Capitolo IV

Forme bilineari e forme quadratiche

1. Forme bilineari

Prima di addentrarci nell'argomento richiamiamo alcune nozioni che ci serviranno in seguito.

Una matrice A quadrata d'ordine n che sia invertibile è detta ***ortogonale*** se la sua inversa coincide con la sua trasposta .

$$A \text{ ortogonale} \iff A_t = A^{-1}$$

Indichiamo con $\underline{\mathbf{a}}_1\ \underline{\mathbf{a}}_2 \ldots \underline{\mathbf{a}}_n$ le righe della matrice A e con $\underline{\mathbf{a}}^1\ \underline{\mathbf{a}}^2 \ldots\ \underline{\mathbf{a}}^n$ le sue colonne.

Se A è ortogonale da $A\ A_t = I$ segue che

$$(*) \qquad \underline{\mathbf{a}}_i \times \underline{\mathbf{a}}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e ciò mostra che le righe di A sono una base ortonormale di R^n. Viceversa se le righe di A sono una base ortonormale di R^n allora si ha $A\ A_t = I$ e quindi $A_t = A^{-1}$ il che mostra che A è una matrice ortogonale .

Analogamente se A è ortogonale da $A_t A = I$ segue che

1

$$(*) \qquad \underline{\mathbf{a}}^i \times \underline{\mathbf{a}}^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e ciò mostra che le colonne di A sono una base ortonormale di R^n. Viceversa se le colonne di A sono una base ortonormale di R^n allora si ha $A_t A = I$ e quindi $A_t = A^{-1}$ il che mostra che A è una matrice ortogonale .

Ricordiamo ora due utili definizioni.

Due matrici quadrate A ed A' d'ordine n sul campo K si dicono ***simili*** se esiste una matrice P invertibile tale che risulti :

$$A' = P^{-1} A\ P$$

si dicono ***congruenti*** se esiste una matrice P invertibile tale che risulti

$$A' = P_t\, A\, P$$

Matrici simili, come già visto, hanno gli stessi autovalori e lo stesso rango mentre matrici congruenti hanno lo stesso rango ma in generale non gli stessi autovalori.

(Si prova infatti che :

Proposizione*. Siano $A \in Kn,n$ e $B \in GL(n, K)$ due matrici quadrate sul campo K, con B invertibile. Si ha allora : $r(A) = r(A\, B) = r(B\, A)$.*

Dimostrazione*. Basta ricordare che il rango di A, r(A), coincide con la dimensione dello spazio immagine dell'endomorfismo F_A di K^n, e tenere conto del fatto che, essendo B invertibile, F_B è un idomorfismo).*

Sia $V_n = V_n(R)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo reale. Una applicazione

$$g : V_n \times V_n \dashrightarrow R$$
$$(v, w) \dashrightarrow g(v, w)$$

è detta una ***forma bilineare*** se valgono le seguenti proprietà :

1. $g(\alpha v, w) = \alpha\, g(v, w)$
2. $g(v + v', w) = g(v, w) + g(v', w)$
3. $g(v, \alpha w) = \alpha\, g(v, w)$
4. $g(v, w + w') = g(v, w) + g(v, w')$

La forma bilineare g è detta ***simmetrica*** se risulta

$$g(v, w) = g(w, v) \qquad \text{per ogni coppia di vettori v e w.}$$

Ovviamente se g è simmetrica le proprietà 1., 2. sono equivalenti alle proprietà 3., 4.

(Una forma bilineare simmetrica è anche detta : prodotto scalare).

Esempi di forme bilineari di R^n si ottengono al seguente modo. Si consideri una matrice $A = (a_{ij})$ reale quadrata d'ordine n e sia

$$g_A : R^n \times R^n \rightarrow R$$

l' applicazione così definita :

$$g_A(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{x}}_t A \underline{\mathbf{y}} \quad (= X_t A Y)$$

avendo al solito indicato con $\underline{\mathbf{x}}$ ed $\underline{\mathbf{y}}$ i vettori numerici

$$(X =) \ \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad (Y =) \ \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

Esplicitamente è :

$g_A(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+\ldots+a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2+\ldots+a_{2n}x_2y_n+\ldots\ldots\ldots+$
$+ a_{n1}x_ny_1+ a_{n2}x_ny_2 +\ldots.+ a_{nn}x_ny_n$

Se la matrice A è simmetrica si ha :

$$g_A(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{x}}_t A \underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{y}}_t A_t \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}}_t A \underline{\mathbf{x}} = g_A(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}})$$
(infatti $X_t A Y = (X_t A Y)_t = Y_t At X = Y_t A X$)

e quindi la forma bilineare che essa definisce è simmetrica.

(Osserviamo che ogni forma bilineare di uno spazio vettoriale di dimensione finita, in termini di componenti, si esprime sempre come la forma dell'esempio precedente. Infatti:)

Sia $V_n = V_n(R)$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo reale. e

$$g : V_n \times V_n \dashrightarrow R$$
$$(v, w) \dashrightarrow g(v, w)$$

una forma bilineare di V_n .

Come si può calcolare facilmente il numero g (v , w) ? Vediamo.

Fissiamo nello spazio vettoriale V_n una sua base *(ordinata)* B = ($\underline{\mathbf{e}}_1$, $\underline{\mathbf{e}}_2$, …, $\underline{\mathbf{e}}_n$) . Denotiamo per ogni i , j = 1,2,…,n con

$$a_{ij} = g(\underline{\mathbf{e}}_i, \underline{\mathbf{e}}_j)$$

e sia $A = (a_{ij})$ la matrice così determinata. La matrice A così costruita si dice che rappresenta g nella base B (*ed è detta : matrice di Gram associata a g nel riferimento B (cfr."Appunti di Geometria", Cap. VIII, Par. 3)).* Se v e w sono due vettori si ha :

$$v = x_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \ldots + x_n\underline{\mathbf{e}}_n \qquad , \qquad w = y_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \ldots + y_n\underline{\mathbf{e}}_n$$

e quindi si ha, tenendo conto che g è bilineare ,

(**) $g (v , w) = g (x_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \ldots + x_n\underline{\mathbf{e}}_n \;,\; y_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \ldots + y_n\underline{\mathbf{e}}_n) =$
$= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \ldots + a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \ldots + a_{2n}x_2y_n + \ldots\ldots\ldots +$
$+ a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \ldots + a_{nn}x_ny_n$.

Se indichiamo con

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

le coordinate dei vettori v e w nella base B allora l'espressione (**) sopra espressa può scriversi in forma matriciale al seguente modo :

$$g (v , w) = \underline{\mathbf{x}}_t \, A \, \underline{\mathbf{y}}$$

Quindi risulta

$$g (v , w) = \underline{\mathbf{x}}_t \, A \, \underline{\mathbf{y}} = g_G (\underline{\mathbf{x}} , \underline{\mathbf{y}})$$

Come cambia la matrice A cambiando la base B ? Vediamo.

Sia B' = ($\underline{\mathbf{e}}'_1$, $\underline{\mathbf{e}}'_2$,….,$\underline{\mathbf{e}}'_n$) un' altra base *(ordinata)* dello spazio vettoriale e sia P la matrice di passaggio dalla base B' alla base B. La matrice P ha per colonne le coordinate dei vettori $\underline{\mathbf{e}}'_i$ di B' rispetto alla base B ed è quindi invertibile. Si ha quindi

$$(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n) \begin{pmatrix} & & \\ & P & \\ & & \end{pmatrix} = (\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \ldots, \underline{e}'_n)$$

Denotiamo con A' la matrice che rappresenta g nella base B' e per ogni coppia di vettori v e w con

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad \underline{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ . \\ y'_n \end{pmatrix}$$

le coordinate dei vettori v e w nella base B'. Si ha

$$P\,\underline{x}' = \underline{x} \qquad \text{e} \qquad P\,\underline{y}' = \underline{y}$$

(cfr. "Appunti di Geometria", Cap. II, Par. 8)

Si ha allora

$$g(v, w) = \underline{x}_t\, A\, \underline{y} = \underline{x}'_t\, P_t\, A\, P\, \underline{y}' = \underline{x}'_t\, A'\, \underline{y}'$$

da cui segue

$$A' = P_t\, A\, P$$

Abbiamo così provato che cambiando la base B con la base B' , la matrice A legata alla base B cambia , e la nuova matrice A' legata alla nuova base B' è ***congruente*** alla matrice A. *(Poiché, come si è già osservato, matrici congruenti hanno lo stesso rango, si ha che, al variare del riferimento B, il rango della matrice di Gram di g non varia. Tale rango è detto allora : rango della forma g).*

Una rappresentazione piuttosto semplice della forma bilineare g si ha quando essa è simmetrica. Vediamo.

Supponiamo quindi ora che la forma bilineare g sia **simmetrica** . Fissiamo una base B = $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n)$ nello spazio vettoriale e sia A la matrice che rappresenta g nella base B. Poichè g è simmetrica la matrice A è simmetrica. La funzione lineare di R^n in sè indotta da A che è così definita

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (Y = A\,X)$$

è una funzione lineare simmetrica *(endomorfismo simmetrico di R^n)*. Pertanto per quanto già visto essa *è ortogonalmente diagonalizzabile, cioè* ammette una base ortonormale di autovettori *(cfr."Appunti di Geometria", Cap. VIII, Par. 6)*. Esistono quindi n vettori $\underline{\mathbf{p}}_1$, $\underline{\mathbf{p}}_2$,…, $\underline{\mathbf{p}}_n$ di R^n a due a due ortogonali e ciascuno di lunghezza uno che sono autovettori per la funzione F_A. Indicando con λ_1 , λ_2 , …. , λ_n gli autovalori degli autovettori $\underline{\mathbf{p}}_1$, $\underline{\mathbf{p}}_2$,…, $\underline{\mathbf{p}}_n$ si ha quindi :

(***) $\quad A\,\underline{\mathbf{p}}_1 = \lambda_1\,\underline{\mathbf{p}}_1 . \quad A\,\underline{\mathbf{p}}_2 = \lambda_2\,\underline{\mathbf{p}}_2 , \ \ldots\ldots\ldots , \quad A\,\underline{\mathbf{p}}_n = \lambda_2\,\underline{\mathbf{p}}_n$

Sia P la matrice quadrata d'ordine n le cui colonne sono gli autovettori $\underline{\mathbf{p}}_1$, $\underline{\mathbf{p}}_2$,…, $\underline{\mathbf{p}}_n$ e D la matrice diagonale avente sulla diagonale gli autovalori λ_1 , λ_2 , …. , λ_n .

Se ci è utile possiamo disporre le colonne $\underline{\mathbf{p}}_i$ nella matrice P in modo che le prime s colonne siano costituite dagli autovettori con autovalore positivo , poi quelle con autovalore negativo ed infine quelle con autovalore zero. In tal modo sulla diagonale della matrice D appaiono nei primi s posti gli autovalori positivi , poi quelli negativi e poi sempre zero.

Le relazioni (***) sopra scritte equivalgono alla seguente eguaglianza tra matrici

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & P & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & P & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & D & \\ & & \end{pmatrix}$$

Da $A\,P = P\,D$ segue

$$P^{-1} A\,P = D \quad \textit{(come già sapevamo).}$$

Poiché la matrice P è ortogonale si ha allora :

$$P^{-1} A\,P = P_t\,A\,P = D.$$

Se $B' = (\underline{\mathbf{e}}'_1 , \underline{\mathbf{e}}'_2 ,\ldots,\underline{\mathbf{e}}'_n)$ è la base di V_n ottenuta attraverso l'uso della matrice ortogonale P

$$(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n)\begin{pmatrix} & & \\ & P & \\ & & \end{pmatrix} = (\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \ldots, \underline{e}'_n),$$

(cioè B' è la base tale che P è la matrice di passaggio da B' a B), per quanto abbiamo prima visto la matrice che rappresenta g nella base B' è la matrice D e quindi l'espressione di g nella base B' diventa :

(i) $$g(v,w) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \ldots + \lambda_t x_t y_t \qquad t \leq n$$

avendo indicato con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ gli autovalori non nulli della matrice A.

Poiché la matrice A è congruente alla matrice D essa ha lo stesso rango di D la quale ha rango pari al numero di autovalori diversi da zero.

Se al posto della base iniziale B avessimo scelto un'altra base B° allora la nuova matrice A° legata alla base B° anch'essa, seguendo lo stesso procedimento, sarebbe stata congruente ad una matrice diagonale D° avente sulla diagonale gli autovalori di A°.

Poiché A ed A° sono congruenti esse pur non avendo gli stessi autovalori hanno lo stesso rango e quindi D e D° hanno lo stesso rango. Per tale ragione D e D° avranno sulla diagonale lo stesso numero di elementi diversi da zero.

Si conclude così che nell'espressione

$$g(v,w) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \ldots, \lambda_t x_t y_t \qquad t \leq n$$

cambiando base possono cambiare i coefficienti <u>ma resta invariato il numero di addendi di tale espressione in quanto non cambia il numero di autovalori diversi da zero</u>.

2. Forme quadratiche.

Se

$$g : V_n \times V_n \rightarrow R$$

è una forma bilineare **simmetrica** si chiama ***forma quadratica*** associata a g l'applicazione

$$q : V_n \rightarrow R$$

così definita :

$$q(v) = g\,(v\,,\,v)$$

Per quanto precede si è visto che è possibile determinare una opportuna base B = ($\underline{\mathbf{e}}_1$, $\underline{\mathbf{e}}_2$,….,$\underline{\mathbf{e}}_n$) dello spazio vettoriale nella quale la matrice *di Gram di g*, che indichiamo con D, legata a tale base è di forma diagonale e l'espressione di q è del tipo :

$$q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots , \lambda_t x_t^2 \qquad\qquad t \le n$$

Possiamo inoltre ritenere lecito che i primi s autovalori siano positivi ed i rimanenti quelli negativi.

La seguente matrice J diagonale è non degenere ed essendo diagonale coincide con la sua trasposta.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_s}} & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{s+1}}} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_t}} & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Usando tale matrice possiamo cambiare la base B in un'altra base B' = ($\underline{\mathbf{e}}'_1$, $\underline{\mathbf{e}}'_2$,….,$\underline{\mathbf{e}}'_n$) *tale che la matrice J sia matrice di passaggio da B' a B* (B' è ottenuta al seguente modo

$$(\underline{\mathbf{e}}_1 , \underline{\mathbf{e}}_2 ,\ldots,\underline{\mathbf{e}}_n)\begin{pmatrix} & & \\ & J & \\ & & \end{pmatrix} = (\underline{\mathbf{e}}'_1 , \underline{\mathbf{e}}'_2 ,\ldots,\underline{\mathbf{e}}'_n) \text{).}$$

Nella base B' così ottenuta la matrice che rappresenta g è ora la seguente $J_t\, D\, J$:

$$J_t\, D\, J = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& -1 &&& \\ &&&& -1 && \\ &&&&& 0 & \\ &&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

e l'espressione di q rispetto a tale base diventa :

$$q(v) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_t^2 \qquad t \le n$$

Abbiamo già visto che qualunque sia la base scelta all'inizio il numero di autovalori non nulli rimane costante. Proviamo ora che ciò che vale ulteriormente è che :

Proposizione. Il numero di autovalori positivi rimane costante, e quindi nell'espressione

$$\mathbf{q(v)} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_t^2 \qquad \mathbf{t \le n}$$

il numero di 1 e -1 è costante.

Tale rappresentazione si chiama la ***forma canonica*** di q ed il numero di 1 e -1 che in essa figurano è detta la ***segnatura*** della forma.

Dimostrazione. Supponiamo che in due basi differenti B e B' si trova che l'espressione di q è

$$q(v) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_t^2 \qquad t \le n \quad \text{nella base B}$$

$$q(v) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - \ldots - x_t^2 \qquad t \le n \quad \text{nella base B'}$$

Mostreremo che risulta $m = s$ e quindi le due espressioni coincidono.

Supponiamo per assurdo che sia $m \neq s$ e per fissare le idee sia $s > m$.

Siano L e T i seguenti sottospazi di V_n

$$L = \{v \in V_n \ : \ x_{s+1}=x_{s+2}=..=x_n= 0 \ \text{ nella base B }\}$$

$$T = \{v \in V_n \ : \ x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0 \ \text{ nella base B' }\}$$

I due sottospazi sono evidentemente isomorfi il primo a R^s ed il secondo a R^{n-m}.
Pertanto per la formula di Grassmann si ha :

$$\dim (L \cap T) = \dim L + \dim T - \dim (L + T) \geq s + n-m - n = s-m > 0$$

Esiste pertanto un vettore v non nullo comune ad L e a T.

Calcolando allora q(v) si ha q(v) > 0, essendo le coordinate $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots x_n$ di v nella base B tutte nulle . Lo stesso vettore v nella base B' ha le coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tutte nulle e quindi è $q(v) \leq 0$. L' asserto è così provato.

Concludiamo con qualche utile osservazione :

Se A= (a_{ij}) è una matrice reale quadrata d'ordine n abbiamo già visto che essa induce in R^n una forma bilineare , che abbiamo indicato con g_A , ponendo :
$g_A ((x_1,x_2,\ldots,x_n) , (y_1,y_2,\ldots,y_n)) = a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+\ldots+a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2+\ldots+a_{2n}x_2y_n +\ldots\ldots\ldots+ a_{n1}x_ny_1+ a_{n2}x_ny_2 +\ldots.+ a_{nn}x_ny_n$

Se indichiamo con B = ($\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$) la base canonica di R^n si ha facilmente

$$g_A (\underline{\mathbf{u}}_i, \underline{\mathbf{u}}_j) = a_{ij}$$

e così è A stessa la matrice che rappresenta g_A nella base canonica.

Ne segue che se A è una matrice non simmetrica per qualche coppia di indici i e j si ha $a_{ij} \neq a_{ji}$ e quindi $g_A (\underline{\mathbf{u}}_i , \underline{\mathbf{u}}_j) \neq g_A (\underline{\mathbf{u}}_j , \underline{\mathbf{u}}_i)$. Pertanto **la forma bilineare è simmetrica se e solo se A è una matrice simmetrica**.

Se A è simmetrica l' espressione
$g_A ((x_1,x_2,\ldots,x_n) , (y_1,y_2,\ldots,y_n)) = a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+\ldots+a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 +\ldots+ a_{2n}x_2y_n +\ldots\ldots\ldots+ a_{n1}x_ny_1+ a_{n2}x_ny_2 +\ldots.+ a_{nn}x_ny_n$
quando la si calcoli sulla coppia $((x_1,x_2,\ldots,x_n) , (x_1,x_2,\ldots,x_n))$ diventa
$a_{11}x_1x_1+a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2x_2+\ldots+a_{2n}x_2x_n +\ldots\ldots\ldots+$
$+ a_{n1}x_nx_1+ a_{n2}x_nx_2 +\ldots.+ a_{nn}x_nx_n$
e tenendo conto che è $a_{ij} = a_{ji}$ la forma quadratica associata ha la seguente espressione :
$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 +\ldots. + a_{nn} x_n^2 + 2 a_{12}x_1x_2 + \ldots.+ 2 a_{1n}x_1x_n +\ldots\ldots\ldots+ 2 a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n.$

Si conclude che se si vuole risalire alla matrice A attraverso l'espressione della forma quadratica si deve tener conto che il numero che accompagna il monomio x_ix_j è il doppio di a_{ij}.

A titolo di esempio la matrice simmetrica associata alla seguente forma quadratica di R^2

$$q(\underline{\mathbf{x}}) = 3\, x_1^2 + 8\, x_2^2 + 4\, x_1 x_2$$

è la seguente

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$