-b , a , 0) allora l'equazione omogenea

$$ax + by + ct = 0.$$

rappresenta **la retta r ampliata col suo punto improprio**.

6. I punti immaginari.

Il piano della geometria elementare sarà ancora denotato con $(\alpha_o , \Re_o)$.

Se nel piano $(\alpha_o , \Re_o)$ si fissa un riferimento $\mathcal{R}$ reale ad ogni coppia ordinata (x , y) di numeri reali corrisponde un punto p di α_o e la corrispondenza , che indichiamo con $\boldsymbol{\omega}$,

$$\boldsymbol{\omega} \ : \ (x,y) \in R^2 \ \rightarrow \ p \in \alpha_o$$

diventa un isomorfismo tra il piano affine numerico reale $(R^2, \Re_R)$ ed $(\alpha_o , \Re_o)$.

I punti p di α_o hanno per coordinate due numeri reali e per tale motivo vengono detti *reali*.

Così come il piano affine $(R^2 , \Re_R)$ è parte del piano affine complesso $(\mathbf{C}^2 , \Re_{\mathbf{C}})$, ci chiediamo se sia possibile aggiungere nuovi punti al piano $(\alpha_o , \Re_o)$ in modo da ottenere un nuovo piano $(\alpha^*_o , \Re^*_o)$ (di cui $(\alpha_o , \Re_o)$ è una parte) e che risulti isomorfo al piano $(\mathbf{C}^2 , \Re_{\mathbf{C}})$.

Faremo vedere che ciò è possibile purchè si aggiungano al piano $(\alpha_o , \Re_o)$ dei nuovi punti che chiameremo *immaginari*.

Di più mostreremo che fissato un riferimento $\mathcal{R}$ reale nel piano $(\alpha_o , \Re_o)$, si può costruire una funzione biettiva

$$\boldsymbol{\Omega} \ : \ (x,y) \in \mathbf{C}^2 \ \rightarrow \ p \in \alpha^*_o$$

che risulta un isomorfismo tra i piani $(\mathbf{C}^2 , \Re_{\mathbf{C}})$ e $(\alpha^*_o , \Re^*_o)$ e la cui restrizione a R^2 coincide con $\boldsymbol{\omega}$.

Dobbiamo quindi introdurre il concetto di *punto immaginario*. Vediamo.

Cerchiamo una possibile definizione per un punto reale. I punti reali non sono definiti perché sono assunti come concetti primitivi .

Se p è un punto reale cioè è un punto di α_o ed abbiamo fissato un riferimento $\mathcal{R}$ ad esso corrisponde una coppia di numeri reali (le sue coordinate) . Supponiamo ad esempio che a p corrisponda la coppia (2 , 3). Per **pensare** al punto p non basta nominare la coppia (2,3) ma occorre anche precisare il riferimento $\mathcal{R}$ che ha determinato tale coppia. Infatti cambiando il riferimento $\mathcal{R}$ con un nuovo riferimento $\mathcal{R}'$ e ponendo ad esempio l'origine coincidente con p allora a p corrisponderebbe ora nel nuovo riferimento $\mathcal{R}'$ la coppia (0,0) e non più la coppia (2,3). Pertanto la coppia (2,3) nel riferimento $\mathcal{R}'$ non ci farebbe più pensare a p ma ad un punto diverso da p. Per pensare a p nel riferimento $\mathcal{R}'$ serve la coppia (0,0)

Pertanto p è identificato sia attraverso la coppia ((2,3) , $\mathcal{R}$) e sia attraverso la coppia ((0,0) , $\mathcal{R}'$) .Ci sono delle formule che consentono di conoscere le coordinate di un punto p in un riferimento $\mathcal{R}'$ note che siano le coordinate dello stesso punto in un altro riferimento $\mathcal{R}$. Tali formule dette di passaggio da un riferimento all'altro sono di questo tipo :

(*)
$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \quad \text{con} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$$

Pertanto se tali formule sono quelle di passaggio tra $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ allora se al posto di x ed y si sostituiscono i numeri 2 e 3 ,coordinate di p nel riferimento $\mathcal{R}$, si otterrà $x' = 0$ ed $y' = 0$ che sono appunto le coordinate di p nel riferimento $\mathcal{R}'$.

Due coppie ((x_0 , y_0) , $\mathcal{R}$) ed ((x'_0 , y'_0) , $\mathcal{R}'$) si dicono equivalenti se sostituendo nelle formule (*) di passaggio da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$ al posto di x ed y i numeri x_0 ed y_0 si ottengono a primo membro x'_0 ed y'_0 .Tale relazione è come è facile vedere , d'equivalenza e pertanto si possono considerare le relative classi d'equivalenza. Ritornando all'esempio fatto possiamo dire che la classe [((2 , 3) , $\mathcal{R}$)] può essere identificata col punto p . Nella classe [((2 , 3) , $\mathcal{R}$)] a fianco di ogni riferimento reale si trovano le coordinate di p in quel riferimento. La classe [((2 , 3) , $\mathcal{R}$)] potrebbe quindi essere assunta come definizione di p.

Questa idea ci suggerisce come introdurre i nuovi punti quelli che chiameremo *immaginari.* Nel seguito **C** è il campo dei numeri complessi, e ($\mathbf{C}^2$, $\Re_{\mathbf{C}}$) è il piano affine numerico che **C** ci consente di costruire.

Consideriamo le coppie ((a , b) , $\mathcal{R}$) dove (a , b) è una coppia ordinata di numeri complessi **non entrambi reali** ed $\mathcal{R}$ è un riferimento reale del piano α .

Due siffatte coppie ((a , b) , $\mathcal{R}$) ed ((a' , b') , $\mathcal{R}'$) le diremo equivalenti se sostituendo nelle formule di passaggio da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$

(**)
$$\begin{cases} x' = mx + ny + c \\ y' = m'x + n'y + c' \end{cases} \quad \text{con} \quad \det\begin{pmatrix} m & n \\ m' & n' \end{pmatrix} \neq 0$$

al posto di x ed y i numeri a e b si ottiene x' = a' ed y' = b'.

Tale relazione è d'equivalenza e così ogni classe d'equivalenza [((a , b) , $\mathcal{R}$)] sarà chiamata ***punto immaginario***. Indichiamo con $\mathcal{I}$ l'insieme di tutti i punti immaginari.

Si noti che poiché nelle formule (**) i coefficienti $\begin{pmatrix} m & n & c \\ m' & n' & c' \end{pmatrix}$ sono numeri reali allora se le coppie ((a , b) , $\mathcal{R}$) ed ((a' , b') , $\mathcal{R}'$) sono equivalenti anche i due numeri (a' , b') sono complessi e non entrambi reali .

Se p* = [((a , b) , $\mathcal{R}$)] è un punto immaginario chiameremo i due numeri complessi (a , b) le sue ***coordinate*** nel riferimento $\mathcal{R}$. Se ((a' , b') , $\mathcal{R}'$) è equivalente a ((a , b) , $\mathcal{R}$) allora (a' , b') sono le coordinate di p* nel riferimento $\mathcal{R}'$.

Quando si fissi un riferimento reale allora ogni punto p di $\alpha^* = \alpha \cup \mathcal{I}$ determina una coppia di numeri complessi (a ,b) i quali sono entrambi reali se $p \in \alpha$ cioè è reale , e sono complessi e non entrambi reali se $p \in \mathcal{I}$, cioè p è immaginario.

Fissato un riferimento reale $\mathcal{R}$ abbiamo così una biezione

$$\Omega \quad : \; (a , b) \;\; \mathbf{C} \times \mathbf{C} \;\; \to \;\; p \in \alpha^*$$

Chiamiamo retta di α^* l'immagine tramite Ω di una retta del piano affine numerico ($\mathbf{C}^2$, $\mathcal{R}_{\mathbf{C}}$). Così facendo si dà una struttura di piano affine anche all'insieme α^* . Inoltre la funzione Ω diventa un isomorfismo tra questi due piani affini.

7. ***Il piano proiettivo numerico reale.***

In tale numero daremo un esempio di piano proiettivo. Per la sua costruzione useremo il campo dei numeri reali (perché ciò è utile ai nostri scopi) ma la costruzione , come si vede , può esser fatta a partire da un qualsiasi campo.

Quando si usi il campo dei numeri reali il piano proiettivo che si ottiene con questa costruzione è chiamato ***piano proiettivo numerico reale.***

Quando si usi il campo dei numeri complessi il piano proiettivo che si ottiene con questa costruzione è chiamato ***piano proiettivo numerico complesso.***

Passiamo alla sua costruzione.

Consideriamo lo spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$. Priviamo tale spazio del vettore nullo (0,0,0). Nell'insieme $\mathbf{R}^3$ - (0,0,0) introduciamo la seguente relazione $\sim$.
Due terne non nulle (y_1, y_2, y_3) ed (z_1, z_2, z_3) le diciamo in relazione $\sim$ tra loro se sono proporzionali tra loro , se esiste quindi un numero reale $k \neq 0$ tale che sia

$$(z_1 , z_2, z_3) = k\,(y_1, y_2 , y_3)$$

La relazione $\sim$ è evidentemente una relazione d'equivalenza nell' insieme $\mathbf{R}^3$ - (0,0,0) .
Denotiamo con

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{R}^3 - (0,0,0)_{/\sim}$$

l'insieme quoziente $\mathbf{R}^3 - (0,0,0)_{/\sim}$. Chiamiamo *punti* gli elementi di $\boldsymbol{\pi}$.
Se $p= [(y_1, y_2 , y_3)]$ è la classe d'equivalenza della terna (y_1, y_2 , y_3) allora essa è per definizione un **punto** e poiché la terna (y_1, y_2 , y_3) determina tale punto allora i numeri (y_1, y_2 , y_3) sono chiamati le *coordinate omogenee o proiettive di p* .
Poiché una terna non nulla e proporzionale a (y_1, y_2 , y_3) determina lo stesso punto p allora le coordinate omogenee di p *non sono uniche e sono definite a meno di un fattore non nullo di proporzionalità*. Poiché la terna (y_1, y_2 , y_3) determina la classe $p= [(y_1, y_2 , y_3)]$ allora per rappresentare il punto p useremo spesso semplicemente una terna (y_1, y_2 , y_3) delle sue coordinate senza indicare esplicitamente la classe $[(y_1, y_2 , y_3)]$ che tale terna determina.
Sia ora

$$a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0 \tag{1}$$

un'equazione omogenea a coefficienti reali, di primo grado, e non identica.
Le soluzioni di tale equazione costituiscono un sottospazio di dimensione due di $\mathbf{R}^3$. Pertanto se (y_1, y_2 , y_3) è una soluzione non nulla dell'equazione (1) anche tutte le terne non nulle ad essa proporzionale sono ancora soluzione dell'equazione (1). Se pertanto un punto $p= [(y_1, y_2 , y_3)]$ soddisfa con le sue coordinate l'equazione (1) ciò non dipende dalle coordinate scelte per rappresentare il punto p. Ha senso così considerare i punti di $\boldsymbol{\pi}$ che soddisfano con le loro coordinate l'equazione (1). Si ottiene così un sottoinsieme ℓ di $\boldsymbol{\pi}$ che chiameremo *retta*.
L' equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ che ci ha permesso di definire il sottoinsieme ℓ è detta *l'equazione della retta* ℓ .
Riepilogando . Assegnata una terna non nulla (a , b , c) di numeri reali si definisce retta di

equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ il seguente sottoinsieme $\ell_{(a\,,\,b\,,\,c)}$ di $\boldsymbol{\pi}$:

$$\ell_{(a\,,\,b\,,\,c)} = \{ [(y_1, y_2, y_3)] \in \boldsymbol{\pi} : ay_1 + by_2 + cy_3 = 0 \}$$

E' ovvio che se (a , b , c) ed (a' , b' , c') sono due terne non nulle e proporzionali tra loro allora le due equazioni $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ ed $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0$ hanno le stesse soluzioni e così esse definiscono la stessa retta. Viceversa se due rette coincidono allora le due equazioni che le rappresentano sono proporzionali. Pertanto anche le rette sono tante quante le classi di equivalenza di $\mathbf{R}^3 - (0,0,0)_{/\sim}$.

Indichiamo con $\mathcal{L}$ la famiglia di tutte le rette $\ell_{(a\,,\,b\,,\,c)}$ di $\boldsymbol{\pi}$ al variare di (a , b , c) in $\mathbf{R}^3$ - (0,0,0). Possiamo ora provare che :

Proposizione 7.1 *La coppia ($\boldsymbol{\pi}$, $\mathcal{L}$) è un piano proiettivo.*

Dimostrazione. Siano p_1 e p_2 due punti distinti e siano (y_1, y_2, y_3) e (z_1, z_2, z_3) le loro coordinate proiettive. Una retta $\ell_{(a\,,\,b\,,\,c)}$ di $\boldsymbol{\pi}$ conterrà i due punti p_1 e p_2 se risulta :

$$S : \begin{cases} ay_1 + by_2 + cy_3 = 0 \\ az_1 + bz_2 + cz_3 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema inteso come sistema nelle incognite (a, b, c) ha la seguente matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} y_1 \;,\; y_2 \;,\; y_3 \\ z_1 \;,\; z_2 \;,\; z_3 \end{pmatrix}$$

che ha rango due ,essendo p_1 e p_2 due punti distinti . Pertanto le soluzioni del sistema omogeneo S costituiscono un sottospazio di dimensione uno di $\mathbf{R}^3$. Una terna non nulla (a , b ,c) che è soluzione di S si ottiene in corrispondenza ai minori d'ordine due , presi a segni alterni , della matrice $\begin{pmatrix} y_1 \;,\; y_2 \;,\; y_3 \\ z_1 \;,\; z_2 \;,\; z_3 \end{pmatrix}$. Ci sono quindi infinite terne (a , b ,c) non nulle che verificano il sistema S e però esse sono tutte proporzionali tra loro. Tali terne definiscono così una unica retta che contiene i punti p_1 e p_2 .

Siano ora $\ell_{(a\,,\,b\,,\,c)}$ ed $\ell_{(a'\,,\,b'\,,\,c')}$ due rette distinte . Un punto $p = [(y_1, y_2, y_3)]$ appartiene ad entrambe se risulta :

$$S : \begin{cases} ay_1 + by_2 + cy_3 = 0 \\ a'y_1 + b'y_2 + c'y_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema S è omogeneo e la matrice

$$\begin{pmatrix} a\ ,\ b\ ,\ c \\ a'\ ,\ b'\ ,\ c' \end{pmatrix}$$

dei coefficienti di tale sistema ha rango due , essendo le due rette distinte. Pertanto le soluzioni di tale sistema costituiscono un sottospazio di dimensione uno di $\mathbf{R}^3$. Ci sono quindi infinite terne non nulle (y_1, y_2, y_3) che soddisfano S e sono tutte proporzionali tra loro. Una terna non nulla (y_1, y_2, y_3) che soddisfa S può ottenersi in corrispondenza ai minori d'ordine due, presi a segni alterni, della matrice $\begin{pmatrix} a\ ,\ b\ ,\ c \\ a'\ ,\ b'\ ,\ c' \end{pmatrix}$. Ma se le terne non nulle (y_1, y_2, y_3) sono infinite e tutte proporzionali tra loro allora esse definiscono un unico punto che è il punto comune alle due rette assegnate.

Sia ℓ una retta rappresentata dall'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ .Poichè tale equazione è non identica uno dei suoi coefficienti è non nullo .

Supposto sia $a \neq 0$ fanno parte della retta i tre punti distinti

$$\left(\frac{-b}{a}, 1, 0\right), \quad \left(\frac{-c}{a}, 0, 1\right), \quad \left(\frac{-b-c}{a}, 1, 1\right).$$

E' così provato che ogni retta ha almeno tre punti e che quindi la coppia ($\boldsymbol{\pi}$, $\mathcal{L}$) è un piano proiettivo . L'asserto è così provato.

Per le applicazioni è molto utile la seguente osservazione .

Dalla dimostrazione fatta segue che l'equazione della retta che congiunge i punti distinti (y_1, y_2, y_3) e (z_1, z_2, z_3) si ottiene sviluppando il seguente determinante :

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{7.1}$$

Le rette di un piano proiettivo possono essere rappresentate anche parametricamente . Vediamo come.

Sia L una retta del piano e sia

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \tag{1}$$

la sua equazione.

Una terna (x_1 , x_2 , x_3) non nulla , soluzione di tale equazione , fornisce le coordinate proiettive di un punto di tale retta L . Ora tutte le soluzioni (x_1 , x_2 , x_3) dell'equazione (1) , che è omogenea , costituiscono un sottospazio di dimensione due di $\mathbf{R}^3$. Pertanto esse sono note quando siano determinate due sue soluzioni indipendenti. Siano quindi $A (y_1 , y_2 , y_3)$ e $B (z_1 , z_2 , z_3)$ due punti distinti della retta L. Poiché A e B sono distinti le due terne (y_1 , y_2 , y_3) e (z_1 , z_2 , z_3) sono non nulle e non proporzionali e quindi forniscono due soluzioni indipendenti dell'equazione (1) .

Ne segue che ogni altra soluzione (x_1 , x_2 , x_3) dell'equazione (1) risulta una loro combinazione lineare . Si ha così che ogni altra soluzione (x_1 , x_2 , x_3) dell'equazione (1) è del tipo :

(*) $$(x_1 , x_2 , x_3) = \lambda (y_1 , y_2 , y_3) + \mu (z_1 , z_2 , z_3) .$$

Poiché le due terne (y_1 , y_2 , y_3) e (z_1 , z_2 , z_3) sono indipendenti nella (*) si avrà $(x_1 , x_2 , x_3) = (0 , 0 , 0)$ soltanto ponendo $\lambda = 0$ e $\mu = 0$.

Così se nella (*) si sceglie la coppia $(\lambda , \mu) \neq (0 , 0)$ si ottiene una terna $(x_1 , x_2 , x_3) \neq (0 , 0 , 0)$ e quindi rappresentativa di un punto della retta.

Una coppia (λ', μ') proporzionale alla coppia (λ, μ) fornirà una terna (x'_1 , x'_2 , x'_3) proporzionale alla precedente e quindi rappresentativa dello stesso punto.

I punti della retta L hanno quindi coordinate proiettive (x_1 , x_2 , x_3) espresse dalla formula (*) o esplicitamente da :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda y_1 + \mu z_1 \\ x_2 = \lambda y_2 + \mu z_2 \\ x_3 = \lambda y_3 + \mu z_3 \end{cases}$$

Quando i punti della retta L sono rappresentati in questo modo si dice che la retta è ***rappresentata parametricamente.***

Osserviamo esplicitamente che alla stessa conclusione si poteva pervenire ricordando che un punto appartiene alla retta L se e solo se le sue coordinate (x_1 , x_2 , x_3) verificano la (7.1).

Importante osservazione.

Quando il piano reale della geometria elementare è ampliato con i punti impropri esso diventa proiettivo e se si fissa un riferimento reale e si assegnano ai suoi punti propri ed impropri le coordinate omogenee si realizza un ***isomorfismo*** *tra tale piano ed il piano proiettivo numerico reale ora descritto.*

Proviamo infine a fare un quadro riassuntivo delle cose dette per avere una visione chiara d'assieme.

Oggetto fisico	*Tipo di piano*	*Modello matematico ad esso isomorfo*
Piano reale	**Piano affine**	$(\mathbf{R}^2, \mathfrak{R}_{\mathbf{R}})$ **Piano affine numerico reale**
Piano reale + punti impropri	**Piano proiettivo**	$(\mathbf{R}^3 - (0,0,0)/\sim, \mathcal{L})$ **Piano proiettivo numerico reale**
Piano reale + punti immaginari	**Piano affine**	$(\mathbf{C}^2, \mathfrak{R}_{\mathbf{C}})$ **Piano affine numerico complesso**
Piano reale + punti immaginari+ punti impropri	**Piano proiettivo**	$(\mathbf{C}^3 - (0,0,0)/\sim, \mathcal{L})$ **Piano proiettivo numerico complesso**

Alcune precisazioni .

Col termine ***piano reale*** si intende una qualunque superficie piana che ricada sotto i nostri sensi e della quale si considerino i punti e le rette in essa contenute.

Nel testo tale piano è stato chiamato spesso il ***piano della geometria elementare*** ed è stato indicato col simbolo $(\alpha_o, \mathfrak{R}_o)$.

L'isomorfismo col modello numerico si ottiene sempre attraverso l'uso di un riferimento reale.

8. ***Le questioni metriche del piano affine numerico reale (R^2 , $\mathcal{R}_R$)*** .

Questo numero è dedicato ad un approfondimento delle proprietà del piano ***affine numerico reale (R^2 , $\mathcal{R}_R$)*** .Tali proprietà si riflettono in proprietà del piano reale che è ad esso isomorfo quando in esso sia stato fissato un riferimento reale . Di più riterremo ,ma le ragioni di tale ipotesi appariranno chiare più avanti , che il riferimento scelto sia ***monometrico ortogonale***.

Per quello che ora tratteremo è utile ricordare alcune cose . L' insieme $\mathbf{R}^2$ sostegno del nostro piano affine numerico è altresì uno spazio vettoriale reale di dimensione due che riterremo munito del prodotto scalare **s** (definito positivo) *euclideo*,

$$\mathbf{s}\,(\,(a\,,b)\,,(a'\,,b')\,) = aa' + bb'$$

Siano L ed L' due rette rappresentate da :

$$L \quad : \qquad ax + by + c = 0$$

$$L' \quad : \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

Per quanto precede le due rette ℓ ed ℓ' rappresentate da :

$$\ell \quad : \qquad ax + by = 0$$

$$\ell' \quad : \qquad a'x + b'y = 0$$

sono parallele la prima ad L e la seconda ad L' . I punti (x,y) della retta ℓ sono un sottospazio $\mathbb{S}_o$ di dimensione uno dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$ ed i punti (x , y) della retta ℓ' sono anch'essi un sottospazio $\mathbb{S}'_o$ di dimensione uno dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$. I vettori di $\mathbb{S}_o$ sono la coppia (-b , a) e tutte le coppie proporzionali ad essa . I vettori di $\mathbb{S}'_o$ sono la coppia (-b' , a') e tutte le coppie proporzionali ad essa. Se le coppie (-b , a) e (-b' , a') sono ortogonali tra loro cioè risulta :

$$aa' + bb' = 0$$

allora i due sottospazi $\mathbb{S}_o$ e $\mathbb{S}'_o$ sono ortogonali tra loro e precisamente ognuno dei due è il complemento ortogonale dell'altro.

Le due rette L ed L' le diremo ***ortogonali*** se le due rette ℓ ed ℓ' ad esse parallele e pensate come sottospazi di $\mathbf{R}^2$ sono tra loro ortogonali .

Riepilogando : due rette L ed L' rappresentate da :

L : $ax + by + c = 0$

L' : $a'x + b'y + c' = 0$

sono ortogonali se e solo se risulta :

(1*) $$\mathbf{aa' + bb' = 0.}$$

Se r è una retta rappresentata da :

r : $ax + by + c = 0$

allora

(2*) $$-bx + ay + k = 0$$

rappresenta , al variare di k in **R** , il fascio improprio costituito da tutte le rette ortogonali ad r .

Per ciò che segue occorre introdurre alcune nozioni riguardanti uno spazio vettoriale reale che sia munito di un prodotto scalare definito positivo.

Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo **s.** Indicheremo al solito per ogni vettore v di V con $|v|$ la sua lunghezza definita come sappiamo attraverso

$$|v| = \sqrt{s(v,v)} \ .$$

Siano ora v e w due vettori. Per ogni numero reale t consideriamo il vettore $v + t w$, che si combinazione lineare di v e w con i numeri reali 1 e t .

Qualunque sia t risulta :

$$\mathbf{s}(v + t w , v + t w) \geq 0$$

Si ha allora per ogni t

$$\mathbf{s}(w , w) t^2 + 2\, \mathbf{s}(v , w) t + \mathbf{s}(v, v) \geq 0.$$

Ma se tale polinomio nella variabile t non assume valori negativi il suo discriminante è minore o eguale a zero .

Si ha quindi :

$$[\mathbf{s}(v, w)]^2 - \mathbf{s}(v, v)\,\mathbf{s}(w, w) \leq 0.$$

Da cui segue

$$[\mathbf{s}(v, w)]^2 \leq \mathbf{s}(v, v)\,\mathbf{s}(w, w)$$

Cioè :

$$[\mathbf{s}(v, w)]^2 \leq |v|^2\, w|^2$$

Da cui infine :

(*)

$$\mathbf{s}(v, w) \leq |v|\,|w|$$

Definiamo ora ***distanza tra v e w*** la lunghezza del vettore v-w.

Si ha quindi

$$\mathbf{d}(v, w) = |v-w| = \sqrt{s(v-w, v-w)}\ .$$

La funzione

$$\mathbf{d} : V \times V \rightarrow [0, \infty[$$

ora definita è una metrica in V in quanto verifica le seguenti tre proprietà :

1. $\mathbf{d}(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$
2. $\mathbf{d}(v, w) = \mathbf{d}(w, v)$
3. $\mathbf{d}(v, w) \leq \mathbf{d}(v, z) + \mathbf{d}(z, w)$

Le proprietà 1 e 2 sono evidenti . Basta quindi provare la proprietà 3.

Tenendo conto della disuguaglianza (*) si ha :

$$|v-w|^2 = \mathbf{s}(v-w, v-w) = \mathbf{s}(v-z+z-w, v-z+z-w) = \mathbf{s}(v-z, v-z) + \mathbf{s}(z-w, z-w) +$$
$$+ 2\,\mathbf{s}(v-z, z-w) \leq |v-z|^2 + |z-w|^2 + 2\,|v-z|\,|z-w| = (|v-z| + |z-w|)^2$$

Si ha quindi

$$|v-w| \leq |v-z| + |z-w|$$

e cioè la proprietà 3.

Lo spazio (V , d) è quindi uno spazio metrico .

Siano infine $\underline{\mathbf{x}}=(x_1 , y_1)$ e $\underline{\mathbf{y}} =(x_2 , y_2)$ due punti distinti del piano α . Pensando sempre $\mathbf{R}^2$ come spazio vettoriale munito del prodotto scalare euclideo, possiamo considerare il vettore $\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}} = (x_1 - x_2 , y_1 - y_2)$ la cui lunghezza è la distanza tra i due vettori $\underline{\mathbf{x}}$ ed $\underline{\mathbf{y}}$ e che sarà assunta come distanza tra i punti (x_1 , y_1) e (x_2 , y_2) . Quindi chiamiamo

$$d ((x_1 , y_1) , (x_2 , y_2)) = | \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}} | = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La funzione $d : \alpha \times \alpha \rightarrow R$ ora introdotta è una *metrica* nel piano α in quanto verifica le seguenti tre proprietà :

(1) $d (p_1 , p_2) = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2$

(2) $d (p_1 , p_2) = d (p_2 , p_1)$

(3) $d (p_1 , p_3) \leq d (p_1 , p_2) + d (p_2 , p_3)$

Pertanto $(\mathbf{R}^2 , d)$ è quindi uno ***spazio metrico*** .

9. *Il gruppo strutturale del piano affine (R^2 , $\mathfrak{R}_R$)* .

In questo numero troveremo una descrizione di tutti gli isomorfismi del piano affine numerico reale (R^2 , $\mathfrak{R}_{\mathbf{R}}$) .

Ricordiamo che un isomorfismo del piano (R^2 , $\mathfrak{R}_{\mathbf{R}}$) è una biezione

$$f : (x , y) \in R^2 \rightarrow (x' , y') \in R^2$$

tra i punti del piano che trasformi rette in rette.

Un punto (a , b) è detto ***unito*** nell'affinità f se risulta f (a , b) = (a , b) .

Ogni isomorfismo del piano è detto un' *affinità* del piano. Evidentemente componendo due affinità si ottiene una affinità. Inoltre poiché l' identità è una affinità e l'inversa di una affinità è una affinità tutte le affinità del piano costituiscono un gruppo, il ***gruppo delle affinità*** , che indicheremo con $\mathbf{G}$ (R^2).

Ricordiamo ora che le matrici quadrate d'ordine due ad elementi reali e non degeneri cioè

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

che abbiano il **determinante diverso da zero** quando si esegua tra esse il prodotto (righe per colonne) costituiscono un gruppo che viene indicato usualmente con **GL(2 , R).**
Abbiamo già visto nel capitolo riguardante gli endomorfismi di uno spazio vettoriale che gli isomorfismi dello spazio vettoriale R^2 in sè sono soltanto le funzioni di R^2 in sè che ogni matrice A non degenere induce.

Precisamente se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ è una matrice quadrata non degenere la funzione , che indichiamo sempre con A

(*) $$A : \quad (x , y) \in R^2 \to (ax + by ,\ a'x + b'y) \in R^2$$

è un isomorfismo di R^2 in sè . Un qualunque isomorfismo di R^2 in sè è di questo tipo , si ottiene cioè in corrispondenza ad una matrice A non degenere .
La funzione A descritta in (*) quando la si pensi come corrispondenza tra i vettori di R^2 è un isomorfismo di R^2 in sè , quando la si pensi come una corrispondenza tra i punti del piano è un isomorfismo del piano che ha unito il punto (0 , 0). Per dar corpo alla nostra affermazione occorre provare che la corrispondenza tra i punti del piano che al punto (x, y) fa corrispondere il punto (x',y') dato da :

(**) $$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = a'x + b'y \end{cases} \quad \text{con} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$$

è un isomorfismo del piano, cioè è biettiva e trasforma rette in rette . Poiché $\det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$ allora la corrispondenza descritta in (**) è biettiva. Sia ora r una retta definita dall'equazione

(+) $$mx + ny + p = 0$$

Attraverso l'uso della matrice inversa si possono invertire le formule (**) ottenendo relazioni di questo tipo :

(***) $$\begin{cases} x = cx' + dy' \\ y = c'x' + d'y' \end{cases}$$

Sostituendo in (+) le espressioni trovate in (***) si riconosce che anche i punti (x' , y') corrispondenti dei punti (x,y) sono anch'essi soluzione di un'equazione del tipo

$$m'x + n'y + p' = 0$$

e quindi sono i punti di una retta r' che è la trasformata della retta r .

Riepilogando per ogni matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ non degenere la corrispondenza

$$A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

è una affinità del piano e tale affinità trasforma il punto (0,0) in sé .

Ci sono affinità che non lasciano fisso (0 , 0) e che quindi non possono essere legate ad isomorfismi di R^2 in sè. Vediamo .

Fissiamo una coppia ordinata di numeri reali (m , n) con m ed n non entrambi nulli . Consideriamo la seguente corrispondenza tra i punti del piano

$$T_{(m,n)} : \quad (x, y) \in R^2 \rightarrow (x', y') \in R^2$$

con

(++)
$$\begin{cases} x' = x + m \\ y' = y + n \end{cases}$$

La corrispondenza $T_{(m,n)}$ è ,come ora proveremo una affinità . Essa trasforma (0,0) nel punto (m,n) . La corrispondenza $T_{(m,n)}$ è detta ***traslazione*** del piano . E' evidente che la corrispondenza $T_{(m,n)}$ è biettiva . Inoltre se r è una retta rappresentata dall'equazione $ax + by + c = 0$ si ha , da (++) ,

$$x = x' - m \quad \text{ed} \quad y = y' - n$$

e quindi si ha

$$a(x' - m) + b(y' - n) + c = 0$$

e così i punti (x' , y') sono le soluzioni dell'equazione

$$ax' + by' + c' = 0$$

con $c' = -am - bn + c$.

Pertanto i punti (x', y') trasformati dei punti (x, y) di r sono anch'essi punti di una retta r' che come si vede dalla sua rappresentazione è parallela ad r . La corrispondenza $T_{(m,n)}$ è quindi ***un'affinità priva di punti uniti e che trasforma ogni retta in una ad essa parallela***.
Quando si assuma m=0 ed n=0 la corrispondenza $T_{(0,0)}$ è l'identità . In tal modo l'identità può far parte delle traslazioni del piano.

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ è una matrice quadrata non degenere possiamo considerare l'affinità da essa indotta e se (m , n) è una coppia ordinata di numeri reali , possiamo considerare la traslazione $T_{(m,n)}$.

La funzione $T_{(m,n)} \circ A$ che si ottenga componendo tra loro le due affinità è una affinità del piano che al punto (x, y) fa corrispondere il punto (x', y') dove è :

$$(**) \qquad \begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = a'x + b'y + n \end{cases} \qquad \text{con} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$$

Proveremo ora il seguente importante :

Teorema I *Una qualunque affinità del piano si ottiene componendo una traslazione ed un'affinità A indotta da un isomorfismo di R^2 in sè .*

Prima di fare la dimostrazione occorre introdurre una definizione . Una *terna ordinata* di punti non allineati del piano è detta un ***riferimento del piano***.
E' chiaro che un' affinità del piano trasforma un riferimento in un riferimento.
La terna ordinata

$$\mathcal{R}_0 = (\ (0 , 0) , (1 , 0) , (0 , 1) \ )$$

è detta ***riferimento fondamentale*** .

Proveremo in appendice il seguente teorema (la cui dimostrazione, non banale, è esposta in appendice per quegli studenti che avessero interesse a conoscerla)

Teorema fondamentale .

L' unica affinità che trasforma in sé il riferimento fondamentale è l'identità.

Possiamo ora provare il Teorema I.

Dimostrazione. Sia

$$\varphi : R^2 \to R^2$$

una affinità del piano. Se φ lascia fisso il riferimento fondamentale allora per il teorema fondamentale è l'identità e quindi è :

$$\varphi = I = T_{(0,0)} \circ I \qquad \text{(I essendo la matrice identica)}$$

Possiamo supporre quindi che l'affinità φ non lasci unito il riferimento fondamentale.

Se è :

$$\varphi\ (0,0) = (\ 0,\ 0)\ \ ,\ \ \varphi\ (1,0) = (\ a,\ a')\ \ ,\ \varphi\ (0,1) = (\ b,\ b')$$

Le rette distinte y=0 ed x=0 le quali contengono (1,0) e (0,1) vengono trasformate in due rette distinte per (0,0) e queste contengono la prima (a, a') e la seconda (b, b') . Ne segue che (b,b') non è proporzionale ad (a, a') e quindi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \qquad \text{è non degenere cioè è} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$$

L' affinità A trasforma come l'affinità φ anch'essa il riferimento fondamentale nel riferimento ((0,0) , (a, a') , (b , b')). Ne segue che l' affinità $A^{-1} \circ \varphi$ trasforma in sé il riferimento fondamentale e quindi essa , per il teorema fondamentale, è l'identità I .

Da $A^{-1} \circ \varphi = I$ segue $\varphi = A = T_{(0,0)} \circ A$.

Possiamo infine supporre che sia $\varphi\ (0,0) = (\ m\ ,\ n) \neq (0,0)$.

Consideriamo la traslazione T^{-1} inversa della traslazione $T_{(m,n)}$. L' affinità $T^{-1} \circ \varphi$ trasforma (0 , 0) in sé e quindi è per quanto precede $T^{-1} \circ \varphi = A$ da cui segue

$\varphi = T_{(m,n)} \circ A$ e cioè l'asserto .

Abbiamo così caratterizzato il gruppo delle affinità del piano affine reale .

Sia F una figura del piano e supponiamo che F abbia una certa proprietà " p " . La proprietà " p " si dirà una *proprietà affine* se è ***invariante*** rispetto al gruppo delle affinità cioè se per ogni affinità φ del piano anche la figura φ(F) ha la proprietà "p".

La geometria affine del piano consiste nella determinazione delle proprietà affini delle figure del

piano .

Quando il piano reale venga ampliato con i suoi punti immaginari ed i punti impropri esso come visto diventa proiettivo. Usando le coordinate omogenee, i punti di tale piano, che indichiamo con π, sono rappresentabili , in un riferimento reale fissato , con terne non nulle (x_1, x_2 , x_3) di numeri complessi e definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Inoltre con tale rappresentazione un punto proprio è rappresentabile con una terna del tipo $(y_1, y_2 , 1)$ ed un punto improprio con $(y_1, y_2 , 0)$.

Quando si consideri una matrice quadrata d'ordine tre ad elementi reali e non degenere

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \det A \neq 0$$

si può definire la seguente funzione del piano in sé :

$$\omega_A \quad : \quad P(x_1, x_2 , x_3) \in \pi \qquad \rightarrow \qquad P'(x'_1, x'_2 , x'_3) \in \pi$$

con

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12_2}\, x_2 \quad + a_{13}\, x_3 \\ x'_2 = a_{21}\, x_1 + a_{22_2}\, x_2 \quad + a_{23}\, x_3 \\ x'_3 = a_{31}\, x_1 + a_{32_2}\, x_2 \quad + a_{33}\, x_3 \end{cases}$$

Tale funzione è , come facilmente si verifica, un isomorfismo del piano in sé, chiamato ***proiettività reale***. E' evidente che una matrice B proporzionale ad A secondo un fattore reale non nullo definisce la stessa proiettività. Pertanto le proiettività reali costituiscono , rispetto alla usuale legge di composizione di funzioni, un gruppo isomorfo ad un quoziente di GL(3,R).

Quando si considerino le matrici di GL(3,R) del tipo :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$$

si ottiene un sottogruppo A(3,R) del gruppo GL(3,R) , e le proiettività da esse definite costituiscono un sottogruppo, che indicheremo con $\mathcal{A}$ (3,R) , del gruppo delle proiettività reali. Le proiettività definite dalle matrici del sottogruppo A(3,R) sono quindi rappresentate da equazioni del tipo :

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}\, x_1 + a_{12_2}\, x_2 \quad + a_{13}\, x_3 \\ x_2' = a_{21}\, x_1 + a_{22_2}\, x_2 \quad + a_{23}\, x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

Una tale proiettività viene chiamata ***affinità*** del piano per queste ragioni .

Essa trasforma punti propri in punti propri , punti impropri in punti impropri , punti reali in punti reali e punti immaginari in punti immaginari. La sua restrizione al piano affine è pertanto un'affinità di tale piano. Per tale ragione il gruppo delle proiettività definite dalle matrici di A(3,R) sarà ancora chiamato ***gruppo delle affinità del piano.***

La geometria affine del piano proiettivo consiste nella determinazione delle proprietà delle figure del piano che siano invarianti rispetto a tale gruppo.

Nel seguito riterremo che sul piano proiettivo agiscano soltanto tali affinità reali .

Appendice.

Ricordiamo preliminarmente il seguente risultato relativo al campo dei numeri reali .

Teorema . *L' unico automorfismo del campo reale è l'identità.*

Accenniamo alla dimostrazione di questo teorema. Sia quindi

$$\gamma\colon\ R \to R$$

un automorfismo del campo reale . L'applicazione γ è quindi biettiva ed ha le seguenti due proprietà

1. $\gamma\,(a + b) = \gamma\,(a) + \gamma\,(b)$
2. $\gamma\,(a\, b) = \gamma\,(a)\, \gamma\,(b)$

Da 1 e 2 segue subito che è $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$ e conseguentemente

$$\gamma(-a) = -\gamma(a) \qquad\qquad \gamma\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\gamma(a)} \quad (a \neq 0)$$

Sia m un intero positivo . Possiamo scrivere

$$m = 1 + 1 + .. + 1 \quad \text{(m volte)}$$

e quindi è $\gamma(m) = \gamma(1 + 1+ .. +1) = \gamma(1) + \gamma(1) + \ldots + \gamma(1) = 1 + 1+ .. +1 = m$.

Pertanto γ fissa i numeri interi non negativi.

Si ha allora

$$\gamma(-m) = - . \gamma(m) = -m .$$

e così γ fissa i numeri interi relativi .

Si ha allora che , per ogni numero razionale $\frac{m}{n}$ risulta :

$$\gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \gamma\left(m\frac{1}{n}\right) = \gamma(m)\,\gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \gamma(m)\,\frac{1}{\gamma(n)} = \frac{m}{n}$$

Pertanto γ fissa i numeri razionali.

Se x è un numero irrazionale ed è rappresentato dalla successione $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ di numeri razionali allora è :

$$\gamma(x) = (\gamma(y_1), \gamma(y_2), \ldots, \gamma(y_n), \ldots) = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = x.$$

L' automorfismo γ è quindi l'identità e si ha così l'asserto.

Ora come annunciato proveremo il seguente.

Teorema fondamentale .

L' unica affinità che trasforma in sé il riferimento fondamentale è l'identità.

Dimostrazione .

Sia quindi $f : R^2 \to R^2$ un' affinità del piano che trasforma in sé il riferimento fondamentale cioè :

$$f(0,0) = (0,0) \quad , \quad f(1,0) = (1,0) \quad , \quad f(0,1) = (0,1)$$

Useremo spesso la seguente ovvia proprietà dell'affinità f :

(*)

Se r ed r' sono due rette parallele tali risultano altresì le rette trasformate f (r) ed f (r') .

Per rendere più semplice l' esposizione indicheremo :

con **x** la retta d'equazione $y = 0$ che congiunge (0,0) ed (1,0),

con **y** la retta d'equazione $x = 0$ che congiunge (0,0) ed (0,1)

con **u** la retta d'equazione $x + y = 1$ che congiunge (1,0) ed (0,1).

Poiché i tre punti (0,0) , (1, 0) , (0, 1) sono uniti in f tali risultato le rette **x** , **y** , **u** .

Si ha quindi :

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} , \quad f(\mathbf{y}) = \mathbf{y} , \quad f(\mathbf{u}) = \mathbf{u} .$$

Sia a un numero reale e sia (a , 0) il punto dell'asse **x** di coordinate (a, 0). Poiché f trasforma in sé la retta **x** il punto (a, 0) sarà trasformato da f in un punto (a' , 0) sempre dell' asse **x** .

Possiamo allora considerare la seguente corrispondenza φ del campo reale **R** in sé :

$$\varphi : \quad a \in R \rightarrow a' \in R$$

Tale funzione φ è ovviamente biettiva . Inoltre essendo $f(0,0) = (0,0)$ e $f(1,0)= (1,0)$, si ha $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$ .Proveremo che tale funzione φ è un automorfismo del campo reale R. Vediamo.

Abbiamo posto

$$\mathbf{f (a , 0) = (\varphi(a) , 0)} .$$

Osserviamo ora che la retta ℓ parallela ad **u** passante per il punto (a, 0) ha equazione $x + y = a$. Tale retta interseca la retta **y** nel punto (0 , a). Poiché ℓ è parallela ad **u** allora $f(\ell)$ è parallela ad f(**u**) = **u** e quindi ad ℓ . Poiché $f(\ell)$ deve contenere il trasformato di (a , 0) allora $f(\ell)$ contiene il punto ($\varphi(a)$, 0) e quindi essa interseca l' asse **y** nel punto (0 , $\varphi(a)$) . Pertanto il punto (0,a) di **y** , che sta su ℓ , è trasformato in punto di **y** che deve appartenere a $f(\ell)$. Si ha quindi :

$$\mathbf{f (0 , a) = (0 , \varphi(a))}$$

Sia (a, b) un punto del piano . Siano **t** la retta per (a, b) parallela ad **y** e **t'** la retta per (a, b) parallela ad **x** . La retta **t** che ha equazione $x - a = 0$ e la retta **t'** ha equazione $y - b = 0$. La retta **t** contiene il punto (a , 0) di **x** e così la sua trasformata contiene il trasformato di tale punto e cioè contiene ($\varphi(a)$, 0). Analogamente la retta **t'** contiene il punto (0 , b) di **y** e così la sua trasformata f(**t'**) contiene il trasformato di tale punto e cioè contiene (0, $\varphi(b)$).

Poiché **t** ed **y** sono parallele allora anche le loro trasformate f(**t**) ed f(**y**) = **y** sono parallele.

Poiché **t'** ed **x** sono parallele allora anche le loro trasformate f(**t'**) ed f(**x**) = **x** sono parallele.

Si conclude che f(**t**) è parallela ad **y** e contiene il punto ($\varphi(a)$, 0).Pertanto f(**t**) ha equazione $x - \varphi(a) = 0$.

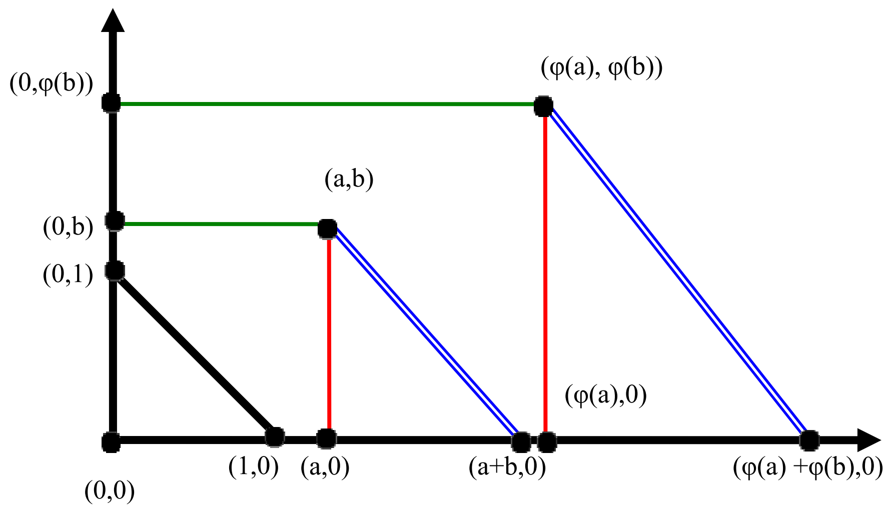
Analogamente f(**t'**) è parallela ad **x** e contiene il punto (0, $\varphi(b)$) e così f(**t'**) ha equazione $y - \varphi(b) = 0$.

Poiché (a , b) è un punto di **t** $\cap$ **t'** allora il trasformato di tale punto appartiene alle trasformate f(**t**) ed f(**t'**) . Abbiamo così provato che è :

$$f(a, b) = (\varphi(a), \varphi(b)).$$

La retta **s** per (a,b) parallela ad **u** ha equazione $x + y = a + b$ ed essa interseca **x** nel punto (a+b , 0). Poiché **s** è parallela ad **u** allora f(**s**) è parallela ad f(**u**) = **u** e contiene il trasformato del punto (a,b).Pertanto f(**s**) è la retta parallela ad **u** e passante per il punto ($\varphi(a)$, $\varphi(b)$) .

La retta f(**s**) ha quindi equazione $x + y = \varphi(a) + \varphi(b)$ e quindi essa interseca la retta **x** nel punto ($\varphi(a) + \varphi(b)$, 0) . Il punto (a+b , 0). comune ad **s** ed **x** è traformato quindi nel punto comune alle rette trasformate f(**s**) ed f(**x**) = **x** cioè nel punto ($\varphi(a) + \varphi(b)$, 0) .



Si ha quindi :

$$f(\, a+b \,,\, 0) = (\varphi(a)+\varphi(b) \,,\, 0\,)$$

la quale mostra che è :

$$\varphi\,(\, a+b) = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Consideriamo due numeri a e b e consideriamo i due punti (a, 0) e (0, b). I loro trasformati per quanto precede sono i punti $(\varphi(a)\,,\,0\,)$ e $(\,0\,,\,\varphi(b))$.

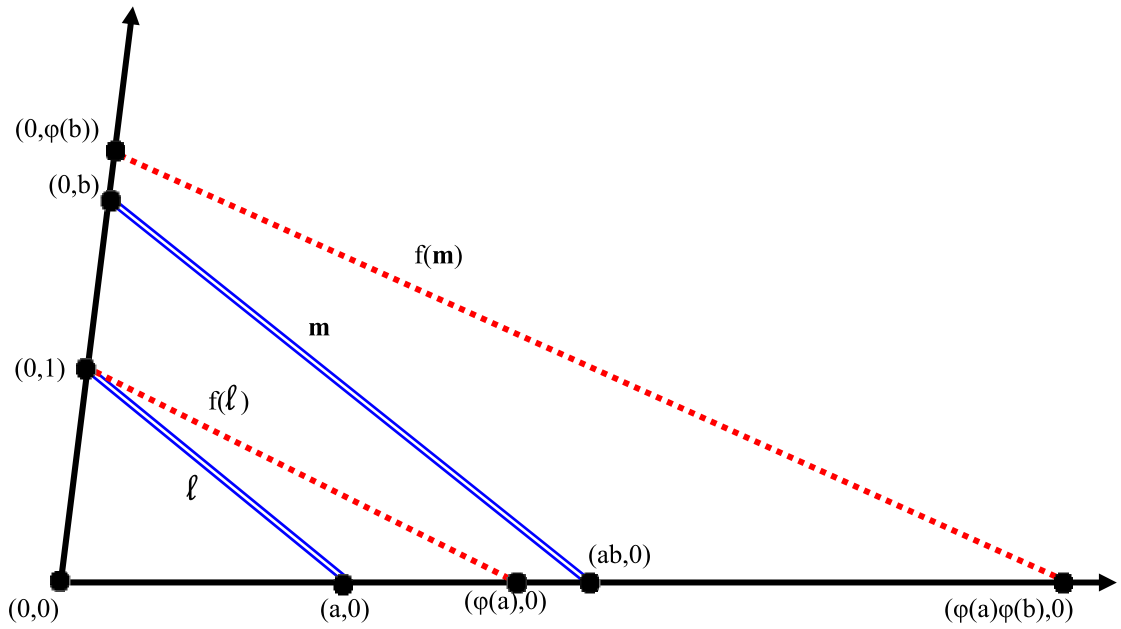
La retta ℓ che unisce (0 ,1) con (a , 0) ha equazione $x + ay = a$. La retta **m** per (0, b) ad essa parallela ha quindi equazione $x + a\,(\,y - b) = x + ay - ab = 0$. La retta **m** interseca quindi la retta **x** nel punto (ab , 0).

Le rette ℓ ed **m** sono tra loro parallele e quindi tali risultano anche le loro trasformate $f(\ell\,)$ ed $f(\mathbf{m}\,)$.

Poiché la retta ℓ contiene (0 ,1) ed (a , 0) allora la sua trasformata deve contenere i trasformati di tali punti e cioè essa è la retta che unisce (0 , 1) e $(\varphi(a)\,,\,0\,)$. Pertanto $f(\ell\,)$ ha equazione $x + \varphi(a)\,y = \varphi(a)$. La retta **m** contiene il punto (0,b) e quindi la retta f(**m**) deve contenere il suo trasformato $(0\,,\,\varphi(b))$. Dovendo inoltre risultare f(**m**) parallela ad $f(\ell\,)$ si ha che la sua equazione è : $x + \varphi(a)\,(\,y - \varphi(b)) = x + \varphi(a)\,y - \varphi(a)\,\varphi(b) = 0$.

La retta f(**m**) interseca quindi la retta **x** nel punto $(\varphi(a)\,\varphi(b)\,,\,0\,)$.

Il punto (ab , 0) comune ad **m** ed **x** è quindi trasformato nel punto comune alle loro trasformate f(**m**) ed f(**x**) = **x** cioè nel punto (φ(a) φ(b) , 0).



Si ha quindi

$$f\,(ab\,,0\,) = (\varphi(a)\,\varphi(b)\;,\,0\,).$$

e questa mostra che è :

$$\varphi(ab) \;=\; \varphi(a)\,\varphi(b)\;.$$

La funzione φ costruita è quindi un automorfismo di **R** . La funzione φ è quindi l'identità e così l' affinità f , risultando

$$f(a\,,b) = (\varphi(a)\,,\varphi(b)) = (\,a\,,b\,)$$

è l'identità.

L' asserto è così provato.

Capitolo III

Circonferenza , ellisse , iperbole , parabola

1. La circonferenza.

Fissiamo nel piano reale un riferimento monometrico ed ortogonale $\mathcal{R}$.

Siano $P_o (x_o , y_o)$ un punto del piano ed **r** un **numero reale positivo**.
Si chiama ***circonferenza di centro P_o e raggio r*** l'insieme dei punti P del piano che hanno distanza **r** da P_o . Indichiamo con **C** tale insieme di punti e cerchiamo una sua rappresentazione analitica . Sussistono le seguenti ovvie equivalenze :

$$P (x , y) \in \mathbf{C} \iff d (P , P_o) = r \iff \sqrt{(x - xo)^2 + (y- yo)^2} = r \iff (x - x_o)^2 + (y- y_o)^2 = r^2$$

Da queste segue quindi che appartengono alla circonferenza tutti e soli i punti del piano le cui coordinate verificano l'equazione :

$$(x - x_o)^2 + (y- y_o)^2 = r^2 \tag{1}$$

la quale può scriversi così :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{2}$$

avendo indicato con a , b , c le seguenti quantità :

$$a = -2 x_o \quad , \quad b = -2 y_o \quad , \quad c = x_o^2 + y_o^2 - r^2$$

L' equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

rappresenta quindi la circonferenza **C** nel riferimento $\mathcal{R}$ fissato.

E' evidente che un'equazione proporzionale ad essa secondo un fattore di proporzionalità non nullo avendo le stesse soluzioni, rappresenta lo stesso insieme di punti.

L'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ che rappresenta **C** nel riferimento scelto è quindi di ***secondo grado*** , ***manca del termine misto xy*** ed ha ***eguali i coefficienti di x^2 e y^2*** .

Non sempre però un'equazione di questo tipo rappresenta una circonferenza . Vediamo perché.

Sia quindi assegnata l'equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

essa rappresenta una circonferenza di centro $P_o\,(x_o\,,\,y_o)$ e raggio r (positivo) se risulta :

(3) $$x^2 + y^2 + ax + by + c = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - r^2$$

L'eguaglianza (3) sussiste se risulta :

$$a = -2\,x_o \quad , \quad b = -2\,y_o \quad , \quad c = x_o^{\,2} + y_o^{\,2} - r^2$$

Si ha quindi

$$\mathbf{x_o = -\,\frac{a}{2} \quad , \quad y_o = -\,\frac{b}{2}}$$

(4) $$\mathbf{r^2} = x_o^{\,2} + y_o^{\,2} - c = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

Dalla (4) segue quindi che si troverà un numero **r** positivo ,raggio della circonferenza cercata , se si ha :

(5) $$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \mathbf{- c > 0}$$

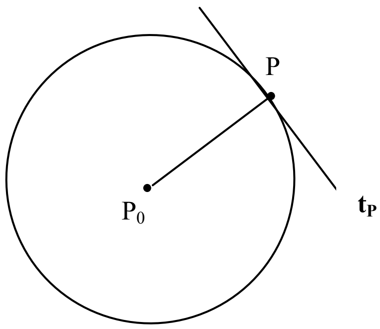
Riassumendo :
l'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ che abbia **a , b , c verificanti la proprietà (5)** è l'equazione della circonferenza con centro nel punto $\mathbf{P_o = \left(-\frac{a}{2}\,,\,-\frac{b}{2}\right)}$ e raggio **r** dato da :

(6) $$\mathbf{r} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}\ .$$

Sia **C** una circonferenza del piano con centro nel punto $P_o(x_o, y_o)$ e raggio r positivo e sia

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

l'equazione che rappresenta **C** in un riferimento fissato . Sia $P(\overline{x}, \overline{y})$ un punto della circonferenza. Esiste una sola retta per P che incontra **C** nel solo punto P essa è chiamata la *retta tangente a **C** nel punto P* . E' noto che tale retta $\mathbf{t_P}$ coincide con la retta per P ortogonale alla retta ℓ che unisce P al centro P_o .



I numeri direttori della retta ℓ sono $(\overline{x} - x_o, \overline{y} - y_o)$ e quindi la retta $\mathbf{t_P}$ ha equazione :

$$\mathbf{t_P} \quad : \qquad (\overline{x} - x_o)(x - \overline{x}) + (\overline{y} - y_o)(y - \overline{y}) = 0.$$

Quando il piano reale venga ampliato con i punti immaginari anche la circonferenza **C** rappresentata dall'equazione a coefficienti reali

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

si arricchisce di ulteriori punti (*immaginari*) corrispondenti alle soluzioni complesse dell'equazione che la rappresenta .

Quando al piano si aggiungano anche i punti impropri allora per rappresentare tutti i punti di **C** *propri ed impropri* occorre che l'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ di **C** sia resa *omogenea*.

Pertanto l'equazione

$$x^2 + y^2 + a\,x\,t + b\,y\,t + ct^2 = 0$$

rappresenta tutta la circonferenza **C** inclusi i suoi punti impropri.

Ma quali sono i punti impropri di **C** ? Vediamo.

E' chiaro che i punti impropri di **C** sono quelli che essa ha in comune con la retta impropria del piano che si rappresenta con l'equazione $t = 0$. I punti impropri di **C** corrispondono quindi alle soluzioni non nulle del seguente sistema S :

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 + a\,x\,t + b\,y\,t + ct^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni cercate si ottengono quindi attraverso le soluzioni non nulle di :

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

E sono quindi ottenute attraverso le soluzioni di

$$S : \begin{cases} (x + iy)(x - iy) = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} (x + iy) = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} (x - iy) = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Pertanto i punti ***impropri*** della circonferenza **C** sono **due** e sono **immaginari e coniugati** e sono i punti

$$A_\infty = (\mathbf{i}, 1, 0) \qquad \text{e} \qquad A'_\infty = (-\mathbf{i}, 1, 0)$$

punti impropri delle rette complesse $\mathbf{x + i\,y = 0}$ e $\mathbf{x - i\,y = 0}$.

I punti $A_\infty = (\mathbf{i}, 1, 0)$ **e** $A'_\infty = (-\mathbf{i}, 1, 0)$ sono chiamati i ***punti ciclici*** del piano **.**

Abbiamo così provato che una ***qualunque circonferenza reale*** *quando la si pensi immersa nel piano proiettivo complesso ha in comune con la retta impropria i punti ciclici del piano.*

Quando si assegni nell'insieme dei punti del piano reale una proprietà "p" si può considerare il sottoinsieme che tale proprietà determina. Si può inoltre cercare di descrivere il luogo $\mathcal{F}$ dei punti P del piano che godono della proprietà assegnata attraverso l'uso di una sua rappresentazione analitica in un riferimento assegnato.

Abbiamo appena visto un primo esempio di questo problema. Infatti la proprietà

"p" *P ha distanza* ***r*** *dal punto* P_o

è una proprietà definita tra i punti del piano ed il sottoinsieme **C** che essa determina è una ***circonferenza*** della quale abbiamo trovato in un riferimento ortogonale una sua semplice rappresentazione. Usando tale rappresentazione è stato poi più facile indagare sulle proprietà dell'insieme **C** .

Percorrendo questa idea descriveremo ora altri ben noti insiemi di punti :

ellisse , ***iperbole ,*** ***parabola***

ognuno dei quali è definito attraverso una ben precisa proprietà . Ciò che accomuna tali luoghi è che essi al pari della circonferenza sono rappresentati tutti in un riferimento fissato da una equazione di secondo grado .Vediamo.

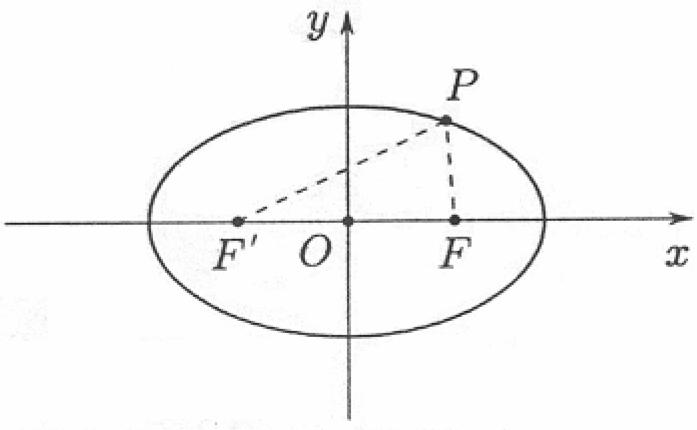
2. Ellisse.

Siano F ed F' due punti distinti del piano e sia **2c** la loro distanza. Fissato un numero **a > c** consideriamo i punti P del piano che hanno la seguente proprietà :

$$\mathbf{d (P , F) + d (P , F') = 2a}$$

Tale insieme di punti è chiamato ***ellisse*** e sarà ora denotato con $\mathcal{E}$. I due punti F ed F' sono detti i *fuochi* dell'ellisse.

Cerchiamo ora una rappresentazione di tale insieme $\mathcal{E}$. Per fare ciò disponiamo il riferimento che sceglieremo ortogonale, in modo che l'asse **x** coincida con la retta che congiunge F' ed F e l'origine O col punto medio del segmento [F' , F] . Orientamo gli assi in modo che F abbia coordinate (c , 0) ed F' abbia coordinate (-c, 0).



Con tale scelta del riferimento si ha

$P(x, y) \in \mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{d(P, F) + d(P, F') = 2a} \quad \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \mathbf{2a}$$

Poniamo $\mathbf{b^2 = a^2 - c^2}$.

Si hanno le seguenti equivalenze :

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \mathbf{2a} \quad \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \mathbf{2a} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \Leftrightarrow$

$(x-c)^2 + y^2 - 4a^2 - (x+c)^2 - y^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \Leftrightarrow$

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad \Leftrightarrow$

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{ essendo } c^2 = a^2 - b^2)$$

Pertanto fanno parte dell'ellisse tutti e soli i punti P (x,y) del piano le cui coordinate soddisfano l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

o equivalentemente

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

che rappresenta quindi l'ellisse nel riferimento scelto.

Quando il piano reale venga ampliato con i punti immaginari anche l'ellisse $\mathcal{E}$ rappresentata dall'equazione a coefficienti reali

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

si arricchisce di ulteriori punti (*immaginari*) corrispondenti alle soluzioni complesse dell'equazione che la rappresenta.

Quando al piano si aggiungano anche i punti impropri allora per rappresentare tutti i punti di $\mathcal{E}$ *propri ed impropri* occorre che l'equazione $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ di $\mathcal{E}$ sia resa *omogenea*.

Pertanto l'equazione

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2\, t^2 = 0$$

rappresenta tutti i punti propri ed impropri dell' ellisse $\mathcal{E}$.

I punti impropri dell'ellisse sono i punti che l'ellisse ha in comune con la retta impropria e quindi si ottengono in corrispondenza alle soluzioni non nulle del seguente sistema S :

$$S \begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2\, t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Il sistema S è equivalente a :

$$S \begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Che può scriversi così

$$\begin{cases} b^2x^2 - i^2\, a^2y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} (bx - iay)(bx + iay) = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Da cui segue :

$$\begin{cases} bx - iay = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} bx + iay = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

I punti impropri dell'ellisse sono i seguenti due punti

$$A_\infty(\, ia\,,\, b\,,\, 0\,) \qquad A'_\infty(\, -ia\,,\, b\,,\, 0\,)$$

immaginari e coniugati. La retta impropria è quindi ***esterna*** all'ellisse.

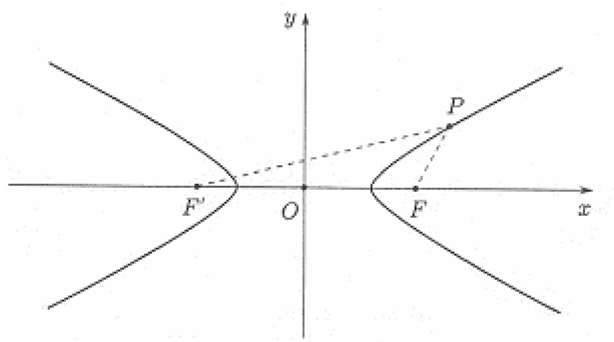
3. Iperbole.

Siano F ed F' due punti distinti del piano e sia **2c** la loro distanza. Fissato un numero **a < c** consideriamo i punti P del piano che hanno la seguente proprietà :

$$\mathbf{|\, d(P, F) - d(P, F')\,| = 2a}$$

Tale insieme di punti è chiamato ***iperbole*** e sarà ora denotato con $\mathfrak{I}$. I due punti F ed F' sono detti i *fuochi* dell'iperbole .

Cerchiamo ora una rappresentazione di tale insieme $\mathfrak{I}$. Per fare ciò disponiamo il riferimento che sceglieremo ortogonale, in modo che l'asse **x** coincida con la retta che congiunge F' ed F e l'origine O col punto medio del segmento [F' , F] . Orientamo gli assi in modo che F abbia coordinate (c , 0) ed F' abbia coordinate (-c, 0).



Con tale scelta del riferimento si ha

$$P(x, y) \in \mathfrak{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{|\, d(P, F) - d(P, F')\,| = 2a} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left|\, \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\, \right| = \mathbf{2a}$$

Poniamo **$b^2 = c^2 - a^2$** .

Con calcoli del tutto simili a quelli già illustrati per l'ellisse si trova che :

$$P(x,y) \in \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pertanto fanno parte dell'iperbole tutti e soli i punti P (x,y) del piano le cui coordinate soddisfano l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

o equivalentemente

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

che rappresenta quindi l'iperbole nel riferimento scelto.
Quando il piano reale venga ampliato con i punti immaginari anche l'iperbole $\mathcal{I}$ rappresentata dall'equazione a coefficienti reali

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

si arricchisce di ulteriori punti (*immaginari*) corrispondenti alle soluzioni complesse dell'equazione che la rappresenta.
Quando al piano si aggiungano anche i punti impropri allora per rappresentare tutti i punti di $\mathcal{I}$ *propri ed impropri* occorre che l'equazione $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ di $\mathcal{I}$ sia resa *omogenea.*
Pertanto l'equazione

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 t^2 = 0$$

rappresenta tutti i punti propri ed impropri dell' iperbole $\mathcal{I}$**.**

I punti impropri dell' iperbole sono i punti che l' iperbole ha in comune con la retta impropria e quindi si ottengono in corrispondenza alle soluzioni non nulle del seguente sistema S :

$$S: \quad \begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2\,t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Il sistema S è equivalente a :

$$S \begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

che può scriversi così

$$\begin{cases} (bx - ay)(bx + ay) = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Da cui segue :

$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} bx + ay = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

I punti impropri dell'iperbole sono quindi i seguenti due punti reali e distinti

$$A_\infty (a , b , 0) \qquad A'_\infty (- a , b , 0)$$

La retta impropria è quindi ***secante*** l'iperbole .

4. Parabola.

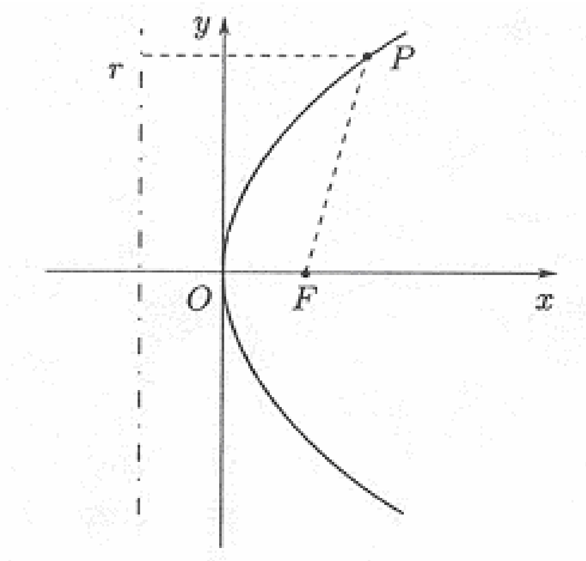
Siano **F** un punto e r una retta non contenente F. Sia **2p** la distanza di F dalla retta r. Consideriamo i punti P del piano che hanno la seguente proprietà :

$$\mathbf{d (P , F) = d (P , r)}$$

Tale insieme di punti è chiamato ***parabola*** e sarà ora denotato con $\mathcal{P}$. Il punto F è detto ***fuoco*** mentre la retta r è chiamata ***direttrice*** .

Cerchiamo ora una rappresentazione di tale insieme $\mathcal{P}$.

Per fare ciò disponiamo il riferimento che sceglieremo ortogonale, in modo che l'asse **x** coincida con la retta **m** per F ortogonale ad r e l'origine O col punto medio del segmento [F , M] M essendo il punto d'intersezione di **m** con r . Orientiamo gli assi in modo che **F** abbia coordinate (p , 0) .



Con tale scelta del riferimento si ha

P (x , y) $\in \mathcal{P}$ $\Leftrightarrow$ **d (P , F) = d (P , r)** $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = | x + p |$$

Da questa elevando al quadrato segue :

(**) $$y^2 - 2 p x = 0$$

e tale equazione rappresenta quindi la parabola $\mathcal{P}$ nel riferimento scelto.

Quando il piano reale venga ampliato con i punti immaginari anche la parabola $\mathcal{P}$ rappresentata dall'equazione a coefficienti reali

$$y^2 - 2 p x = 0$$

si arricchisce di ulteriori punti (*immaginari*) corrispondenti alle soluzioni complesse dell'equazione che la rappresenta.

Quando al piano si aggiungano anche i punti impropri allora per rappresentare tutti i punti di $\mathcal{P}$ *propri ed impropri* occorre che l'equazione $y^2 - 2 p x = 0$ di $\mathcal{P}$ sia resa *omogenea*.

Pertanto l'equazione omogenea

$$y^2 - 2 p x t = 0$$

rappresenta tutti i punti propri ed impropri della parabola $\mathcal{P}$.

Quali sono i punti impropri della parabola $\mathcal{P}$? Vediamo .

I punti impropri della parabola $\mathcal{P}$ sono i punti che la parabola ha in comune con la retta impropria e quindi si ottengono in corrispondenza alle soluzioni non nulle del seguente sistema S :

$$S : \begin{cases} y^2 - 2\,p\,x\,t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente a

$$S : \begin{cases} y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

che ha nella terna (1 , 0 , 0) due soluzioni coincidenti .

Pertanto la parabola ha un solo punto ***improprio reale.***

La retta impropria è quindi ***tangente*** alla parabola.

Le curve reali descritte in precedenza ***circonferenza , ellisse , iperbole , parbola*** sono anche chiamate ***coniche*** per la ragione seguente.

Nello spazio scegliamo un piano $\boldsymbol{\pi}_o$ e su di esso consideriamo una circonferenza **C** di raggio r da noi scelto che abbia il centro in un punto di $\boldsymbol{\pi}_o$ che chiamiamo P_o. Consideriamo la retta **m** per P_o ortogonale a $\boldsymbol{\pi}_o$ e su tale retta scegliamo un punto **V** distinto da P_o .

L ' unione di tutte le rette VP (***generatrici***), al variare di P su **C** , è detto ***cono (*** *circolare retto* ***) di vertice V e direttrice C*** .

Sia ora $\boldsymbol{\pi}$ un piano dello spazio ***non passante*** per il vertice **V**.

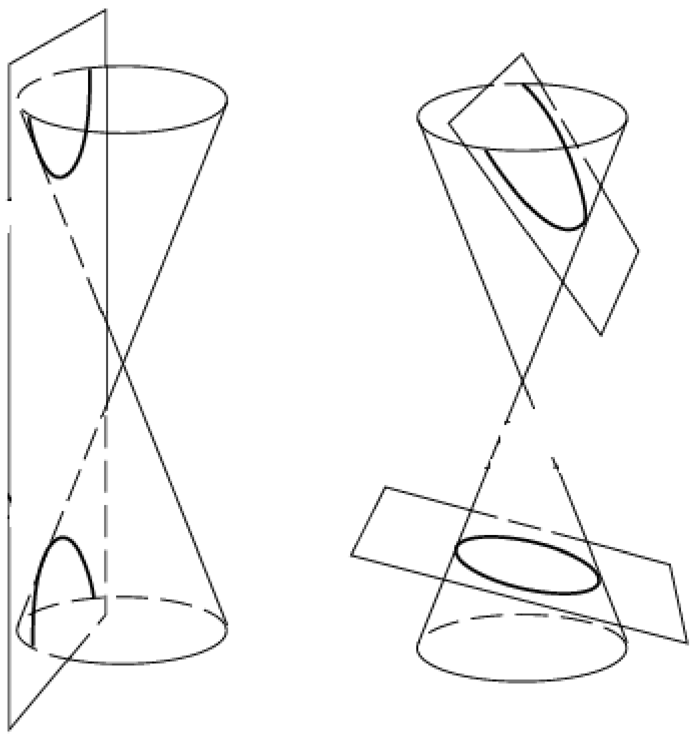
L'intersezione di $\boldsymbol{\pi}$ col cono è :

a) una *circonferenza* se $\boldsymbol{\pi}$ è ortogonale ad **m** .

b) una *ellisse* se $\boldsymbol{\pi}$ incide **tutte le generatrici** ma non è ortogonale ad **m** .

c) una *iperbole* se $\boldsymbol{\pi}$ incide tutte le generatrici tranne due .

d) una *parabola* se $\boldsymbol{\pi}$ incide tutte le generatrici tranne una.



Se il piano $\boldsymbol{\pi}$ passa per **V** allora l'intersezione di $\boldsymbol{\pi}$ col cono è :

1. *una sola retta* (*piano tangente*)

oppure

2. *due rette distinte* (*piano secante*)

Le curve reali che abbiamo descritto in questo capitolo (*circonferenza , ellisse , iperbole , parabola*) vengono chiamate ***coniche*** ***(*** *non degeneri* ***)*** in quanto ottenibili come sezioni piane di un cono .

Inoltre tali curve reali (*circonferenza , ellisse , iperbole , parabola*) come già abbiamo osservato quando le pensiamo immerse nel piano proiettivo complesso sono tutte rappresentate da una

equazione omogenea di secondo grado in tre variabili a coefficienti reali .

Nel piano reale ampliato coi punti immaginari e coi punti impropri si scelga un riferimento reale e si scelgano poi due rette reali **r** ed **s** rappresentate nel riferimento scelto dalle seguenti equazioni a coefficienti reali :

$\mathbf{r}$: $ax + by + ct = 0$

$\mathbf{s}$: $a'x + b'y + c't = 0$

E' chiaro che l'equazione omogenea di secondo grado

$$(ax + by + ct)(a'x + b'y + c't) = 0$$

che si ottenga come prodotto delle due equazioni date rappresenta l'insieme $\mathbf{r} \cup \mathbf{s}$. Mentre l'equazione omogenea di secondo grado

$$(ax + by + ct)^2 = 0$$

rappresenta sempre la retta **r** (*contata due volte*).

Una equazione omogenea a coefficienti reali in tre variabili può quindi essere la rappresentazione di :

una circonferenza reale , di una ellisse , di una iperbole , di una parabola e di una coppia di rette distinte o coincidenti .

(e queste come visto sono tutte le possibili sezioni di un piano col cono).

Nel capitolo che segue daremo la definizione di ***conica*** e poi studieremo a fondo tali insiemi di punti del piano.

Nello studio che faremo ci imbatteremo spesso a dover ricercare le soluzioni **non nulle** di un'equazione omogenea di secondo grado in due variabili (che qui indichiamo con λ e μ) del tipo :

(++) $$a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2 = 0 .$$

ed è quindi utile sapere come si trovano le sue soluzioni non nulle.

E' chiaro che se la coppia (λ_o , μ_o) verifica l'equazione (++) anche la coppia $(\rho\lambda_o , \rho\mu_o)$ con $\rho \neq 0$ verifica l'equazione (++) .

Ora se è $a \neq 0$ e (λ_o , μ_o) è una soluzione non può essere $\mu_o = 0$ perché ciò comporterebbe anche $\lambda_o = 0$. Pertanto è $\mu_o \neq 0$ ed allora possiamo assumere $\mu_o = 1$ e determinare λ_o attraverso le soluzioni di

(+) $$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 .$$

ottenuta appunto dalla (++) ponendo $\mu = 1$.

Se λ_1 e λ_2 sono le soluzioni dell'equazione (+) le due coppie (λ_1 , 1) e (λ_2 , 1) sono le soluzioni cercate dell'equazione (++).

Se $a = 0$ allora l'equazione (++) diviene

$$b\lambda\mu + c\mu^2 = \mu (b\lambda + c\mu) = 0 .$$

e quindi le soluzioni sono (1 , 0) e (-c , b).

Capitolo IV

Le coniche

1. Le coniche del piano proiettivo complesso.

Nel piano proiettivo complesso che indicheremo con $\boldsymbol{\pi}$ (nel quale sia fissato un riferimento reale $\mathcal{R}$) si chiama ***conica***
l'insieme dei punti P del piano verificanti con le loro coordinate omogenee un'equazione non identica omogenea di secondo grado in tre variabili (x , y, t) a coefficienti complessi del tipo .

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}t^2 + 2a_{12}\,xy + 2a_{13}\,xt + 2a_{23}\,yt = 0.$$

Quando i coefficienti a_{ij} dell'equazione (1) sono numeri reali (o proporzionali a numeri reali) la conica è detta ***reale*** .

E' chiaro che ogni equazione proporzionale all'equazione (1) secondo un fattore di proporzionalità non nullo , avendo le stesse soluzioni della (1) , rappresenta lo stesso insieme di punti.
E' chiaro inoltre che poiché l'equazione (1) è omogenea se la terna non nulla (y_1, y_2, y_3) verifica l'equazione (1) anche la terna (ρy_1, ρy_2, ρy_3) con $\rho \neq 0$ verifica l'equazione (1) sicchè ha senso dire che un punto del piano soddisfa con le sue coordinate omogenee l'equazione (1).

Alla conica Γ rappresentata nel riferimento scelto dall'equazione :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}t^2 + 2a_{12}\,xy + 2a_{13}\,xt + 2a_{23}\,yt = 0.$$

si può associare la seguente matrice quadrata d'ordine tre **simmetrica** ottenuta utilizzando i coefficienti a_{ij} dell'equazione della conica .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

Si osservi ora esplicitamente che nell'equazione :

il numero che accompagna xy è il doppio di a_{12}

il numero che accompagna xt è il doppio di a_{13}

il numero che accompagna yt *è il doppio di* a_{23}

pertanto una certa attenzione va posta quando si scrive la matrice A associata alla conica .

Ad esempio la matrice associata alla conica reale Γ rappresentata da :

$$2x^2 + 3y^2 + 2xt + 4yt = 0$$

è la seguente :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vedremo in seguito che *nella matrice A associata alla conica sono contenute molte informazioni sulla conica stessa* e per tale ragione ***occorre scriverla in modo corretto.***

Studieremo ora in modo approfondito le coniche del piano già consapevoli che tra quelle reali dovremo ritrovare quelle descritte in precedenza .

(coppia di rette distinte o coincidenti , circonferenza , ellisse , iperbole e parabola).

Ma queste già descritte sono le uniche coniche reali o ce ne sono anche altre ? Vediamo.

Sia Γ una conica rappresentata in un riferimento fissato dall'equazione

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

Ci è utile osservare che tale equazione può scriversi nei seguenti modi :

$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,x_1 +$

$(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,x_2 +$

$(a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 \;\; + a_{33}\, x_3 \;)\; x_3 \;= 0$

$\sum_{i,j} a_{ij} x_i \, x_j = 0$ $\quad (a_{ij} = a_{ji})$ $\quad$ *(nella sommatoria gli indici i e j variano da 1 a 3)*

$X_t\, A\, X = 0$ dove è $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ed $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad (a_{ij} = a_{ji})$

Porremo inoltre a volte per semplicità :

$\mathbf{f}\,(\; \mathbf{x_1} , \mathbf{x_2} \;, \mathbf{x_3}\;) \;= a_{11}\, x_1^2 \;+ a_{22}\, x_2^2 \;+ a_{33}\, x_3^2 \;+ 2\; a_{12}\; x_1\, x_2 \;\; + 2\; a_{13}\; x_1\, x_3 \;\; + \;\; 2\; a_{23}\; x_2\, x_3$

$\mathbf{f_1}\,(\; \mathbf{x_1} , \mathbf{x_2} \;, \mathbf{x_3}\;) \;= a_{11}\; x_1 + a_{12}\; x_2 \;\; + a_{13}\; x_3$

$\mathbf{f_2}\,(\; \mathbf{x_1} , \mathbf{x_2} \;, \mathbf{x_3}\;) \;= a_{21}\; x_1 + a_{22}\; x_2 \;\; + a_{23}\; x_3$

$\mathbf{f_3}\,(\; \mathbf{x_1} , \mathbf{x_2} \;, \mathbf{x_3}\;) \;= a_{31}\; x_1 + a_{32}\; x_2 \;\; + a_{33}\; x_3$

Per la simmetria della matrice A sussiste questa utile eguaglianza che useremo spesso in seguito :

per ogni coppia di terne non nulle (y_1 , y_2 , y_3) e (z_1 , z_2 , z_3) si ha che sono eguali le seguenti due quantità che indicheremo con

$$f\,(\,\underline{\mathbf{y}}\;\;/\;\;\underline{\mathbf{z}}\,) \qquad \text{e} \qquad f\,(\,\underline{\mathbf{z}}\;\;/\;\;\underline{\mathbf{y}}\,)$$

dove è :

$$\begin{aligned} f\,(\,\underline{\mathbf{y}}\;/\;\underline{\mathbf{z}}\,) \;\; = \; & (a_{11}\; y_1 + a_{12}\; y_2 \;\; + a_{13}\; y_3 \;)\; z_1 \; + \\ & (a_{21}\; y_1 + a_{22}\; y_2 \;\; + a_{23}\; y_3 \;)\; z_2 \; + \\ & (a_{31}\; y_1 + a_{32}\; y_2 \;\; + a_{33}\; y_3 \;)\; z_3 \end{aligned}$$

$$f(\underline{z} \ / \ \underline{y}) = (a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3) y_1 + (a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3) y_2 + (a_{31} z_1 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3) y_3$$

2. ***Intersezione di una retta con una conica.***

Sia Γ una conica del piano $\boldsymbol{\pi}$ rappresentata, nel riferimento reale scelto, dall'equazione

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 0$$

e sia **r** una retta del piano passante per i punti Y e Z di coordinate (y_1, y_2, y_3) e (z_1, z_2, z_3). Quando si rappresenti **r** in forma parametrica si riconosce che i punti di **r** hanno, al variare dei parametri $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, coordinate del tipo

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda (y_1, y_2, y_3) + \mu (z_1, z_2, z_3)$$

Cioè :

$$(x_1, x_2, x_3) = (\lambda y_1 + \mu z_1, \ \lambda y_2 + \mu z_2, \ \lambda y_3 + \mu z_3)$$

Ci chiediamo per quali valori dei parametri $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ il punto $(\lambda y_1 + \mu z_1, \ \lambda y_2 + \mu z_2, \ \lambda y_3 + \mu z_3)$ della retta **r** appartenga anche alla conica Γ.

Ora il punto $(\lambda y_1 + \mu z_1, \ \lambda y_2 + \mu z_2, \ \lambda y_3 + \mu z_3)$ della retta **r** appartiene alla conica Γ se risulta :

$$\sum_{i,j} a_{ij} (\lambda y_i + \mu z_i)(\lambda y_j + \mu z_j) = 0 \tag{2.1}$$

L' equazione (2.1) è una equazione omogenea di secondo grado nelle incognite λ e μ del tipo

$$\mathbf{a}\,\lambda^2 + 2\,\mathbf{b}\,\lambda\mu + \mathbf{c}\,\mu^2 = 0 \tag{2.2}$$

avendo posto

$$\mathbf{a} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, y_j \qquad , \qquad \mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, z_j \qquad , \qquad \mathbf{c} = \sum_{i,j} a_{ij} z_i\, z_j$$

Se l'equazione (2.2) è identicamente nulla cioè risulta $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = 0$ allora per ogni scelta dei parametri λ e μ il punto di $\mathbf{r}$ di coordinate $(\lambda y_1 + \mu z_1, \; \lambda y_2 + \mu z_2, \; \lambda y_3 + \mu z_3)$ appartiene alla conica e qundi la retta $\mathbf{r}$ è contenuta nella conica Γ .

Se l'equazione (2.2) non è identicamente nulla allora essa ammette due soluzioni (distinte o coincidenti) in corrispondenza delle quali si trovano due punti (distinti o coincidenti) comuni alla retta $\mathbf{r}$ ed alla conica Γ .

Abbiamo così stabilito il seguente risultato:

Proposizione 2.1. *Una retta del piano non contenuta nella conica ha in comune con essa al più due punti .*

Da tale risultato segue ovviamente che :

una retta che abbia almeno tre punti in comune con la conica è contenuta nella conica .

3. *Le coniche degeneri.*

Sia Γ una conica del piano $\boldsymbol{\pi}$ rappresentata, nel riferimento reale scelto, dall'equazione

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2\, a_{12}\, x_1 x_2 + 2\, a_{13}\, x_1 x_3 + 2\, a_{23}\, x_2 x_3 = 0$$

Se il polinomio

$$\mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2\, a_{12}\, x_1 x_2 + 2\, a_{13}\, x_1 x_3 + 2\, a_{23}\, x_2 x_3$$

è ***riducibile*** esso è il prodotto di due polinomi omogenei di primo grado (distinti o coincidenti) e risulta quindi :

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2\, a_{12}\, x_1 x_2 + 2\, a_{13}\, x_1 x_3 + 2\, a_{23}\, x_2 x_3 =$$

$(a x_1 + b x_2 + c x_3) (a' x_1 + b' x_2 + c' x_3)$

In tal caso la conica Γ rappresentata dall'equazione

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 0$$

è l'unione delle due rette **r** ed **s** (distinte o coincidenti) rappresentate rispettivamente da :

r : $a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$
s : $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0$

Quando la conica è unione di due rette essa è detta ***degenere*** , *semplicemente degenere* se le due rette sono distinte e *doppiamente degenere* se le due rette sono coincidenti.

Come si può valutare se una conica è degenere ? Vediamo.

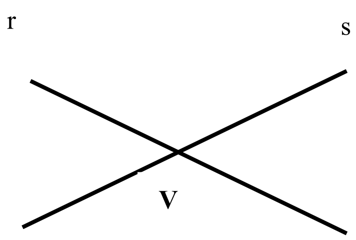
Per fare ciò occorre introdurre la nozione di ***punto doppio***.

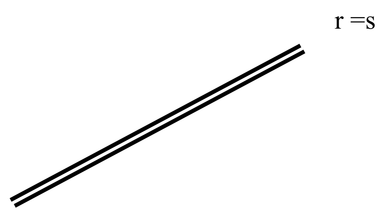
Sia Γ una conica. Un punto P della conica è detto *doppio* se esso ha la seguente proprietà :

(*) ***ogni*** *retta passante per P ha in comune con la conica il* ***solo*** *punto P oppure è* ***contenuta*** *nella conica.*

Un punto che non sia doppio è detto ***semplice.***

Quando una conica è degenere essa possiede punti doppi . Infatti , riferendosi alle figure ,





Se la conica è semplicemente degenere ed è l'unione delle due rette distinte r ed s allora , detto **V** il punto comune alle due rette esso è doppio per la conica ed è l' ***unico punto doppio*** della conica .

Se la conica è doppiamente degenere allora ***ogni suo punto è doppio***.
Questa proprietà esaminata per le coniche degeneri caratterizza le coniche degeneri come mostra la seguente

Proposizione 3.1. *Una conica Γ è degenere se e solo se essa possiede punti doppi.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che se la conica è degenere essa possiede punti doppi. Supponiamo quindi che la conica possegga almeno un punto **V** doppio e proviamo che essa è degenere. Sia P un punto della conica distinto da **V** . La retta **r** per **V** e P è contenuta nella conica in quanto **V** è doppio. Se risulta $\Gamma = \mathbf{r}$ allora Γ è doppiamente degenere . Se invece $\Gamma \supset \mathbf{r}$ scegliamo un punto T di $\Gamma - \mathbf{r}$. La retta **s** che unisce V e T , è distinta da **r** ed è contenuta in Γ essendo **V** un punto doppio. Proviamo ora che risulta $\Gamma = \mathbf{r} \cup \mathbf{s}$ **.**
Supponiamo per assurdo che risulti $\Gamma \supset \mathbf{r} \cup \mathbf{s}$ **.**

Sia T un punto di Γ non appartenente alle rette **r** ed **s** . Ogni retta ℓ per T è contenuta in Γ .
Infatti ciò è ovvio se ℓ passa per **V** (che è doppio) ed è altrettanto vero se ℓ non passa per **V** in quanto in tal caso la retta ℓ ha in comune con la conica Γ i tre punti distinti T , $M = \ell \cap \mathbf{r}$ **,** $N = \ell \cap \mathbf{s}$ **.**
Se ogni retta per T è contenuta nella conica allora ogni punto del piano appartiene alla conica è ciò è assurdo in quanto l'equazione che rappresenta la conica è non identica e quindi la conica è un

sottoinsieme proprio del piano.

Dalla proposizione ora provata seguono le seguenti ovvie proprietà :

a) **se una conica possiede un sol punto doppio essa è semplicemente degenere.**

b) **se una conica possiede almeno due punti doppi A e B allora essa è doppiamente degenere riducendosi alla retta che unisce A e B.**

La proposizione 3.1 ora provata e che caratterizza le coniche degeneri sposta l'attenzione sulla ricerca degli eventuali punti doppi della conica .

Ma come si trovano i punti doppi di una conica ? Vediamo .

Il teorema che segue fornisce la risposta al quesito posto.

Proposizione 3.2. *Un punto P del piano è doppio per la conica Γ rappresentata dall'equazione*

$$\Gamma \ : \qquad \sum_{i,j} a_{ij} x_i \, x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

se e solo se le sue coordinate (y_1 , y_2 , y_3) *verificano le seguenti eguaglianze :*

$$\textbf{(3.1)} \qquad \begin{aligned} \mathbf{a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Cominciamo a provare che se un punto ha coordinate verificanti le eguaglianze (3 . 1) esso è un punto della conica ed è doppio per essa . Abbiamo già osservato che risulta

$$\sum_{i,j} a_{ij} y_i \, y_j = (a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3)\, y_1 + (a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3)\, y_2 +$$

$$+ \quad (a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3)\ y_3$$

e pertanto , se valgono le (3.1), si ha $\sum_{i,j} a_{ij} y_i\, y_j = 0$, il che prova che P è un punto della conica.

Proviamo ora che esso è doppio per la conica Γ .

Sia Z un punto qualsiasi del piano distinto dal punto P e sia r la retta che unisce P con Z .

Siano (z_1 , z_2 , z_3) le coordinate di Z e sia

$$(x_1 , x_2 , x_3) = (\lambda y_1 + \mu z_1, \quad \lambda y_2 + \mu z_2 , \ \lambda y_3 + \mu z_3)$$

la rappresentazione parametrica della retta r .

Abbiamo già visto (al numero 2 di questo capitolo) che gli eventuali punti comuni alla retta r ed alla conica si trovano attraverso le soluzioni non nulle dell'equazione

$$\mathbf{a}\, \lambda^2 + 2\, \mathbf{b}\, \lambda\, \mu + \mathbf{c}\, \mu^2 = 0$$

dove è :

$$\mathbf{a} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, y_j \quad , \qquad \mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, z_j \quad , \qquad \mathbf{c} = \sum_{i,j} a_{ij} z_i\, z_j$$

Stante le (3.1) si ha allora **a** = 0 e **b** = 0 e pertanto l' equazione

$$\mathbf{a}\, \lambda^2 + 2\, \mathbf{b}\, \lambda\, \mu + \mathbf{c}\, \mu^2 = 0$$

diventa

$$\mathbf{c}\, \mu^2 = 0$$

Se anche **c** = 0 allora la retta r è contenuta nella conica se invece è $\mathbf{c} \neq 0$ allora l'equazione $\mathbf{c}\, \mu^2 = 0$ fornisce come sua unica soluzione la coppia (1 , 0) cui corrisponde il punto P che diventa quindi l'unico punto che r ha in comune con Γ .

Abbiamo provato così che se valgono le (3.1) allora P appartiene alla conica ed inoltre (vista l'arbitrarietà del punto Z) **ogni** retta per P o è contenuta in Γ o ha in comune con Γ il solo punto P e ciò prova che P è doppio per Γ .

Viceversa supponiamo che un punto P (y_1 , y_2 , y_3) della conica Γ sia doppio per essa e proviamo che le sue coordinate (y_1 , y_2 , y_3) verificano le (3 . 1).

Al solito sia Z un punto qualsiasi del piano distinto dal punto P e sia r la retta che unisce P con Z . Siano (z_1 , z_2 , z_3) le coordinate di Z e sia

$$(x_1 , x_2 , x_3) = (\lambda y_1 + \mu z_1, \quad \lambda y_2 + \mu z_2 , \lambda y_3 + \mu z_3)$$

la rappresentazione parametrica della retta r .

I punti comuni alla retta r ed alla conica si trovano attraverso le soluzioni non nulle dell'equazione

$$\mathbf{a}\, \lambda^2 + 2\, \mathbf{b}\, \lambda \mu + \mathbf{c}\, \mu^2 = 0$$

dove è :

$$\mathbf{a} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, y_j \quad , \quad \mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, z_j \quad , \quad \mathbf{c} = \sum_{i,j} a_{ij} z_i\, z_j$$

Poiché P è un punto della conica allora è $\mathbf{a} = 0$. L' equazione

$$\mathbf{a}\, \lambda^2 + 2\, \mathbf{b}\, \lambda \mu + \mathbf{c}\, \mu^2 = 0$$

diventa così :

$$\mu\, (2\, \mathbf{b}\, \lambda + \mathbf{c}\, \mu) = 0$$

Si ha quindi la soluzione (*attesa*) (1 , 0) cui corrisponde P e l'altra soluzione si ottiene da

$$(2\, \mathbf{b}\, \lambda + \mathbf{c}\, \mu) = 0.$$

Poiché P è doppio la retta PZ è contenuta in Γ oppure ha in comune con Γ il solo punto P e quindi l' equazione $(2\, \mathbf{b}\, \lambda + \mathbf{c}\, \mu) = 0$ deve o essere identicamente nulla o deve fornire ancora come soluzione la coppia (1, 0) . In entrambi i casi ciò comporta che è $\mathbf{b} = 0$.
Pertanto qualunque sia $Z (z_1 , z_2 , z_3)$ risulta allora che è :

$$\mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, z_j = 0$$

Esplicitamente è :

$$\mathbf{b} = (a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3)\, z_1 + (a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3)\, z_2 + (a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3)\, z_3$$

ed esso è nullo , per **ogni** scelta del punto Z , e quindi per **ogni** scelta della terna (z_1 , z_2 , z_3).

Scegliendo

$(z_1 , z_2 , z_3) = (1, 0 , 0)$, $(z_1 , z_2 , z_3) = (0, 1 , 0)$, $(z_1 , z_2 , z_3) = (0, 0 , 1)$

si hanno le (3.1) e l'asserto è così provato.

La proposizione ora provata ha mostrato che determinare gli eventuali punti doppi della conica equivale a determinare le eventuali soluzioni non nulle del seguente sistema omogeneo

(3.2)
$$S : \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha per matrice la matrice A della conica .

Pertanto , tenendo conto delle proposizioni (3. 1) e (3. 2) , si ha questa utilissima

Proposizione 3.3 *Una conica Γ rappresentata dall'equazione*

$$\Gamma : \quad \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

è degenere se e solo se risulta

$$\mathbf{det\ A = 0} .$$

Dimostrazione. Se Γ è degenere essa possiede almeno un punto doppio P. Le coordinate dì P sono quindi una soluzione **non nulla** del sistema omogeneo (3 .2) e così è det A = 0.

Viceversa se detA=0 il sistema (3 .2) ha soluzioni non nulle ed in corrispondenza a tali soluzioni si hanno punti doppi per Γ la quale è così degenere.

4. Coniche non degeneri . Tangente in un punto.

Sia Γ una conica non degenere rappresentata da

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

e sia $P(y_1 , y_2 , y_3)$ un suo punto . Poiché è non degenere il punto P è semplice e così almeno una delle tre relazioni (3 .1) è diversa da zero. Sia $Z (z_1 , z_2 , z_3)$ un punto del piano distinto da P e sia r la retta PZ . Come già visto i punti comuni alla retta PZ , rappresentata parametricamente da

$$(x_1 , x_2 , x_3) = (\lambda y_1 + \mu z_1, \quad \lambda y_2 + \mu z_2 , \ \lambda y_3 + \mu z_3)$$

si trovano attraverso le soluzioni non nulle dell'equazione

$$\text{(4.1)} \qquad \mathbf{a}\, \lambda^2 + 2\, \mathbf{b}\, \lambda \mu + \mathbf{c}\, \mu^2 = 0$$

dove è :

$$\mathbf{a} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, y_j \quad , \quad \mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, z_j \quad , \quad \mathbf{c} = \sum_{i,j} a_{ij} z_i\, z_j$$

Essendo $\mathbf{a} = 0$ in quanto $P \in \Gamma$, l'equazione (4.1) diventa :

$$\text{(4 .2)} \qquad \mu\, (2\, \mathbf{b}\, \lambda + \mathbf{c}\, \mu) = 0$$

Tale equazione fornisce la soluzione (1 , 0) in accordo col fatto che P è comune ad r e Γ . La soluzione (1 , 0) sarà soluzione doppia della (4.2) e cioè la retta r interseca Γ solo nel punto P se e solo se risulta

$$\mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, z_j = 0$$

Abbiamo così provato che i punti Z del piano per cui la retta PZ incontri Γ nel solo punto P sono tutti e soli quelli per cui risulti :

$$\begin{aligned} &(a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3)\, z_1 + \\ &(a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3)\, z_2 + \\ &(a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3)\, z_3 = 0 \end{aligned}$$

cioè sono tutti e soli i punti del piano le cui coordinate sono soluzione dell'equazione seguente

(4.3)

$$\mathbf{(a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3)\, x_1 + (a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3)\, x_2 + (a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3)\, x_3 = 0}$$

Tale equazione, che *non è identica perchè P è semplice* , rappresenta quindi l'unica retta per P che interseca la conica Γ nel solo punto P . Tale retta è chiamata ***retta tangente nel punto P.***

5. Coniche reali non degeneri.

In questo numero tratteremo le coniche reali non degeneri cercando una loro classificazione. Sia Γ una conica reale non degenere rappresentata in un riferimento reale assegnato dall'equazione a coefficienti reali seguente :

$$\Gamma \ : \qquad \sum_{i,j} a_{ij} x_i \, x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

Supporremo inoltre che essa sia **dotata di punti reali.**

(nota bene : la conica $x^2 + 2y^2 + 3t^2 = 0$ pur essendo reale non ha punti reali . Al contrario se essa ha un punto reale ogni retta reale per tale punto e che sia secante intersecherà la conica in un altro punto reale e così la conica ha infiniti punti reali)

Poiché la conica Γ è non degenere essa non contiene rette e così ogni retta del piano la interseca in due punti distinti o coincidenti. Se la retta è ***reale*** allora i due punti di intersezione sono *entrambi reali o immaginari e coniugati.*
In particolare ciò accade per i suoi **punti impropri** che sono i punti che la conica ha in comune con la retta impropria che è una retta reale .

La conica Γ è detta ***ellisse*** se possiede *due punti impropri immaginari e coniugati.*

La conica Γ è detta ***iperbole*** se possiede *due punti impropri reali e distinti.*

La conica Γ è detta ***parabola*** se possiede *un sol punto improprio (reale).*

Per stabilire se una conica è una ellisse , una iperbole o una parabola occorre quindi determinare i suoi punti impropri e quindi occorre studiare le soluzioni non nulle del sistema S formato dall'equazione della conica e da quella della retta impropria :

$$S : \begin{cases} \sum_{i,j} a_{ij} \, x_i \, x_j = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema S è equivalernte al sistema seguente :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni non nulle di tale sistema saranno reali o immaginarie a seconda che il discriminante

$$\Delta = 4\,(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$$

dell'equazione $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ sia maggiore o eguale a zero o minore di zero.
Tenendo conto che nella matrice A della conica è :

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A_{33}$$

Si ha $\boldsymbol{\Delta = -4\,A_{33}}$

Ne segue che risulta :

Γ è una ***ellisse*** se è $\boldsymbol{\Delta < 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{A_{33} > 0}$

Γ è una ***parabola*** se è $\boldsymbol{\Delta = 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{A_{33} = 0}$

Γ è una ***iperbole*** se è $\boldsymbol{\Delta > 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{A_{33} < 0}$

Ricordiamo che agiscono sul piano le ***affinità (reali)*** che sono le applicazioni del piano in sé descrivibili con equazioni del tipo

$$\begin{cases} x_1' = m_{11}\,x_1 + m_{12_2}\,x_2 \quad + m_{13}\,x_3 \\ x_2' = m_{21}\,x_1 + m_{22_2}\,x_2 \quad + m_{23}\,x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

con m_{ij} *numeri reali* e $\det\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \neq 0$

Tali isomorfismi del piano trasformano punti propri in punti propri , punti impropri in punti impropri , punti reali in punti reali e punti immaginari in punti immaginari .

Per una conica avere due punti impropri , immaginari e coniugati , reali e coincidenti o reali e distinti è quindi una proprietà *invariante* rispetto al gruppo delle affinità ed è quindi una *proprietà affine.*

Per tale ragione la suddivisione delle coniche reali non degeneri in *ellissi , parabole o iperboli* è chiamata la ***classificazione affine delle coniche reali non degeneri.***

6. *Polarità definita da una conica non degenere.*

Sia Γ una conica **non degenere** rappresentata in un riferimento reale assegnato dall'equazione seguente :

$$\Gamma \ : \qquad \sum_{i,j} a_{ij} x_i \, x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

Poiché la conica è non degenere la sua matrice $A(a_{ij})$ è non degenere e quindi è $\det A \neq 0$.

Sia $P(y_1 , y_2, y_3)$ un punto del piano. L' equazione

$$\mathbf{(a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3)\, x_1 + (a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3)\, x_2 + (a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3)\, x_3 = 0}$$

(costruita utilizzando le coordinate (y_1 , y_2, y_3) di P) è una equazione non identica (***altrimenti P sarebbe doppio e la conica sarebbe degenere***) e quindi rappresenta una retta del piano . Tale retta è chiamata la ***polare*** del punto P e sarà denotata col simbolo $\wp_P$.

Associando al punto P la retta $\wp_P$ si realizza una applicazione $\wp$ tra i punti del piano e le rette del piano . Tale applicazione

$$\wp : \quad P \ \rightarrow \quad \wp_P$$

è chiamata ***polarità*** *indotta dalla conica non degenere Γ* . Il punto P è chiamato il ***polo*** della retta $\wp_P$.

Le proposizioni che seguono illustrano alcune importanti proprietà della polarità $\wp$ indotta dalla conica Γ .

Proposizione 6.1 *La polarità è un'applicazione biettiva.*

Dimostrazione. Sia r una retta del piano rappresentata da :

(6.1) $\quad \mathbf{r} : \quad ax + by + ct = 0$

Un punto $P(\ y_1 , y_2, y_3\ )$ del piano ha per polare la retta $\mathbf{r}$ se risulta $\wp_P = \mathbf{r}$ cioè se l'equazione

$$\mathbf{(a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3\,)\, x_1 + (a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3\,)\, x_2 + (a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3\,)\, x_3 = 0}$$

è l'equazione della retta r . Si ha quindi che $P(\ y_1 , y_2, y_3\ )$ è polo di **r** se e solo se risulta :

$$(**) \qquad \begin{cases} a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3 = a \\ a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3 = b \\ a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3 = c \end{cases}$$

Tale sistema inteso nelle incognite $(\ y_1 , y_2, y_3\ )$ ha una sola soluzione $(\ z_1 , z_2, z_3\ )$ in quanto, essendo la conica non degenere, è $\det A \neq 0$. Sostituendo alla terna $(\ a, b , c\ )$ la terna proporzionale $(\rho\, a,\ \rho\, b ,\ \rho\, c\ )$ con $\rho \neq 0$ si otterrà in corrispondenza la soluzione $(\ \rho\, z_1 ,\ \rho\, z_2,\ \rho\, z_3\ )$. Pertanto in corrispondenza a tutte le terne $(\ \rho\, z_1 ,\ \rho\, z_2,\ \rho\, z_3\ )$ soluzioni di (**) si ha un **solo** punto P del piano avente per polare la retta **r** . La corrispondenza $\wp$ è quindi biettiva come si voleva provare.

Proposizione 6.2. *Un punto P appartiene alla sua polare se e solo se esso appartiene alla conica . In tal caso la sua polare coincide con la retta tangente in P .*

Dimostrazione . Se $P(y_1 , y_2, y_3\ )$ è un punto della conica allora la sua polare $\wp_P$ che è rappresentata da :

$$\mathbf{(a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3\,)\, x_1 + (a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3\,)\, x_2 + (a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3\,)\, x_3 = 0}$$

coincide con la retta tangente nel punto P (cfr. (4.3)) . In tal caso quindi P appartiene alla sua polare in quanto è

$$\mathbf{(a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3\,)\, y_1 + (a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3\,)\, y_2 + (a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3\,)\, y_3 = 0}$$

essendo P un punto della conica .

Viceversa se $P(y_1 , y_2, y_3\ )$ appartiene alla sua polare

$(a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3)\, x_1 + (a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3)\, x_2 + (a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3)\, x_3 = 0$

allora è

$(a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3)\, y_1 + (a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3)\, y_2 + (a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3)\, y_3 = 0$

e questa prova che P è un punto della conica.

Abbiamo così provato che :

(6.3) $$\mathbf{P} \in \mathbf{\Gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P} \in \wp_{\mathbf{P}}$$

Una importante proprietà della polarità $\wp$ è espressa dal seguente :

Teorema di reciprocità. *Se $P(y_1, y_2, y_3)$ e $Q(z_1, z_2, z_3)$ sono due punti distinti del piano, . si ha*

(6.4) $$Q \in \wp_P \quad \Leftrightarrow \quad P \in \wp_Q$$

Dimostrazione.

La polare di P è :

$(a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3)\, x_1 + (a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3)\, x_2 + (a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3)\, x_3 = 0$

che può scriversi sinteticamente , usando le notazioni introdotte al numero 1 , così :

$$f(\underline{\mathbf{y}} \;/\; \underline{\mathbf{x}}) = 0$$

La polare di Q è :

$(a_{11}\, z_1 + a_{12}\, z_2 + a_{13}\, z_3)\, x_1 + (a_{21}\, z_1 + a_{22}\, z_2 + a_{23}\, z_3)\, x_2 + (a_{31}\, z_1 + a_{32}\, z_2 + a_{33}\, z_3)\, x_3 = 0$

che può scriversi sinteticamente , usando le notazioni introdotte al numero 1 , così :

$$f(\underline{\mathbf{z}} \;/\; \underline{\mathbf{x}}) = 0$$

Abbiamo, sempre al numero 1 , già osservato che poiché la matrice A della conica è simmetrica si ha per ogni coppia di terne (y_1, y_2, y_3) e (z_1, z_2, z_3)

(6.5) $$f(\underline{\mathbf{y}} \;/\; \underline{\mathbf{z}}) = f(\underline{\mathbf{z}} \;/\; \underline{\mathbf{y}})$$

Dalla (6.5) segue quindi

$$f(\underline{y} \;/\; \underline{z}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\underline{z} \;/\; \underline{y}) = 0$$

e questa prova l'asserto.

Siamo ora in grado di descrivere per ogni retta del piano quale sia il suo polo.

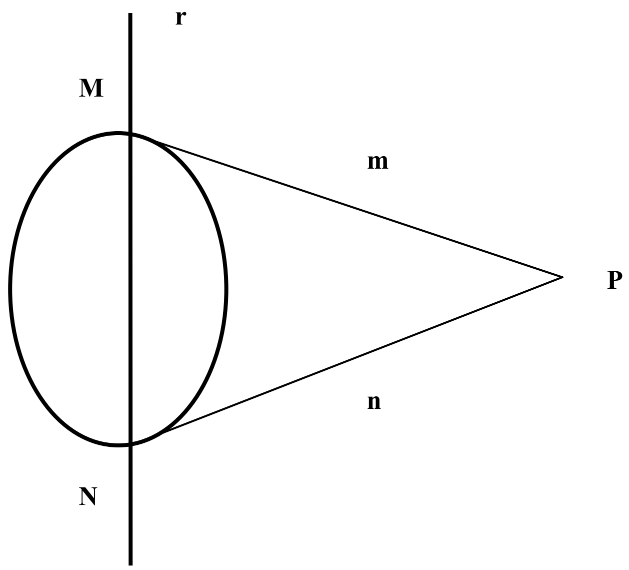
Sia **r** una retta del piano . Distinguiamo i due casi possibili :

a) **r è tangente alla conica .**

b) **r è secante la conica** .

Caso a) . Se la retta **r** è tangente alla conica nel punto P allora la polare di P è **r** e quindi P è il polo di **r** . Nel caso in esame quindi il polo di **r** è il punto di contatto di **r** con la conica .

Caso b) . Se la retta **r** è secante la conica siano M e N i punti di intersezione di **r** con la conica .



Sia **m** la retta tangente a Γ nel punto M e sia **n** la retta tangente a Γ nel punto N.

Sia **P** il punto comune alle rette distinte **m** ed **n** . Per ciò che precede è :

$$\mathbf{m} = \wp_M \qquad \text{ed} \qquad \mathbf{n} = \wp_N$$

Ora è $\mathbf{P} = \mathbf{m} \cap \mathbf{n} = \wp_M \cap \wp_N$

e quindi **P** appartiene alla polare di M ed alla polare di N .

Per il teorema di reciprocità M ed N appartengono alla polare di **P** . Quindi la polare di **P** è la retta **r** = MN e così **P** è il polo di **r** .

Per la biettività della polarità abbiamo così provato la seguente proposizione :

Proposizione 6.3. *La polare di un punto P è la tangente in P se P è un punto della conica . Se P non appartiene alla conica la sua polare è la retta che unisce i due punti di contatto delle due rette tangenti che si possono condurre da P alla conica.*

Dal teorema di reciprocità segue facilmente la seguente:

Proposizione 6.4. *Quando un punto P descrive una retta **m** la sua polare descrive un fascio di rette con centro il polo M della retta **m** .*

7. Centro, diametri , asintoti , assi. Le equazioni canoniche.

Sia Γ una conica **non degenere reale e con punti reali** rappresentata, nel riferimento reale scelto, dall'equazione

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2\, a_{12}\, x_1 x_2 + 2\, a_{13}\, x_1 x_3 + 2\, a_{23}\, x_2 x_3 = 0$$

Si chiama ***centro*** il *polo della retta impropria.*

Se la conica è una iperbole o una ellisse la retta impropria è secante e quindi non contiene il suo polo. Pertanto per l'iperbole e per l'ellisse il **centro è un punto proprio**.

Se la conica è una parabola la retta impropria è tangente e quindi il suo polo è il punto di tangenza . Pertanto per la parabola il **centro è un punto improprio** e coincide col suo unico punto improprio. Indichiamo con **C** il centro della conica Γ .

Per determinare le coordinate del centro di una iperbole o di una ellisse si può far uso del teorema di reciprocità.

Poiché la retta impropria è per definizione la polare di **C** allora ogni punto improprio ha la polare che passa per **C**.

Due punti impropri " facili" sono (1 0 0) e (0 1 0) e le loro polari sono le rette distinte

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = 0$$

$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23} x = 0$$

le quali , come detto , passano per il centro . Pertanto le coordinate del centro si ottengono attraverso le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = 0 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23} x_3 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema è omogeneo e di rango due e quindi le sue soluzioni si ottengono attraverso i minori d'ordine due e presi a segno alterno della matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Utilizzando quindi le prime due righe della matrice A della conica si possono determinare le coordinate del centro.

Diametri.

Si chiama ***diametro*** della conica la retta **d** *polare di un punto improprio* δ *non appartenente alla conica*.

Quando il punto improprio appartiene alla conica la polare di tale punto (la tangente in tale punto) è chiamato ***asintoto.***

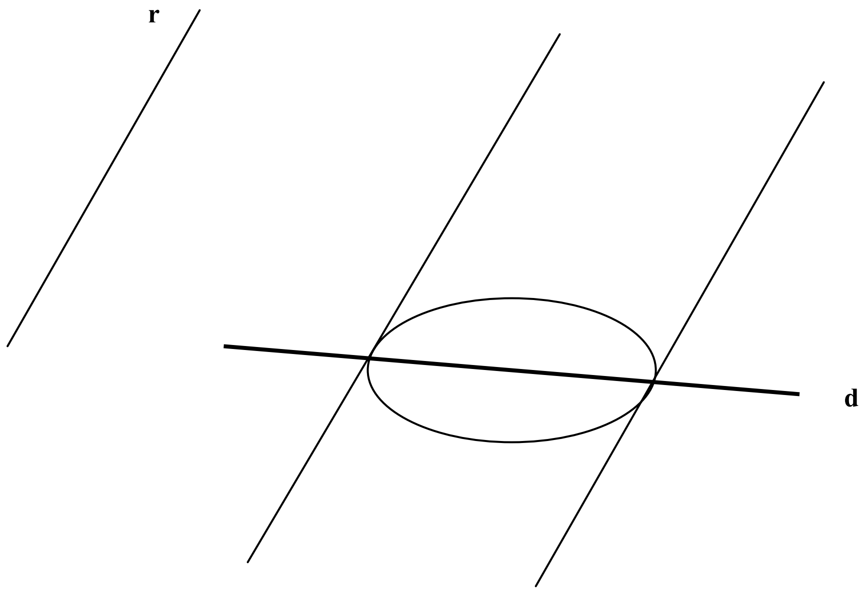
La retta impropria è la polare del centro e quindi , per reciprocità , i diametri e gli asintoti essendo polari di punti impropri *passano tutti per il centro*.

Se la conica è una iperbole o una ellisse allora i diametri formano un fascio proprio essendo per tali coniche il centro un punto proprio. Se la conica è una parabola allora i diametri formano un fascio improprio essendo per tali coniche il centro un punto improprio.

Nel caso della parabola quindi i ***diametri sono tra loro paralleli***.

Sia r una retta reale e sia δ il suo punto improprio . Supposto che tale punto non appartenga alla conica possiamo considerare il diametro **d** ad esso corrispondente . Poiché δ non appartiene alla conica la retta **d** non contiene δ e quindi la retta **d** non è parallela ad r . Se **d** è ortogonale ad r allora **d** è detto ***asse*.**

Gli assi sono quindi *particolari diametri* .



Come si trovano gli assi ? Vediamo.

Se la conica Γ è una **parabola** allora i diametri hanno una direzione fissa perché passano tutti per il centro che coincide con l'unico punto improprio della parabola Γ.

Pertanto se il punto improprio di Γ ha coordinate $(\ell, m, 0)$ **l'asse** della parabola è la retta **d** polare del punto improprio $(-m, \ell, 0)$. Tale asse interseca la parabola in un punto proprio , detto ***vertice*** della parabola e nel suo punto improprio.

Disponendo il riferimento in modo che l'asse x coincida con la retta **d** e l'origine nel vertice della parabola l'equazione della parabola

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt = 0.$$

diviene più semplice. Vediamo.

La polare del punto $(0, 1, 0)$ è la retta

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t = 0$$

e tale retta, per la scelta fatta sul riferimento , è la retta $y = 0$. Pertanto è :

$$\mathbf{a_{12} = a_{23} = 0}$$

Poiché l'origine (0 0 1) è un punto della parabola è anche $\mathbf{a_{33} = 0}$**.**

La conica Γ ha allora la seguente matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo Γ una parabola è $A_{33} = a_{11}\, a_{22} = 0$ e $\det A \neq 0$ e quindi è $a_{11} = 0$.

L'equazione di Γ nel riferimento scelto è quindi del tipo

$$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, xt = 0$$

I punti propri della parabola sono quindi rappresentati dall'equazione :

$$\mathbf{a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x = 0}$$

che è chiamata ***l'equazione canonica*** della parabola Γ .

Supponiamo quindi che la conica Γ sia una **iperbole o una ellisse**.

Consideriamo un qualsiasi punto improprio e siano $(\lambda, \mu, 0)$ le sue coordinate e sia **r** una retta che passa per esso.

La polare di tale punto improprio è la retta **d** rappresentata da:

$$\mathbf{d}: \quad \mathbf{(a_{11}\lambda + a_{12}\mu)\, x_1 + (a_{21}\lambda + a_{22}\mu)\, x_2 + (a_{31}\lambda + a_{32}\mu)\, x_3 = 0}$$

I numeri direttori di tale retta sono .

$$(\lambda', \mu') = (-\mathbf{(a_{21}\lambda + a_{22}\mu)},\ \mathbf{(a_{11}\lambda + a_{12}\mu)})$$

Pertanto le rette **d** ed **r** sono ortogonali se risulta $\lambda\lambda' + \mu\mu' = 0$ cioè :

$$(7.1) \qquad -\lambda\, \mathbf{(a_{21}\lambda + a_{22}\mu)} + \mu\, \mathbf{(a_{11}\lambda + a_{12}\mu)} = 0$$

La (7.1) sviluppata :

(7 .2) $$-\mathbf{a_{21}}\lambda^2 + (\mathbf{a_{11}} - \mathbf{a_{22}})\lambda\mu + \mathbf{a_{12}}\mu^2 = 0$$

è un'equazione omogenea di secondo grado e le sue soluzioni non nulle forniscono le "direzioni" $(\lambda, \mu, 0)$ le cui polari sono gli assi della conica.

Ora il discriminante dell'equazione (7.2) è :

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$$

Se $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$ la conica è una circonferenza e la (7.2) è identicamente nulla . Nel caso della circonferenza ogni diametro è quindi un asse.

Se la conica non è una circonferenza allora è $\Delta > 0$ e quindi la (7.2) fornisce due soluzioni reali e distinte .

Ci sono quindi due rette reali **d** e **d'** che sono assi della conica se Γ è una iperbole o una ellisse. Gli assi **d** e **d'** sono inoltre , per il teorema di reciprocità, ortogonali tra loro.

Disponendo il riferimento in modo che l'asse x sia la retta **d** e l'asse y sia la retta **d'** l'equazione della conica diventa più semplice . Infatti sia

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt = 0.$$

l'equazione di Γ .

La polare di (1, 0, 0) è la retta

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t = 0$$

e tale retta per le scelte fatte è la retta $x = 0$. Pertanto è

$$\mathbf{a_{12} = a_{13} = 0}$$

La polare di (0, 1, 0) è la retta

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t = 0$$

e tale retta per le scelte fatte è la retta $y = 0$. Pertanto è :

$$\mathbf{a_{12} = a_{23} = 0}$$

Con la scelta fatta per il riferimento l' equazione diventa :

$$\mathbf{a_{11}x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,t^2 \quad = 0} \,.$$

e questa viene chiamata ***l'equazione canonica della conica*** Γ **.**

Essendo la conica non degenere è **det A =** $\mathbf{a_{11}a_{22}\,a_{33} \neq 0}$ e quindi è :

$$\mathbf{a_{11} \neq 0} \;,\quad \mathbf{a_{22} \neq 0} \;,\quad \mathbf{a_{33} \neq 0}$$

Dei tre numeri reali $\mathbf{a_{11}, a_{22}, a_{33}}$ valutiamo quali sono positivi e quali negativi .

Avendo supposto che la conica è **dotata di punti reali** le possibilità per i segni dei numeri reali $\mathbf{a_{11}, a_{22}, a_{33}}$ sono riassunti nella seguente tabella

$\mathbf{a_{11}}$	$\mathbf{a_{22}}$	$\mathbf{a_{33}}$	*Equazione di Γ in coordinate non omogenee*
+	+	**-**	$\mathbf{b^2x^2 + a^2y^2 = 1}$ **(ellisse) o (circonferenza se a= b)**
+	**-**	**-**	$\mathbf{b^2x^2 - a^2y^2 = 1}$ **(iperbole)**
-	+	**-**	$\mathbf{a^2y^2 - b^2x^2 = 1}$ **(iperbole)**

Attraverso le equazioni canoniche abbiamo così riconosciuto che la parte reale e propria di una conica reale non degenere e che sia dotata di punti reali è :

una "vera" circonferenza , una "vera" ellisse , una "vera" iperbole

una "vera" parabola .

nel senso descritto nel capitolo II .

L'aver chiamato ellisse , parabola o iperbole una conica reale non degenere e con punti reali è quindi coerente con le nostre attese.

Capitolo V

Lo spazio proiettivo complesso di dimensione tre.

1. Lo spazio affine reale e complesso.

In questo numero S rappresenterà lo spazio reale tridimensionale . La famiglia delle rette di S sarà rappresentata col simbolo $\mathcal{L}$ mentre col simbolo $\mathcal{P}$ rappresenteremo la famiglia dei piani di S.

Due rette ℓ ed ℓ' di S si dicono *parallele* se coincidono oppure, nel caso siano distinte, esse giacciono in uno stesso piano ed hanno intersezione vuota.

Due piani α e α' si dicono *paralleli* se coincidono oppure , nel caso siano distinti , se hanno intersezione vuota.

Una retta ℓ ed un piano α sono *paralleli* se la retta è contenuta nel piano oppure , nel caso non sia contenuta , essa ha intersezione vuota col piano.

Tre punti distinti si dicono *allineati* se essi appartengono ad una stessa retta, *non allineati* in caso contrario.

La terna $(S , \mathcal{L}, \mathcal{P})$ è chiamata *spazio affine reale tridimensionale* e per essa sono verificate le seguenti proprietà :

1. *Due punti distinti appartengono ad una unica retta.*
2. *Tre punti distinti e non allineati appartengono ad un unico piano.*
3. *Due piani distinti hanno intersezione vuota o si intersecano in una retta.*
4. *Una retta ℓ non contenuta nel piano α o è parallela ad α oppure interseca α in un unico punto.*
5. *Data una retta ℓ ed un punto p non appartenente ad ℓ esiste una sola retta ℓ' per p parallela ad ℓ.*
6. *Dato un piano α ed un punto p non appartenente ad α esiste un sol piano α' per p parallelo ad α .*

Le proprietà sopra elencate sono equivalenti alle seguenti :

1. *Due punti distinti appartengono ad una unica retta.*

2'. *Una retta ed un punto che non si appartengano sono contenuti in un unico piano.*

3. *Due piani distinti hanno intersezione vuota o si intersecano in una retta.*

4'. *Una retta ℓ che unisce due punti di un piano è tutta contenuta nel piano.*

5. *Data una retta ℓ ed un punto p non appartenente ad ℓ esiste una sola retta ℓ' per p parallela ad ℓ.*
6. *Dato un piano α ed un punto p non appartenente ad α esiste un sol piano α' per p parallelo ad α .*

Le proprietà sopra elencate mostrano che ogni piano dello spazio rispetto alle rette in esso contenute è un **piano affine**.

Abbiamo già provato che quando nello spazio (S , $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) si introduca un riferimento reale $\mathcal{R}$ e monometrico allora i suoi punti , le sue rette ed i suoi piani possono essere rappresentati al seguente modo.

Ad ogni ***punto*** p si può associare una terna ordinata (x, y, z) di numeri reali che si chiama la *terna delle coordinate* di p nel riferimento $\mathcal{R}$ e tale corrispondenza , detta *coordinazione* dello spazio , è biettiva .

Ogni ***piano*** si rappresenta con un'equazione

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{con} \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

di primo grado e non identica in tre variabili.

Ogni ***retta*** si rappresenta o in modo *parametrico* con relazioni del tipo

$$\ell : \quad \begin{cases} x = x_A + \rho(x_B - x_A) \\ y = y_A + \rho(y_B - y_A) \\ z = z_A + \rho(z_B - z_A) \end{cases}$$

(dove il parametro ρ varia nel campo reale)

o con un sistema del tipo :

$$\ell : \quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

a seconda se si pensi ℓ come la retta che congiunge i punti distinti A(x_A ,y_A , z_A) e B (x_B ,y_B , z_B) oppure si pensi la retta ℓ come la retta comune ai due piani α e α' distinti tra loro e rappresentati rispettivamente da :

$$\alpha : \ ax + by + cz + d = 0 \quad \text{e} \quad \alpha' : \ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \qquad .$$

Attraverso tali rappresentazioni abbiamo visto che è facile riconoscere se due rette sono tra loro parallele , se due piani sono tra loro paralleli , se una retta ed un piano sono tra loro paralleli.

Così come il piano affine reale è stato da noi arricchito di nuovi punti , *i punti immaginari* , lo stesso procedimento può essere eseguito nello spazio (S , $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) .

Senza ripetere le motivazioni che portano alla definizione di punto immaginario (sarebbero le stesse esposte nel caso del piano) puntiamo direttamente alla sua introduzione.

Anche nello spazio, quando si siano scelti due riferimenti reali $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$, ci sono delle formule che consentono di conoscere le coordinate di un punto p nel riferimento $\mathcal{R}'$ note che siano le coordinate dello stesso punto nel riferimento $\mathcal{R}$. Tali formule ,dette di *passaggio da un riferimento all'altro,* sono di questo tipo :

$$(*) \qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + c_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + c_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c_3 \end{cases}$$

dove i numeri a_{ij} e c_i sono reali ed inoltre è : $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0$

Consideriamo ora le coppie del tipo ((a , b , c) ; $\mathcal{R}$) dove la prima coordinata (a , b , c) è una terna ordinata di numeri **complessi non tutti e tre reali** e la seconda coordinata $\mathcal{R}$ è un riferimento reale dello spazio.

Due siffatte coppie ((a , b , c) ; $\mathcal{R}$) e ((a' , b' , c') ; $\mathcal{R}'$) le diremo **equivalenti** se sostituendo nelle formule (*) di passaggio da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$ al posto di x , y , z i numeri a, b , c si ottengono a primo membro i numeri a' , b' , c' .

Tale relazione , come è facile controllare, è d'equivalenza ed ogni classe d'equivalenza è chiamata ***punto immaginario***.

Se p* = [((a , b , c) ; $\mathcal{R}$)] è un punto immaginario *i numeri complessi e non tutti reali* (a , b , c) vengono chiamati le *coordinate di p* nel riferimento $\mathcal{R}$* .

Indichiamo con $\mathcal{I}$ l'insieme di tutti i punti immaginari e con S* = S $\cup$ $\mathcal{I}$ lo spazio ottenuto aggiungendo ai punti reali i punti immaginari.

Quando si fissi un riferimento $\mathfrak{R}$ reale dello spazio ogni punto p di S* ha le sue coordinate (x, y , z) .

Tali coordinate sono tre numeri reali quando il punto p è reale e sono tre numeri complessi e non tutti e tre reali quando il punto p è immaginario.

Utilizzando il coniugio (c : x+iy $\rightarrow$ x-iy) del campo complesso si può nello spazio S* introdurre una biezione

$$\mathbf{c} : p \in S^* \rightarrow \bar{p} \in S^*$$

che chiameremo egualmente *coniugio* la quale fa corrispondere al punto p di coordinate (x, y, z) il punto $\bar{p}$ le cui coordinate sono i numeri complessi e coniugati dei numeri x , y, z..

Il punto $\bar{p}$ è chiamato il punto *complesso e coniugato* del punto p .

Evidentemente un punto è reale se e solo se coincide col suo complesso coniugato.

Se p non è un punto reale esso è distinto dal suo complesso coniugato e la retta che congiunge p e $\bar{p}$ ha numeri direttori reali come è facile controllare .

Nello spazio S* si possono stabilire le stesse formule già provate per lo spazio reale. Noi non faremo però la dimostrazione di queste formule. Un primo esempio è il seguente.

Se $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ sono tre punti distinti e non allineati di S* il piano α che li congiunge è costituito dai punti p le cui coordinate (x, y , z) verificano la seguente relazione :

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Sviluppando tale determinante lungo gli elementi della prima riga si riconosce che i punti del piano α hanno coordinate (x, y , z) che sono tutte e sole le soluzioni di un'equazione di primo grado non identica nelle variabili x , y, z del tipo

(**) $$ax + by + cz + d = 0$$

con a , b , c , d numeri complessi e con $(a, b, c) \neq (0,0,0)$.

L'equazione (**) si dice che rappresenta il piano α . E' evidente che un'equazione proporzionale ad essa secondo un fattore complesso non nullo , ha le stesse soluzioni e quindi rappresenta lo stesso piano.

Quando i coefficienti a , b , c , d sono reali o proporzionali a numeri reali il piano è detto ***reale*** .In tal caso i punti reali di tale piano costituiscono allora un piano reale dello spazio S.

Tra i piani dello spazio S* ci sono quindi i vecchi piani di S arricchiti ciascuno di infiniti nuovi punti immaginari.

Per ogni piano α rappresentato da :

$$\alpha \ : \quad ax + by + cz + d = 0$$

si può considerare il piano $\bar{\alpha}$ complesso e coniugato ottenuto considerando i punti complessi e coniugati dei punti di α . Il piano $\bar{\alpha}$ è rappresentato da :

$$\bar{\alpha} \ : \quad \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}z + \bar{d} = 0$$

cioè dall'equazione complessa e coniugata dell'equazione di α .

E' facile controllare che sussiste la seguente equivalenza :

Proposizione 1.1 *Un piano è reale se e solo se coincide col suo complesso coniugato.*

Ci sono però piani nello spazio S* che non sono reali e quindi non riconoscibili come un ampliamento di quelli di S . Tali piani ovviamente non possono possedere tre punti reali e non allineati. Consideriamo quindi un piano α **non reale** .

E' evidente che un eventuale punto reale di tale piano appartiene anche al piano complesso e coniugato. Quindi gli eventuali punti reali del piano α vanno ricercati nell'intersezione di α con $\bar{\alpha}$. Se α è parallelo ad $\bar{\alpha}$ allora esso non ha punti reali

Ad esempio il piano rappresentato da

$$x - i = 0$$

è parallelo ad $\bar{\alpha}$ rappresentato da $x + i = 0$ ed è privo di punti reali in quanto i suoi punti sono del tipo (i , h , k).

Se α possiede un punto p_o reale allora α ed $\bar{\alpha}$ avendo in comune p_o hanno in comune una retta ℓ . Sia ora A un punto della retta ℓ distinto da p_o e sia $\bar{A}$ il suo complesso coniugato che apparterrà anch'esso alla retta ℓ . Se $A = \bar{A}$ allora il punto A è reale e quindi la retta ℓ possedendo due punti reali è reale . Se $A \neq \bar{A}$ allora i numeri direttori di ℓ sono reali e quindi la retta ℓ è pur sempre reale. Ad esempio il piano rappresentato da

$$x + iy = 0$$

ha come unici punti reali i punti allineati (0 , 0 , k) con k reale .

Concludendo, abbiamo mostrato che nello spazio S* ci sono tre tipi di piani :

a) ***Piani reali*** che sono i piani di S ampliati ciascuno con i punti immaginari.

b) ***Piani totalmente immaginari*** .

c) ***Piani immaginari dotati di una retta reale***.

Vediamo ora le rette di S*.

I punti della retta ℓ^* che unisce i due punti distinti $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ di S* hanno coordinate (x, y , z) espresse da

$$\ell^* : \quad \begin{cases} x = x_A + \rho(x_B - x_A) \\ y = y_A + \rho(y_B - y_A) \\ z = z_A + \rho(z_B - z_A) \end{cases}$$

(dove il parametro ρ varia ora nel campo complesso).

Queste formule, che rappresentano parametricamente la retta ℓ^*, mostrano che quando i punti A e B sono reali , la sua parte reale , ottenuta in corrispondenza ai valori reali del parametro ρ coincide con la retta reale di S congiungente A e B.

In tal modo si riconosce che alcune rette dello spazio complesso S* sono “un allungamento” di quelle reali le quali si sono anch’esse arricchite di infiniti nuovi punti immaginari.

Vedremo però ora che nello spazio S* ci sono rette “nuove” che non sono di questo tipo. Tali rette evidentemente hanno al più un punto reale.

Vediamo.

La retta ℓ rappresentata da

$$\ell \; : \; \begin{cases} x + iy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ha un solo punto reale coincidente con (0 , 0, 0) .

La retta ℓ rappresentata da

$$\ell \; : \; \begin{cases} x = i \\ z = 0 \end{cases}$$

non ha punti reali.

Concludendo nello spazio S* ci sono tre tipi di rette :

a) ***Rette reali cioè quelle che posseggono due punti reali e quindi infiniti punti reali***.
b) ***Rette complesse prive di punti reali.***
c) ***Rette complesse con un unico punto reale***.

Denotiamo con $\mathcal{L}$* l'insieme delle rette di S* e con $\mathcal{P}$* l'insieme dei piani di S*.
La terna (S* , $\mathcal{L}$* , $\mathcal{P}$*) è chiamata spazio affine complesso tridimensionale e per esso continuano a valere le proprietà geometriche **1,2,3,4,5,6** già espresse per lo spazio affine reale (S , $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$).

2. Lo spazio proiettivo reale e complesso di dimensione tre.

In questo numero mostreremo che lo spazio affine reale (S , $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) può essere ampliato con l'aggiunta di nuovi punti , detti *punti impropri*. Aggregando tali nuovi punti in modo opportuno alle rette di S ed ai piani di S ed agiungendo alcune nuove rette ed un nuovo piano si ottiene una nuova struttura geometrica (S^ , $\mathcal{L}$^ , $\mathcal{P}$^) per la quale proveremo che valgono le seguenti proprietà :

I. Due punti distinti appartengono ad una unica retta.
II. Due piani distinti si intersecano in una retta.
III. Una retta ed un punto che non si appartengano sono contenuti in unico piano.
IV. Una retta incontra un piano che non la contenga in un unico punto.

Lo spazio geometrico (S^ , $\mathcal{L}$^ , $\mathcal{P}$^) sarà chiamato ***spazio proiettivo reale tridimensionale.***
Vediamo come si effettua questa costruzione.

Diamo prima alcune definizioni.

Nello spazio affine reale (S , $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) tutte le rette passanti per un fissato punto p definiscono una ***stella propria di rette di centro p***.

Tutte le rette parallele ad una retta ℓ fissata costituiscono (per la proprietà 5) una partizione dei punti di S e tale famiglia di rette viene detta ***stella impropria di rette.***

Dato un piano α e scelto un suo punto p si possono considerare tutte le rette per p contenute in α **.** Tale famiglia di rette è detta ***fascio di rette ci centro p.***

Tutti i piani passanti per un fissato punto p definiscono una ***stella di piani di centro p.***

Tutti i piani passanti per una fissata retta ℓ definiscono un ***fascio proprio di piani di asse*** $\boldsymbol{\ell}$

Tutti i piani paralleli ad un fissato piano α costituisco, per la proprietà 6 , una partizione dei punti di S e definiscono un ***fascio improprio di piani*** ..

Vediamo ora come si costruisce lo spazio proiettivo.

Sia r una retta dello spazio affine reale (S , $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$) .

Indichiamo con O_r un oggetto da noi scelto e che chiamiamo *punto improprio* ed ampliamo la retta r aggiungendo ad essa questo nuovo punto . Ogni retta dello spazio ha quindi un nuovo punto ed il criterio che seguiremo per tale attribuzione è il seguente :

$$O_r = O_s \quad \Leftrightarrow \quad r \text{ è parallela ad } s$$

(**esplicitamente** : il punto O_r aggiunto ad r coincide col punto O_s aggiunto ad s se e solo se r ed s sono rette tra loro parallele)

Pertanto con tale criterio una retta s parallela ad r sarà ampliata con lo stesso punto che abbiamo aggiunto ad r ed in tal modo le due rette r ed s , prima tra loro parallele, risultano ora incidenti nel punto O_r che è ad esse comune .

Indichiamo con Δ l'insieme di tutti i punti impropri O_r al variare di r nello spazio . Che cardinalità ha Δ ? Vediamo .

Si consideri un punto p dello spazio e sia $\mathbb{S}_p$ la stella di rette di centro p . Per ogni retta r di $\mathbb{S}_p$ indichiamo sempre con O_r il suo ***punto improprio*** . E' chiaro che i punti O_r al variare di r in $\mathbb{S}_p$ sono tutti distinti tra loro ed esauriscono come ora vedremo l'insieme Δ .

Infatti sia t una retta dello spazio non passante per p . Se r è l'unica retta per p parallela a t allora il punto O_t aggiunto alla retta t coincide con il punto O_r aggiunto alla retta r.

Pertanto i punti impropri sono tanti quante le rette di $\mathbb{S}_p$ per p . Chiameremo Δ *piano improprio*.

Anche i piani , oltre alle rette , vengono ampliati al seguente modo. Sia α un piano e sia r una retta del piano . Aggiungiamo ai punti del piano il punto improprio O_r della retta r. Se p è un punto di α ed F_p è il fascio di rette di centro p allora i punti impropri aggiunti al piano α sono evidentemente tutti e soli i punti impropri O_r al variare di r in F_p . Tali punti O_r costituiscono la retta impropria del piano affine α e tale retta sarà denotata col simbolo Δ_α .E' evidente che due piani tra loro paralleli hanno la stessa retta impropria. Consideriamo ora il seguente spazio geometrico ($S^\wedge$, $\mathscr{L}^\wedge$, $\mathscr{P}^\wedge$) :

I **punti** di $S^\wedge$: sono i punti di S (*punti propri*) e l'insieme di tutti i punti impropri .

Le **rette** di $\mathscr{L}^\wedge$: sono le rette di $\mathscr{L}$ ciascuna ampliata col suo punto improprio e le rette improprie Δ_α al variare di α in $\mathscr{P}$.

I **piani** di $\mathscr{P}^\wedge$: sono il piano improprio Δ ed i piani di $\mathscr{P}$ ciascuno ampliato con i suoi punti impropri e la sua retta impropria.

E' non difficile ora controllare (e tale verifica viene volutamente lasciata al lettore) che lo spazio ($S^\wedge$, $\mathscr{L}^\wedge$, $\mathscr{P}^\wedge$) ora definito ha le proprietà I , II , III , IV già annunciate .

E' evidente, inoltre , sulla base della costruzione fatta, che ogni piano del nuovo spazio è un **piano proiettivo.**

Noi sappiamo che quando nello spazio reale (S , $\mathscr{L}$, $\mathscr{P}$) si sceglie un riferimento reale, i suoi punti , le sue rette , i suoi piani possono essere rappresentati algebricamente e ciò consente di tradurre e risolvere, con l'aiuto del calcolo algebrico, i molti problemi geometrici che si possono porre.

L' ampliamento ora fatto non fa perdere questa opportunità, in quanto saremo ancora una volta in grado, fissato un riferimento reale , di rappresentare algebricamente i punti , le rette ed i piani di ($S^\wedge$, $\mathscr{L}^\wedge$, $\mathscr{P}^\wedge$) .

Vediamo come.

Per fare ciò occorre introdurre il concetto di ***coordinate omogenee*** di un punto.

Sia P un punto proprio e supponiamo che nel riferimento reale $\mathcal{R}$ fissato abbia coordinate (2 , 3 , 5) . Chiameremo ***coordinate omogenee*** di P nel riferimento $\mathcal{R}$ una quaterna ordinata (x_1 , x_2 , x_3, x_4) di numeri reali con $x_4 \neq 0$ e tale che sia :

$$(*) \qquad \frac{x_1}{x_4} = 2 \qquad \frac{x_2}{x_4} = 3 \qquad \frac{x_3}{x_4} = 5$$

Ovviamente una quaterna (x_1 , x_2 , x_3, x_4) " facile " che verifica la proprietà (*) è la quaterna (2, 3 , 5, 1) ma anche (4 , 6 , 10 , 2) va bene e così ogni quaterna del tipo $(2\rho , 3\rho , 5\rho , \rho)$ con $\rho \neq 0$. Una qualsiasi di queste quaterne attraverso le formule (*) restituisce la terna (2, 3, 5) e quindi individua il punto P .

Pertanto le ***coordinate omogenee*** di un punto ***proprio*** P di coordinate (x_o , y_o , z_o) sono quattro numeri (x_1 , x_2 , x_3, x_4) con $x_4 \neq 0$ e verificanti la seguente proprietà :

$$(*) \qquad \frac{x_1}{x_4} = \mathbf{x_o} \quad , \quad \frac{x_2}{x_4} = \mathbf{y_o} \quad , \quad \frac{x_3}{x_4} = \mathbf{z_o}$$

La quaterna (x_1 , x_2 , x_3, x_4) avendo $x_4 \neq 0$ è non nulla e dovendo verificare le (*) è non unica ma determinata a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Se P è un punto improprio ed esso è il punto O_r aggiunto alla retta r , chiameremo *coordinate omogenee* di P una quaterna ordinata (x_1 , x_2 , x_3, x_4) con $x_4 = 0$ e con la terna (x_1 , x_2 , x_3) coincidente con una terna (λ , μ , ν) di **numeri direttori** della retta r. Poiché i numeri direttori della retta r sono non tutti nulli e definiti anch'essi a meno di un fattore di proporzionalità non nullo , allora ancora una volta le coordinate omogenee del punto P sono una quaterna non nulla e definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Nell'insieme R^4 – (o,o,o,o) delle quaterne ordinate e non nulle di numeri reali diciamo equivalenti due quaterne (y_1 , y_2 , y_3, y_4) e (z_1 , z_2 , z_3, z_4) se e solo se sono tra loro proporzionali secondo un fattore di proporzionalità non nullo. Tale relazione, che indichiamo con σ, è manifestamente d'equivalenza e ripartisce quindi l'insieme R^4 – (o,o,o,o) in classi d'equivalenza.

Per quanto precede, quando nello spazio proiettivo reale si fissa un riferimento reale, quando si associ ad ogni punto di S^ la quaterna delle sue coordinate omogenee si costruisce una biezione tra i punti di S^ e le classi $[(y_1 , y_2 , y_3, y_4)]$ d'equivalenza dell'insieme quoziente R^4 – (o,o,o,o) / σ .

L'insieme quoziente R^4 – (o,o,o,o) / σ viene anche indicato col simbolo $\mathbf{P}_3(R)$ e viene chiamato *sostegno dello spazio proiettivo numerico reale di dimensione tre.*
Le ragioni di tale denominazione saranno più chiare in seguito attraverso l'introduzione degli spazi

proiettivi numerici su un campo **K** e di dimensione **n** (***n*** *intero positivo*) qualsiasi.

Abbiamo visto quindi come si rappresentano i punti di S^ quando si sia fissato un riferimento reale. Vediamo ora come si rappresentano i suoi piani. Supporemo sempre che nello spazio sia stato fissato un riferimento reale $\mathcal{R}$.

Proveremo ora che ad ogni piano $\boldsymbol{\pi}$ di $\mathcal{P}$^ si può associare un'equazione di primo grado non identica ed omogenea in quattro variabili del tipo

(j) $$a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0$$

che lo "rappresenta" nel riferimento $\mathcal{R}$. In che senso lo rappresenta ? Precisiamo questo aspetto.

Intanto è evidente che se una quaterna (y_1 , y_2 , y_3, y_4) non nulla è soluzione dell'equazione $a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0$ anche la quaterna $\rho (y_1 , y_2 , y_3, y_4)$ con $\rho \neq 0$ è soluzione dell'equazione e così ha significato affermare che un punto verifica con le sue coordinate omogenee l'equazione $a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0$.

L'affermazione : *l'equazione* $a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0$ *rappresenta il piano* $\boldsymbol{\pi}$ ha il seguente doppio significato.

2.1 *Un punto p di* $\boldsymbol{\pi}$ *fornisce con le sue coordinate omogenee una soluzione dell'equazione.*

2.2 *Ogni soluzione non nulla dell'equazione fornisce le coordinate omogenee di un punto p di* $\boldsymbol{\pi}$.

E' chiaro che i punti rappresentati dall'equazione sono quelli corrispondenti alle sue soluzioni non nulle e quindi ogni equazione proporzionale ad essa ,secondo un fattore di proporzionalità non nullo , avendo le stesse soluzioni , rappresenta lo stesso insieme di punti .

Pertanto quando diremo che l'equazione $a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0$ rappresenta il piano $\boldsymbol{\pi}$ sottointenderemo che ogni equazione ad essa proporzionale , secondo un fattore di proporzionalità non nullo, rappresenta pur sempre lo stesso piano $\boldsymbol{\pi}$.

Sia ora $\boldsymbol{\pi}$ un piano dello spazio proiettivo (S^ , $\mathcal{L}$^ , $\mathcal{P}$^) . Se $\boldsymbol{\pi}$ è il piano improprio allora esso è rappresentato dall'equazione

$$x_4 = 0$$

Se $\boldsymbol{\pi}$ non è il piano improprio allora esso è del tipo : $\boldsymbol{\pi} = \alpha \cup \Delta_\alpha$ con α piano di S cui sono stati aggiunti i suoi punti impropri. I punti impropri di $\boldsymbol{\pi}$ sono i punti impropri delle rette contenute nel piano α . Sia ora

(§) $$a x + b y + c z + d = 0$$

l'equazione che rappresenta il piano α nel riferimento $\mathcal{R}$ .Vogliamo ora far vedere che la stessa equazione che rappresenta in S il piano α quando la si renda omogenea rappresenta il piano α ampliato coi suoi punti impropri cioè il piano $\boldsymbol{\pi}$. Vogliamo quindi mostrare che l'equazione omogenea nelle variabili x, y, z, t

$$(\S\S) \qquad . \qquad a\,x + b\,y + c\,z + d\,t = 0$$

rappresenta il piano $\boldsymbol{\pi}$ .Occorre controllare che siano soddisfatte le due condizioni ***2.1*** e ***2.2.***

Sia **p** un punto del piano $\boldsymbol{\pi}$ **.** Se **p** è un punto di α , cioè , proprio, esso ha coordinate (x_o, y_o, z_o) che verificano l'equazione (§) e quindi le sue coordinate omogenee $(x_o, y_o, z_o, 1)$ verificano l'equazione (§§).

Se **p** è improprio esso è il punto improprio di una retta r contenuta in α Sia (λ, μ, ν) una terna di **numeri direttori** della retta r. Poiché r è parallela ad α si ha , come sappiamo ,

$$a\,\lambda + b\,\mu + c\,\nu = 0$$

da cui segue che le coordinate omogenee $(\lambda, \mu, \nu, 0)$ di **p** verificano l'equazione (§§).
La condizione ***2.1*** è quindi verificata. Proviamo la 2.2.

Sia quindi (y_1, y_2, y_3, y_4) una soluzione **non nulla** dell'equazione (§§) e vediamo se tale quaterna è la quaterna delle coordinate omogenee di un punto **p** di $\boldsymbol{\pi}$. Se è $y_4 \neq 0$ possiamo considerare la quaterna $(z_1, z_2, z_3, 1)$ ottenuta moltiplicando la quaterna (y_1, y_2, y_3, y_4) per $\dfrac{1}{y_4}$.
Poiché l'equazione (§§) è omogenea e (y_1, y_2, y_3, y_4) è una sua soluzione allora anche la quaterna $(z_1, z_2, z_3, 1)$ è una sua soluzione . Si ha quindi

$$a\,z_1 + b\,z_2 + c\,z_3 + d = 0$$

e ciò mostra che il punto proprio **p** di coordinate (z_1, z_2, z_3) è un punto di α ed (y_1, y_2, y_3, y_4) sono le sue coordinate omogenee.

Se è $y_4 = 0$ poniamo, per rendere meglio l'idea , $(y_1, y_2, y_3, 0) = (\lambda, \mu, \nu, 0)$.

Poiché per ipotesi la quaterna $(y_1, y_2, y_3, 0) = (\lambda, \mu, \nu, 0)$ verifica l'equazione (§§) si ha :

$$a\,\lambda + b\,\mu + c\,\nu = 0.$$

Questa eguaglianza mostra che una retta di numeri direttori (λ, μ, ν) risulta parallela al piano α e che quindi la quaterna $(\lambda, \mu, \nu, 0)$ è la quaterna delle coordinate omogenee di punto improprio di α .L' asserto è così provato.

Avendo trovato la rappresentazione dei piani dello spazio proiettivo vediamo come si rappresentano le sue rette .

Sia quindi ℓ una retta dello spazio proiettivo e siano $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\pi'}$ due piani che si intersecano nella retta ℓ. Siano inoltre $a x + b y + c z + d t = 0$ ed $a'x + b'y + c'z + d't = 0$. Ovviamente le soluzioni non nulle del sistema

$$\ell : \begin{cases} a x + b y + c z + d t = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d't = 0 \end{cases}$$

forniscono le coordinate omogenee dei punti della retta ℓ.

Ricordiamo che tale sistema è omogeneo e le sue soluzioni costituiscono un sottospazio di dimensione due essendo le nostre due equazioni indipendenti.Per descrivere quindi le sue soluzioni è sufficiente trovare due sue soluzioni non nulle ed indipendenti. Ma ciò è facile. Infatti siano $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ due punti distinti della retta ℓ e siano (y_1, y_2, y_3, y_4) ed (z_1, z_2, z_3, z_4) le loro coordinate omogenee. Le due quaterne (y_1, y_2, y_3, y_4) ed (z_1, z_2, z_3, z_4) sono non proporzionali in quanto rappresentative di due punti distinti e forniscono quindi due soluzioni indipendenti del sistema

$$\begin{cases} a x + b y + c z + d t = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d't = 0 \end{cases}$$

Ogni altro punto p della retta ℓ ha per coordinate omogenee una quaterna (x_1, x_2, x_3, x_4) che è una soluzione non nulla del sistema . La quaterna (x_1, x_2, x_3, x_4) sarà esprimibile come combinazione lineare delle due quaterne indipendenti (y_1, y_2, y_3, y_4) ed (z_1, z_2, z_3, z_4) che costituiscono una base dello spazio delle soluzioni del sistema .

Attraverso la conoscenza delle coordinate (y_1, y_2, y_3, y_4) ed (z_1, z_2, z_3, z_4) di due punti della retta siamo stati in grado di ricostruire come sono le coordinate dei punti di ℓ.. I punti di ℓ sono tutti e soli quelli le cui coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4) sono descritte dalle seguenti formule :

$$(*) \quad \mathbf{(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda (y_1, y_2, y_3, y_4) + \mu (z_1, z_2, z_3, z_4) \quad con \quad (\lambda , \mu) \neq (0 , 0)}$$

dove i parametri $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$ variano nel campo reale. Le formule (*) possono essere scritte in modo equivalente al seguente modo :

$$(**)\qquad \begin{cases} x_1 = \lambda y_1 + \mu z_1 \\ x_2 = \lambda y_2 + \mu z_2 \\ x_3 = \lambda y_3 + \mu z_3 \\ x_4 = \lambda y_4 + \mu z_4 \end{cases} \qquad \text{con} (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

e vengono chiamate le ***equazioni parametriche della retta*** ℓ .

E' evidente che se scelgono due valori (λ_o, μ_o) dei parametri non tutti e due nulli si ottengono in corrispondenza, nelle formule (**), le coordinate di un punto della retta ℓ. Tale punto non cambia se al posto di (λ_o, μ_o) si scegliesse la coppia $(\rho\lambda_o, \rho\mu_o)$ con $\rho \neq 0$. Pertanto le formule (**) vanno usate con questa unica attenzione.

Dalle rappresentazioni trovate seguono queste utili equivalenze :

Proposizione 2.1 *I punti $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$, $C(c_1, c_2, c_3, c_4)$ dello spazio proiettivo S^ sono allineati se e solo se le quaterne (a_1, a_2, a_3, a_4) , (b_1, b_2, b_3, b_4) , (c_1, c_2, c_3, c_4) delle loro coordinate sono linearmente dipendenti.*

Siano ora $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$, $C(c_1, c_2, c_3, c_4)$ tre punti non allineati dello spazio. Tali punti determinano un piano che ha un'equazione del tipo

$$ax + by + cz + dt = 0$$

la quale deve essere quindi soddisfatta dalle coordinate dei punti assegnati. Si hanno così le seguenti relazioni :

$$(k)\qquad \begin{aligned} a\,a_1 + b\,a_2 + c\,a_3 + d\,a_4 = 0 \\ a\,b_1 + b\,b_2 + c\,b_3 + d\,b_4 = 0 \\ a\,c_1 + b\,c_2 + c\,c_3 + d\,c_4 = 0 \end{aligned}$$

Essendo i punti A , B , C non allineati la matrice delle loro coordinate

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

ha rango tre e quindi le relazioni (k) , intese come sistema nelle incognite a , b , c, d permette di determinare i coefficienti del piano. Per quanto visto sui sistemi di equazioni lineari la quaterna (a, b , c ,d) dei coefficienti del piano cercato può ottenersi utilizzando i determinanti dei minori d’ordine tre , presi a segni alterni , della matrice L .

Ciò detto è provato che l’equazione del piano cercato possa ottenersi direttamente attraverso il calcolo del seguente determinante :

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} = 0$$

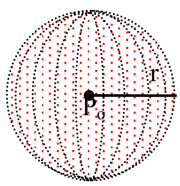
La costruzione fatta per passare dallo spazio affine reale allo spazio proiettivo reale può essere ripetuta allo stesso modo passando così dallo spazio affine complesso allo spazio proiettivo complesso. La differenza unica è che le coordinate omogenee di un punto saranno ora quattro numeri complessi non tutti nulli e definiti al solito a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Un piano si rappresenterà con un’equazione omogenea di primo grado non identica in quattro variabili ed a coefficienti complessi e nelle formule che esprimono la rappresentazione parametrica di una retta i parametri variano ovviamente nel campo complesso.

3. Sfera coni e cilindri dello spazio affine reale.

a) La sfera.

Fissiamo nello spazio affine reale un riferimento monometrico ed ortogonale $\mathcal{R}$.

Siano P_o (x_o , y_o , z_o) un punto dello spazio ed **r** un **numero reale positivo**.



Si chiama ***superficie sferica di centro P_o e raggio r*** l’insieme dei punti P dello spazio che hanno distanza **r** da P_o . Indichiamo con **Ω** tale insieme di punti e cerchiamo una sua rappresentazione analitica . Sussistono le seguenti ovvie equivalenze :

$P(x, y, z) \in \mathbf{\Omega} \quad \Leftrightarrow \quad d(P, P_o) = r \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2} = r$

$\Leftrightarrow (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2$

Da queste segue quindi che appartengono alla superficie sferica tutti e soli i punti dello spazio le cui coordinate verificano l'equazione :

$$(1) \qquad (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2$$

la quale può scriversi così :

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

avendo indicato con a, b, c, d le seguenti quantità :

$$a = -2\,x_o \quad , \quad b = -2\,y_o \quad , \quad c = -2\,z_o \quad , \quad d = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - r^2$$

L' equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

rappresenta quindi la superficie sferica $\mathbf{\Omega}$ nel riferimento $\mathcal{R}$ fissato.

E' evidente che un'equazione proporzionale ad essa secondo un fattore di proporzionalità non nullo avendo le stesse soluzioni, rappresenta lo stesso insieme di punti.

L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ che rappresenta $\mathbf{\Omega}$ nel riferimento scelto è quindi di ***secondo grado*** , ***manca dei termini misti xy , xz , yz*** ed ha ***eguali i coefficienti di x^2 e y^2 e z^2***.

Non sempre però un'equazione di questo tipo rappresenta una superficie sferica. Vediamo perché.
Sia quindi assegnata l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

essa rappresenta una superficie sferica di centro $P_o(x_o, y_o, z_o)$ e raggio r (positivo) se risulta :

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 - r^2$$

L'eguaglianza (3) sussiste se risulta :

$$a = -2\, x_o \quad , \quad b = -2\, y_o \quad , c = -2\, z_o \quad , \quad d = x_o^{\,2} + y_o^{\,2} + z_o^{\,2} - r^2$$

Si ha quindi

$$\mathbf{x_o} = -\frac{a}{2} \quad , \quad \mathbf{y_o} = -\frac{b}{2} \quad , \quad \mathbf{z_o} = -\frac{c}{2}$$

(4) $$\mathbf{r^2} = x_o^{\,2} + y_o^{\,2} + z_o^{\,2} - d = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d$$

Dalla (4) segue quindi che si troverà un numero **r** positivo , raggio della superficie sferica cercata , se si ha :

(5) $$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d > \mathbf{0}$$

Riassumendo :

L ' equazione $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

che abbia **a , b , c , d** **verificanti la proprietà (5)** è l'equazione della superficie sferica con centro nel punto $\mathbf{P_o} = \left(-\frac{a}{2} , -\frac{b}{2} , -\frac{c}{2} \right)$ e raggio **r** dato da :

(6) $$\mathbf{r} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d} \; .$$

Sia $\mathbf{\Omega}$ una superficie sferica dello spazio con centro nel punto $P_o (x_o , y_o , z_o)$ e raggio **r** positivo e sia

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

l'equazione che rappresenta **Ω** in un riferimento monometrico ed ortogonale fissato .

Sia $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un punto della superficie **Ω**.

Tutte le rette per P che intersecano **Ω** nel solo punto P sono chiamate le *rette tangenti* ad **Ω** nel punto P . Tali rette giacciono tutte in uno stesso piano π_P, detto *piano tangente ad Ω nel punto P.* Tale piano è noto che sia il piano per P ortogonale alla retta $P_o P$.

I numeri direttori della retta $P_o P$ sono $(\bar{x} - x_o, \bar{y} - y_o, \bar{z} - z_o)$ e quindi il piano tangente π_P ha equazione :

$$\pi_P : \quad (\bar{x} - x_o)(x - \bar{x}) + (\bar{y} - y_o)(y - \bar{y}) + (\bar{z} - z_o)(z - \bar{z}) = 0.$$

Quando lo spazio reale venga ampliato con i punti immaginari anche la superficie **Ω** rappresentata dall'equazione a coefficienti reali

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

si arricchisce di ulteriori punti (*immaginari*) corrispondenti alle soluzioni complesse dell'equazione che la rappresenta .

Quando allo spazio si aggiungano anche i punti impropri allora per rappresentare tutti i punti di **Ω** *propri ed impropri* occorre che l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ di **Ω** sia resa *omogenea*.

Pertanto l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + a\,x\,t + b\,y\,t + cz\,t + dt^2 = 0$$

rappresenta tutta la superficie sferica inclusi i suoi punti impropri.

Ma quali sono i punti impropri di **Ω** ? Vediamo.

E' chiaro che i punti impropri di **Ω** sono quelli che essa ha in comune con il piano improprio dello spazio che si rappresenta con l'equazione $t = 0$.

I punti impropri di **Ω** corrispondono quindi alle soluzioni non nulle del seguente sistema S :

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + axt + byt + czt + dt^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni cercate si ottengono quindi attraverso le soluzioni non nulle di :

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

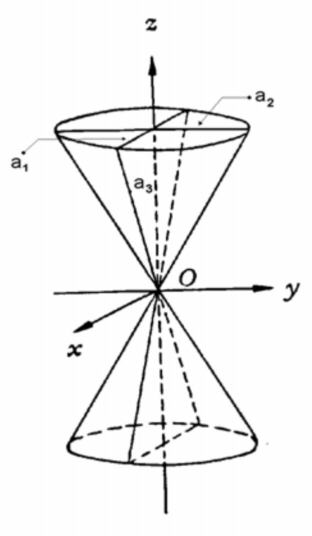
La curva Γ del piano improprio rappresentata da

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

è una conica totalmente immaginaria e raccoglie tutti i punti ciclici delle circonferenze che i piani dello spazio tagliano su **Ω** . Tale conica è chiamata l' *assoluto* dello spazio e per essa passano tutte le superfici sferiche dello spazio.

b) Il cono.

Si consideri nello spazio reale un piano π e sia Γ una sua conica non degenere. Sia inoltre V un punto non appartenente al piano π . L' unione di tutte le rette VP al variare di P su Γ è



chiamato ***cono quadrico di vertice V e direttrice Γ*** .

Vediamo come si rappresenta il cono che indicheremo con C di vertice V e direttrice Γ . Per rendere semplice l'esposizione supporremo che V abbia coordinate (0 , 0 , 1) e Γ sia la conica (ellisse) del piano z=0 di equazione

$$\Gamma : \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sia $P(\alpha, \beta, \gamma)$ un punto di Γ.

Poiché P è un punto di Γ si ha $\gamma = 0$ e $2\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0$

La retta VP è allora rappresentata parametricamente al seguente modo :

$$VP : \begin{cases} x = \rho\alpha \\ y = \rho\beta \\ z = 1 - \rho \end{cases}$$

da cui segue

$\rho = 1 - z$ e quindi $\alpha = \dfrac{x}{1-z}$ e $\beta = \dfrac{y}{1-z}$

Sostituendo tali valori di α e β in $2\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0$ si ha :

$$\mathbf{C} : \qquad 2x^2 + y^2 - (1-z)^2 = 0$$

o equivalentemente

$$\mathbf{C} : \qquad 2x^2 + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0.$$

L'equazione

$$\mathbf{2x^2 + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0}$$

rappresenta quindi il nostro cono nel riferimento assegnato.

L'equazione trovata mostra che anche il cono, al pari della superficie sferica , si rappresenta con un'equazione di secondo grado in x , y , z.

Quando lo spazio reale venga ampliato con i punti immaginari anche il cono **C** rappresentato dall'equazione a coefficienti reali

$$\mathbf{2x^2 + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0}$$

si arricchisce di ulteriori punti (*immaginari*) corrispondenti alle soluzioni complesse dell'equazione che la rappresenta .

Quando allo spazio si aggiungano anche i punti impropri allora per rappresentare tutti i punti di **C** *propri ed impropri* occorre che l'equazione $\mathbf{2x^2 + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0}$

di **C** sia resa *omogenea*. Pertanto l'equazione

$$\mathbf{2\,x^2 + y^2 - z^2 + 2z\,t - t^2 = 0}$$

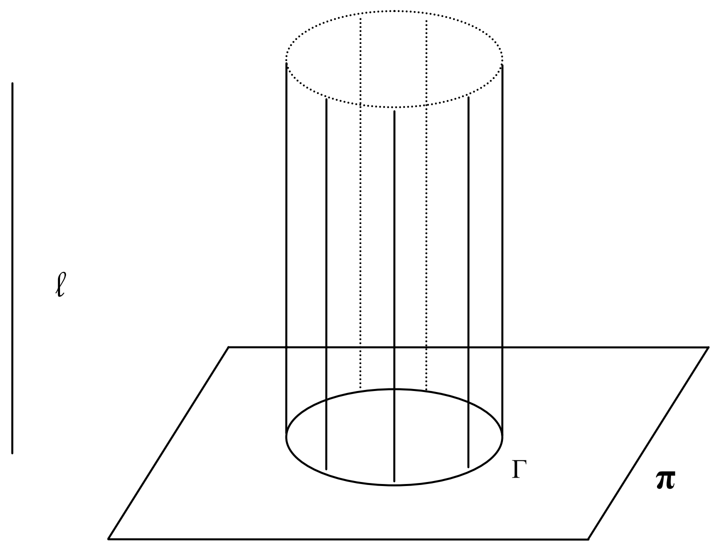
rappresenta tutti i punti del cono propri ed impropri. I punti impropri essendo quelli comuni a **C** ed al piano improprio sono i punti della conica Σ del piano improprio rappresentata da.

$$\Sigma : \begin{cases} 2\,x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Tale conica impropria Σ è *non degenere e dotata di punti reali.*

c) il cilindro.

Si consideri nello spazio reale un piano $\boldsymbol{\pi}$ e sia una sua conica non degenere. Sia inoltre ℓ una retta non parallela al piano $\boldsymbol{\pi}$. Sia P un punto Γ di e sia ℓ_P la retta per P parallela alla retta ℓ. L' unione di tutte le rette ℓ_P al variare di P su Γ è chiamato ***cilindro di direttrice Γ e generatrici parallele ad ℓ .***



Vediamo come si rappresenta il cilindro che indicheremo con **C** . Per rendere semplice l'esposizione supporremo che la retta ℓ sia la retta rappresentata da :

$$\ell \ : \ \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

e la conica Γ sia la conica (ellisse) del piano z=0 di equazione

$$\Gamma \ : \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sia P (α , β , 0) un punto di Γ . La retta ℓ_P è rappresentata da :

$$\ell_P \ : \quad \begin{cases} x = \alpha + \rho \\ y = \beta + \rho \\ z = \rho \end{cases}$$

da questa segue $\alpha = x - z$ e $\beta = y - z$. Poiché P è un punto di Γ si ha :

$$2\,\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0$$

Sostituendo in essa i valori $\alpha = x - z$ e $\beta = y - z$ si ha :

$$\mathbf{C} : \qquad \mathbf{2\,(x-z)^2 + (y - z)^2 - 1 = 0}$$

o equivalentemente :

$$\mathbf{C} : \qquad \mathbf{2\,x^2 + y^2 + 3\,z^2 - 2yz - 2xz - 1 = 0}$$

che rappresenta quindi il cilindro C nel riferimento scelto.
L'equazione trovata mostra che anche il cilindro , al pari della superficie sferica e del cono si rappresenta con un'equazione di secondo grado in x , y , z.

Quando lo spazio reale venga ampliato con i punti immaginari anche il cilindro **C** rappresentato dall'equazione a coefficienti reali

$$\mathbf{2\,x^2 + y^2 + 3\,z^2 - 2yz - 2xz - 1 = 0}$$

si arricchisce di ulteriori punti (*immaginari*) corrispondenti alle soluzioni complesse dell'equazione che la rappresenta .
Quando allo spazio si aggiungano anche i punti impropri allora per rappresentare tutti i punti di

C *propri ed impropri* occorre che l'equazione $\mathbf{2\,x^2 + y^2 + 3\,z^2 - 2y\,z - 2x\,z - 1 = 0}$ di **C** sia resa *omogenea*. Pertanto l'equazione

$$\mathbf{2\,x^2 + y^2 + 3\,z^2 - 2y\,z - 2x\,z - t^2 = 0}$$

rappresenta tutti i punti del cono propri ed impropri. I punti impropri essendo quelli comuni a **C** ed al piano improprio sono i punti della conica Σ del piano improprio rappresentata da.

$$\Sigma : \begin{cases} 2\,x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz - 2xz = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Tale conica impropria Σ essendo

$$\mathbf{2\,x^2 + y^2 + 3\,z^2 - 2y\,z - 2x\,z = [\sqrt{2}\,(x-z)]^2 - i^2\,(y - z)^2}$$

è *degenere* ed è l'unione delle seguenti rette complesse e coniugate.

$$r : \begin{cases} \sqrt{2}(x - z) + i\,(y - z) = 0 \\ t = 0 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} \sqrt{2}(x - z) - i\,(y - z) = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Capitolo VI

Le quadriche

1. Le quadriche dello spazio proiettivo complesso.

Nello spazio proiettivo complesso di **dimensione tre** che indicheremo con **P** (nel quale sia fissato un riferimento reale $\mathscr{R}$) si chiama ***quadrica***
l'insieme Q dei punti dello spazio verificanti con le loro coordinate omogenee un'equazione non identica omogenea di secondo grado in quattro variabili (x , y, z, t) a coefficienti complessi ,cioè una equazione del tipo

(1) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0.$

Quando i coefficienti a_{ij} dell'equazione (1) sono numeri reali (o proporzionali a numeri reali) la quadrica è detta ***reale*** .

Poiché l'equazione (1) è omogenea se la quaterna non nulla (y_1, y_2, y_3, y_4) verifica l'equazione (1) anche la quaterna ($\rho y_1, \rho y_2, \rho y_3, \rho y_4$) con $\rho \neq 0$ verifica l'equazione (1) sicchè ha senso dire che un punto dello spazio soddisfa con le sue coordinate omogenee l'equazione (1).

E' chiaro inoltre che ogni equazione proporzionale all'equazione (1) secondo un fattore di proporzionalità non nullo , avendo le stesse soluzioni della (1) , rappresenta lo stesso insieme di punti.

Quando le variabili (x , y, z, t) vengano indicate con (x_1, x_2, x_3, x_4) l'equazione (1) sarà scritta nella forma :

$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0.$

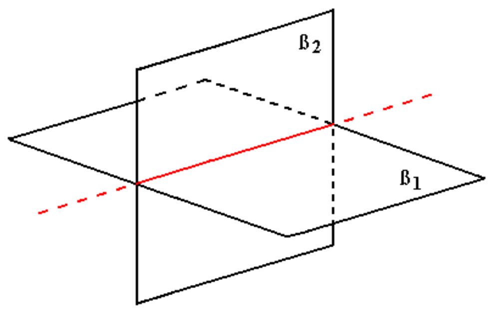
Se $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\pi'}$ sono due piani dello spazio rappresentati rispettivamente da :

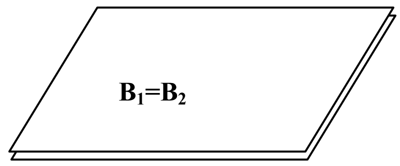
$\boldsymbol{\pi}$: $ax + by + cz + dt = 0$
$\boldsymbol{\pi'}$: $a'x + b'y + c'z + d't = 0$

allora l'equazione omogenea di secondo grado , non identica ,

$$(ax + by + cz + dt)(a'x + b'y + c'z + d't) = 0$$

ottenuta moltiplicando tra loro le due equazioni , rappresenta ovviamente l'unione dei due piani . Pertanto tra le quadriche dello spazio ci sono quelle che siano l'unione di due piani distinti o coincidenti. Tali quadriche sono dette ***riducibili***, *doppiamente* se i due piani sono coincidenti e *semplicemente* se i due piani sono distinti.





Una quadrica riducibile è quindi rappresentata da una equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0.$$

nella quale il polinomio

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt$$

è **riducibile** cioè è prodotto di due polinomi di primo grado distinti o coincidenti.

Abbiamo anche visto nei numeri precedenti che tra le quadriche reali dello spazio ci sono anche le *sfere* i *coni* ed i *cilindri* che sono appunto rappresentati, come abbiamo provato , in un riferimento reale da equazioni omogenee di secondo grado non identiche in quattro variabili.

Alla quadrica **Q** rappresentata nel riferimento scelto dall'equazione :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0.$$

si può associare la seguente matrice quadrata d'ordine quattro **simmetrica** ottenuta utilizzando i coefficienti a_{ij} dell'equazione della quadrica .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

Si osservi ora esplicitamente che nell'equazione :

il numero che accompagna xy è il doppio di a_{12}
il numero che accompagna xz è il doppio di a_{13}
il numero che accompagna xt è il doppio di a_{14}
il numero che accompagna yz è il doppio di a_{23}
il numero che accompagna yt è il doppio di a_{24}
il numero che accompagna zt è il doppio di a_{34}

pertanto una certa attenzione va posta quando si scrive la matrice A associata alla quadrica.

Ad esempio la matrice associata alla quadrica reale Q rappresentata da :

$$2x^2 + y^2 + 4zt + 6xy + 4yz + z^2 + 4t^2 = 0$$

è la seguente :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vedremo in seguito che *nella matrice A associata alla quadrica sono contenute molte informazioni sulla quadrica stessa* e per tale ragione ***occorre scriverla in modo corretto.***

Studieremo ora in modo approfondito le quadriche dello spazio già consapevoli che tra quelle reali dovremo ritrovare :

(coppia di piani distinti o coincidenti , sfera , coni e cilindri).

Ma queste già descritte sono le uniche quadriche reali o ce ne sono anche altre ? Vediamo.

Alcune notazioni sono ora introdotte al fine di rendere più semplice l'esposizione.

Sia Q una quadrica rappresentata in un riferimento reale fissato dall'equazione

$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0.$

Tale equazione può scriversi nei seguenti modi :

(i)
$$
\begin{aligned}
&(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)\,x_1 + \\
&(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)\,x_2 + \\
&(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4)\,x_3 + \\
&(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4)\,x_4 = 0
\end{aligned}
$$

(ii) $\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j = 0$ $(a_{ij} = a_{ji})$ *(nella sommatoria gli indici i e j variano da 1 a 4)*

(iii) $X_t A X = 0$ dove è $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ed $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ $(a_{ij} = a_{ji})$

Porremo inoltre a volte per semplicità :

$\mathbf{f}\,(\,\mathbf{x_1}\,,\mathbf{x_2}\,\,,\mathbf{x_3}\,,\mathbf{x_4}\,) = a_{11}x_1^{\,2} + a_{22}\,x_2^{\,2} + a_{33}\,x_3^{\,2} + a_{44}\,x_4^{\,2} + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 + 2a_{13}\,x_1\,x_3 + 2\,a_{14}\,x_1\,x_4 +$

$+2\,a_{23}\,x_2\,x_3 + 2\,a_{24}\,x_2\,x_4 + 2a_{34}\,x_3\,x_4$

$\mathbf{f_1}\,(\,\mathbf{x_1}\,,\mathbf{x_2}\,,\mathbf{x_3}\,,\mathbf{x_4}\,) = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + a_{14}\,x_4$

$\mathbf{f_2}\,(\,\mathbf{x_1}\,,\mathbf{x_2}\,,\mathbf{x_3}\,,\mathbf{x_4}\,) = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + a_{24}\,x_4$

$\mathbf{f_3}\,(\,\mathbf{x_1}\,,\mathbf{x_2}\,,\mathbf{x_3}\,,\mathbf{x_4}\,) = a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + a_{34}\,x_4$

$\mathbf{f_4}\,(\,\mathbf{x_1}\,,\mathbf{x_2}\,,\mathbf{x_3}\,,\mathbf{x_4}\,) = a_{41}\,x_1 + a_{42}\,x_2 + a_{43}\,x_3 + a_{44}\,x_4$

Per la simmetria della matrice A sussiste questa utile eguaglianza che useremo spesso in seguito :

per ogni coppia di quaterne non nulle $(\,y_1, y_2, y_3, y_4\,)$ e $(\,z_1\,, z_2\,, z_3\,, z_4\,)$ si ha che sono eguali le seguenti due quantità che indicheremo con

$$f\,(\,\underline{\mathbf{y}}\;/\;\underline{\mathbf{z}}\,) \qquad \text{e} \qquad f\,(\,\underline{\mathbf{z}}\;/\;\underline{\mathbf{y}}\,)$$

dove è :

$$\begin{aligned} f\,(\,\underline{\mathbf{y}}\;/\;\underline{\mathbf{z}}\,) = {} & (a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + a_{13}\,y_3 + a_{14}\,y_4\,)\,z_1 + \\ & (a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + a_{23}\,y_3 + a_{24}\,y_4\,)\,z_2 + \\ & (a_{31}\,y_1 + a_{32}\,y_2 + a_{33}\,y_3 + a_{34}\,y_4\,)\,z_3 + \\ & (a_{41}\,y_1 + a_{42}\,y_2 + a_{43}\,y_3 + a_{44}\,y_4\,)\,z_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\,(\,\underline{\mathbf{z}}\;/\;\underline{\mathbf{y}}\,) = {} & (a_{11}\,z_1 + a_{12}\,z_2 + a_{13}\,z_3 + a_{14}\,z_4\,)\,y_1 + \\ & (a_{21}\,z_1 + a_{22}\,z_2 + a_{23}\,z_3 + a_{24}\,z_4\,)\,y_2 + \\ & (a_{31}\,z_1 + a_{32}\,z_2 + a_{33}\,z_3 + a_{34}\,z_4\,)\,y_3 \\ & (a_{41}\,z_1 + a_{42}\,z_2 + a_{43}\,z_3 + a_{44}\,z_4\,)\,y_4 \end{aligned}$$

2. *Intersezione di una retta con una quadrica.*

Sia **Q** una quadrica dello spazio proiettivo rappresentata, nel riferimento reale scelto, dall'equazione

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}) \qquad \text{(gli indici variano da 1 a 4)}$$

e sia **r** una retta dello spazio passante per i punti Y e Z di coordinate (y_1, y_2, y_3, y_4) e (z_1, z_2, z_3, z_4). Quando si rappresenti **r** in forma parametrica si riconosce che i punti di **r** hanno, al variare dei parametri $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, coordinate del tipo

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda\,(y_1, y_2, y_3, y_4) + \mu\,(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Cioè :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda y_1 + \mu z_1,\ \lambda y_2 + \mu z_2,\ \lambda y_3 + \mu z_3,\ \lambda y_4 + \mu z_4)$$

Ci chiediamo per quali valori dei parametri $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ il punto $(\lambda y_1 + \mu z_1,\ \lambda y_2 + \mu z_2,\ \lambda y_3 + \mu z_3,\ \lambda y_4 + \mu z_4)$ della retta **r** appartenga anche alla quadrica **Q** .

Ora il punto $(\lambda y_1 + \mu z_1,\ \lambda y_2 + \mu z_2,\ \lambda y_3 + \mu z_3,\ \lambda y_4 + \mu z_4)$ della retta **r** appartiene alla quadrica **Q** se risulta :

$$\sum_{i,j} a_{ij}(\lambda y_i + \mu z_i)(\lambda y_j + \mu z_j) = 0 \tag{2.1}$$

L' equazione (2.1) è una equazione omogenea di secondo grado nelle incognite λ e μ del tipo

$$\mathbf{a}\,\lambda^2 + 2\,\mathbf{b}\,\lambda\mu + \mathbf{c}\,\mu^2 = 0 \tag{2.2}$$

avendo posto

$$\mathbf{a} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i y_j \ , \qquad \mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i z_j \ , \qquad \mathbf{c} = \sum_{i,j} a_{ij} z_i z_j$$

Se l'equazione (2.2) è identicamente nulla cioè risulta **a** = **b** = **c** = 0 allora per ogni scelta dei parametri λ e μ il punto di **r** di coordinate

$(\lambda y_1 + \mu z_1,\ \lambda y_2 + \mu z_2,\ \lambda y_3 + \mu z_3,\ \lambda y_4 + \mu z_4)$ appartiene alla quadrica e qundi la retta **r** è contenuta nella quadrica **Q** .

Se l'equazione (2.2) non è identicamente nulla allora essa ammette due soluzioni (distinte o coincidenti) in corrispondenza delle quali si trovano due punti (distinti o coincidenti) comuni alla retta **r** ed alla quadrica **Q** .

Abbiamo così provato la seguente :

Proposizione 2.1. *Una retta dello spazio non contenuta nella quadrica* ***Q*** *ha in comune con essa al più due punti .*

Da tale risultato segue ovviamente che :

una retta che abbia almeno tre punti in comune con la quadrica è contenuta nella quadrica.

3. Intersezione di un piano con una quadrica.

Sia **Q** una quadrica dello spazio proiettivo e sia $\boldsymbol{\pi}$ un piano reale dello spazio.Al fine di studiare la natura dell'insieme $\boldsymbol{\pi} \cap$ **Q** possiamo ovviamente supporre che il piano non sia contenuto nella quadrica. Inoltre per rendere facile la nostra indagine disponiamo il riferimento in modo che $\boldsymbol{\pi}$ sia il piano z = 0 . Con tale scelta del riferimento sia

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0.$

l' equazione che rappresenta la quadrica **Q** .

Ovviamente i punti comuni al piano ed alla quadrica hanno coordinate che soddisfano il seguente sistema

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + + 2a_{14}xt + + 2a_{24}yt = 0. \\ z = 0 \end{cases}$$

e cioè sono i punti di una conica .

Resta così provato che :

Proposizione 3.1 *Un piano dello spazio che non sia contenuto in una quadrica interseca la quadrica in una conica.*

4. *Le quadriche degeneri.*

Abbiamo già osservato che l'unione di due piani distinti o coincidenti è una quadrica.

Inoltre come già visto , se si considera una conica non degenere Γ di un piano e poi un punto V fuori dal piano , l'unione di tutte le rette Vp al variare di p sulla conica Γ è una quadrica . Tale quadrica che è un **cono quadrico** di vertice V e direttrice Γ sarà chiamata **cono** se V è un punto *proprio* e **cilindro** se V è un punto *improprio.*

Questi quattro tipi di quadriche:

a) *unione di due piani coincidenti*
b) *unione di due piani distinti*
c) *cono*
d) *cilindro*

sono dette ***degeneri*** **.**Più precisamente i tipi a) e b) ***degeneri e riducibili*** mentre i tipi c) e d) ***degeneri ma non riducibili.***

Al fine di trovare una caratterizzazione delle quadriche degeneri è importante la seguente definizione.

Sia **Q** una quadrica dello spazio proiettivo. Un punto P della quadrica **Q** è detto ***doppio***

se ogni retta per P o è contenuta nella quadrica o interseca la quadrica nel solo punto P .

Un punto che non sia doppio è detto ***semplice***.

Le quadriche degeneri sono tutte dotate di punti doppi.

Precisamente :

se la **quadrica è l'unione di due piani coincidenti** *ogni suo punto è doppio* : tale quadrica possiede quindi almeno *tre punti doppi non allineati.*

se la **quadrica è l'unione di due piani distinti** *i punti doppi della quadrica sono i punti della retta comune ai due piani* : tale quadrica possiede più di un punto doppio ma i suoi *punti doppi sono allineati.*

Se la quadrica è un **cono o un cilindro** il vertice V è l'unico *punto doppio*.

La situazione ora descritta caratterizza tali quadriche come le proposizioni che seguono mostrano.

Proposizione 4.1 *Se una quadrica **Q** possiede almeno tre punti doppi non allineati essa è l'unione di due piani coincidenti.*

Dimostrazione. Siano A , B , C tre punti della quadrica **Q** e siano doppi e non allineati. Sia $\boldsymbol{\pi}$ il piano determinato dai tre punti A , B , C . Le tre rette AB , AC , BC costituiscono i lati di un triangolo e sono contenute nella quadrica in quanto i punti A , B , C sono doppi.
Per questa ragione il piano $\boldsymbol{\pi}$ avendo in comune con la quadrica tali rette non ha in comune con la quadrica una conica ed è quindi contenuto nella quadrica . Se proviamo che la quadrica coincide col piano $\boldsymbol{\pi}$ si ha l'asserto. Supponiamo per assurdo che contenga propriamente il piano $\boldsymbol{\pi}$ ed esista quindi un punto T di **Q** fuori dal piano $\boldsymbol{\pi}$. Poiché A , B , C sono **doppi** le rette TA , TB , TC sono contenute nella quadrica .
Segue allora che i piani $\boldsymbol{\gamma} = <TAB>$, $\boldsymbol{\beta} = <TAC>$, $\boldsymbol{\alpha} = <TBC>$ sono contenuti nella quadrica in quanto ciascuno di essi ha in comune con la quadrica tre rette. Sia K un punto dello spazio non appartenente ai piani $\boldsymbol{\pi}$ **,** $\boldsymbol{\alpha}$ **,** $\boldsymbol{\beta}$ **,** γ e sia $\boldsymbol{\pi}$**'** un piano per K e non passante per T . Siano ℓ , ℓ' , ℓ'' le rette che il piano $\boldsymbol{\pi}$**'** ha in comune con i piani $\boldsymbol{\alpha}$ **,** $\boldsymbol{\beta}$ **,** γ . Il piano $\boldsymbol{\pi}$**'** avendo in comune con la quadrica le tre rette ℓ , ℓ' , ℓ'' è contenuto nella quadrica e così K è un punto di **Q** .Ma allora ogni punto dello spazio fa parte di **Q** e ciò non è possibile in quanto essendo l'equazione che rappresenta **Q** non identica essa non può rappresentare tutti i punti dello spazio.

Proposizione 4.2 *Se i punti doppi di una quadrica **Q** sono almeno due e tutti allineati allora la quadrica **Q** è l'unione di due piani distinti.*

Dimostrazione. Siano A e B due punti doppi distinti della quadrica **Q** . La retta ℓ che congiunge A e B è allora contenuta nella quadrica. Poiché **Q** contiene propriamente la retta ℓ è possibile scegliere un punto T su **Q** fuori dalla retta ℓ . Le rette TA e TB fanno parte della quadrica in quanto A e B sono doppi. Il piano $\boldsymbol{\pi}$ che unisce T ed ℓ è quindi contenuto nella quadrica avendo con essa in comune le tre rette distinte ℓ , TA , TB. Se **Q** coincidesse col piano $\boldsymbol{\pi}$ allora **Q** avrebbe almeno tre punti doppi non allineati contro il supposto. Quindi la quadrica **Q**

contiene propriamente il piano $\boldsymbol{\pi}$ ed è quindi possibile determinare un punto T' su **Q** fuori da $\boldsymbol{\pi}$**.** Per le stesse ragioni esposte per il punto T il piano $\boldsymbol{\pi'}$ che congiunge ℓ e T' è contenuto nella quadrica **Q** . Proviamo ora che risulta $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\pi} \cup \boldsymbol{\pi'}$.

Supponiamo per assurdo che esista un punto K su **Q** e non appartenente ai piani $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\pi'}$**.**

Proveremo ora che ogni retta per K è contenuta nella quadrica il che è assurdo in quanto la quadrica è un sottoinsieme proprio dello spazio.

Il piano α che congiunge ℓ con K è contenuto nella quadrica avendo in comune con essa le rette ℓ , KA e KB . Quindi ogni retta per K che incida la retta ℓ, essendo conenuta nel piano α , è contenuta nella quadrica. D'altra parte una retta per K che non incida la retta ℓ interseca i piani $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\pi'}$ in due punti distinti ed è quindi contenuta nella quadrica avendo con essa in comune tre punti distinti.

Proviamo la seguente :

Proposizione 4.3 *Se una quadrica **Q** contiene un piano essa è unione di due piani distinti o coincidenti.*

Dimostrazione. Supponiamo che la quadrica **Q** contenga un piano $\boldsymbol{\pi}$. Se è $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\pi}$ si ha l'asserto.Supponiamo quindi che **Q** contenga propriamente $\boldsymbol{\pi}$ e sia T un punto di **Q** fuori dal piano $\boldsymbol{\pi}$.

Sia ℓ una retta di $\boldsymbol{\pi}$ e sia α il piano che congiunge T e la retta ℓ .Se il piano α non è contenuto in **Q** esso interseca la quadrica in una conica che è degenere ed è composta dalla retta ℓ e da un'altra retta t per T . Sia A il punto comune a $\boldsymbol{\pi}$ ed alla retta t . Si scelga ora una retta r in $\boldsymbol{\pi}$ non passante per il punto A e sia β il piano determinato da T ed r . Tale piano β se non è contenuto in **Q** interseca **Q** in una conica che è degenere ed è costituita dalla retta r ed un'altra retta t' per T . Il piano γ determinato dalle rette t e t' è allora contenuto in **Q** in quanto ha in comune con **Q** le tre rette distinte $\gamma \cap \boldsymbol{\pi}$, t , t' . In ogni caso abbiamo provato che la quadrica **Q** contiene l'unione di due piani distinti di cui uno è $\boldsymbol{\pi}$ e l'altro è α oppure β oppure γ .

Sia $\boldsymbol{\pi'}$ il piano diverso da $\boldsymbol{\pi}$ contenuto in **Q** e sia ℓ la retta comune ai piani $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\pi'}$. Possiamo ora provare che è $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\pi} \cup \boldsymbol{\pi'}$.

Supponiamo per assurdo che esista un punto K su **Q** e non appartenente ai piani $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\pi'}$**.** Si scelga un punto L sulla retta ℓ e sia **r** una retta per K distinta dalla retta **s** = [KL] e che interseca i piani $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\pi'}$ in due punti distinti. La retta **r** è contenuta in **Q** avendo in comune con **Q** tre punti distinti.

Il piano α determinato dalle rette **s** ed **r** è allora contenuto nella quadrica **Q** in quanto ha in comune con **Q** le tre rette $\alpha \cap \boldsymbol{\pi}$, $\alpha \cap \boldsymbol{\pi}'$ ed **r** .

Abbiamo così provato che la retta **s** = [KL] è contenuta nella quadrica **Q** qualunque sia L scelto su ℓ . D' altra parte ogni retta per K che non incida ℓ interseca i due piani $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\pi}'$ in due punti distinti e quindi fa parte di **Q** avendo con essa in comune tre punti distinti . Ma se ogni retta per K è contenuta in **Q** allora **Q** coincide con tutti i punti dello spazio il che è assurdo.

Possiamo ora provare la seguente utile :

Proposizione 4.4 *Se una quadrica* ***Q*** *contiene un solo punto doppio V essa è un cono quadrico di vertice V .*

Dimostrazione. Sia V l'unico punto doppio della quadrica Q e sia $\boldsymbol{\pi}$ un piano non passante per V . Per la proposizione precedente il piano $\boldsymbol{\pi}$ non è contenuto nella quadrica Q e quindi interseca la quadrica in una conica Γ . La conica Γ è non degenere in quanto se contenesse una retta t il piano β determinato da V e t sarebbe contenuto in Q essendo V doppio. Consideriamo il cono C di vertice V e direttrice Γ e proviamo che è C = Q . E' evidente che ogni retta Vp al variare di p su Γ è contenuta in Q essendo V doppio. Pertanto è $C \subseteq Q$. Proviamo ora che ogni punto di Q è un punto del cono C e che è quindi Q = C .

Sia M un punto di Q che possiamo supporre diverso da V e non appartenente a Γ . La retta VM è contenuta in Q , essendo V doppio, ed interseca il piano $\boldsymbol{\pi}$ in un punto p necessariamente appartenente a Γ .

Pertanto M giace su una delle generatrici del cono (la retta Vp) e quindi appartiene al cono. L' asserto è così provato.

Possiamo riassumere tutte le proposizioni precedenti nella seguente :

Proposizione 4.5 *Una quadrica Q è degenere se e solo se possiede almeno un punto doppio.*

Una quadrica priva di punti doppi sarà quindi chiamata ***non degenere***.

Le proposizioni provate e che caratterizzano le quadriche degeneri spostano l'attenzione sulla ricerca degli eventuali punti doppi della quadrica .

Ma come si trovano i punti doppi di una quadrica ? Vediamo .

La proposizione che segue fornisce la risposta al quesito posto.

Proposizione 4.6 *Un punto P dello spazio è doppio per la quadrica Q rappresentata dall'equazione*

$$Q \; : \qquad \sum_{i,j} a_{ij} x_i \, x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

se e solo se le sue coordinate (y_1 , y_2 , y_3 , y_4) *verificano le seguenti eguaglianze :*

$$
\begin{aligned}
&a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + a_{14} y_4 = 0 \\
&a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + a_{24} y_4 = 0 \\
&a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 + a_{34} y_4 = 0 \\
&a_{41} y_1 + a_{42} y_2 + a_{43} y_3 + a_{44} y_4 = 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Dimostrazione. Cominciamo a provare che se un punto ha coordinate verificanti le eguaglianze (4 . 1) esso è un punto della quadrica ed è doppio per essa . Abbiamo già osservato che risulta

$$\sum_{i,j} a_{ij} y_i \, y_j = (a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + a_{14} y_4) \, y_1 + (a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + a_{24} y_4) \, y_2 +$$

$$+ \quad (a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 + a_{34} y_4) \, y_3 + (a_{41} y_1 + a_{42} y_2 + a_{43} y_3 + a_{44} y_4) \, y_4$$

e pertanto , se valgono le (4.1), si ha $\sum_{i,j} a_{ij} y_i \, y_j = 0$, il che prova che P è un punto della quadrica . Proviamo ora che esso è doppio per la quadrica .

Sia Z un punto qualsiasi dello spazio distinto dal punto P e sia r la retta che unisce P con Z .

Siano (z_1 , z_2 , z_3) le coordinate di Z e sia

$$(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = (\lambda y_1 + \mu z_1, \; \lambda y_2 + \mu z_2 , \; \lambda y_3 + \mu z_3 , \; \lambda y_4 + \mu z_4)$$

la rappresentazione parametrica della retta r .

Abbiamo già visto che gli eventuali punti comuni alla retta r ed alla quadrica si trovano attraverso le soluzioni non nulle dell'equazione

$$\mathbf{a} \, \lambda^2 + 2 \, \mathbf{b} \, \lambda \, \mu + \mathbf{c} \, \mu^2 = 0$$

dove è : (*con gli indici i e j variabili tra 1 e 4*)

$\mathbf{a} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, y_j$, $\mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, z_j$, $\mathbf{c} = \sum_{i,j} a_{ij} z_i\, z_j$

Stante le (4.1) si ha allora $\mathbf{a} = 0$ e $\mathbf{b} = 0$ e pertanto l' equazione

$$\mathbf{a}\,\lambda^2 + 2\,\mathbf{b}\,\lambda\,\mu + \mathbf{c}\,\mu^2 = 0$$

diventa

$$\mathbf{c}\,\mu^2 = 0$$

Se anche $\mathbf{c} = 0$ allora la retta r è contenuta nella quadrica se invece è $\mathbf{c} \neq 0$ allora l'equazione $\mathbf{c}\,\mu^2 = 0$ fornisce come sua unica soluzione la coppia (1 , 0) cui corrisponde il punto P che diventa quindi l'unico punto che r ha in comune con la quadrica .

Abbiamo provato così che se valgono le (4.1) allora P appartiene alla quadrica ed inoltre (vista l'arbitrarietà del punto Z) **ogni** retta per P o è contenuta in Q o ha in comune con Q il solo punto P e ciò prova che P è doppio per Q .

Viceversa supponiamo che un punto P (y_1 , y_2 ,y_3 , y_4) della quadrica Q sia doppio per essa e proviamo che le sue coordinate (y_1 , y_2 ,y_3 , y_4) verificano le (4. 1).

Al solito sia Z un punto qualsiasi dello spazio distinto dal punto P e sia r la retta che unisce P con Z . Siano (z_1 , z_2 , z_3, z_4) le coordinate di Z e sia

$$(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = (\lambda y_1 + \mu z_1,\ \lambda y_2 + \mu z_2,\ \lambda y_3 + \mu z_3,\ \lambda y_4 + \mu z_4)$$

la rappresentazione parametrica della retta r .

I punti comuni alla retta r ed alla quadrica si trovano attraverso le soluzioni non nulle dell'equazione

$$\mathbf{a}\,\lambda^2 + 2\,\mathbf{b}\,\lambda\,\mu + \mathbf{c}\,\mu^2 = 0$$

dove è : (*con gli indici i e j variabili tra 1 e 4*)

$$\mathbf{a} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, y_j \quad , \quad \mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, z_j \quad , \quad \mathbf{c} = \sum_{i,j} a_{ij} z_i\, z_j$$

Poiché P è un punto della quadrica allora è $\mathbf{a} = 0$. L' equazione

$$\mathbf{a}\,\lambda^2 + 2\,\mathbf{b}\,\lambda\,\mu + \mathbf{c}\,\mu^2 = 0$$

diventa così :

$$\mu\,(2\,\mathbf{b}\,\lambda + \mathbf{c}\,\mu) = 0$$

Si ha quindi la soluzione (*attesa*) (1 , 0) cui corrisponde P e l'altra soluzione si ottiene da

$$2\,\mathbf{b}\,\lambda + \mathbf{c}\,\mu = 0.$$

Poiché P è doppio la retta PZ è contenuta in Q oppure ha in comune con Q il solo punto P e quindi l' equazione $2\,\mathbf{b}\,\lambda + \mathbf{c}\,\mu = 0$ deve o essere identicamente nulla o deve fornire ancora come soluzione la coppia (1, 0) . In entrambi i casi ciò comporta che è $\mathbf{b} = 0$.

Pertanto qualunque sia Z (z_1 , z_2 , z_3 , z_4) risulta allora che è :

$$\mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i z_j = 0$$

Esplicitamente è :

$$\mathbf{b} = (a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + a_{13}\,y_3 + a_{14}\,y_4)\,z_1 + (a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + a_{23}\,y_3 + a_{24}\,y_4)\,z_2 +$$

$$(a_{31}\,y_1 + a_{32}\,y_2 + a_{33}\,y_3 + a_{34}\,y_4)\,z_3 + (a_{41}\,y_1 + a_{42}\,y_2 + a_{43}\,y_3 + a_{44}\,y_4)\,z_4$$

ed esso è nullo , per **ogni** scelta del punto Z , e quindi per **ogni** scelta della quaterna (z_1 , z_2 , z_3 , z_4).

Scegliendo

$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (1, 0, 0, 0)$, $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 1, 0, 0)$,

$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 0, 1, 0)$, $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 0, 0, 1)$, si hanno le (4.1) e l'asserto è così provato.

La proposizione ora provata ha mostrato che determinare gli eventuali punti doppi della quadrica equivale a determinare le eventuali soluzioni non nulle del seguente sistema omogeneo

$$(4.2) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0 \end{cases}$$

che ha per matrice la matrice A della quadrica .

Pertanto , tenendo conto delle proposizioni precedenti , si ha questa utilissima

Proposizione 4.7 *Una quadrica Q rappresentata dall'equazione*

$$Q: \quad \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

è degenere se e solo se risulta

$$\mathbf{det\ A = 0}\ .$$

Dimostrazione. Se Q è degenere essa possiede almeno un punto doppio P. Le coordinate dì P sono quindi una soluzione **non nulla** del sistema omogeneo (4 .2) e così è det A = 0.

Viceversa se detA = 0 il sistema (4.2) ha soluzioni non nulle ed in corrispondenza a tali soluzioni si hanno punti doppi per Q la quale è così degenere.

5. *Piano tangente ad una quadrica in un suo punto semplice.*

Sia Q una quadrica (non riducibile) rappresentata da

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

e sia P(y_1 , y_2 ,y_3 , y_4) un suo punto semplice . Poiché il punto P è semplice almeno una delle quattro relazioni (4 .1) è diversa da zero. Sia Z (z_1 , z_2 , z_3 , z_4) un punto dello spazio distinto da P e sia r la retta PZ . Come già visto i punti comuni alla retta PZ , rappresentata parametricamente da

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda y_1 + \mu z_1, \lambda y_2 + \mu z_2, \lambda y_3 + \mu z_3, \lambda y_4 + \mu z_4)$$

si trovano attraverso le soluzioni non nulle dell'equazione

$$\mathbf{a}\,\lambda^2 + 2\,\mathbf{b}\,\lambda\,\mu + \mathbf{c}\,\mu^2 = 0 \tag{5.1}$$

dove è :

$$\mathbf{a} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, y_j \quad , \quad \mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, z_j \quad , \quad \mathbf{c} = \sum_{i,j} a_{ij} z_i\, z_j$$

Essendo $\mathbf{a} = 0$ in quanto $P \in Q$, l'equazione (5.1) diventa :

$$\mu\,(2\,\mathbf{b}\,\lambda + \mathbf{c}\,\mu) = 0 \tag{5.2}$$

Tale equazione fornisce la soluzione (1 , 0) in accordo col fatto che P è comune ad r e Q . Ora se è

$$\mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i\, z_j = 0$$

ed è $\mathbf{c} \neq 0$ la soluzione (1 , 0) sarà soluzione doppia della (5. 2) e cioè la retta r interseca Q solo nel punto P , se invece è anche $\mathbf{c} = 0$ l'equazione (5. 2) è identicamente nulla e la retta r è contenuta in Q .

Abbiamo così provato che i punti Z dello spazio per cui la retta PZ incontri Q nel solo punto P o sia contenuta in Q sono tutti e soli quelli per cui risulti :

$$(a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + a_{14} y_4)\, z_1 + (a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + a_{24} y_4)\, z_2 +$$
$$(a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 + a_{34} y_4)\, z_3 + (a_{41} y_1 + a_{42} y_2 + a_{43} y_3 + a_{44} y_4)\, z_4 = 0$$

cioè sono tutti e soli i punti dello spazio le cui coordinate sono soluzione dell'equazione seguente

$$(a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + a_{14} y_4)\, x_1 + (a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + a_{24} y_4)\, x_2 + \tag{5.3}$$

$$(a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 \ + a_{33}\, y_3 + a_{34}\, y_4\,)\, x_3 + (a_{41}\, y_1 + a_{42}\, y_2 \ + a_{43}\, y_3 + a_{44}\, y_4\,)\, x_4 = \ 0$$

Tale equazione, che *non è identica perchè P è semplice* , rappresenta quindi un piano per P che è chiamato ***piano tangente nel punto P.***

Sia P un punto e sia $\boldsymbol{\pi}_P$ il piano tangente in P . Per la sua stessa definizione se Z è un punto di $\boldsymbol{\pi}_P$ diverso da P la retta PZ è **tangente** a Q in P (incontra cioè Q nel solo punto P) oppure è tutta contenuta nella quadrica. Q .

Poiché la sezione di un piano con una quadrica è una conica allora l'intersezione del piano $\boldsymbol{\pi}_P$ con la quadrica fornirà una conica che è ***necessariamente degenere*** .

Viceversa se in un punto P semplice della quadrica c'è un piano per P che interseca Q in una conica degenere costituita da due rette per P o da una sola retta allora tale piano è necessariamente il piano tangente a Q nel punto P .

6. Il gruppo strutturale.

Sia GL(4,R) il gruppo delle matrici reali quadrate d'ordine quattro non degeneri ad elementi reali .

Sia $A = (\, a_{ij}\,)$ una matrice non degenere elemento di GL(4,R) . La matrice A induce nello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}$ un' applicazione ω_A biettiva quando si faccia corrispondere al punto P di coordinate $(\, x_1, x_2, x_3, x_4)$ il punto P' di coordinate $(x'_1\,, x'_2\,, x'_3\,, x'_4)$ con $(x'_1\,, x'_2\,, x'_3\,, x'_4)$ date da :

$$x'_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \ + a_{13}\, x_3 + a_{14}\, x_4$$

$$x'_2 = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \ + a_{23}\, x_3 + a_{24}\, x_4$$

$$x'_3 = a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 \ + a_{33}\, x_3 + a_{34}\, x_4$$

$$x'_4 = a_{41}\, x_1 + a_{42}\, x_2 \ + a_{43}\, x_3 + a_{44}\, x_4$$

Ovviamente se si moltiplica la matrice A per un fattore $\rho \neq 0$ diverso da zero si ottiene una matrice A' che induce la stessa funzione indotta su $\mathbb{P}$ dalla matrice A . La funzione ω_A indotta da A è detta ***omografia reale*** ed essa è un *isomorfismo* dello spazio proiettivo in quanto essa è biettiva e trasforma con la sua inversa rette in rette e piani in piani.

Nel gruppo GL(4 , R) si considerino ora tutte le matrici A del seguente tipo :

$$A= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0$$

Denotiamo con $\mathbb{A}(4 , R)$ l'inisieme di tutte le matrici del tipo sopra esposto. L'insieme $\mathbb{A}(4 , R)$ è anch'esso un gruppo detto ***gruppo affine reale*** . Le applicazioni che le matrici A di $\mathbb{A}(4 , R)$ inducono nello spazio proiettivo sono quindi di questo tipo

$$x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4$$

$$x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4$$

$$x'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4$$

$$x'_4 = x_4$$

e sono chiamate ***affinità reali.*** Ogni affinità reale è un isomorfismo che trasforma punti reali in punti reali, punti immaginari in punti immaginari , punti propri in punti propri e punti impropri in punti impropri.

Noi riterremo che sullo spazio $\mathbb{P}$ agiscano tali affinità e le proprietà delle figure dello spazio *invarianti* rispetto a tali trasformazioni saranno chiamate *proprietà affini.*

Sia Q una quadrica reale non degenere rappresentata in un riferimento reale da :

$$Xt\, A\, X = 0$$

Sia $X' = MX$ un'affinità dello spazio . Da $X' = MX$ segue , essendo $\det M \neq 0$,
$X = M^{-1} X'$ e quindi $X_t = X'_t (M^{-1})_t$

Si ha :

$$Xt\, A\, X = X'_t (M^{-1})_t\, A\, M^{-1} X' = 0$$

e quindi la quadrica Q viene allora trasformata nella quadrica Q' rappresentata da :

$$X'_t A'X' = 0$$

avendo posto $A' = (M^{-1})_t A M^{-1}$.
La quadrica Q' trasformata della quadrica Q ha quindi una matrice A' il cui determinante ha lo **stesso segno** del determinante di A in quanto è :

$$\det A' = (\det M^{-1})^2 \det A$$

Il segno del determinante di A ha quindi un significato geometrico essendo invariante per affinità.

7. *Quadriche reali.*

Nel presente numero Q rappresenterà una quadrica reale e cioè rappresentabile con un'equazione

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

i cui coefficienti a_{ij} sono numeri reali. Supporremo che la quadrica Q sia dotata di punti reali.
Sia P un punto **semplice e reale** della quadrica Q e sia π_P il piano tangente in P . Tale piano è al pari di P reale ed interseca quindi Q in una conica γ reale. Tale conica γ , come abbiamo già osservato, è degenere e quindi sono possibili tre eventualità :

a) γ è doppiamente degenere e cioè è una sola retta reale per P .
b) γ è semplicemente degenere ed è costituita da una coppia di rette reali per P.
c) γ è semplicemente degenere e è costituita da una coppia di rette complesse e coniugate per P.

Quando si verifica la circostanza a) il punto P è detto ***parabolico.***
Quando si verifica la circostanza b) il punto P è detto ***iperbolico.***
Quando si verifica la circostanza c) il punto P è detto ***ellittico.***

Proveremo ora che le uniche quadriche che posseggono punti parabolici sono i coni ed i cilindri mentre le quadriche non degeneri hanno soltanto punti iperbolici o ellittici.

Riassumendo :

quando un punto P è **parabolico** c'è una **sola** retta passante per P e contenuta nella quadrica.

quando un punto P **non è parabolico** ci sono **due** rette distinte per P contenute nella quadrica.

Possiamo provare ora la seguente :

Proposizione 7.1 *Sia Q una quadrica reale dotata di punti reali e non riducibile. Se Q possiede un punto parabolico ogni altro suo punto semplice e reale è parabolico e Q possiede altresì un punto doppio V e così Q è un cono o un cilindro a seconda che V sia proporio o improprio.*

Dimostrazione. Sia P un punto reale semplice e **parabolico** di Q .Esiste quindi una sola retta per P ,sia t , passante per P e contenuta in Q. La retta t è intersezione di Q col piano tangente π_P nel punto P. Sia P' un punto reale e semplice di Q e non appartenente al piano π_P . Proviamo che anche il punto P' è parabolico. Se P' fosse non parabolico per P' passerebbero due rette distinte r ed r' contenute in Q. Tali rette intersecherebbero il piano π_P in due punti distinti della retta t . Il piano determinato dalle rette r ed r' avrebbe quindi in comune con la quadrica Q le tre rette r, r' e t e sarebbe quindi contenuto in Q che invece per ipotesi non è riducibile.
Pertanto anche P' è parabolico e quindi per esso passa una sola retta t' contenuta in Q. Il piano tangente $\pi_{P'}$ nel punto P' interseca quindi Q nella sola retta t' . Ovviamente π_P non contiene t' e $\pi_{P'}$ non contiene t . Sia V il punto della retta t in cui la retta t' interseca il piano π_P
Ovviamente poiché π_p non contiene t' e $\pi_{p'}$ non contiene t i punti di t – { V } sono tutti parabolici ed i punti di t' – { V } sono tutti parabolici. Sia α il piano determinato dalle rette t e t' e sia M un punto reale e semplice della quadrica fuori da tale piano . Ovviamente poiché M non appartiene alla retta t esso non sta sul piano π_P e quindi per ciò che precede esso è parabolico. La retta m per M contenuta in Q interseca il piano α necessariamente nel punto V in quanto , come osservato , i punti di t – { V } e di t' – { V } sono parabolici. Quindi per il punto V passano tre rette distinte (t , t' , m) contenute in Q e ciò mostra che esso è doppio. Si ha quindi l'asserto.

Osserviamo esplicitamente quanto segue :

Se Q è un cono reale allora esso ha un unico punto doppio V che è proprio. Per tale ragione la conica impropria del cono è **non degenere** in quanto se tale conica contenesse una retta r il piano congiungente V ed r sarebbe contenuto nella quadrica.

Se invece Q è un cilindro reale il suo unico punto doppio è improprio ed esso è quindi doppio anche per la conica impropria Γ che è così **degenere**. Se Γ si riduce ad una sola retta il cilindro è detto ***parabolico*** .Se Γ è unione di due rette reali e distinte il cilindro è detto ***iperbolico***. Se Γ è unione di due rette immaginarie coniugate il cilindro è detto ***ellittico***.

8. Quadriche reali non degeneri.

In questo numero considereremo le quadriche ***reali non degeneri*** e che siano dotate di punti reali.

I punti reali di una quadrica reale **non degenere** sono tutti semplici e non parabolici e risultano quindi **iperbolici** o **ellittici** . Noi ora mostreremo che essi sono tutti iperbolici o tutti ellittici.

Sussiste infatti la seguente :

Proposizione 8.1 *Sia Q una quadrica reale non degenere e dotata di punti reali. Se la quadrica Q ha un punto reale iperbolico ogni suo altro punto reale è iperbolico.*

Dimostrazione. Sia P un punto reale ed iperbolico della quadrica Q e siano r ed r' le due rette reali passanti per P e contenute in Q . E' chiaro che gli altri punti reali di r ed r' sono iperbolici. Sia quindi P' un punto reale della quadrica Q fuori dal piano tangente π_P . Il piano che unisce P' ed r è reale ed interseca quindi Q in una conica reale . Tale conica è degenere ed è l'unione della retta r e di un' altra retta **reale** t per P' . Analogamente il piano che congiunge r' con P' è reale ed interseca quindi Q in una conica reale. Tale conica è degenere ed è l'unione della retta r' e di un' altra retta **reale** t' per P'. Abbiamo provato così che P' è iperbolico.

Si può provare che sussiste la seguente proposizione di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 8.2 *Sia Q una quadrica reale non degenere e dotata di punti reali rappresentata da*

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

La quadrica Q ha i punti reali iperbolici se e solo se risulta

$$det\ A > 0.$$

Dalla proposizione 8.2 segue ovviamente la seguente:

Proposizione 8.3 *Sia Q una quadrica reale non degenere e dotata di punti reali rappresentata da*

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i\, x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

La quadrica Q ha i punti reali ellittici se e solo se risulta

$$det\ A < 0\ .$$

Le proposizioni 4.7 , 8.1 ed 8.2 confermano che il **segno** del determinante della matrice della quadrica ha un ***significato geometrico.***

Sia Q una quadrica reale non degenere . I punti impropri della quadrica sono i punti che la quadrica Q ha in comune con il piano improprio. Poiché il piano improprio interseca Q in una conica, tali punti sono quindi i punti di una conica , detta ***conica impropria*** e che indicheremo col simbolo γ_∞ .

Poiché la quadrica è reale ed il piano improprio è un piano reale la conica γ_∞ è **reale** e quindi per tale conica si hanno le seguenti possibilità :

γ_∞ è **degenere** $\begin{cases} \text{in due rette reali e distinte} \\ \text{in due rette immaginarie e coniugate} \end{cases}$

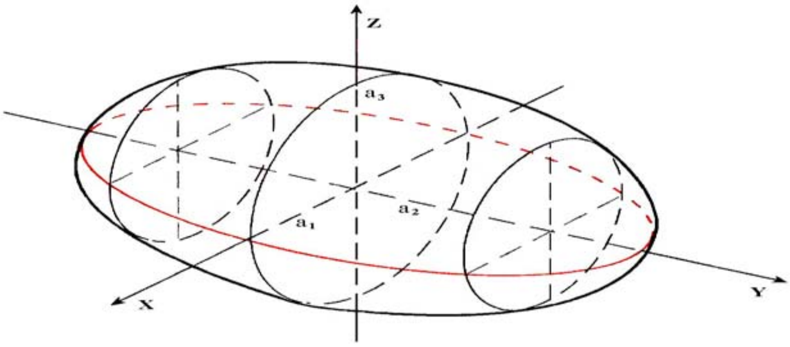
γ_∞ è **non degenere** e dotata di *punti reali*

γ_∞ è **non degenere** e priva di punti reali (*totalmente immaginaria*).

Quando la conica γ_∞ è *degenere* a quadrica Q è detta ***paraboloide***.

Quando la conica γ_∞ è *non degenere e dotata di punti reali* la quadrica Q è detta ***iperboloide*** .

Quando la conica γ_∞ è *non degenere e totalmente immaginaria* la quadrica Q è detta ***ellissoide.***

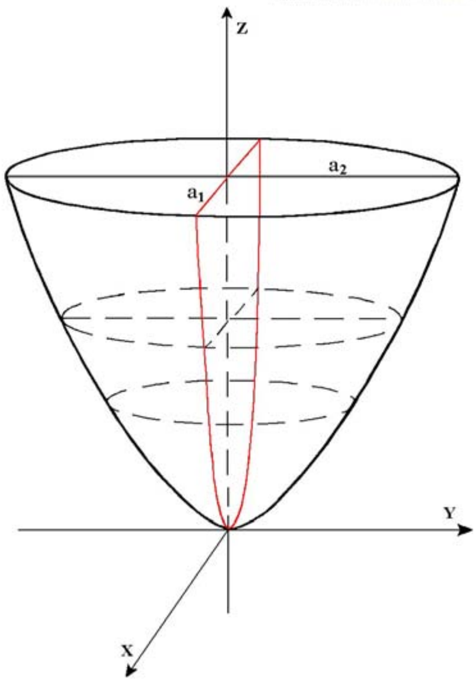


L' essere per una quadrica un paraboloide , un iperboloide o un ellissoide è una proprietà *invariante* per affinità e per tale ragione la suddivisione delle quadriche reali e non degeneri in queste tre famiglie viene chiamata la ***classificazione affine*** delle quadriche reali.

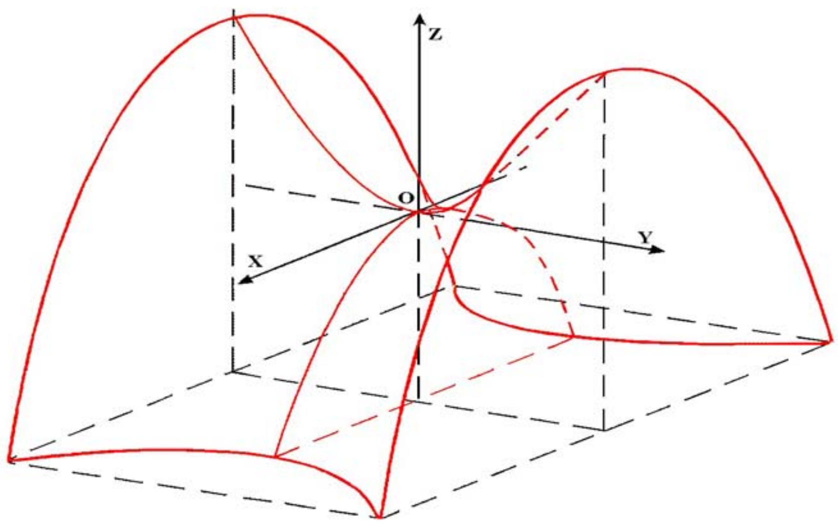
Una retta reale contenuta nella quadrica Q ha un punto improprio reale e tale punto sarà un punto reale della conica impropria. Da ciò segue che i punti reali di un ellissoide sono necessariamente **ellittici.**

Ci sono invece due tipi di **paraboloidi :**

(paraboloide a punti ellittici)

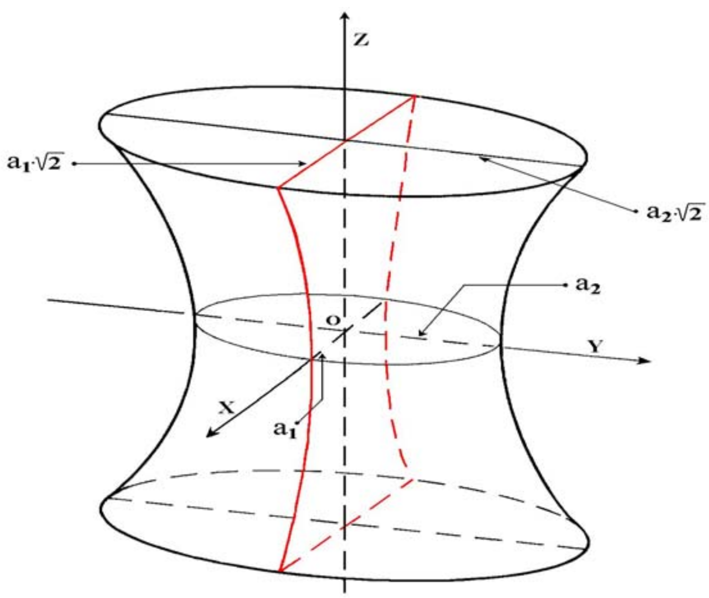


(paraboloide a punti iperbolici)

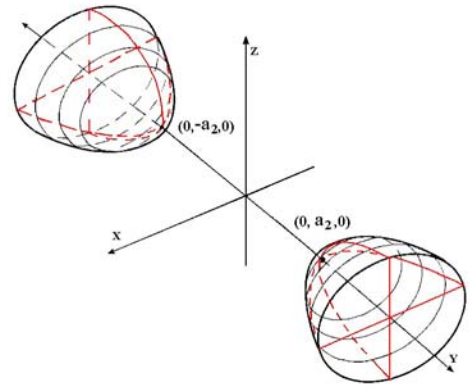


E ci sono due tipi di **iperboloidi** :

iperboloide a punti iperbolici (*iperboloide ad una falda*)



Iperboloide a punti ellittici (*iperboloilde a due falde*).



Le quadriche **non degeneri** contengono rette , rette reali se i punti sono iperbolici e rette immaginarie se i punti sono ellittici. Vediamo come sono disposte tali rette sulla quadrica.

Consideriamo un punto P della quadrica e siano **r** ed **s** le due rette passanti per P e contenute nella quadrica Q . Indichiamo con π_P il piano tangente in P che contiene le due rette **r** ed **s** . Per ogni punto x di **r**-{ P } indichiamo con $\mathbf{s}_x$ l'altra retta per x contenuta nella quadrica. La retta **s** e tutte le rette $\mathbf{s}_x$ (al variare di x) sono evidentemente a due a due sghembe e definiscono una *schiera* di rette che indicheremo con Σ .

Analogamente per ogni punto y di **s**-{ P } sia $\mathbf{r}_y$ l'ulteriore retta per y contenuta nella quadrica . La retta **r** e le rette $\mathbf{r}_y$ (al variare di y) definiscono l'altra *schiera* di rette che sarà indicata con Σ' . Ogni retta contenuta nella quadrica diversa da **r** ed **s** interseca il piano π_P in un punto di $\mathbf{r} \cup \mathbf{s}$ differente da P e quindi appartiene ad una delle due schiere.

Sia $\mathbf{s}_x$ una retta di Σ ed $\mathbf{r}_y$ una retta di Σ' . Il piano tangente π_x in x che contiene le rette **r** ed $\mathbf{s}_x$ non contiene la retta $\mathbf{r}_y$. La retta $\mathbf{r}_y$ interseca quindi il piano π_x in punto che è necessariamente un punto si $\mathbf{s}_x$ essendo **r** ed $\mathbf{r}_y$ sghembe tra loro.

Abbiamo così mostrato che tutte le rette di una quadrica non degenere si ripartiscono in due famiglie di rette, dette *schiere* di rette, e tali schiere hanno la proprietà che *rette della stessa schiera risultano sghembe tra loro mentre rette di schiere diverse sono incidenti tra loro.*

9. Polarità definita da una quadrica non degenere.

Sia Q una quadrica **non degenere** rappresentata in un riferimento reale assegnato dall'equazione :

$$Q \ : \qquad \sum_{i,j} a_{ij} x_i \, x_j = 0 \qquad (\, a_{ij} = a_{ji} \,)$$

Poiché la quadrica è non degenere la sua matrice $A(a_{ij})$ è non degenere e quindi è $\det A \neq 0$.

Sia $P(y_1, y_2, y_3, y_4)$ un punto dello spazio . L' equazione

$$(\mathbf{a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3 + a_{14}\, y_4})\, \mathbf{x_1} + (\mathbf{a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3 + a_{24}\, y_4})\, \mathbf{x_2} +$$
$$(\mathbf{a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3 + a_{34}\, y_4})\, \mathbf{x_3} + (\mathbf{a_{41}\, y_1 + a_{42}\, y_2 + a_{43}\, y_3 + a_{44}\, y_4})\, \mathbf{x_4} = 0$$

(costruita utilizzando le coordinate (y_1, y_2, y_3, y_4) *di P)* è una equazione non identica (***altrimenti P sarebbe doppio e la quadrica sarebbe degenere***) e quindi rappresenta un piano dello spazio. Tale piano è chiamato ***piano polare*** del punto P e sarà denotata col simbolo π_p .

Associando al punto P il suo piano polare si realizza una applicazione $\wp$ tra i punti dello spazio ed i piani dello spazio. Tale applicazione

$$\wp : \quad P \ \rightarrow \ \pi_p$$

è chiamata ***polarità*** *indotta dalla quadrica non degenere Q* . Il punto P è chiamato il ***polo*** del piano π_p .

Le proposizioni che seguono illustrano alcune importanti proprietà della polarità $\wp$ indotta dalla quadrica Q .

Proposizione 9.1 *La polarità è un'applicazione biettiva.*

Dimostrazione. Sia π un piano dello spazio rappresentato da :

$$(9.1) \qquad \pi : \qquad ax + by + cz + dt = 0$$

Un punto $P(y_1, y_2, y_3, y_4)$ dello spazio ha per piano polare il piano π se risulta $\pi_P = \pi$ cioè se l'equazione

$(\mathbf{a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 \;+ a_{13}\, y_3 + a_{14}\, y_4}\,)\; \mathbf{x_1} + (\mathbf{a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 \;+ a_{23}\, y_3 + a_{24}\, y_4}\;)\; \mathbf{x_2} \;+$
$(\mathbf{a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 \;+ a_{33}\, y_3 + a_{34}\, y_4}\,)\; \mathbf{x_3} + (\mathbf{a_{41}\, y_1 + a_{42}\, y_2 \;+ a_{43}\, y_3 + a_{44}\, y_4}\;)\; \mathbf{x_4} \;= 0$

è l'equazione del piano π . Si ha quindi che $P(y_1, y_2, y_3, y_4)$ è polo di π se e solo se risulta :

$$(**)\qquad \begin{cases} a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 \;+\; a_{13}\, y_3 + \; a_{14}\, y_4 \; = a \\ a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 \;+\; a_{23}\, y_3 + \; a_{24}\, y_4 = b \\ a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 \;+\; a_{33}\, y_3 + \; a_{34}\, y_4 = c \\ a_{41}\, y_1 + a_{42}\, y_2 \;+\; a_{43}\, y_3 + \; a_{44}\, y_4 = d \end{cases}$$

Tale sistema inteso nelle incognite (y_1, y_2, y_3, y_4) ha una sola soluzione (z_1, z_2, z_3, z_4) in quanto, essendo la quadrica non degenere, è $\det A \neq 0$.
Sostituendo alla quaterna (a, b, c, d) con la quaterna proporzionale $(\rho a, \rho b, \rho c, \rho d)$ con $\rho \neq 0$ si otterrà in corrispondenza la soluzione $(\rho z_1, \rho z_2, \rho z_3, \rho z_4)$.
Pertanto in corrispondenza a tutte le quaterne $(\rho z_1, \rho z_2, \rho z_3, \rho z_4)$. soluzioni di (**) si ha un **solo** punto P dello spazio avente per piano polare il piano π . La corrispondenza f è quindi biettiva come si voleva provare.

Proposizione 9.2 *Un punto P appartiene al suo piano polare se e solo se esso appartiene alla quadrica . In tal caso il suo piano polare coincide con il piano tangente in P.*

Dimostrazione . Se $P(y_1, y_2, y_3, y_4)$ è un punto della quadrica allora il suo piano polare che è rappresentata da :

$(\mathbf{a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 \;+ a_{13}\, y_3 + a_{14}\, y_4}\,)\; \mathbf{x_1} + (\mathbf{a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 \;+ a_{23}\, y_3 + a_{24}\, y_4}\;)\; \mathbf{x_2} \;+$
$(\mathbf{a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 \;+ a_{33}\, y_3 + a_{34}\, y_4}\,)\; \mathbf{x_3} + (\mathbf{a_{41}\, y_1 + a_{42}\, y_2 \;+ a_{43}\, y_3 + a_{44}\, y_4}\;)\; \mathbf{x_4} \;= 0$

coincide con il piano tangente nel punto P . In tal caso quindi P appartiene a tale piano in quanto è

$(\mathbf{a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 \;+ a_{13}\, y_3 + a_{14}\, y_4}\,)\; \mathbf{y_1} + (\mathbf{a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 \;+ a_{23}\, y_3 + a_{24}\, y_4}\;)\; \mathbf{y_2} \;+$
$(\mathbf{a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 \;+ a_{33}\, y_3 + a_{34}\, y_4}\,)\; \mathbf{y_3} + (\mathbf{a_{41}\, y_1 + a_{42}\, y_2 \;+ a_{43}\, y_3 + a_{44}\, y_4}\;)\; \mathbf{y_4} \;= 0$

essendo P un punto della quadrica.
Viceversa se $P(y_1, y_2, y_3, y_4)$ appartiene al suo piano polare si ha :

$$(\mathbf{a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + a_{13}\,y_3 + a_{14}\,y_4})\,\mathbf{y_1} + (\mathbf{a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + a_{23}\,y_3 + a_{24}\,y_4})\,\mathbf{y_2} +$$
$$(\mathbf{a_{31}\,y_1 + a_{32}\,y_2 + a_{33}\,y_3 + a_{34}\,y_4})\,\mathbf{y_3} + (\mathbf{a_{41}\,y_1 + a_{42}\,y_2 + a_{43}\,y_3 + a_{44}\,y_4})\,\mathbf{y_4} = 0$$

e questa prova che P è un punto della quadrica .

Abbiamo così provato che :

(9.3) $$\mathbf{P} \in \pi_P \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P} \in \mathbf{Q}$$

Una importante proprietà della polarità $\wp$ è espressa dal seguente :

Teorema di reciprocità. *Se $A(y_1 , y_2, y_3 , y_4)$ e $B(z_1 , z_2, z_3, z_4)$ sono due punti distinti dello spazio , si ha*

(9.4) $$B \in \pi_A \quad \Leftrightarrow \quad A \in \pi_B$$

Dimostrazione.

Il piano polare di A è :

$$(\mathbf{a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + a_{13}\,y_3 + a_{14}\,y_4})\,\mathbf{x_1} + (\mathbf{a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + a_{23}\,y_3 + a_{24}\,y_4})\,\mathbf{x_2} +$$
$$(\mathbf{a_{31}\,y_1 + a_{32}\,y_2 + a_{33}\,y_3 + a_{34}\,y_4})\,\mathbf{x_3} + (\mathbf{a_{41}\,y_1 + a_{42}\,y_2 + a_{43}\,y_3 + a_{44}\,y_4})\,\mathbf{x_4} = 0$$

che può scriversi sinteticamente , usando le notazioni introdotte al numero 1 , così :

$$f(\underline{\mathbf{y}} \;/\; \underline{\mathbf{x}}) = 0$$

Il piano polare di B è :

$$(\mathbf{a_{11}\,z_1 + a_{12}\,z_2 + a_{13}\,z_3 + a_{14}\,z_4})\,\mathbf{x_1} + (\mathbf{a_{21}\,z_1 + a_{22}\,z_2 + a_{23}\,z_3 + a_{24}\,z_4})\,\mathbf{x_2} +$$
$$(\mathbf{a_{31}\,z_1 + a_{32}\,z_2 + a_{33}\,z_3 + a_{34}\,z_4})\,\mathbf{x_3} + (\mathbf{a_{41}\,z_1 + a_{42}\,z_2 + a_{43}\,z_3 + a_{44}\,z_4})\,\mathbf{x_4} = 0$$

che può scriversi sinteticamente , usando le notazioni introdotte al numero 1 , così :

$$f(\underline{\mathbf{z}} \;/\; \underline{\mathbf{x}}) = 0$$

Abbiamo, sempre al numero 1 , già osservato che poiché la matrice A della quadrica è simmetrica si ha per ogni coppia di quaterne non nulle (y_1 , y_2, y_3 , y_4) e (z_1 , z_2, z_3, z_4)

(9.5) $$f(\underline{\mathbf{y}} \ / \ \underline{\mathbf{z}}) = f(\underline{\mathbf{z}} \ / \ \underline{\mathbf{y}})$$

Dalla (9.5) segue quindi

$$f(\underline{\mathbf{y}} \ / \ \underline{\mathbf{z}}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\underline{\mathbf{z}} \ / \ \underline{\mathbf{y}}) = 0$$

e questa prova l'asserto.

Proposizione 9.3 *I piani polari dei punti di una retta r formano un fascio di asse una retta r' che dicesi coniugata della retta r. Le rette r ed r' sono ognuna il luogo dei poli dei piani per l'altra.*

Dimostrazione. Siano A e B due punti distinti della retta r . I piani polari π_A e π_B sono distinti e quindi si intersecano in una retta r' . Siano C e D due punti distinti della retta r'. Poiché C e D appartengono ad $r' = \pi_A \cap \pi_B$ per il teorema di reciprocità A e B appartengono ai piani polari π_A e π_B . Si ha quindi $r = \pi_C \cap \pi_D$ e l' asserto segue tenendo conto del teorema di reciprocità.

Dalla proposizione ora provata segue che :

Proposizione 9.4 *I piani polari di tre punti A , B , C non allineati formano una* ***stella*** *con centro il* ***polo*** *del piano determinato dai punti A , B , C .*

Possiamo ora fornire una ***descrizione geometrica*** del piano polare di un punto p.

Se il punto P è un punto della quadrica il piano polare di P è il piano *tangente* in P . Se il punto P non appartiene alla quadrica il piano polare non passa per P ed è secante la quadrica . Detta Γ la conica non degenere comune a Q e π_p si ha quanto segue. Per ogni punto y di Γ possiamo considerare il piano tangente π_y. Poiché y appartiene a Γ e quindi a π_p , per il teorema di reciprocità, π_y passa per p e quindi la retta yp è tangente .

Viceversa sia t una retta per P e tangente a Q nel punto y. Poiché P sta sul piano polare di y , per reciprocità il punto y sta sul piano polare di P ed è quindi un punto di Γ .

La conica Γ è quindi il luogo dei punti di contatto delle rette tangenti che si possono condurre da p a Q ed il piano π_p è il piano che contiene tali punti.

10. Centro e piani diametrali.

In questo numero la quadrica Q è non degenere e reale ed è rappresentata nel riferimento reale ortogonale monometrico scelto da :

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i \, x_j = 0 \qquad (\, a_{ij} = a_{ji} \,)$$

Si chiama **centro** della quadrica il polo del piano improprio. Se la quadrica è un paraboloide il piano improprio è tangente ed allora il centro è un punto improprio e coincide col punto di contatto che il piano improprio ha con Q. Se la quadrica è un ellissoide o un iperboloide allora il piano improprio è secante Q e quindi non contiene il suo polo. Nel caso dell'ellissoide e dell'iperboloide il centro è quindi un punto **proprio.**

Per determinare le coordinate del centro si può far uso del teorema di reciprocità e della proposizione 9.4. Pertanto i piani polari dei punti impropri e non allineati (1,0,0,0) (0,1,0,0) (0,0,1,0) formano una stella di piani con centro il polo del piano improprio.

Pertanto le coordinate del centro si ottengono attraverso la soluzione del seguente sistema omogeneo:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 = 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 = 0 \end{cases}$$

che può ottenersi attraverso il calcolo dei minori d'ordine tre e presi a segni alterni della matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

dei suoi coefficienti. Ne segue che se $\det A_{44} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 0$ il centro è improprio e quindi si tratta di un paraboloide.

Se $\det A_{44} \neq 0$ allora la quadrica è un ellissoide o un iperboloide.

Si consideri nello spazio una retta reale **r** e sia δ il suo punto improprio che supponiamo non appartenga alla quadrica. Il piano polare $\pi\delta$ di tale punto è reale ed è chiamato ***piano diametrale*** coniugato alla direzione δ . Quando il piano polare $\pi\delta$ risulta ortogonale alla retta **r** esso è detto ***piano assiale***.

Per la ricerca degli eventuali piani assiali procediamo al seguente modo. Consideriamo un punto reale ed improprio $(\lambda, \mu, \nu, 0)$. Il piano polare di tale punto è :

$$(\mathbf{a_{11}}\lambda + \mathbf{a_{12}}\mu + \mathbf{a_{13}}\nu)\,\mathbf{x_1} + (\mathbf{a_{21}}\lambda + \mathbf{a_{22}}\mu + \mathbf{a_{23}}\nu)\,\mathbf{x_2} + (\mathbf{a_{31}}\lambda + \mathbf{a_{32}}\mu + \mathbf{a_{33}}\nu)\,\mathbf{x_3} +$$
$$+ (\mathbf{a_{41}}\lambda + \mathbf{a_{42}}\mu + \mathbf{a_{43}}\nu)\,\mathbf{x_4} = 0$$

Tale piano è ortogonale alla direzione considerata se esiste $\rho \neq 0$ per cui risulti :

$$\begin{aligned} \mathbf{a_{11}}\lambda + \mathbf{a_{12}}\mu + \mathbf{a_{13}}\nu &= \rho\lambda \\ \mathbf{a_{21}}\lambda + \mathbf{a_{22}}\mu + \mathbf{a_{23}}\nu &= \rho\mu \\ \mathbf{a_{31}}\lambda + \mathbf{a_{32}}\mu + \mathbf{a_{33}}\nu &= \rho\nu \end{aligned}$$

o equivalentemente :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a_{11}} - \rho)\lambda + \mathbf{a_{12}}\mu + \mathbf{a_{13}}\nu &= 0 \\ \mathbf{a_{21}}\lambda + (\mathbf{a_{22}} - \rho)\mu + \mathbf{a_{23}}\nu &= 0 \\ \mathbf{a_{31}}\lambda + \mathbf{a_{32}}\mu + (\mathbf{a_{33}} - \rho)\nu &= 0 \end{aligned}$$

questo sistema ha soluzioni non nulle se risulta :

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{pmatrix} = 0$$

Poiché la matrice $A_{44} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ è simmetrica e reale il polinomio caratteristico det (A_{44} - Iρ) = 0 ha tre soluzioni reali, determinate le quali , si possono poi determinare le direzioni (λ , μ , ν , 0) cercate.

Perché tanta attenzione al centro ed ai piani assiali ? Vediamo .

Il centro della quadrica quando esso è un punto proprio risulta **centro di simmetria** per la quadrica.

Infatti supposto che il centro sia proprio disponiamo il riferimento in modo che il centro coincida con l'origine del riferimento. In tal modo il centro ha coordinate (0,0,0,1) e quindi il sistema

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \quad + a_{13}\,x_3 \; + a_{14}\,x_4 \; = 0 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \quad + a_{23}\,x_3 \; + a_{24}\,x_4 \; = 0 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 \quad + a_{33}\,x_3 \; + a_{34}\,x_4 \; = 0 \end{cases}$$

che fornisce le coordinate del centro deve essere soddisfatto dalla quaterna (0,0,0,1) .Ciò comporta allora $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$ e quindi nel riferimento scelto l'equazione della quadrica è :

$$a_{11}x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + a_{44}\,t^2 + 2\,a_{12}\,xy + 2a_{13}\,xz + 2\,a_{23}\,yz = 0.$$

Tale equazione mostra che se un punto proprio di coordinate non omogenee (x , y , z) è punto della quadrica anche il suo simmetrico (-x . –y , -z) rispetto all'origine è un punto della quadrica.

Sia δ una direzione reale e sia π il piano assiale coniugato a tale direzione. Disponiamo il riferimento in modo che l'asse z abbia la direzione δ ed il piano xy sia il piano π .Con tale scelta le coordinate di δ sono (0 , 0 , 1 , 0) e così π che è il suo piano polare è:

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}\,t = 0$$

tale equazione deve essere la rappresentazione del piano xy che ha equazione z = 0 e quindi si ha :

$$a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0$$

Nel riferimento scelto l'equazione della quadrica è allora (in coordinate non omogenee) :

$$a_{11}x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + a_{44} + 2\,a_{12}\,xy + 2\,a_{14}\,x + 2\,a_{24}y = 0.$$

Tale equazione mostra che se un punto proprio di coordinate (x, y, z) è un punto della quadrica anche il suo simmetrico (nella simmetria ortogonale di asse il piano π) che ha coordinate (x , y , -z) è anch'esso un punto della quadrica.

La nostra conclusione è che il centro se è un punto proprio è centro di simmetria ed i piani assiali sono piani di simmetria per la quadrica.

Concludiamo con qualche semplice esercizio.

Si classifichino le quadriche rappresentate (in coordinate non omogenee) da :

(a) $\quad Q \; : \; x^2 - 4y^2 + 2x - 4z = 0$

(b) $\quad \Omega \; : \; -2y^2 + 2xy - 4xz + 4yz = 0$

***Svolgimento* (a)** : l'equazione di Q in coordinate omogenee è $x^2 - 4y^2 + 2xt - 4zt = 0$ e la matrice della quadrica Q è :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sii ha det A = 16 e quindi la quadrica è non degenere. La sua conica impropria è rappresentata da:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 + 2xt - 4zt = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

che è degenere ed è costituita dalle due seguenti rette reali e distinte :

$$r : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ t = 0 \end{cases} \qquad\qquad s : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

si conclude che la quadrica Q è un **paraboloide a punti iperbolici.**

***Svolgimento* (b)** : l'equazione di Ω è $-2y^2 + 2xy - 4xz + 4yz = 0$
e la matrice della quadrica Ω è :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sii ha det A = 0 e quindi la quadrica è degenere. La quadrica possiede quindi punti doppi . Il rango della matrice A è due in quanto risulta

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Pertanto i punti doppi della quadrica Q sono i punti della retta rappresentata da :

$$r : \begin{cases} y - 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

La quadrica è quindi unione di due piani passanti per la retta r . La retta s rappresentata da :

$$s : \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

interseca la quadrica nei due punti A = (1 , 0 , 0) e B = (1 , 1 , 0) . I piani che uniscono r con A e B forniscono i due piani che compongono la nostra quadrica. Il piano $y-2z = 0$ manifestamente contiene r ed A . Determiniamo il piano per r e B.
Un qualunque piano per r è del tipo $(y -2z) + k (x -2y + 2z) = 0$ (al variare del parametro k)
Tale piano passa per il punto B se è k = 1. Pertanto l'altro piano è il piano $x - y = 0$.
Per controllare la correttezza del risultato trovato basta osservare che è :

$$-2y^2 + 2xy - 4xz + 4yz = 2(y -2z)(x - y).$$

Capitolo VII

Note di topologia generale

1. Spazi topologici.

Sia S un insieme non vuoto . Una famiglia $\mathcal{A}$ di parti di S i cui elementi sono chiamati ***aperti*** è una ***topologia*** per S se essa verifica le seguenti proprietà :

1. $\Phi \in \mathcal{A}$, $S \in \mathcal{A}$

2. **$A \in \mathcal{A}$ ed $A' \in \mathcal{A}$ allora $A \cap A' \in \mathcal{A}$**

3. **Per ogni famiglia $\{ A_i \}_{i \in I}$ di aperti si ha** $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$

Si richiede quindi che :

il vuoto ed S siano aperti , che l'intersezione di un numero finito di aperti sia ancora un aperto e che l'unione di un numero qualsiasi di aperti sia ancora un aperto.

La famiglia $\mathcal{A}$ i cui unici aperti siano il vuoto ed S è una topologia detta *topologia banale.*
La famiglia $\mathcal{A}$ i cui aperti siano tutti i sottoinsiemi di S è una topologia detta *topologia discreta*.

A parte questi casi estremi , non sempre è facile la realizzazione di una famiglia $\mathcal{A}$ di parti di S con le proprietà ora richieste per cui è utile la seguente:

Proposizione 1.1 *Sia S un insieme e sia $\mathcal{B}$ una famiglia di parti di S che abbia le seguenti proprietà :*
a) *$\mathcal{B}$ è un ricoprimento di S*
b) *l'intersezione non vuota di due elementi di $\mathcal{B}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.*

La famiglia $\mathcal{A}$ di parti di S contenente il vuoto ed i sottoinsiemi che si possono ottenere attraverso tutte le possibili unioni degli elementi di $\mathcal{B}$ è allora una topologia per S.

Dimostrazione. Per semplicità di esposizione precorrendo il risultato chiamiamo aperti gli elementi di $\mathcal{A}$.

Poiché $\mathcal{B}$ è un ricoprimento allora è $S = \bigcup_{X \in B} X$ e quindi S è un aperto . Siano A ed A' due aperti , elementi di $\mathcal{A}$. Per definizione esistono due sottofamiglie F ed F' di elementi di $\mathcal{B}$ per cui risulta :

$$A = \bigcup_{X \in F} X \qquad\qquad A' = \bigcup_{Y \in F'} Y$$

Si ha allora .

$$A \cap A' = (\bigcup_{X \in F} X) \cap (\bigcup_{Y \in F'} Y) = \bigcup_{X, Y} (X \cap Y)$$

Per la proprietà b) anche $X \cap Y$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$ e così $A \cap A'$ risultando unione di elementi di $\mathcal{B}$ appartiene ad $\mathcal{A}$ e quindi è un aperto.
E' evidente infine che per ogni famiglia $\{ A_i \}_{i \in I}$ di aperti si ha $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ in quanto essendo ogni A_i una unione di elementi di $\mathcal{B}$ anche $\bigcup_{i \in I} A_i$ risulta unione di elementi di $\mathcal{B}$. Poiché anche il vuoto fa parte della famiglia $\mathcal{A}$ allora tale famiglia è , come si voleva provare , una topologia per S.

La situazione favorevole descritta dalla proposizione ora provata si ha quando l'insieme S è munito di una ***metrica*** , nozione di cui ora ci occupiamo.
Sia S un insieme non vuoto . Una ***metrica*** in S è una funzione

$$d : S \times S \rightarrow [0, +\infty[$$

verificante le seguenti proprietà :

α. **d (x, y) = 0 se e solo se è x = y** (*proprietà di coincidenza*)
β. **d (x, y) = d (y, x)** (*proprietà di simmetria*)
γ. **d (x, y) + d (y, z) ≥ d (x, z)** (*proprietà triangolare*)

Chiameremo il numero reale non negativo d (x, y) ***distanza di x da y***. Se d è una metrica in S la coppia (S , d) è chiamato ***spazio metrico***, ed S è detto il ***sostegno*** dello spazio metrico.

Se (S , d) è uno spazio metrico allora utilizzando la metrica d possiamo costruire per S una topologia $\mathcal{A}$ e tale topologia si dice *indotta dalla metrica d* .
Vediamo come si procede.

Sia quindi (S , d) uno spazio metrico. Siano y un elemento di S ed r un numero reale positivo. Si chiama *cerchio aperto di centro y e raggio r* il seguente sottoinsieme $C(y , r)$ di S :

$$C(y , r) = \{ x \in S : d (x, y) < r \}$$

Poiché $d(y , y) = 0$ allora l'insieme $C(y , r)$ non è vuoto in quanto $y \in C(y , r)$. Sia ora $\mathfrak{B}$ la famiglia di tutti i cerchi aperti $C(y , r)$ al variare di y in S ed r tra i numeri reali positivi. Proveremo ora che la famiglia $\mathfrak{B}$ verifica le proprietà a) e b) della proposizione 1.1 ed è quindi in grado di generare una topologia. Per fare ciò è utile la seguente

Proposizione 1.2. *Sia $C = C(y , r)$ un cerchio aperto e sia z un suo punto . Esiste un cerchio aperto $C' = C(z , r')$ di centro z contenuto nel cerchio C.*

Dimostrazione . Poiché z è un punto del cerchio $C= C(y , r)$ si ha

$$d (z , y) < r.$$

Sia r' un numero positivo tale che risulti

$$r' < r - d (z , y) \tag{*}$$

Proviamo che il cerchio aperto C' con centro in z e raggio r' è contenuto nel cerchio C. Sia quindi x un punto di C' e proviamo che è x appartiene a C. Si ha infatti **,** tenendo conto di (*) e della proprietà triangolare ,

$$d (x, y) \leq d (x, z) + d (z , y) < r' + d (z , y) < r$$

Dalla proposizione ora provata segue che :

Proposizione 1.3 *L'intersezione di due cerchi aperti se è non vuota è unione di cerchi aperti.*

Dimostrazione. Siano C e C' due cerchi aperti ad intersezione non vuota. Sia x un punto di $C \cap C'$. Per la proposizione 1.2 esiste un cerchio aperto I di centro x e raggio r contenuto in C ed un cerchio aperto I' di centro x e raggio r' contenuto in C'. Supposto ad esempio $r \leq r'$ si ha $I \subseteq I'$ e quindi I contiene x ed è contenuto in $C \cap C'$. L' asserto è così provato.

Abbiamo cosi provato che la famiglia $\mathfrak{B}$ di tutti i cerchi aperti dello spazio metrico (S , d) verifica le proprietà a) e b) della proposizione 1.1.

Pertanto la famiglia $\mathcal{Q}_d$ di parti di S costituita dal vuoto e da tutti i sottoinsiemi di S che siano ciascuno una unione di cerchi aperti costituisce una topologia per S.
Tale topologia "generata" dai cerchi aperti è detta *topologia indotta dalla metrica.* Tenendo conto della proposizione 1.2 si ha facilmente la seguente caratterizzazione degli aperti di tale topologia $\mathcal{Q}_d$.
Un sottoinsieme A di S è un aperto di tale topologia se e solo se esso ha la seguente proprietà :

(**) *Per ogni y di A esiste un cerchio aperto di centro y contenuto in A.*

Analizzeremo in seguito molte proprietà importanti di tale topologia $\mathcal{Q}_\mathbf{d}$.

E' evidente che se (S , d) è uno spazio metrico allora ogni suo sottoinsieme X è a sua volta uno spazio metrico quando lo si munisca della stessa metrica d pensata ristretta ad esso .

Un esempio importante di spazio metrico è il seguente .

Sia n un intero positivo e sia R^n lo spazio vettoriale delle n-ple ordinate di numeri reali. Come abbiamo gia provato al n.8 cap.VII (*fondamenti di geometria piana*) si può definire nello spazio R^n una distanza al seguente modo .

Siano $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ed $\underline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ due elementi di R^n . Si definisce distanza *euclidea* di $\underline{\mathbf{x}}$ da $\underline{\mathbf{y}}$ il seguente numero reale

(+) $$d(\underline{\mathbf{x}} , \underline{\mathbf{y}}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + .. + (x_n - y_n)^2}$$

Quando si pensa R^n munito di tale distanza euclidea, R^n è uno spazio metrico e la topologia indotta da tale metrica euclidea è chiamata la ***topologia naturale di*** $\boldsymbol{R^n}$

Quando è n = 1 siamo nel campo R dei numeri reali e la (+) diviene

$$d (x, y) = | x - y |$$

e così il cerchio aperto di centro y e raggio r è :

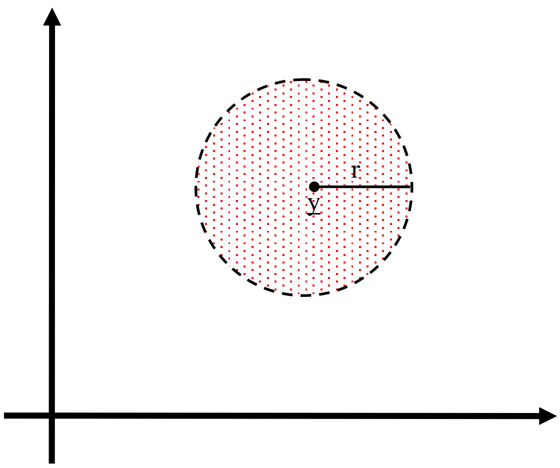
$C (y , r) = \{ x \in R \ : d (x, y) < r \} = \{ x \in R : \ | x - y | < r \} =$

$= \{ x \in R \ : \ -r < x - y < r \} = \{ x \in R \ : \ y - r < x < y + r \}$

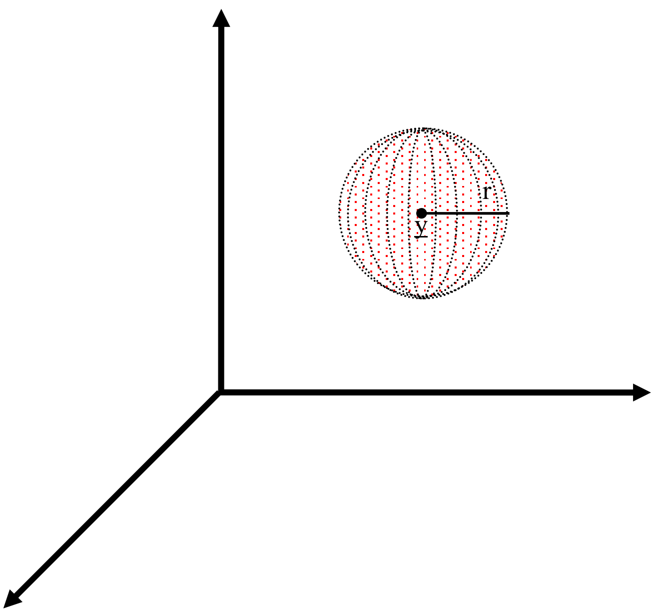
l'intervallo aperto

$$] y-r \ , \ y+r [.$$

Se $n = 2$ ed è $\underline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ ed r è il raggio allora il cerchio aperto di centro $\underline{\mathbf{y}}$ e raggio r è , usando una rappresentazione piana di R^2 attraverso l'uso di un riferimento monometrico cartesiano, è davvero il cerchio racchiuso dalla circonferenza di centro $\underline{\mathbf{y}}$ e raggio r .



Se n=3 ed è $\underline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ ed r è il raggio allora il cerchio aperto di centro $\underline{\mathbf{y}}$ e raggio r è , usando una rappresentazione di R^3 attraverso l'uso di un riferimento monometrico cartesiano, è la sfera aperta con centro in $\underline{\mathbf{y}}$ e raggio r.



2. Chiusi di uno spazio topologico.

Sia $(S, \mathcal{A})$ uno spazio topologico . Come detto gli aperti elementi di $\mathcal{A}$ verificano le seguenti proprietà :

1. $\Phi \in \mathcal{A}$, $S \in \mathcal{A}$

2. $A \in \mathcal{A}$ **ed** $A' \in \mathcal{A}$ **allora** $A \cap A' \in \mathcal{A}$

3. **Per ogni famiglia** $\{ A_i \}_{i \in I}$ **di aperti si ha** $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$

I complementari degli aperti vengono chiamati ***chiusi*** . Denotata con $\mathcal{C}$ la famiglia dei chiusi di S si ha subito che la famiglia $\mathcal{C}$ ha le seguenti proprietà :

I. $\Phi \in \mathcal{C}$, $S \in \mathcal{C}$

II. $C \in \mathcal{C}$ **ed** $C' \in \mathcal{C}$ **allora** $C \cup C' \in \mathcal{C}$

III. **Per ogni famiglia** $\{ C_i \}_{i \in I}$ **di chiusi si ha** $\bigcap_{i \in I} C_i \in \mathcal{C}$

Esprimendo tali proprietà a parole : *il vuoto ed S sono chiusi , l'unione di un numero finito di chiusi è un chiuso e l'intersezione di un qualsiasi numero di chiusi è un chiuso.*

E' evidente che se $\mathcal{C}$ è una famiglia di parti di S con le proprietà I , II, III allora la famiglia $\mathcal{A}$ dei complementari degli elementi di $\mathcal{C}$ verifica le proprietà 1, 2 , 3 e quindi costituisce una topologia per S . Inoltre per lo spazio topologico $(S, \mathcal{A})$ la famiglia $\mathcal{C}$ diventa la famiglia dei chiusi.

Sia S uno spazio topologico e siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ le famiglie degli aperti e dei chiusi di S. Utilizzando tali famiglie si possono definire le nozioni di ***interiore*** e di ***chiusura*** di un sottoinsieme. Vediamo di che si tratta.

Sia X un sottoinsieme di S si definisce ***interno*** *o* ***interiore*** di X il più *grande aperto contenuto in X* . Tale interiore si ottiene attraverso **l'unione di tutti gli aperti contenuti** in X e viene indicato col simbolo $\overset{\circ}{X}$. Si ha quindi per definizione :

$$\overset{\circ}{X} = \bigcup_{A \subseteq X} A \qquad A \text{ aperto}$$

E’ facile controllare la seguente proprietà che caratterizza i sottoinsiemi aperti di S.

Proposizione 2.1 *Un sottoinsieme A di S è aperto se e solo se coincide col suo interiore.*

Tenendo conto che da $X \subseteq Y$ segue $\overset{\circ}{X} \subseteq \overset{\circ}{Y}$ si ha facilmente la seguente proprietà :

$$(X \cap Y)^\circ = \overset{\circ}{X} \cap \overset{\circ}{Y}$$

Sia X un sottoinsieme di S si definisce ***chiusura*** di X il più *piccolo chiuso contenente X* . Tale chiusura si ottiene attraverso **l’intersezione di tutti gli chiusi contenenti** X e viene indicato col simbolo $\overline{X}$ **.** Si ha quindi per definizione :

$$\overline{X} = \bigcap_{C \supseteq X} C \qquad C \text{ chiuso}$$

E’ facile controllare la seguente proprietà che caratterizza i sottoinsiemi chiusi di S.

Proposizione 2.2 *Un sottoinsieme C di S è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura.*

Tenendo conto che da $X \subseteq Y$ segue $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ si ha facilmente la seguente proprietà :

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$$

Utilizzando la definizione non sempre è facile il calcolo della chiusura e dell’interiore di un sottoinsieme assegnato. Un modo alternativo e a volte più agevole si ottiene attraverso l’uso dei punti *interni* ad X o dei punti *aderenti* ad X. Vediamo di che si tratta.

Per fare ciò ci serve però un concetto semplice ma fondamentale in topologia : il concetto di ***intorno di un punto***. Vediamo.

Sia quindi $(S, \mathcal{A})$ uno spazio topologico . Sia y un punto di S . Si definisce ***intorno di y*** *un qualunque sottoinsieme I contenente un aperto contenente y.*

In simboli :

$$I \subseteq S \text{ intorno di } y \quad \textit{se e solo se} \quad \text{esiste} \quad A \in \mathcal{A} : y \in A \subseteq I.$$

Denoteremo col simbolo $\mathfrak{I}(y)$ la *famiglia di tutti gli intorni* del punto y.

Per la definizione data è chiaro che un aperto che contenga y è un intorno di y.

Poiché l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto allora evidentemente l'intersezione di un numero finito di intorni del punto y è anch'essa un intorno del punto y.

Nel seguito denoteremo con $A(y)$ la famiglia di tutti gli aperti contenenti y.

Molto importante per il seguito è la seguente osservazione :

Una proprietà "p" è verificata in ogni intorno di y se e solo se essa è verificata in ogni aperto che contiene y .

Per questa ragione quando dovremo verificare la validità di un certa proprietà utilizzeremo anziché la famiglia $\mathfrak{I}(y)$ la famiglia $A(y)$.

Più in generale una famiglia $\mathcal{H}(y)$ di intorni di y è detta ***sistema fondamentale d' intorni per il punto y*** *se in ogni intorno di y c' è un intorno di y che faccia parte della famiglia* $\mathcal{H}(y)$.

Evidentemente la famiglia $A(y)$ costituisce per il punto y un sistema fondamentale di intorni .

Utilizzando tale concetto anche l'osservazione fatta sopra può essere generalizzata al seguente modo:

Una proprietà "p" è verificata in ogni intorno di y se e solo se essa è verificata in ogni intorno di un sistema fondamentale di intorni di y .

Siamo ora in grado di introdurre la nozione di punto *interno* ad un sottoinsieme e di punto *aderente* ad un sottoinsieme.

Un punto y di un sottoinsieme X si dice ***interno ad X*** *se esiste un intorno di y contenuto in X o equivalentemente se esiste un aperto contenente y e contenuto in X.*

Poiché l'interiore di X è un aperto contenuto in X allora ogni punto che appartenga all' interiore è punto interno ad X . Viceversa un punto che sia interno ad X appartiene ad un aperto contenuto in X e quindi appartiene all'interiore di X. Pertanto l'interiore di X è costituito da tutti e soli i punti interni ad X.

Un punto y di S si dice ***aderente al sottoinsieme X*** *se ogni intorno di y contiene almeno un punto di X o equivalentemente se ogni aperto contenente y contiene almeno un punto di X.*

Utilizzando tale concetto possiamo caratterizzare la chiusura di un sottoinsieme provando la seguente :

Proposizione. 2.3 *La chiusura di un sottoinsieme X coincide con l'insieme dei punti aderenti ad X.*

Dimostrazione. Proveremo l'asserto mostrando che sono equivalenti le seguenti affermazioni :

i) *y non appartiene alla chiusura di X*

ii) *y non è aderente ad X.*

Proviamo che i) implica ii).

Se $y \notin \overline{X} = \bigcap_{C \supseteq X} C$ allora esiste un chiuso C_o contenente X cui y non appartiene . Detto A_o l'aperto $S - C_o$ si ha $y \in A_o$ ed inoltre è

$A_o \cap X = \Phi$ e questo prova che y non è aderente ad X.

Proviamo che ii) implica i).
Se y non è aderente ad X esiste un aperto A_o contenente y e disgiunto da X. Il chiuso $C_o = S - A_o$ contiene X e non contiene y . Pertanto y non appartiene alla chiusura di X.

Un'altra caratterizzazione della chiusura di un sottoinsieme X si ottiene attraverso l'uso della nozione di ***punto di accumulazione***. Vediamo.

Un punto y di S si dice ***d'accumulazione per il sottoinsieme X*** *se in ogni intorno di y c'è almeno un punto di X diverso da y* o *equivalentemente se in ogni aperto contenente y c'è almeno un punto di X diverso da y.*

L'insieme di tutti i punti di accumulazione per il sottoinsieme X è chiamato il ***derivato di X*** ed è indicato con il simbolo D(X).

E' evidente che i punti di accumulazione per X sono aderenti ad X ed è altresì evidente che un punto aderente ad X e che non faccia parte di X è d'accumulazione per X. Pertanto si ha la seguente eguaglianza :

$$\overline{X} = \mathbf{X} \cup D(X)$$

la quale fornisce un'altra caratterizzazione della chiusura di X.

Un punto aderente ad X ed al complementare di X è detto di *frontiera* per X.

L' insieme dei punti di frontiera viene denotato con $F_r(X)$ e viene chiamato la ***frontiera di X***. Si ha facilmente la seguente eguaglianza :

$$\overline{X} = \mathbf{X} \cup F_r(X)$$

la quale fornisce un'altra caratterizzazione della chiusura di X.

3. ***Funzioni continue***.

Un ***isomorfismo*** tra due spazi topologici $(S, \mathcal{A})$ ed $(S', \mathcal{A}')$ è una applicazione

$$f: S \rightarrow S'$$

biettiva tra i sostegni S ed S' che con la sua inversa trasforma gli aperti dell'uno negli aperti dell'altro e cioè abbia le seguenti due proprietà :

j) $f(A) \in \mathcal{A}'$ per ogni aperto A di S

jj) $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ per ogni aperto A' di S'.

Un isomorfismo tra due spazi topologici viene anche chiamato ***omeomorfismo.***

Se $(S, \mathcal{A})$ è uno spazio topologico . Indichiamo con $\Omega(S)$ l'insieme di tutti i suoi omeomorfismi . Rispetto alla composizione di applicazioni l'insieme $\Omega(S)$ è un gruppo detto *gruppo strutturale* dello spazio topologico $(S, \mathcal{A})$.

Una proprietà "p" di una parte Y di S si dice ***topologica*** se per **ogni** omeomorfismo f di S anche f(Y) ha la proprietà "p" .

Se ciò accade si dice che la proprietà "p" è ***invariante*** per omeomorfismi.

Lo studio dello spazio topologico $(S, \mathcal{A})$ consiste nella ricerca delle *proprietà topologiche* delle figure di S .

Una applicazione

$$f : S \to S'$$

tra due spazi topologici $(S, \mathcal{A})$ ed $(S', \mathcal{A}')$ è detta ***continua*** se

le controimmagini degli aperti di S' sono aperti di S .

In simboli se per ogni aperto A' di S' risulta aperto il sottoinsieme di S

$$f^{-1}(A') = \{ x \in S : f(x) \in A' \}$$

Un omeomorfismo tra due spazi topologici $(S, \mathcal{A})$ ed $(S', \mathcal{A}')$ è quindi una funzione biettiva tra i sostegni che risulti continua insieme alla sua inversa.

C'è una nozione di *continuità in un punto* (continuità locale) che è connessa alla nozione di continuità globale ora data . Vediamo.

Siano (S ,$\mathcal{A}$) ed (S' ,$\mathcal{A}$') due spazi topologici e sia

$$f: S \to S'$$

una funzione di S in S' .

Sia x_o un punto di S e sia $y_o = f(x_o)$ il suo trasformato . La funzione f si dice *continua nel punto* x_o se

C1) per ogni intorno I' di y_o esiste un intorno I di x_o tale che risulti :

$$f(I) \subseteq I'$$

E' come dire :

" *punti vicini ad y_o provengono da punti vicini ad x_o .*"

La proprietà C1) è ovviamente equivalente alla seguente proprietà :

C2) Per ogni aperto A' contenente y_o esiste un aperto A contenente x_o per cui si abbia :

$$f(A) \subseteq A'$$

o ancora

C3) la controimmagine di un intorno di y_o è un intorno di x_o .

C4) la controimmagine di ogni aperto A' contenente y_o è un intorno di x_o.

Le due nozioni date , di continuità locale e globale , sono connesse tra loro come mostra la seguente :

Proposizione 3.1. *Siano (S ,$\mathcal{A}$) ed (S' ,$\mathcal{A}$') due spazi topologici . Una funzione*

$$f: S \to S'$$

di S in S' è continua se e solo se essa è continua in ogni punto di S.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua e proviamo che è continua in ogni punto di S. Sia x_o un punto qualsiasi di S e sia $y_o = f(x_o)$ il suo trasformato. Poiché f è continua la controimmagine di un aperto A' contenente y_o è un aperto e tale aperto contiene x_o e quindi è un intorno di x_o . Vale quindi la proprietà c_4) e così la funzione f è continua in x_o .

Viceversa supponiamo che f sia continua in ogni punto di S e proviamo che è continua . Sia A' un qualsiasi aperto di S' e sia $A = f^{-1}(A')$ la sua controimmagine. Supposto A non vuoto , per provare che A è aperto è sufficiente provare che ogni suo punto è interno. Sia quindi x_o un punto di A e sia $y_o = f(x_o)$ il suo trasformato.

Poiché $A = f^{-1}(A')$ allora è $y_o \in A'$ e poiché f è continua in x_o per la proprietà c_4) la sua controimmagine che è A è intorno di x_o.

Le proposizioni che seguono forniscono delle condizioni necessarie e sufficienti affinché una assegnata funzione tra due spazi topologici sia continua.

Proposizione 3.2 *Una funzione $f: S \to S'$ tra due spazi topologici $(S, \mathcal{A})$ ed $(S', \mathcal{A}')$ è continua se e solo se la controimmagine di un chiuso di S' è un chiuso di S.*

Dimostrazione. Sia f continua e sia C' un chiuso di S'. Sia A' l'aperto di S' per cui è $C' = S' - A'$. Si ha $f^{-1}(C') = f^{-1}(S' - A') = S - f^{-1}(A')$.

Poichè f è continua si ha che $f^{-1}(A')$ è un aperto di S e così $f^{-1}(C')$ è un chiuso come si voleva provare.

Viceversa supponiamo che la controimmagine di un chiuso sia un chiuso e proviamo che f è continua. Occorre quindi provare che se A' è un aperto di S' allora $f^{-1}(A')$ è un aperto di S . Infatti da

$$S - f^{-1}(A') = f^{-1}(S' - A')$$

e dall'ipotesi fatta segue che $S - f^{-1}(A')$ è un chiuso e conseguentemente $f^{-1}(A')$ è un aperto.

Proposizione 3.3 *Una funzione $f: S \to S'$ tra due spazi topologici $(S, \mathcal{A})$ ed $(S', \mathcal{A}')$ è continua se e solo se trasforma punti aderenti ad un sottoinsieme X in punti aderenti al sottoinsieme f(X).*

Dimostrazione. Supponiamo f sia continua e sia x_o un punto aderente al sottoinsieme X. Sia $y_o = f(x_o)$ il trasformato di x_o e proviamo che y_o è aderente ad f(X). Occorre quindi provare che in ogni aperto A' contenente y_o c'è almeno un elemento di f(X). Poiché f è continua nel punto x_o , in corrispondenza dell'aperto A' intorno di y_o , c'è un aperto A contenente x_o tale che $f(A) \subseteq A'$. Poiché x_o è aderente ad X nell'intorno A di x_o c'è almeno un punto x di X . Si ha allora che f(x) appartiene ad A' e ad f(X).

Viceversa supponiamo che risulti $f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$ per ogni sottoinsieme X .

Sia C' un chiuso di S' e sia $C = f^{-1}(C')$. Si ha $f(C) \subseteq C'$ da cui , essendo C' chiuso, $\overline{f(C)} \subseteq C'$. Si ha allora $f(\overline{C}) \subseteq \overline{f(C)} \subseteq C'$ e così è $\overline{C} \subseteq f^{-1}(C') = C$. Pertanto è $C = \overline{C}$ il che prova che C è un chiuso . Avendo provato che la controimmagine di un chiuso è un chiuso la funzione è continua.

Al fine di individuare un'altra importante proprietà delle funzioni continue ci è utile richiamare la nozione di *successione convergente*.

Sia $(S, \mathcal{A})$ uno spazio topologico e sia ℓ un punto di S. Una successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ di elementi di S è convergente ad ℓ se

per ogni intorno I di ℓ *esiste un intero m tale risulti* $x_n \in I$ *per ogni* $n \geq m$.

o equivalentemente

per ogni aperto A contenente ℓ *esiste un intero m tale risulti* $x_n \in A$ *per ogni* $n \geq m$.

L'elemento ℓ cui la successione converge è anche detto *limite della successione.* Non sempre una successione è convergente e non sempre il limite quando esiste è unico. Si ha unicità del limite se lo spazio topologico è *separato o di Hausdorff* cioè gode della seguente proprietà :

H : *Per ogni coppia di punti distinti x ed y esistono due intorni I ed I' di x ed y tra loro disgiunti.*

o equivalentemente

H : *Per ogni coppia di punti distinti x ed y esistono due aperti A ed A' contenentiil primo x ed il secondo y tra loro disgiunti.*

Possiamo infatti ora provare la seguente

Proposizione 3.4 *Sia* $(S, \mathcal{A})$ *uno spazio topologico di Hausdorff. Una successione* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *di elementi di S che sia convergente ammette un unico limite.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ammetta due limiti ℓ ed ℓ' distinti tra loro. Siano I ed I' due intorni di ℓ ed ℓ' disgiunti tra loro. Poiché ℓ è limite della successione $x_1, x_2,\dots,x_n ,\dots$

esiste un intero m tale che risulti $x_n \in I$ per ogni $n \geq m$.

Poiché anche ℓ' è limite della successione $x_1, x_2,\dots,x_n ,\dots$

esiste un intero m' tale che risulti $x_n \in I'$ per ogni $n \geq m'$.

Si ha allora che $x_n \in I \cap I'$ per ogni $n \geq \max\{ m , m'\}$, il che contraddice il fatto che I ed I' siano disgiunti.

Un' altra importante proprietà delle funzioni continue è espressa dalla seguente

Proposizione 3.5 *Una funzione continua $f : S \to S'$ tra due spazi topologici $(S ,\mathcal{A})$ ed $(S' ,\mathcal{A}')$ trasforma una successione convergente in una successione convergente.*

Dimostrazione. Sia $x_1, x_2,\dots,x_n ,\dots$ una successione di elementi di S convergente ad x_o . Proviamo che la successione corrispondente

$$f (x_1), f (x_2),\dots, f (x_n) ,\dots$$

converge al punto $f(x_o)$. Sia A' un aperto contenente $f(x_o)$. Poiché f è continua in x_o esiste un aperto A contenente x_o tale che risulti $f(A) \subseteq A'$. Ma poiché la successione $x_1, x_2,\dots,x_n ,\dots$ ha per limite x_o ed A è un intorno di tale punto si ha che

esiste un intero m tale che risulti $x_n \in A$ per ogni $n \geq m$.

Ma allora per ogni $n \geq m$ risulta $f (x_n) \in f(A) \subseteq A'$ e ciò prova che la successione $f (x_1), f (x_2),\dots, f (x_n) ,\dots$ ha per limite $f(x_o)$.

Concludiamo questo numero provando alcune semplici proprietà valide in uno spazio topologico di Hausdorff .

Proposizione 3.4 *Ogni punto di uno spazio topologico $(S, \mathcal{A})$ di Hausdorff è chiuso*.

Dimostrazione. Sia y un punto di S e sia z un punto distinto da y e cioè un punto del complementare di y . Poiché lo spazio è di Hausdorff esiste un aperto A contenente z e non y . L'aperto A è contenuto in S - y e ciò prova che z è interno ad S - y.

Ogni punto di S - y è interno e quindi S - y è un aperto il che prova che y è un chiuso.

Proposizione 3.5 *Sia (S, $\mathcal{A}$) uno spazio topologico di Hausdorff i cui aperti non vuoti siano infiniti. Sia y un punto di accumulazione per il sottoinsieme X. In ogni intorno del punto y ci sono allora infiniti punti di X diversi da y.*

Dimostrazione. Possiamo ovviamente limitarci a verificare la proprietà in un aperto A che contenga y . Poiché y è d'accumulazione per X nell'aperto A c'è un punto x_1 di X diverso da y. Poiché x_1 è un chiuso l'insieme

$$A_1 = A - x_1 = A \cap (S - x_1)$$

è un aperto che contiene y. Poiché y è d'accumulazione per X nell'aperto A_1 c'è un punto x_2 di X diverso da y e però esso è distinto anche da x_1.

Posto

$$A_2 = A - \{x_1 , x_2\} = A \cap (S - \{x_1 , x_2\})$$

Essendo $\{x_1 , x_2\}$ un chiuso l'insieme A_2 è un aperto e contiene il punto y . Pertanto poiché y è d'accumulazione per X nell'aperto A_2 c'è un puno x_3 di X diverso da y e che risulterà però distinto anche da x_1 e x_2 .

Procedendo induttivamente si costruisce nell' aperto A una successione $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ di punti di X distinti tra loro e distinti da y e l'asserto è così provato.

4. *Basi ed assiomi di numerabilità.Spazi separabili.*

In questo numero daremo alcune nozioni topologiche utili per il seguito.

Sia (S ,$\mathcal{A}$) uno spazio topologico . Una famiglia $\mathcal{B}$ di aperti di S è detta *base* per la topologia $\mathcal{A}$ se ogni aperto non vuoto di S è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Essendo S aperto la famiglia $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di S. Inoltre l'intersezione di due elementi di $\mathcal{B}$, essendo tale intersezione un aperto, è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Lo spazio topologico è detto *a base numerabile* se ammette una base che sia *finita o numerabile.*

Uno spazio topologico è detto *localmente a base numerabile* se ogni suo punto ha un sistema fondamentale di intorni che sia finito o numerabile.

Infine uno spazio topologico si dice *separabile* se possiede un sottoinsieme D finito o numerabile che sia *denso in S* cioè tale che risulti

$$\overline{D} = S.$$

La proposizione che segue mostra che le nozioni ora date sono connesse tra loro.

Proposizione 4.1 *Uno spazio topologico $(S ,\mathcal{A})$ che sia a base numerabile è anche localmente a base numerabile e separabile.*

Dimostrazione. Denotiamo con $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in N}$ la base numerabile che lo spazio possiede. Cominciamo a provare che lo spazio è localmente a base numerabile. Sia quindi y un suo punto e proviamo che per tale punto esiste un sistema fondamentale di intorni finito o numerabile. Poiché $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di S ci sono elementi di $\mathcal{B}$ che contengono y . Indichiamo tale famiglia con

$$\mathcal{B}_y = \{ B \in \mathcal{B} : y \in B\}.$$

Tale famiglia di aperti è una famiglia di intorni di y ed è fondamentale oltre ad essere ovviamente finita o numerabile. Infatti sia A un aperto che contenga y . Poiché $\mathcal{B}$ è una base esiste una sua sottofamiglia F di $\mathcal{B}$ tale che risulti

$$A = \bigcup_{B\in F} B$$

Poiché y appartiene ad A allora esso appartiene ad un elemento B_o della famiglia F . Poiché $B_o \in \mathcal{B}_y$ e B_o è contenuto in A si ha l'asserto.

Proviamo ora che lo spazio è separabile. Facendo uso dell'assioma della scelta scegliamo un elemento x_n in ogni aperto non vuoto B_n della base $\mathcal{B}$.

Indichiamo con D l'insieme degli elementi x_n selezionati. L'insieme D è ovviamente finito o numerabile ed è denso in S come ora proveremo. Sia y un punto di S e sia A un aperto contenente y . Poiché A è aperto e $\mathcal{B}$ è una base l'aperto A è unione di elementi di $\mathcal{B}$. In ognuno di tali elementi è stato selezionato un elemento
di D quindi nell'aperto A ci sono elementi di D . Pertanto y è aderente a D e si ha quindi l'asserto.

5. Proprietà della topologia indotta da una metrica .

Sia (S , d) uno spazio metrico con metrica d. Abbiamo già visto che la metrica d consente di introdurre in S una topologia $\mathcal{A}_d$ che viene detta *indotta dalla metrica* ed i cui aperti sono le unioni di cerchi aperti. Vogliamo ora illustrare alcune importanti proprietà di tale topologia $\mathcal{A}_d$.

Proposizione 5.1 *Lo spazio topologico $(S , \mathcal{A}_d)$ è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano x ed y due punti distinti e sia r un numero reale positivo minore di $\frac{d(x,y)}{2}$. I cerchi aperti C(x , r) e C(y, r) sono disgiunti . Se infatti per assurdo esistesse un punto z comune ai due cerchi avremmo, per la proprietà triangolare , :

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r + r < \frac{d(x,y)}{2} + \frac{d(x,y)}{2} = d(x,y)$$

e ciò è assurdo.

Proposizione 5.2 *Lo spazio topologico (S , $\mathcal{A}_d$) è localmente a base numerabile.*

Dimostrazione. Denotiamo per ogni punto y di S con $\mathcal{C}_y = \{ C(y, \frac{1}{n})\}$ la famiglia numerabile di intorni del punto y costituita dai cerchi aperti di centro y e raggio $\frac{1}{n}$. Mostrando che tale famiglia è fondamentale si ha l'asserto. Sia A un aperto contenente y e sia C (y , r) un cerchio aperto di centro y e raggio r contenuto in A. Fissato un intero m tale che risulti $\frac{1}{m} < r$ si ha

$$C(y, \frac{1}{m}) \subseteq C(y, r) \subseteq A$$

e l' asserto è provato.

Proposizione 5.3 *Lo spazio topologico (S , $\mathcal{A}_d$) è a base numerabile se e solo se è separabile.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che se lo spazio è a base numerabile esso è separabile. Occorre quindi provare che se (S , $\mathcal{A}_d$) è separabile esso è a base numerabile. Sia quindi D un sottoinsieme finito o numerabile denso in S cioè tale che risulti ad esso aderente ogni punto di S. Denotiamo con

$$\mathcal{B} = \{ C(y, q) \quad y \in D \ , \ q \in Q^+\}$$

la famiglia dei cerchi aperti aventi centro in un punto y di D e raggio razionale positivo. Tale famiglia di aperti è ovviamente numerabile ed è come ora proveremo una base per la topologia $\mathcal{A}_d$. Per provare ciò è sufficiente mostrare che ogni cerchio aperto è unione di elementi di $\mathcal{B}$. Sia quindi C (x , r) un cerchio aperto e z un suo punto . Se mostreremo che z appartiene ad un aperto di $\mathcal{B}$ tutto contenuto nel cerchio C (x , r) si avrà l'asserto.

Abbiamo già visto nella proposizione del n. che è possibile determinare un cerchio aperto C(z , ρ) contenuto nel cerchio C (x , r) . Consideriamo il cerchio $C(z, \frac{\rho}{2})$ In tale cerchio aperto c'è un punto y di D in quanto z è aderente al sottoinsieme D . Poiché $y \in C(z, \frac{\rho}{2})$ si ha :

$$d(y,z) < \frac{\rho}{2}$$

Sia ora q un numero razionale tale che

$$d(y,z) < q < \frac{\rho}{2}$$

Il cerchio C (y , q) appartiene alla famiglia $\mathfrak{B}$ contiene z e come ora proveremo è contenuto nel cerchio C(z , ρ) . Sia quindi t un elemento del cerchio C (y , q) e proviamo che t appartiene al cerchio C(z , ρ) .

Si ha infatti, usando la proprietà triangolare ,

$$d(t,z) \leq d(t,y) + d(y,z) < q + q < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$$

L' asserto è così provato.

Poichè uno spazio metrico è di Hausdorff allora come già visto una successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ di punti di S, se è convergente , ammette un unico limite.

In uno spazio metrico ha significato per una successione anche tale definizione.

Una successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ di punti dello spazio metrico (S , d) è detta di *Cauchy* se è soddisfatta la seguente proprietà :

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste un intero m tale per ogni p, q* $\geq$ *m , si ha*

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

La proposizione che segue lega tra loro le due nozioni di convergenza e di essere di Cauchy per una successione.

Proposizione 5.2 *Una successione* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *di punti dello spazio metrico (S , d) che sia convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia ℓ il limite della successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Sia ε un numero positivo e sia C (ℓ , $\frac{\varepsilon}{2}$) il cerchio aperto di centro ℓ e raggio $\frac{\varepsilon}{2}$. Per definizione di limite esiste un intero m tale che per ogni n $\geq$ m risulta

$$x_n \in C\left(\ell, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Pertanto per ogni $p, q \geq m$ si ha , utilizzando la proprietà triangolare,

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e ciò prova l'asserto.

Osserviamo esplicitamente che esistono spazi metrici dotati di successioni di Cauchy ma non convergenti come mostra il seguente esempio . Sia R^+ l'insieme dei numeri reali positivi dotato della metrica euclidea $d(a, b) = |a - b|$ .In tale spazio la successione $x_n = \frac{1}{n}$ è di Cauchy in quanto ,come successione di R è convergente, ma non è convergente in R^+ risultando convergente a zero in R.

Uno spazio metrico in cui ogni successione di Cauchy risulta convergente è detto *completo.*

È ben noto che l'insieme dei numeri reali dotato della metrica euclidea è uno spazio metrico completo.

Pertanto per una successione di numeri reali $x_1, x_2,\dots,x_n,\dots$ vale la seguente equivalenza .

$x_1, x_2,\dots,x_n,\dots$ convergente *se e solo se* $x_1, x_2,\dots,x_n,\dots$ è di Cauchy.

La proposizione che segue caratterizza i sottospazi completi di uno spazio metrico completo.

Proposizione 5.3 *Sia (S , d) uno spazio metrico completo . Un suo sottoinsieme X è anch'esso completo se e solo se X è chiuso.*

Dimostrazione. Supponiamo che lo spazio metrico (X , d) sia completo e proviamo che esso è chiuso. Sia y un punto di aderenza per X. Per ogni n , sia x_n un punto di X scelto nel cerchio aperto $C(y, \frac{1}{n})$. La successione $x_1, x_2,\dots,x_n,\dots$converge manifestamente al punto y e quindi è di Cauchy. Ma poiché è di Cauchy ed X è completo essa converge ad un punto di X . Per l'unicità del limite y è un punto di X. Pertanto contenendo tutti punti aderenti l'insieme X è un chiuso.

Viceversa supponiamo che X sia chiuso e mostriamo che esso è completo. Occorre quindi che provare che ogni sua successione di Cauchy è convergente ad un punto di X. Sia quindi $x_1, x_2,\dots,x_n,\dots$ una successione di punti di X e supponiamo sia di Cauchy. Poiché lo spazio S è completo la successione di Cauchy $x_1, x_2,\dots,x_n,\dots$ converge ad un punto y . Per definizione di limite in ogni intorno di y ci sono punti della successione e quindi di X . Pertanto y è aderente ad X. Ma poiché X è chiuso il punto y appartiene ad X . Avendo provato che la successione di Cauchy

$x_1, x_2,\dots,x_n ,\dots$ converge ad un punto di X resta provato che lo spazio metrico X è completo.

Uno spazio topologico $(S ,\mathcal{A})$ si dice *metrizzabile* se esiste una metrica d in S tale che risulti $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}$ cioè che induce su S la topologia $\mathcal{A}$.

6. Esempi di spazi topologici.

Al fine di controllare la comprensione delle nozioni finora date è opportuno fornire un pò di esempi. Sia R l'insieme dei numeri reali .

Esempio 1.

Come già visto , assumendo come aperti di R , il vuoto , R e tutti gli intervalli del tipo

$$]a , \quad b [\ \text{ con } a ,b \in R.$$

e tutte le loro unioni si ottiene una topologia (indotta dalla metrica) che denoteremo con $\mathcal{N}$ per l'insieme R (*essa è detta topologia naturale di R*).

Esempio 2.

Assumendo come aperti di R , il vuoto , R e tutti gli intervalli del tipo

$$]-\infty , \quad a [\ \text{ con } a \in R.$$

si ottiene una topologia che denoteremo con $\mathbb{S}$ per l'insieme R (*detta delle semirette sinistre aperte*).

Essendo evidente che l'intersezione di due aperti è un aperto basta controllare che l'unione di aperti è un aperto. Sia quindi

$$A_i = \ ]-\infty , \quad a_i [\qquad \text{con } a_i \in R, \ \ i \in \mathcal{I}$$

una famiglia di aperti . Detto $a = \sup a_i$ è facile verificare che risulta :

$$\bigcup_i \ ]-\infty , \quad a_i [\ = \ ]-\infty , \quad a [$$

e ciò prova che l'unione di aperti è un aperto. Pertanto la famiglia $\mathbb{S}$ è una topologia per l'insieme R .

Esempio 3.

Assumendo come aperti di R , il vuoto , R e tutti gli intervalli del tipo

$$] a , \quad \infty [\quad \text{con } a \in R.$$

si ottiene una topologia che denoteremo con $\mathfrak{D}$ per l'insieme R (*detta delle semirette destre aperte*).

Essendo evidente che l'intersezione di due aperti è un aperto basta controllare che l'unione di aperti è un aperto. Sia quindi

$$A_i = \ ] a_i , \quad \infty [\qquad \text{con } a_i \in R, \ \ i \in \mathfrak{I}$$

una famiglia di aperti . Detto $a = \inf a_i$ è facile verificare che risulta :

$$\bigcup_i \ ] a_i , \quad \infty [\ = \ ] a , \quad \infty [$$

e ciò prova che l'unione di aperti è un aperto. Pertanto la famiglia $\mathfrak{D}$ è una topologia per l'insieme R .

Esempio 4.

Assumendo come aperti di R , il vuoto , R e tutti gli intervalli del tipo

$$] \text{-}a , \quad a [\quad \text{con} \quad a \in R , \ \ a > o$$

si ottiene , come è facile verificare , una topologia per l'insieme R che denoteremo con Ω_o .

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme $X = [\, 2 , \ 7 \, [$. Si calcoli la sua chiusura ed il suo interiore in ognuno degli spazi topologici

$(R , \ \mathfrak{N}) , \ (R , \ \mathfrak{S}) , \ (R , \ \mathfrak{D}) , \ (R , \Omega_o)$ sopra descritti.

Esercizio 2. Si consideri ora la seguente successione di punti di R

$$x_n = 3 + \frac{1}{n} \qquad n \in N$$

Si determinino per essa i punti di convergenza negli spazi topologici

$(R, \mathcal{N})$, $(R, \mathcal{S})$, $(R, \mathcal{D})$, (R, Ω_o) sopra descritti.

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f : R \to R$ che associa al numero x il numero $x^2 + 4$.

Si assuma che il codominio sia munito della topologia $\mathcal{D}$. Si stabilisca con quale topologia delle quattro topologie $\mathcal{N}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$, Ω_o sopra descritte, deve essere munito il dominio R per rendere continua la nostra funzione.

Si faccia poi lo stesso controllo per la funzione $g : R \to R$ che associa al numero x il numero $x + 4$. Si dica se in qualche caso g è un isomorfismo.

Esercizio4. Si stabilisca quale spazio topologico tra questi

$$(R, \mathcal{N}), (R, \mathcal{S}), (R, \mathcal{D}), (R, \Omega_o)$$

da noi descritti è di Hausdorff.

7. Sottospazi di uno spazio topologico.

Sia $(S, \mathcal{A})$ uno spazio topologico. Sia Y un sottoinsieme di S. La famiglia

$$\mathcal{A}_Y = \{ Y \cap A \quad , A \in \mathcal{A} \}$$

di parti di Y i cui elementi sono le *intersezioni di Y con gli aperti di S*è evidentemente una topologia per Y che viene detta *indotta da S su Y.*

Quando si munisca Y di tale topologia $\mathcal{A}_Y$ lo spazio topologico $(Y, \mathcal{A}_Y)$ è detto *sottospazio* dello spazio topologico $(S, \mathcal{A})$.

Quando l'insieme Y è un aperto gli aperti dello spazio topologico $(Y, \mathcal{A}_Y)$ coincidono con gli aperti di S contenuti in Y e quindi ogni aperto di Y è un aperto di S. Se Y non è aperto non tutti i suoi aperti sono aperti di S.

Ad esempio sia R munito della topologia naturale $\mathcal{N}$ e sia $Y = [3 , 7]$.

L'insieme $]5, 7] = [3, 7] \cap]5, 9[$ è un aperto di Y ma non è aperto di $\mathcal{N}$.

Per questa ragione non tutte le proprietà della topologia $\mathcal{Q}$ vengono ereditate dalla topologia $\mathcal{Q}_Y$.

8. Spazi topologici connessi.

In questo numero ci occuperemo di una importante nozione topologica : *la connessione* . Vediamo di che si tratta. Sia (S , $\mathcal{Q}$) uno spazio topologico . Lo spazio topologico è detto ***sconnesso*** se esistono due aperti A ed A' non vuoti e disgiunti la cui unione sia S. Se S è sconnesso esso è quindi l'unione di due suoi aperti non vuoti e disgiunti. Uno spazio topologico non sconnesso è *connesso*.

In maniera " intuitiva " se è sconnesso si può *spezzare* se è connesso è " *tutto un pezzo*".

E' evidente che se (S , $\mathcal{Q}$) è sconnesso ed è

$$S = A \cup A'$$

con A , A' aperti non vuoti e disgiunti, allora si A che A' sono sottoinsiemi propri di S che risultano sia aperti che chiusi , risultando per essi :

$$A' = S - A \qquad \text{ed} \qquad A = S - A' .$$

Per questa ragione nella definizione data la parola aperto può essere sostituita con la parola chiuso.

Così in modo equivalente lo spazio topologico (S , $\mathcal{Q}$) è ***sconnesso*** *se esistono due chiusi C e C' non vuoti e disgiunti la cui unione sia S.*

Ovviamente la presenza di un sottoinsieme A *proprio* di S che sia contemporaneamente *aperto e chiuso* garantisce che S è sconnesso risultando

$$S = A \cup (S - A)$$

Un sottoinsieme Y dello spazio topologico S è detto *connesso* se risulta connesso lo spazio topologico (Y , $\mathcal{Q}_Y$).

E' evidente ma utile la seguente proprietà :

(*) *se S è sconnesso ed è l'unione dei due aperti non vuoti disgiunti A ed A' allora è sconnesso ogni sottoinsieme Y che intersechi sia A che A' in quanto si ha :*

$$Y = Y \cap S = Y \cap (A \cup A') = (Y \cap A) \cup (Y \cap A')$$

Per stabilire se uno spazio è connesso risulta molto utile la seguente

Proposizione 8.1 *Uno spazio topologico (S , $\mathcal{A}$) è connesso se e sole se vale la seguente proprietà :*

© *per ogni coppia x , y di punti d stinti di S esiste un sottoinsieme Y connesso che contiene i punti x ed y.*

Dimostrazione . Se lo spazio è connesso la proprietà © è manifestamente soddisfatta in quanto basta scegliere Y = S . Supponiamo quindi valga la proprietà © e proviamo che lo spazio è connesso.

Per assurdo sia S sconnesso . Esistono allora due aperti A ed A' non vuoti e disgiunti la cui unione è S . Sia x un punto di A (che è non vuoto) ed y un punto di A' (che è non vuoto) e sia Y il sottoinsieme connesso che li contiene entrambi.

Si ha :

$$Y = Y \cap S = Y \cap (A \cup A') = (Y \cap A) \cup (Y \cap A')$$

Ora gli insiemi $Y \cap A$, $Y \cap A'$ sono non vuoti , il primo contiene x ed il secondo y , sono disgiunti perché tali sono A ed A' e sono aperti di Y .

Pertanto Y risulta sconnesso e ciò è assurdo.

Dalla proposizione ora provata segue la seguente :

Proposizione 8.2 *Sia (S ,$\mathcal{A}$) uno spazio topologico e siano Y_1 ed Y_2 due suoi sottoinsiemi connessi. Se Y_1 ed Y_2 hanno intersezione non vuota allora anche $Y_1 \cup Y_2$ è un sottoinsieme connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'insieme $T = Y_1 \cup Y_2$ sia sconnesso. Esistono allora due aperti di S e siano A_1 ed A_2 tali che risulti :

(**) $$T = (T \cap A_1) \cup (T \cap A_2)$$

con $(T \cap A_1)$ e $(T \cap A_2)$ **non vuoti** e disgiunti.

Poiché è $Y_1 \subseteq T$ ed $Y_2 \subseteq T$ si ha :

(a) $Y_1 = Y_1 \cap T = Y_1 \cap [(T \cap A_1) \cup (T \cap A_2)] = (Y_1 \cap A_1) \cup (Y_1 \cap A_2)$

(b) $Y_2 = Y_2 \cap T = Y_2 \cap [(T \cap A_1) \cup (T \cap A_2)] = (Y_2 \cap A_1) \cup (Y_2 \cap A_2)$

Sia y_o un punto comune ad Y_1 ed Y_2 . Il punto y_o stante (a) appartiene ad $Y_1 \cap A_1$ o ad $Y_1 \cap A_2$. Supponiamo che appartenga ad $Y_1 \cap A_1$. Deve essere allora vuoto $Y_1 \cap A_2$ altrimenti Y_1 sarebbe sconnesso.

Poiché y_o appartiene anche ad Y_2 ed ad A_1 da (b) segue che è non vuoto $Y_2 \cap A_1$ e quindi deve essere vuoto $Y_2 \cap A_2$ altrimenti Y_2 sarebbe sconnesso. Ma se sono vuoti $Y_1 \cap A_2$ e $Y_2 \cap A_2$ risulta anche vuoto $T \cap A_2$ mentre esso è non vuoto.

Supponendo che y_o appartenga $Y_1 \cap A_2$ avremmo, con eguale ragionamento, che sarebbe vuoto $T \cap A_1$ il che è assurdo . L' asserto è così provato.

Utile è anche la seguente :

Proposizione 8.3 *Sia $(S, \mathcal{A})$ uno spazio topologico. La chiusura di un sottoinsieme Y connesso è anch'essa un sottoinsieme connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la chiusura $\overline{Y}$ di Y sia sconnessa. Esistono allora due aperti di S e siano A_1 ed A_2 tali che risulti :

(i) $$\overline{Y} = (\overline{Y} \cap A_1) \cup (\overline{Y} \cap A_2)$$

con $(\overline{Y} \cap A_1)$ e $(\overline{Y} \cap A_2)$ non vuoti e disgiunti . Da (i) segue :

(ii) $$Y = Y \cap \overline{Y} = (Y \cap A_1) \cup (Y \cap A_2).$$

Poiché $(\overline{Y} \cap A_1)$ e $(\overline{Y} \cap A_2)$ sono disgiunti tali risultano anche $(Y \cap A_1)$ e $(Y \cap A_2)$. Poiché $(\overline{Y} \cap A_1)$ e $(\overline{Y} \cap A_2)$ sono non vuoti esistono due punti a_1 ed a_2 con a_1 in $\overline{Y} \cap A_1$ ed a_2 in $\overline{Y} \cap A_2$. Ma se a_1 appartiene ad $\overline{Y}$ allora esso è aderente ad Y e poiché A_1 è un aperto che contiene a_1 allora in A_1 c'è almeno un punto di Y . Abbiamo così provato che $Y \cap A_1$ è non vuoto . Con la stessa argomentazione fatta sul punto a_2 si prova che $Y \cap A_2$ è non vuoto .Abbiamo così provato , stante (ii) che Y è sconnesso contro il supposto.

La proprietà di essere connesso è una proprietà topologica in quanto si conserva per omeomorfismi. Più in generale sussiste la seguente

Proposizione 8.4 Sia *$f: S \to S'$ una funzione continua tra due spazi topologici $(S, \mathcal{A})$ ed $(S', \mathcal{A}')$. Se X è un sottoinsieme connesso di S allora $f(X)$ è un sottoinsieme connesso di S'.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f(X) sia sconnesso. Sia ha allora che esistono due aperti di S' e siano $A_1^{'}$ ed $A_2^{'}$ tali che risulti

$$f(X) = (f(X) \cap A_1^{'}) \cup (f(X) \cap A_2^{'})$$

con $f(X) \cap A_1^{'}$ ed $f(X) \cap A_2^{'}$ non vuoti e disgiunti. Denotiamo con

$$A_1 = f^{-1}(A_1^{'}) \quad \text{ed} \quad A_2 = f^{-1}(A_2^{'})$$

Gli insiemi A_1 ed A_2 sono aperti perché f è continua ed inoltre $(X \cap A_1)$ e $(X \cap A_2)$ sono disgiunti perché tali risultano $f(X) \cap A_1^{'}$ ed $f(X) \cap A_2^{'}$.
Sia $f(x_1)$ appartenente ad $f(X) \cap A_1^{'}$ e sia $f(x_2)$ appartenente ad $f(X) \cap A_2^{'}$.
Quindi x_1 appartiene ad $X \cap A_1$ ed x_2 appartiene ad $X \cap A_2$.
Da

$$f(X) = (f(X) \cap A_1^{'}) \cup (f(X) \cap A_2^{'})$$

segue, passando alla controimmagine, e chiamando T la controimmagine di f(X) :

$$T = (T \cap A_1) \cup (T \cap A_2)$$

Poiché T contiene X si ha :

$$X = X \cap T = X \cap [(T \cap A_1) \cup (T \cap A_2)] =$$
$$= (X \cap T \cap A_1) \cup (X \cap T \cap A_2) = (X \cap A_1) \cup (X \cap A_2)$$

e ciò prova che X è sconnesso in quanto i due aperti $(X \cap A_1)$ e $(X \cap A_2)$ sono non vuoti e disgiunti.

Ogni spazio topologico $(S, \mathcal{A})$ che sia sconnesso è unione di parti connesse. Vediamo perché.

Sia quindi $(S , \mathcal{Q})$ uno spazio topologico. Nell' insieme S definiamo la seguente relazione $\approx$:

due punti distinti x ed y li diciamo equivalenti se esiste un sottoinsieme Y connesso di S che li contiene.

La proposizione 8.2 assicura che tale relazione è di equivalenza e pertanto essa ripartisce S in classi d'equivalenza ognuna delle quali viene chiamata *componente connessa.*

Sia $Y = [y]$ una componente connessa .Evidentemente Y è un connesso ed è il più grande connesso che contiene il punto y . Poiché la chiusura di un connesso è un connesso allora l'insieme Y risulta anche chiuso.

E' evidente infine che se lo spazio è connesso se solo se c' è una sola classe d'equivalenza e quindi una sola componente connessa.

9. I connessi di $(R , \mathcal{N})$.

In questo numero caratterizzeremo i sottoinsiemi connessi di R che penseremo munito della topologia naturale.

Richiamiamo preliminarmente un risultato relativo ad una caratterizzazione degli intervalli di R . Un sottoinsieme I di R è un intervallo se e solo se esso ha la seguente proprietà :

(j) *per ogni coppia di punti distinti x ed y di I con x <y l' intervallo chiuso [x , y] è contenuto in I .*

Proviamo ora la seguente importante :

Proposizione 9.1 *Ogni intervallo chiuso [a , b] di R è connesso* .

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'intervallo [a , b] sia sconnesso. Esistono allora due chiusi C_1 e C_2 non vuoti e disgiunti tali che risulti

$$[a , b] = C_1 \cup C_2$$

Poiché [a , b] è chiuso i chiusi C_1 e C_2 sono chiusi di R. Potendoli rinominare possiamo supporre che il numero b appartenga a C_2. Poiché C_1 è parte di [a , b] esso è limitato e b è un suo maggiorante. Sia $c = \sup C_1$. Essendo c l'estremo superiore si ha che :

per ogni numero ε positivo esiste un elemento di C_1 tra $c-\varepsilon$ e c

e ciò prova che c è aderente a C_1. Poiché C_1 è chiuso allora c appartiene a C_1 .

Si ha $c \leq b$. se fosse c=b allora C_1 e C_2 non sarebbero disgiunti. Quindi è $c < b$ e l'intervallo $] c , b]$ è allora contenuto in C_2. Ne segue che c è anche aderente a C_2 Pertanto c è comune a C_1 e C_2 e ciò è assurdo essendo C_1 e C_2 disgiunti.

Siamo ora in grado di fornire una caratterizzazione dei sottoinsiemi connessi di R munito della topologia naturale. Sussiste infatti la seguente :

Proposizione 9.2 *I sottoinsiemi connessi di R sono tutti e soli gli intervalli.*

Dimostrazione. Se I è un intervallo esso ha la proprietà ***(j)*** e quindi esso è connesso quando si tenga conto delle proposizioni 8.1 e 9.1.

Viceversa supponiamo che I sia connesso e proviamo che esso è un intervallo.Se per assurdo I non è un intervallo esistono due punti distinti a e b di I con $a < b$ tali che $[a , b]$ non sia contenuto in I . Esiste allora z :

$$a < z < b \quad e \quad z \notin I .$$

Posto $A_1 = I \cap]-\infty , z[$ ed $A_2 = I \cap]z , +\infty[$ si ha

$$I = A_1 \cup A_2$$

e ciò prova che I è sconnesso essendo A_1 e A_2 aperti non vuoti ($a \in A_1$ e $b \in A_2$) e disgiunti.

10. ***I connessi di R^n dotato della topologia naturale.***

Siano $\underline{\mathbf{y}} = (y_1 , y_2 ,\ldots, y_n)$ e $\underline{\mathbf{z}} = (z_1 , z_2 ,\ldots, z_n)$ due punti distinti di R^n.

Si definisce *retta* per i punti $\underline{\mathbf{y}}$ e $\underline{\mathbf{z}}$ l'insieme dei punti $\underline{\mathbf{x}}(t) = (x_1(t) , x_2(t) ,\ldots, x_n(t))$ così descritto :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1 + t\,(z_1 - y_1) \\ x_2(t) &= y_2 + t\,(z_2 - y_2) \\ &\ldots. \\ x_n(t) &= y_n + t\,(z_n - y_n) \end{aligned}$$

dove il parametro t varia in R. Quando t varia tra 0 ed 1 il punto $\underline{\mathbf{x}}(t)$ descrive il *segmento* di estremi $\underline{\mathbf{y}}$ e $\underline{\mathbf{z}}$. Poiché la funzione

$$f : \quad t \in R \rightarrow \quad \underline{\mathbf{x}}(t) \in R^n$$

è una funzione continua, allora il segmento di estremi $\underline{\mathbf{y}}$ e $\underline{\mathbf{z}}$ è un connesso in quanto immagine tramite f dell'intervallo $[0 ,1]$ che è un connesso.

Assegnata in R^n una (n+1)-pla ordinata di punti $(\underline{\mathbf{z}}_0 , \underline{\mathbf{z}}_1 ,\ldots, \underline{\mathbf{z}}_n)$ si chiama *poligonale* di vertici

$(\underline{z}_0, \underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_n)$ il sottoinsieme P di R^n che si ottiene come unione dei segmenti $[\underline{z}_{i-1}, \underline{z}_i]$, $i = 1,2, .., n$.

Con un semplice ragionamento, tenendo conto della proposizione 8.2 ,si vede facilmente che ogni poligonale è un connesso di R^n .

Possiamo allora dare la seguente definizione . Un sottoinsieme Y di R^n si dice *connesso per poligonali* se per ogni coppia di punti distinti y e z di Y esiste una poligonale di estremi y e z contenuta in Y.

Per la proposizione 7.1 quando si tenga conto che la poligonale è un connesso è immediato che un sottoinsieme che risulti connesso per poligonale è connesso.

Ci sono però sottoinsiemi connessi che non sono connessi per poligonale. Ad esempio se n=2 si consideri la circonferenza $\boldsymbol{\Gamma}$ di centro (0,0) e raggio 1 i cui punti (x , y) sono descrivibili al seguente modo

$$x(t) = \cos t$$
$$y(t) = \operatorname{sen} t$$

dove t varia nell'intervallo $[0, 2\pi]$. La funzione

$$f: \quad t \in [0, 2\pi] \rightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t) \in R^2$$

è continua e quindi $\boldsymbol{\Gamma} = f([0, 2\pi])$ è un connesso ma non è connesso per poligonale.

Proveremo ora che le due nozioni di essere connesso o connesso per poligonale sono equivalenti per gli insiemi aperti di R^n .

Sussiste infatti la seguente :

Proposizione 10.1 *Un sottoinsieme A aperto di R^n è connesso se e solo se esso è connesso per poligonali.*

Dimostrazione. Sia A un insieme aperto di R^n. Se A è connesso per poligonali allora come già osservato esso è connesso . Supponiamo quindi che sia connesso e proviamo che esso è anche connesso per poligonali. Supponiamo per assurdo che A non sia connesso per poligonali . Esistono quindi due punti distinti y e z di A tali che ogni poligonale di estremi y e z non è contenuta in A.

Denotiamo con A_1 ed A_2 i seguenti due sottoinsiemi di A .

$$A_1 = \{ x \in A : \text{ esiste una poligonale di estremi } y \text{ ed } x \text{ contenuta in } A \}$$

$$A_2 = A - A_1 = \{ x \in A : \text{ non esiste una poligonale di estremi } y \text{ ed } x \text{ contenuta in } A \}$$

I due sottoinsiemi A_1 e A_2 sono non vuoti in quanto A_1 contiene y ed A_2 contiene z. Proveremo ora che essi sono entrambi aperti e quindi si avrà un assurdo perché ciò comporterà che A è sconnesso.

Proviamo che A_1 è aperto. Sia x un punto di A_1. Poiché A è aperto esiste un cerchio aperto C di centro x tutto contenuto in A. Per ogni punto t di tale cerchio il segmento di estremi x e t è contenuto in C e quindi in A. Poiché x è congiungibile con y con una poligonale contenuta in A allora anche t è congiungibile con y con una poligonale contenuta in A . Pertanto il cerchio aperto C è tutto contenuto in A_1 che è quindi un aperto essendo intorno di ogni suo punto.

Proviamo che A_2 è aperto. Sia x un punto di A_2. Poiché A è aperto esiste un cerchio aperto C di centro x tutto contenuto in A. Per ogni punto t di tale cerchio il segmento di estremi x e t è contenuto in C e quindi in A. Se t fosse congiungibile con y con una poligonale contenuta in A allora anche x risulterebbe congiungibile con y con una poligonale contenuta in A . Pertanto il cerchio aperto C è tutto contenuto in A_2 che è quindi un aperto essendo intorno di ogni suo punto.

11 . Spazi topologici compatti.

Un'altra nozione toplogica importante è la *compattezza*. Vediamo di che si tratta.

Uno spazio topologico (S , $\mathcal{A}$) è detto *compatto* se ha la seguente proprietà :

(k) *da ogni ricoprimento di aperti di S si può estrarre un ricoprimento finito.*

In simboli :

Per ogni famiglia $\{ A_i \}$ $i \in \mathcal{I}$ di aperti tali che $S = \bigcup A_i$ esiste $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ con $\mathcal{F}$ ***finito***

tale che sia

$$S = \bigcup Aj \ , \quad j \in \mathcal{F}$$

Un sottoinsieme Y dello spazio topologico (S , $\mathcal{A}$) è detto compatto se risulta compatto lo spazio topologico (Y , $\mathcal{A}_Y$).

E' facile riconoscere che il sottoinsieme Y è compatto se e solo se è verificata la seguente proprietà :

(k') Per ogni famiglia $\{ A_i \}$ $i \in \mathcal{I}$ di aperti tali che $Y \subseteq \bigcup A_i$ esiste $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ con $\mathcal{F}$ ***finito***

tale che sia

$$Y \subseteq \bigcup Aj \;\; , \;\; j \in \mathcal{F}$$

La compattezza è una proprietà topologica in quanto si conserva per omeomorfismi . Più in generale sussiste la seguente :

Proposizione 11.1 Sia *$f: \; S \to S'$ una funzione continua tra due spazi topologici $(S, \mathcal{A})$ ed $(S', \mathcal{A}')$. Se X è un sottoinsieme compatto di S allora $f(X)$ è un sottoinsieme compatto di S'.*

Dimostrazione. Per provare che f(X) è compatto basterà verificare la proprietà (k') . Sia quindi $\{ A_i^{'} \}$ $i \in \mathcal{I}$ una famiglia di aperti di S' tali che

$$f(X) \subseteq \bigcup A_i^{'} \; .$$

Da questa segue, passando alla controimmagine , e chiamando per ogni $i \in \mathcal{I}$
$A_i = f^{-1} (A_i^{'})$

$$X \subseteq f^{-1} [f(X)] \subseteq \bigcup A_i \;\; , \;\; i \in \mathcal{I}$$

Ora essendo f continua, per ogni $i \in \mathcal{I}$ l'insieme A_i è un aperto e poiché X è compatto esiste $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ con $\mathcal{F}$ ***finito*** tale che sia

$$X \subseteq \bigcup Aj \;\; , \;\; j \in \mathcal{F}$$

Da questa segue

$$f(X) \subseteq f\left(\bigcup Aj \right) \subseteq \bigcup f(Aj) \subseteq \bigcup A_j^{'} \;\; , \; j \in \mathcal{F}$$

e si ha quindi l'asserto.

Sono molto utili le proprietà espresse dalle due proposizioni che seguono.

Proposizione 11.2 *Sia $(S, \mathcal{A})$ uno spazio topologico compatto. Un sottoinsieme Y chiuso di S risulta compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{ A_i \}$, $i \in \mathcal{I}$ una famiglia di aperti tali che sia

$$Y \subseteq \bigcup A_i \; , i \in \mathcal{I} \; .$$

Poiché Y è chiuso S-Y è un aperto e si ha ovviamente :

$$S = (S - Y) \cup \bigcup A_i \ , \qquad i \in \mathcal{I} \ .$$

Poiché S è compatto esiste $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ con $\mathcal{F}$ ***finito*** tale che sia

$$S = (S - Y) \cup \bigcup Aj \ , \ j \in \mathcal{F}$$

e da questa segue che è

$$Y \subseteq \bigcup Aj \ , \ j \in \mathcal{F}$$

e ciò prova che Y è compatto.

Non sempre però un sottoinsieme compatto di uno spazio topologico è chiuso.
Sia ad esempio (R , $\mathbb{S}$) lo spazio topologico ottenuto considerando come aperti di R , il vuoto, R e tutte le semirette] ∞ , a [, $a \in R$ sinistre aperte . In tale spazio un sottoinsieme Y ridotto ad un singolo punto è compatto ma non è chiuso.

Sussiste però la seguente :

Proposizione 11.3 *Sia (S ,$\mathcal{A}$) uno spazio topologico di Hausdorff. Un sottoinsieme Y compatto di S risulta chiuso.*

Dimostrazione. Per provare che Y è chiuso basterà controllare che S-Y è aperto. Sia quindi y un punto di S – Y . Per ogni punto x di Y si ha ovviamente
$x \neq y$ e quindi , essendo lo spazio di Hausdorff , esistono due aperti A_x e V_y^x l'uno contenente x e l' altro contenente y tra loro disgiunti. Si ha ovviamente :

$$Y \subseteq \bigcup_{x \in Y} A_x$$

Essendo Y compatto esistono $x_1 , x_2 , \ldots, x_n$ in Y tali che sia :

$$Y \subseteq A_{x_1} \cup A_{X_2} \cup \ldots \cup A_{X_n}$$

Siano : V_y^1 l' aperto contenente y e disgiunto da A_{x_1}

V_y^2 l' aperto contenente y e disgiunto da A_{X_2}

……

V_y^n l' aperto contenente y e disgiunto da A_{X_n}

L'insieme $V_y = V_y^1 \cap V_y^2 \cap \ldots. \cap V_y^n$ è quindi un aperto contenente y ed esso come ora proveremo , è disgiunto da Y .

Infatti se esiste z in $Y \cap V_y$ allora z appartenendo a V_y appartiene ad *ognuno* degli aperti $V_y^1, V_y^2, \ldots. , V_y^n$ ed appartenendo ad Y ($Y \subseteq A_{x_1} \cup A_{X_2} \cup \ldots \cup A_{X_n}$) esiste j tra 1 ed n tale che il punto z appartiene ad A_{Xj} . Pertanto z appartiene a

$V_y^j \cap A_{Xj}$ il che è assurdo perché V_y^j e A_{Xj} sono disgiunti .

L'aperto V_y è quindi contenuto in S- Y e così l'insieme S-Y , essendo intorno di ogni suo punto, è un aperto e si ha così l'asserto.

Significativa è la seguente proprietà degli spazi compatti .

Proposizione 11.4 *Ogni sottoinsieme infinito di uno spazio topologico compatto ha almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Sia $(S, \mathcal{A})$ uno spazio topologico compatto e sia Y un sottoinsieme infinito di S Supponiamo per assurdo che Y non abbia punti di accumulazione. Per ogni x di S è allora possibile trovare un aperto A_x tale che sia $A_x \cap Y = \emptyset$ oppure $A_x \cap Y = \{ x \}$.
Si ha ovviamente $S = \bigcup A_x$ è poiché S è compatto esistono n punti $x_1,x_2,..,x_n$ di S per cui sia $S = A_{x_1} \cup A_{X_2} \cup \ldots \cup A_{X_n}$.

Si ha :

$$Y = Y \cap S = Y \cap (A_{x_1} \cup A_{X_2} \cup \ldots \cup A_{X_n}) =$$
$$= (Y \cap A_{x_1}) \cup (Y \cap A_{X_2}) \cup \ldots \cup (Y \cap A_{X_n})$$

da cui segue che Y è finito essendo , per ogni i= 1,..,n $| Y \cap A_{x_i} | \leq 1$.

12. *I compatti di R dotato della topologia naturale.*

Indichiamo con $\mathfrak{N}$ la topologia naturale di R . ricordiamo che gli aperti di tale topologia sono il vuoto , R , gli intervalli aperti e tutte le loro unioni.

Così come abbiamo caratterizzato i sottoinsiemi connessi di (R , $\mathcal{N}$) proviamo a caratterizzare i suoi sottoinsiemi compatti.

Premettiamo alcune nozioni . Un sottoinsieme Y di R si dice *limitato* se è contenuto in un intervallo chiuso [a , b]. Perverremo alla caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di R dopo aver acquisito la seguente :

Proposizione 12.1 *Ogni intervallo chiuso e limitato [a , b] è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{ A_i \}$, $i \in \mathcal{I}$ una famiglia di aperti di R la cui unione contiene [a , b] . Sia T il seguente sottoinsieme di [a , b]

$$T = \{x \in [a, b] : \text{esiste } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \text{ con } \mathcal{F} \textbf{\textit{ finito}} : [a, x] \subseteq \bigcup Aj \ , \ j \in \mathcal{F}\}$$

L' insieme T è non vuoto perché $a \in T$ e perverremo all' asserto se mostreremo che $b \in T$. Poiché T è una parte di [a , b] esso è limitato superiormente e quindi possiamo considerare il suo estremo superiore che indichiamo con c .

Risulta quindi $a \leq c \leq b$. Poiché $[a, b] \subseteq \bigcup A_i$ allora esiste un aperto A_h della famiglia $\{ A_i \}$ che contiene a . Esiste allora un intervallo aperto $]a-\delta, a+\delta[$ di centro a contenuto in A_h . Fanno allora parte di T tutti i punti di $[a, b] \cap [a, a+\delta[$.

Quindi è $a < c$. Poiché c appartiene ad $[a, b] \subseteq \bigcup A_i$ esiste un aperto A_j della famiglia $\{ A_i \}$ che contiene c . Conseguentemente esiste un intervallo aperto $I_\delta =]c-\delta, c+\delta[$ contenuto in A_j . Essendo $c = \sup T$ esiste $y \in T$ tale che sia $c-\delta < y \leq c$.

Quindi $c \in T$.

Se fosse per assurdo $c < b$ ogni punto z maggiore di c e minore di b ed appartenente ad $I_\delta \cap]c, b]$ farebbe parte di T .

La proposizione che segue fornisce una caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di (R , $\mathcal{N}$).

Proposizione 12.2 *Un sottoinsieme Y di (R , $\mathcal{N}$) è compatto se e solo se esso è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo che Y sia chiuso e limitato e proviamo che è compatto . Poiché è limitato esso è contenuto in un intervallo chiuso [a , b] . Ma tale intervallo è un compatto e quindi Y essendo un suo chiuso (perché [a , b] è chiuso) è un compatto (cfr. Proposizione 11.2).

Viceversa supponiamo che Y sia compatto e proviamo che è chiuso e limitato. Poiché (R , $\mathcal{N}$) è di Hausdorff allora Y essendo compatto è chiuso per la proposizione 11.3. Inoltre esso è limitato.

Infatti sia y un punto di Y e sia $\mathcal{R} = \{ A_n \}$ la famiglia di aperti così definita : per ogni n intero sia

$$A_n = \,]\, y - n , \; y + n \, [$$

E' chiaro che è $Y \subseteq \bigcup A_n$, $n \in N$ e poiché Y è compatto Y è contenuto nell'unione di un numero finito A_{m_1} , A_{m_2} ,… , A_{m_t} di tali aperti.

Detto $m = \max \{ m_1 , m_2 ,.., m_t \}$ si ha

$$Y \subseteq A_{m_1} \cup A_{m_2} \cup \ldots \cup A_{m_t} = \,]\, y - m, \; y + m \, [\; \subseteq \; [\, y - m, \; y + m \,]$$

e ciò prova che Y è limitato.

Il teorema ora provato per i sottoinsiemi di R è un caso particolare di un teorema generale che caratterizza i sottoinsiemi compatti di R^n dotato della topologia naturale. Proveremo infatti successivamente con argomentazioni del tutto simili , che i sottoinsiemi compatti di R^n , dotato della topologia naturale , sono tutti e soli i sottoinsiemi chiusi e limitati.

Per fare ciò dobbiamo però prima introdurre la nozione di spazio prodotto di due spazi topologici.

13. Spazio topologico prodotto.

Siano (S_1 , $\mathcal{A}_1$) ed (S_2 , $\mathcal{A}_2$) due spazi topologici. Sia $S = S_1 \times S_2$ il prodotto cartesiano degli insiemi S_1 ed S_2 . Gli elementi di S sono quindi le coppie ordinate (x_1, x_2) con $x_1 \in S_1$ ed $x_2 \in S_2$. La famiglia $\mathcal{B}$ di parti di S i cui elementi sono tutti i possibili prodotti $A_1 \times A_2$ con $A_1 \in \mathcal{A}_1$ ed $A_2 \in \mathcal{A}_2$ verifica , come facilmente si controlla , le proprietà a) e b) della proposizione 1.1 ed è quindi in grado di generare una topologia $\mathcal{A}$ su S i cui aperti sono il vuoto , e tutte le possibili unioni di elementi di $\mathcal{B}$. La topologia $\mathcal{A}$ di S così ottenuta è detta la topologia prodotto delle due topologie $\mathcal{A}_1$ ed $\mathcal{A}_2$ e lo spazio topologico (S , $\mathcal{A}$) cosi ottenuto è chiamato spazio topologico prodotto.

Evidentemente la definizione di spazio prodotto può essere estesa al caso in cui i fattori siano un numero finito maggiore o eguale a due.

Lo spazio prodotto "eredita" le eventuali buone proprietà topologiche dei due spazi che lo hanno generato. Noi per brevità non mostreremo in dettaglio questo aspetto anche se molte dimostrazioni sono piuttosto semplici. Ci limitiamo quindi solo ad elencare ***alcune*** proprietà dello spazio prodotto.

a) *le due funzioni naturali* (*proiezioni*)

$$p_1 : (x_1, x_2) \in S_1 \times S_2 \rightarrow x_1 \in S_1$$

$$p_2 : (x_1, x_2) \in S_1 \times S_2 \rightarrow x_2 \in S_2$$

che legano lo spazio prodotto ai singoli spazi sono entrambe continue.

b) lo spazio prodotto di due spazi di Hausdorff è di Hausdorff.

c) Lo spazio prodotto di due spazi a base numerabile è a base numerabile.

d) lo spazio prodotto di due spazi connessi è connesso.

e) *lo spazio prodotto di due spazi compatti è compatto.*

14. I compatti di R^n dotato della topologia naturale.

In questo numero forniremo alcune caratterizzazioni dei sottoinsiemi compatti di R^n munito della topologia naturale. Preliminarmente diamo alcune definizioni.

Sia $\underline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ un punto di R^n e siano $d_1, d_2, \ldots, d_n$ n numeri reali positivi.

Si definisce *n-rettangolo aperto* di centro $\underline{\mathbf{y}}$ e semidimensioni $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ il seguente sottoinsieme di R^n .

$$K(\underline{\mathbf{y}}, (d_1, d_2, \ldots, d_n)) =]\, y_1 - d_1 , y_1 + d_1 \,[\times]\, y_2 - d_2 , y_2 + d_2 \,[\times \ldots \times]\, y_n - d_n , y_n + d_n \,[$$

L' *n-rettangolo chiuso* di centro $\underline{\mathbf{y}}$ e semidimensioni $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ è il seguente sottoinsieme di R^n .

$K(\underline{y},(d_1,d_2,\dots,d_n)) = [\, y_1 - d_1 \,,\, y_1 + d_1 \,] \times [y_2 - d_2 \,,\, y_2 + d_2 \,] \times \dots \times [\, y_n - d_n,\ y_n + d_n]$

Quando è $d_1=d_2= \dots =d_n = d$ l'n-rettangolo viene chiamato *n-cubo* di centro $\underline{y}$ e di lato 2d.

Non è difficile provare che fissato un cerchio aperto $C(\underline{y}, r)$ di centro $\underline{y}$ e raggio r si possono trovare due n-rettangoli aperti di centro $\underline{y}$ ed opportune semidimensioni , uno contenuto nel cerchio C e l'altro contenente il cerchio C.

Gli n-rettangoli aperti di R^n al pari dei cerchi aperti hanno le proprietà a) e b) della proposizione 1.1 e quindi definiscono anch'essi una topologia di R^n . Per l'osservazione fatta prima un sottoinsieme che sia unione di cerchi aperti è anche unione di n-rettangoli aperti e viceversa. Pertanto gli n-rettangoli aperti ed i cerchi aperti definiscono la stessa topologia su R^n .

La topologia naturale di R^n che è quella indotta dalla metrica euclidea può quindi anche pensarsi come la topologia che si ottiene su R^n quando si faccia il prodotto di $(R, \mathfrak{N})$ n –volte.

Gli n-rettangoli chiusi essendo prodotto di intervalli chiusi di R sono prodotto di spazi compatti e sono quindi anch'essi compatti.

Un sottoinsieme Y di R^n è detto *limitato* se esso è contenuto in un n-rettangolo o equivalentemente in un cerchio.

Siamo ora in grado di provare la seguente :

Proposizione 13.1 *Un sottoinsieme Y di R^n è compatto se e solo se esso è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo che Y sia chiuso e limitato . Poiché esso è limitato allora esso è contenuto in n-rettangolo chiuso K . Ma K , come già osservato , è un compatto e quindi Y essendo un suo chiuso è anch'esso compatto.

Viceversa supponiamo che Y sia compatto. Poiché lo spazio R^n è di Hausdorff Y è chiuso. Proviamo che è anche limitato. Infatti sia $\underline{y}$ un punto di Y e sia

$\mathfrak{R} = \{ C_n \}_{n \in N}$, la famiglia di cerchi aperti con centro in $\underline{y}$ e raggio n intero positivo.

E' chiaro che è $Y \subseteq \bigcup C_n$, $n \in N$ e poiché Y è compatto Y è contenuto nell'unione di un numero finito $C_{m_1}, C_{m_2}, \dots, C_{m_t}$ di tali cerchi aperti.

Detto $m = \max \{ m_1, m_2, .., m_t \}$ si ha

$$Y \subseteq C_{m_1} \cup C_{m_2} \cup \ldots \cup C_{m_t} = C_m$$

e ciò prova che Y è limitato.

Un'altra caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di è fornita dalla seguente

Proposizione 14.2 *Un sottoinsieme K di R^n è compatto se e solo se ogni suo sottoinsieme Y infinito ha almeno un punto di accumulazione in K.*

Dimostrazione. Supponiamo K compatto (quindi chiuso e limitato) e sia Y un suo sottoinsieme infinito.Per la proposizione 11.4 , Y ha almeno un punto di accumulazione e sia z tale punto. Il punto z essendo di accumulazione per Y è aderente ad Y e quindi anche a K che contiene Y . Ma K è chiuso e quindi il punto z appartiene a K.

Supponiamo che ogni sottoinsieme infinito di K abbia un punto di accumulazione in K e proviamo che K è compatto. Sarà ovviamente sufficiente provare che K è chiuso e limitato. Prima di provare ciò ricordiamo un risultato che abbiamo già provato (Proposizione 3.5) ma del quale faremo ora uso :

Poiché R^n è di Hausdorff ed i suoi aperti sono infiniti allora:

se z è un punto di accumulazione per il sottoinsieme X , in ogni aperto che contenga z ci sono infiniti punti di X.

Proviamo quindi che K è chiuso e limitato nell'ipotesi che ogni suo sottoinsieme infinito abbia un punto di accumulazione in K .

Cominciamo a provare che è limitato. Supponiamo per assurdo che K non sia limitato . Fissiamo un punto y di K . Per ogni intero n , consideriamo il cerchio aperto di centro y e raggio n . poiché K non è limitato esiste almeno un punto x_n di K fuori dal cerchio C (y , n) . Si ha quindi

$$\text{per ogni } n \ , \quad d(x_n, y) > n$$

inoltre è sempre possibile fare in modo che risulti

$$d(x_{n+1}, y) > d(x_n, y).$$

In tal modo gli elementi della successione $x_1, x_2, .., x_n, ..$ di punti di K sono tutti distinti tra loro e costituiscono quindi un sottoinsieme X infinito di K . Il punto y non è d'accumulazione per X in quanto nel cerchio aperto C(y, $\frac{1}{2}$) non c'è alcun punto di X .Sia z un punto di K diverso da y e sia C (z , r) un cerchio aperto di centro z e raggio r . Scelto un intero m tale che sia

$$m > d(y,z) + r$$

il cerchio C (y , m) di centro y e raggio m contiene il cerchio C (z , r). Infatti per ogni punto t di C (z , r) si ha :

$$d(t , y) \leq d(t , z) + d(z , y) < r + d(z , y) < m$$

Poichè tutti i punti $x_m,x_{m+1},..,x_n,..$ della successione sono fuori dal cerchio C(y, m) nel cerchio C (z , r) ci sono al più un numero finito di elementi di X e così z non è d'accumulazione per X. Il sottoinsieme X di K è infinito ma è privo di punti di accumulazione in K e ciò è contro l'ipotesi.

Proviamo ora che K è chiuso. Sia z un punto di accumulazione per K. Per ogni intero n consideriamo il cerchio aperto di centro z e raggio $\frac{1}{n}$. Poiché z è d'accumulazione esiste in tale cerchio un punto x_n di K distinto da z . Si ha quindi

per ogni n $\quad d(x_n , z) < \frac{1}{n}$

Possiamo inoltre fare in modo che risulti altresì

per ogni n $\quad d (x_{n+1} , z) < d (x_n , z).$

In tal modo gli elementi della successione $x_1,x_2,..,x_n,..$ di punti di K così costruita , sono tutti distinti tra loro e costituiscono quindi un sottoinsieme X infinito di K. Poiché per ogni n, è $d(x_n , z) < \frac{1}{n}$ allora la successione $x_1,x_2,..,x_n,..$ converge manifestamente al punto z .

Poiché X è infinito, per l' ipotesi in cui siamo , esso ammette un punto y di accumulazione in K . Se proviamo che z=y allora z è un punto di K e quindi K è chiuso in quanto contiene i suoi punti di accumulazione.

Supponiamo per assurdo che sia $z \neq y$. Poiché lo spazio è di Hausdorff esistono due cerchi aperti C (z , r) e C (y , r') di centro z ed y disgiunti tra loro.

Poiché $x_1,x_2,..,x_n,..$ converge al punto z esiste un intero m tale che i punti $x_m,x_{m+1},..,x_n,..$ siano tutti nel cerchio C (z , r) . Conseguentemente nel cerchio

C(y , r') ci sono solo un numero finito di elementi di X e ciò contraddice la proprietà che abbiamo richiamato all'inizio relativa ai punti di accumulazione di uno spazio di Hausdorff.

15. Spazio topologico quoziente.

Concludiamo queste note con la nozione di *spazio topologico quoziente.* Vediamo di che si tratta. Sia (S , $\mathcal{A}$) uno spazio topologico . Sia $\Re$ una relazione d'equivalenza definita nell'insieme S . Lo spazio quoziente S/ $\Re$ è come è noto, l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza che $\Re$ crea.

Possiamo munire l'insieme S/ $\Re$ di una topologia al seguente modo. Indichiamo con *p* la funzione che associa ad ogni punto x di S la classe d'equivalenza di x che indichiamo con [x].

$$p : x \in S \rightarrow [x] \in S/ \Re$$

Ora una classe d'equivalenza [x] è un elemento di S/ $\Re$ ma è anche un sottoinsieme di S quando si pensa agli elementi che di essa fanno parte cioè quando si faccia la sua controimmagine tramite *p* . Selezioniamo in S/ $\Re$ una famiglia $\mathcal{A}$'di parti al seguente modo.

Un sottoinsieme A' di S/ $\Re$ appartiene ad $\mathcal{A}$' e viene chiamato *aperto* se p^{-1} (A') è un aperto di S. In sostanza bisogna considerare le classi che fanno parte di A' come sottoinsiemi di S e controllare che la loro unione dia un sottoinsieme aperto di S. Si controlla immediatamente che la famiglia $\mathcal{A}$' ora definita è una topologia per l'insieme S/ $\Re$. Quando l'insieme S/ $\Re$ si munisca di questa topologia $\mathcal{A}$' lo spazio topologico che si ottiene viene chiamato *spazio topologico quoziente.*

Per la definizione data, la funzione suriettiva

$$p : x \in S \rightarrow [x] \in S/ \Re$$

quando la si pensi come funzione tra i due spazi topologici (S , $\mathcal{A}$) ed (S/ $\Re$, $\mathcal{A}'$) è una funzione continua .

Come conseguenza si ha allora che se (S , $\mathcal{A}$) è connesso o compatto tale risulta anche lo spazio quoziente (S/ $\Re$, $\mathcal{A}'$).

Facciamo un esempio . Consideriamo lo spazio topologico R^2 dotato della topologia naturale.

Due punti (x_1 , y_1) ed (x_2 , y_2) li diciamo $\Re$ - equivalenti se risulta $x_1 = x_2$.

Tale relazione $\Re$ è d'equivalenza e nella classe $[(a , b)]$ ci sono quindi tutte le coppie del tipo (a , y).

Rappresentando R^2 nel piano facendo uso di un riferimento monometrico ortogonale si ha che le classi d'equivalenza sono le rette parallele all'asse y. Conseguentemente gli aperti dello spazio topologico quoziente $R^2 / \Re$ sono strisce aperte del tipo $] a , b [\times R$ o unioni di strisce di questo tipo.

La relazione $\Re$ introdotta ha voluto identificare tutte le coppie del tipo (a , y) (*con a fisso ed y variabile in R*) col singolo numero a . La funzione

$$f : a \in R \rightarrow [(a , y)] \in R^2 / \Re$$

diventa quindi un omeomorfismo tra R (dotato della topologia naturale) e lo spazio quoziente $R^2 / \Re$.

Quando io ero studente universitario i tempi dedicati all'insegnamento non erano contingentati. I corsi duravano un tempo ragionevole e non c'erano difficoltà a fare qualche lezione in più rispetto all'orario previsto. Tutto ciò favoriva l'apprendimento e non c'era nessuna vessazione. I testi erano per lo più consigliati e si poteva attraverso la loro consultazione ricostruire ed approfondire quanto ascoltato a lezione.

Ora pare che il tempo scorra più rapidamente e tutto questo non si può più realizzare.

Questo cambiamento di ritmi rende utile la stesura di questo libretto di appunti in cui si riassumono sinteticamente i contenuti del corso di Geometria II *da me tenuto questo anno accademico.*

Certo ci vorrebbero degli approfondimenti , ma questi vengono lasciati a quegli studenti che trovano in queste note gli stimoli ed il gusto di una conoscenza più profonda .

Prof. Domenico Olanda

" Ascoltare senza ritenere
non è sapere "
Dante Alighieri

Indice

Capitolo VII – Note di topologia generale