CONICHE E QUADRICHE

1. Esercizi

Esercizio 1. Classificare, ridurre a forma canonica (completando i quadrati), e disegnare le seguenti coniche:

$$\begin{array}{llll} \gamma_1: & x^2 - y^2 + 2x = 0; & \gamma_2: & 2x^2 + 4x - 2y + 1 = 0; \\ \gamma_3: & x^2 + 2y^2 + 12y + 10 = 0; & \gamma_4: & x^2 + 2y^2 + 12y + 20 = 0; \\ \gamma_5: & x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0; & \gamma_6: & xy + x + y + 1 = 0. \end{array}$$

Esercizio 2. Dato il seguente fascio di coniche

$$\gamma_t: \qquad x^2 + (1-t)y^2 + 2tx - 2(1-t)y + 2 - t = 0$$

determinare i valori del parametro t per cui

(1) γ_t è una parabola;
(2) γ_t è una iperbole;
(3) γ_t è una ellisse con punti reali;
(4) γ_t è una circonferenza;
(5) γ_t è una conica degenere;
(6) γ_t è una ellisse senza punti reali.

Esercizio 3. Classificare, trovare la forma canonica, il cambio di riferimento e disegnare le seguenti coniche:

(1) $\gamma_1: x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 2y = 0$;
(2) $\gamma_2: 3x^2 + 2xy + 3y^2 + x + 2y + 1 = 0$;
(3) $\gamma_3: x^2 + 6xy + y^2 - 3 = 0$;
(4) $\gamma_4: 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$;
(5) $\gamma_5: x^2 + 2xy + y^2 + 4x = 0$;
(6) $\gamma_6: x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0$;
(7) $\gamma_7: 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y = 0$.

Esercizio 4. Trovare l' equazione della ellisse di semiassi $a = 2$, e $b = 1$, di centro $C(1,1)$ ed avente la retta $r: 2x - y - 1 = 0$ come supporto dell' asse maggiore.

Esercizio 5. Trovare l' equazione della retta tangente alla conica $\gamma: x^2+2xy+2y^2-5 = 0$ passante per il punto $A(1,1)$, e le equazioni delle tangenti a γ per $B(4,-1)$.

Esercizio 6. Trovare il luogo dei punti medi delle corde di $\gamma: x^2 + 5xy + 6y^2 - 4 = 0$ parallele al vettore $v = (1,0)$ e verificare che tali punti medi sono allineati.

Esercizio 7. Classificare e ridurre a forma canonica le seguenti quadriche

$\sigma_1: 6xz + 8yz - 5x = 0$;
$\sigma_2: 6xz + 8yz - 5 = 0$;
$\sigma_3: 3x^2 + 2y^2 + 2xz + 3z^2 - 4 = 0$;
$\sigma_4: 3x^2 + 2y^2 + 2xz + 3z^2 = 0$;
$\sigma_5: 3x^2 + 2y^2 + 2xz + 3z^2 + 4 = 0$;
$\sigma_6: x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 4x = 0$;
$\sigma_7: x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 4 = 0$;

$\sigma_8 : 2x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2 - 3 = 0;$
$\sigma_9 : 2x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2 + 3 = 0;$
$\sigma_{10} : 2x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2 = 0;$
$\sigma_{11} : x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y - 4z + 4 = 0;$
$\sigma_{12} : x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2x + 2y + 2z = 0.$

Esercizio 8. Trovare il piano tangente alla quadrica σ_3 dell' Esercizio 7 nel punto $A(0, \sqrt{2}, 0)$.

Esercizio 9. Trovare le rette contenute nella quadrica σ_1 dell' Esercizio 7 passanti per il punto $A(-1, 2, -\frac{1}{2})$.

2. Soluzione di alcuni esercizi

Soluzione dell' Esercizio 1. Analizziamo le coniche una per volta.

γ_1. Aggiungendo e sottraendo 1 alla sua equazione, abbiamo

$$x^2 - y^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 - y^2 = (x+1)^2 - y^2 - 1 = 0$$

e quindi l' equazione diventa $(x+1)^2 - y^2 = 1$. Effettuando la traslazione

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y \end{cases}$$

la conica γ_1 ha equazione $X^2 - Y^2 = 1$ e quindi γ_1 è un' iperbole avente asintoti $X = Y, X = -Y$. Il centro, nel primo sistema di coordinate, è $(-1, 0)$.

γ_2. Aggiungendo e sottraendo 2 all' equazione, questa diventa

$$2x^2 + 4x - 2y + 1 = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 2y + 1 = 2(x+1)^2 - 2(y + \frac{1}{2}) = 0.$$

Effettuando il cambio di coordinate

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

l' equazione di γ_2 diventa $X^2 - Y = 0$. Quindi, γ_2 è una parabola avente vertice in $(-1, -\frac{1}{2})$ ed avente asse di simmetria parallelo all' asse y.

γ_3. Aggiungendo e sottraendo 18, trasformiamo l' equazione come segue

$$x^2 + 2y^2 + 12y + 10 = x^2 + 2(y^2 + 6y + 9 - 9) + 10 = x^2 + 2(y+3)^2 - 8 = 0.$$

Il cambio di coordinate che trasforma l' equazione in forma canonica è

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + 3 \end{cases}$$

e la forma canonica di γ_3 è $X^2 + 2Y^2 = 8$. Quindi, γ_3 è un' ellisse con centro $(0, -3)$ e semiassi di lunghezza $a = 2\sqrt{2}, b = 2$.

γ_4. Operiamo come nel caso precedente, ed otteniamo

$$x^2 + 2y^2 + 12y + 20 = x^2 + 2(y^2 + 6y + 9 - 9) + 20 = x^2 + 2(y+3)^2 + 2 = 0.$$

La forma canonica di γ_4 è allora $X^2 + 2Y^2 = -2$ e quindi γ_4 è un' ellisse senza punti reali. Il cambio di coordinate è lo stesso di γ_3.

γ_5. Aggiungiamo e sottraiamo 1 all' equazione della conica, ed otteniamo

$$x^2 - y^2 + 2x - 2y = x^2 + 2x + 1 - 1 - 2y - y^2 = (x+1)^2 - (y+1)^2 = 0.$$

Effettuando il cambio di coordinate

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 1 \end{cases}$$

si calcola la forma canonica di γ_5 che è $X^2 - Y^2 = 0$. Quindi, γ_5 è una conica degenere unione delle due rette di equazione $X = Y, X = -Y$.

γ_6. Operiamo sull' equazione di γ_6 come segue

$$xy + x + y + 1 = x(y + 1) + y + 1 = (x + 1)(y + 1) = 0.$$

Quindi, γ_6 è una conica degenere unione delle due rette $x + 1 = 0, y + 1 = 0$. Il cambio di coordinate che riporta la conica in forma canonica è

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 1 \end{cases}$$

e la sua forma cononica è $XY = 0$.

Soluzione dell' Esercizio 2. La matrice delle coniche del fascio è

$$B_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1-t & t-1 \\ t & t-1 & 2-t \end{bmatrix}$$

mentre la matrice associata alla parte quadratica dell' equazione della conica è

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-t \end{bmatrix}.$$

Ricordiamo che una conica è degenere se, e solo se, il determinante della sua matrice è nullo. Nel nostro caso, abbiamo allora che γ_t è degenere se, e solo se, $\det(B_t) = (1-t)^2(1+t) = 0$, ossia se, e solo se, $t = 1$ oppure $t = -1$. In tal modo, otteniamo la risposta alla domanda (5). In particolare, γ_1 è la conica di equazione $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0$, e quindi è una retta doppia, mentre, γ_{-1} è la conica di equazione $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 3 = (x - 1)^2 + 2(y - 1)^2 = 0$ e quindi γ_{-1} ha il punto $(1, 1)$ come suo solo punto reale, essendo la sua equazione somma di due quadrati.

Sia quindi $t \neq -1, 1$.

Ricordiamo che, se γ è una conica non degenere, essa è un' ellisse se gli autovalori di A sono concordi, ovvero se $\det(A) > 0$; è una parabola se uno degli autovalori è nullo, ovvero se $\det(A) = 0$; è un' iperbole se gli autovalori sono discordi, ovvero se $\det(A) < 0$. Poiché A_t è una matrice diagonale, i suoi autovalori sono $1, 1-t$, e quindi γ_t è un' ellisse se $t > 1$, e gli autovalori sono entrambi positivi, è un' iperbole se $t < 1, t \neq -1$, mentre non è mai una parabola perché l' unico valore per cui A_t ha un autovalore nullo è $t = 1$, per cui γ_t è degenere. Abbiamo quindi ottenuto la risposta alle domande dei punti (1) e (2). Per capire i valori per cui γ_t è un' ellisse con punti reali, ricordiamo che questo capita quando $\mathrm{tr}(A_t)\det(B_t) < 0$ dove $\mathrm{tr}(A)$ è la somma degli elementi lungo la diagonale principale di A_t. Dobbiamo quindi discutere la disequazione $(2 - t)(1 - t)^2(1 + t) < 0$ che è risolta per $t < -1$ oppure $t > 2$. In sintesi, γ_t è un' ellisse con punti reali se $t < -1$, mentre è un' ellisse senza punti reali se $-1 < t < 1$. Infine, γ_t è una circonferenza se A_t ha un autovalore di molteplicità 2 e qusto capita solo se $1 - t = 1$, ossia $t = 0$. Osserviamo che $t = 0$ è nell' intervallo per cui γ_t rappresenta ellissi senza punti reali, e questo vuol dire che γ_0 è una circonferenza senza punti reali. Infatti, γ_0 ha equazione $x^2 + y^2 - 2y + 2 = 0$ che verifica $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = -1 < 0$. Ciò conferma che la circonferenza è priva di punti reali.

Soluzione dell' Esercizio 3. Studiamo le coniche una alla volta.

(1) La matrice di γ_1 è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\det(B) = 0$. Quindi, γ_1 è una conica degenere. Per calcolare le equazioni delle due rette in cui si decompone, risolviamo l' equazione che la rappresenta $x^2+x(3y+1)+(2y^2+2y) = 0$ (oppotunamente riscritta), rispetto alla variabile x :

$$x = \frac{-3y - 1 \pm \sqrt{9y^2 + 6y + 1 - 8y^2 - 8y}}{2} = \frac{-3y - 1 \pm \sqrt{y^2 - 2y + 1}}{2}$$

da cui otteniamo che le due rette hanno equazioni $x = -y - 1$ e $x = -2y$.

(2) La matrice di γ_2 è

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è $\det(B) = \frac{21}{4}$. Quindi, γ_2 non è degenere. La matrice della parte quadratica dell' equazione è

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $t_1 = 2, t_2 = 4$. Avendo autovalori concordi, ed essendo non degenere, γ_2 è un' ellisse. Poiché $\operatorname{tr}(A)\det(B) = \frac{189}{4} > 0, \gamma_2$ è un' ellisse senza punti reali.

Ricordiamo che la forma canonica di un' ellisse è $\alpha X^2+\beta Y^2+\gamma = 0$ dove α e β sono gli autovalori di A. Il termina noto γ si calcola dall' uguaglianza $\alpha\beta\gamma = \det(B)$. Nel nostro caso, scegliamo $\alpha = 2, \beta = 4$ e quindi $\gamma = \frac{21}{32}$. Quindi, una froma canonica per γ è

$$\gamma : 2X^2 + 4Y^2 + \frac{21}{32} = 0.$$

Per scrivere esplicitamente il cambio di coordinate che riporta l' equazione di γ in forma canonica, bisogna calcolare una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A.

$$V(2) = \{(x, y)|x + y = 0\} = \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

mentre

$$V(4) = \{(x, y)|x - y = 0\} = \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Quindi, la matrice ortognale che fornisce la rotazione degli assi del riferimento è

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

mentre il centro di simmetria della conica, nuova origne delle coordinate, è l' unica soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + y + \frac{1}{2} = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

che è $\left(-\frac{1}{16}, -\frac{5}{16}\right)$. Quindi il cambio di coordinate è dato da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} \\ -\frac{5}{16} \end{bmatrix}.$$

Essendo priva di punti reali, è inutile disegnare gli assi del nuovo sistema.

(3) La matrice della conica γ_3 è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ed il determinante di B è $\det(B) = 24 \neq 0$. Quindi γ_3 è una conica non degenere. La matrice A associata alla parte quadratica di γ_3 è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ed i suoi autovalori sono $t_1 = -2, t_2 = 4$. Avendo autovalori discordi, γ_3 è un' iperbole. La forma canonica di un' iperbole è della forma $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma = 0$ dove α e β sono gli autovalori di A. Il termine noto si ricava dall' equazione $\alpha\beta\gamma = \det(B)$. Poniamo $\alpha = -2, \beta = 4$, e quindi $\gamma = 3$. Una forma canonica di γ_3 è allora

$$\gamma_3 : -2X^2 + 4Y^2 + 3 = 0.$$

Per scrivere il cambio di coordinate, cominciamo con il calcolare il centro di simmetria della conica, risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x + y = 0. \end{cases}$$

L' unica soluzione del sistema è $(0, 0)$. Si nota infatti che nell' equazione mancano i termini di primo grado, e questo capita quando il sistema di riferimento in cui è scritta l' equazione della conica è solo ruotato rispetto a quello intrinseco della conica.

Gli assi di simmetria della conica hanno la direzione degli autospazi di A. Calcoliamoli.

$$V(-2) = \{(x, y)|x + y = 0\} = \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

mentre

$$V(4) = \{(x, y)|x - y = 0\} = \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Una matrice ortogonale speciale che realizza la rotazione è

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

ed infine il cambio di coordinate è descritto dalla formula

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che gli asintoti dell' iperbole, nel nuovo sistema di riferimento, hanno equazioni $X = \pm\sqrt{2}Y$, mentre hanno equazioni $(1 \mp \sqrt{2})x = (1 \pm \sqrt{2})y$ nel primo sistema di riferimento.

(4) La tecnica per studiare γ_4 è analoga ai casi precedenti. Riportiamo solo i risultati.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$\det(B) = -64 \neq 0$, gli autovalori di A sono $t_1 = 2, t_2 = 4$, $\operatorname{tr}(A)\det(B) = -576 < 0$. In conclusione, γ_4 è un' ellisse con punti reali. La forma canonica di γ_4 è

$$\gamma_4 : 2X^2 + 4Y^2 - 8 = 0$$

mentre il cambio di coordinate che riporta γ_4 in forma canonica è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

dove P è la stessa matrice del caso precedente.

(5) La matrice della conica γ_5 è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\det(B) = -4$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ed i suoi autovalori sono $t_1 = 0, t_2 = 2$. Quindi, γ_5 è una parabola.

La forma canonica della parabola è $\beta Y^2 + 2\delta X = 0$ dove β è l' autovalore non nullo di A e δ verifica l' equazione $-\beta\delta^2 = \det(B)$. Osserviamo che $\delta = \pm\sqrt{2}$. Scegliamo allora

$$Y^2 + \sqrt{2}X = 0$$

come forma canonica di γ_5. La matrice che descrive la rotazione del sistema di riferimento si calcola nel solito modo ed è

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo ora calcolare il vertice della parabola. L' asse di simmetria della parabola è parallelo all' autospazio $V(0)$. Intersechiamo allora la parabola con l' autospazio $V(2)$: per la sua simmetria, tale retta intersecherà la parabola il due punti il cui punto medio si trova sull' asse della parabola. $V(2)$ è la retta di equazione $x - y = 0$. Quindi, i punti di intersezione tra la parabola e $V(2)$ sono le soluzioni di

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 + 4x = 0 \end{cases}$$

che hanno coordinate $(0, 0)$ e $(-1, -1)$. Il loro punto medio è $M(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e l' asse di simmetria di γ_5 è la retta per M parallela all' autospazio $V(0)$. Quindi, ha equazione $a : x + y + 1 = 0$. Il vertice è l' intersezione di γ_5 con a, ed ha coordinate $V(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$.

Il cambio di riferimento è descritto dalle equazioni

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Ricordiamo che bisogna fare in modo che la forma canonica sia coerente con la scelta dell' orientamento degli assi perché la parabola non è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi del suo riferimento intrinseco.

(6) Osserviamo che la conica γ_6 è degenere perché il determinante della matrice associata è nullo. Le due rette che compongono la conica hanno equazioni che si ottengono risolvendo l' equazione $x^2 + 2x(y - 1) + (2y^2 + 2) = 0$. Quindi, esse sono

$$x = -y + 1 \pm \sqrt{y^2 - 2y + 1 - 2y^2 - 2} = -y + 1 \pm \sqrt{-(y + 1)^2} = -y + 1 \pm i(y + 1)$$

ossia $x = (-1+i)y + 1 + i$ e $x = (-1-i)y + 1 - i$. L' unico punto reale della conica è il punto d' intersezione delle due rette ed ha coordinate $(2, -1)$.

(7) La conica γ_7 è degenere perché il determinante della matrice della conica è nullo. Procedendo come nel caso precedente, otteniamo le equazioni delle due rette, e sono $2x + y = 0$, e $2x + y + 1 = 0$ che sono due rette parallele.

Soluzione dell' Esercizio 4. In questo esercizio, bisogna ripercorrere al contrario i passaggi svolti nella soluzione del punto (2), (4) dell' Esercizio 3. La forma canonica dell' ellisse del testo è

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1.$$

Dobbiamo ora trovare il cambio di coordinate tra il sistema di riferimento intrinseco della conica, ed il sistema di riferimento assegnato. Il centro di simmetria dell' ellisse, nuova origine, è il punto $(1, 1)$. L' asse maggiore della conica, nuovo asse X, è la retta $2x - y - 1 = 0$. Un vettore parallelo alla retta è $(1, 2)$ mentre un versore parallelo alla retta è $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Osserviamo che l' orientamento dell' asse non influisce sull' equazione dell' ellisse, e quindi siamo liberi di scegliere $\mathbf{e}_1$ oppure $-\mathbf{e}_1$ come primo vettore della base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori per la forma quadratica associata alla conica. Scelto $\mathbf{e}_1$ come primo vettore, il secondo è $\mathbf{e}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. In sintesi, il cambio di coordinate è descritto dalla formula

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Per trasformare l' equazione della conica, abbiamo bisogno della formula inversa di tale cambio di coordinate. Detta P la matrice ortogonale che compare nel cambio di coordinate, e ricordando che $P^{-1} = {}^tP$, abbiamo

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix}.$$

Sostituendo nell' equazione dell' ellisse otteniamo

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{\sqrt{5}} + \frac{2(y-1)}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\frac{2(x-1)}{\sqrt{5}} + \frac{y-1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

da cui si ottiene l'equazione cercata

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 22x - 4y - 7 = 0.$$

Soluzione dell' Esercizio 5. Ricordiamo che la retta polare del punto $A(x_A, y_A)$ alla conica γ associata alla matrice B è la retta di equazione

$$p_A : (x_a, y_A, 1)B \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

ed il suo significato geometrico è il seguente: se $A \in \gamma$, la retta polare è la retta tangente a γ per A, mentre se $A \notin \gamma$, le intersezioni di γ con p_A sono esattamente i punti di contatto tra γ e le tangenti a γ per A.

Cominciamo allora a stabilire se il punto $A(1,1)$ è un punto di γ. Sostituendo le sue coordinate nell' equazione otteniamo $0=0$ e quindi $A \in \gamma$. La retta tangente a γ per A è allora la retta di equazione

$$t_A : (1,1,1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

ossia $t_A : 2x+3y-5=0$.

Sostituendo le coordinate di B nell' equazione della conica otteniamo $5=0$ e quindi $B \notin \gamma$. La retta polare di B rispetto a γ ha equazione

$$p_B : (4,-1,1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

ossia $p_B : 3x+2y-5=0$. I punti d' intersezione tra p_B e γ si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ x^2+2xy+2y^2-5=0 \end{cases}$$

ed hanno coordinate $C_1(3,-2), C_2(1,1)$. Le rette tangenti a γ per B sono le rette t_1 per B, C_1 e t_2 per B, C_2. Completando i calcoli, abbiamo che le tangenti cercate hanno equazioni $t_1 : x-y=5, t_2 : 2x+3y=5$.

Soluzione dell' Esercizio 6. Le rette parallele al vettore $v=(1,0)$ sono parallele all' asse x e quindi hanno equazioni $y=c$, dove $c \in \mathbb{R}$. I punti d' intersezione tra una di tali rette e la conica sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y=c \\ x^2+5xy+6y^2-4=0 \end{cases}$$

ed hanno coordinate $A_c\left(\frac{-5c+\sqrt{c^2+16}}{2}, c\right), B_c\left(\frac{-5c-\sqrt{c^2+16}}{2}, c\right)$. Il loro punto medio è il punto $M_c\left(-\frac{5c}{2}, c\right)$. Posto

$$\begin{cases} x=-\frac{5c}{2} \\ y=c \end{cases}$$

ed eliminato il parametro c, otteniamo l' equazione $x=-\frac{5}{2}y$. Quindi, i punti medi delle corde sono tutti punti della retta di equazione $2x+5y=0$, e quindi sono allineati.

L' esempio proposto in questo esercizio illustra una proprietà generale delle coniche: i punti medi delle corde staccate su rette parallele ad una direzione fissata sono sempre allineati. La direzione di questa nuova retta si chiama direzione coniugata alla precedente. Gli assi di simmetria delle coniche hanno direzioni tra loro coniugate, e sono l' unica coppia di direzioni coniugate tra loro ortogonali. Tale proprietà permette di definire gli assi in modo alternativo rispetto agli autospazi della forma quadratica.

Soluzione dell' Esercizio 7. Analizziamo le quadriche una alla volta.

- La matrice associata alla quadrica σ_1 è

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha determinante $\det(B) = 100 > 0$. Quindi, σ_1 è una quadrica liscia, a punti iperbolici. La forma quadratica associata a σ_1 ha matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $p_A(t) = -t^3 + 25t$, ed i cui autovalori sono $t_1 = 0, t_2 = 5, t_3 = -5$. Quindi, σ_1 è un paraboloide iperbolico, anche detto paraboloide a sella. La forma canonica di un paraboloide a sella è $\beta Y^2 + \gamma Z^2 + 2\varepsilon X = 0$ dove β e γ sono gli autovalori non nulli della forma quadratica. Possiamo calcolare ε dalla formula $-\beta\gamma\varepsilon^2 = \det(B)$ che esprime l' invarianza del determinante della matrice della quadrica per rototraslazioni. Quindi, scelti $\beta = 5, \gamma = -5$, otteniamo $\varepsilon = \pm 2$, dove il segno va scelto in accordo con il cambio di coordinate. Calcoliamo gli autospazi di A, ed una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

$$V(0) = \{(x, y, z) | z = 0, 3x + 4y = 0\} = \mathcal{L}((4, -3, 0))$$

una cui base ortonormale è $\left(\mathbf{e}_1 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)\right)$.

$$V(5) = \{(x, y, z) | -5x + 3z = 0, -5y + 4z = 0\} = \mathcal{L}((3, 4, 5))$$

una cui base ortonormale è $\left(\mathbf{e}_2 = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$.

$$V(-5) = \{(x, y, z) | 5x + 3z = 0, 5y + 4z = 0\} = \mathcal{L}((-3, -4, 5))$$

una cui base ortonormale è $\left(\mathbf{e}_3 = \left(-\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$.

Si verifica facilmente che $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è una base ortonormale positiva, e quindi abbiamo ottenuto la rotazione degli assi, descritta dalla matrice ortogonale speciale

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Per calcolare il punto di sella, "vertice" del paraboloide a sella, intersechiamo il paraboloide con un piano ortogonale all' asse individuato dall' autospazio $V(0)$. Il piano $V(0)^\perp$ è descritto dall' equazione $4x - 3y = 0$. L' intersezione tra σ_1 e $V(0)^\perp$ è un' iperbole, eventualmente degenere, il cui centro di simmetria è il punto per cui passa l' asse di simmetria del paraboloide. Per calcolare tale punto, proiettiamo l' iperbole su uno dei piani coordinati (eliminiamo un' incognita) e troviamo il centro dell' iperbole proiettata. Il centro dell' iperbole si ottiene riportando il centro dell' iperbole proiettata sul piano $V(0)^\perp$. Svolgiamo i calcoli in dettaglio.

Intersezione tra σ_1 e $V(0)^\perp$.

$$\Gamma : \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 6xz + 8yz - 5x = 0 \end{cases}$$

La proiezione di Γ su piano $[xz]$ si ottiene eliminando la y dal sistema. Dalla prima equazione otteniamo $y = \frac{4}{3}x$, e sostituendo nella seconda si ha

$$p(\Gamma) : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{10}{3}xz - x = 0 \end{cases}$$

La proiezione è un' iperbole degenere, costituita dalle due rette $r_1 : y = 0, x = 0$, ed $r_2 : y = 0, z = \frac{3}{10}$. La loro intersezione è il punto $(0, 0, \frac{3}{10})$, centro di simmetria della proiezione. Riportiamo ora tale punto sul piano $V(0)^{\perp}$. A tale scopo, intersechiamo $V(0)^{\perp}$ con la retta per $(0, 0, \frac{3}{10})$ parallela all' asse y.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x = 0 \\ z = \frac{3}{10} \end{cases}$$

ed otteniamo il centro di simmetria di Γ che ha coordinate $(0, 0, \frac{3}{10})$. L' asse di simmetria ha allora equazione parametrica

$$a : \begin{cases} x = \frac{4}{5}t \\ y = -\frac{3}{5}t \\ z = \frac{3}{10} \end{cases}$$

ed il punto di sella si ottiene come intersezione tra σ_1 ed a.

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}t \\ y = -\frac{3}{5}t \\ z = \frac{3}{10} \\ 6xz + 8yz - 5x = 0 \end{cases}$$

ed ha coordinate $V(0, 0, \frac{3}{10})$. Quindi, il cambio di coordinate è descritto da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P_1 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}.$$

Applicando tale cambio di coordinate alla quadrica, otteniamo l' equazione di σ_1 in forma canonica

$$\sigma_1 : 5Y^2 - 5Z^2 - 4X = 0.$$

- La matrice associata alla quadrica σ_2 è

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

che ha rango $r(B) = 3$ e quindi $\det(B) = 0$. Ne consegue che σ_2 è una quadrica singolare (cono oppure cilindro) e quindi è una quadrica a punti parabolici. La forma quadratica associata a σ_2 è uguale a quella associata a σ_1 la cui forma canonica è $5Y^2 - 5Z^2$ avendo un autovalore nullo. Quindi, σ_2 è un cilindro iperbolico. Mancando i termini lineari, σ_2 è solo ruotata, e quindi la sua forma canonica è

$$5Y^2 - 5Z^2 - 5 = 0$$

ed il cambio di coordinate è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P_1 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix},$$

dove P_1 è la matrice ortogonale calcolata per la quadrica σ_1.

• La matrice associata alla terza quadrica σ_3 è

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è $\det(B) = -64 < 0$. Quindi, σ_3 è una quadrica liscia a punti ellittici. La forma quadratica associata a σ_3 è descritta dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = (2-t)^2(4-t)$ e quindi gli autovalori di A sono $t_1 = 2$ con molteplicità 2 e $t_2 = 4$ semplice. Poiché gli autovalori sono concordi, σ_3 è un ellissoide, ed avendo punti ellittici è reale. La sua forma canonica è $2X^2+2Y^2+4Z^2+\delta = 0$ dove $16\delta = \det(B)$ ossia $\delta = -4$. Quindi, una forma canonica di σ_3 è

$$2X^2 + 2Y^2 + 4Z^2 = 4$$

che mostra che σ_3 è un ellissiode reale di rotazione intorno all' asse Z, avendo un autovalore doppio. Gli autospazi di A sono

$$V(2) = \{(x,y,z) | x+z = 0\} = \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,0))$$

una cui base ortonormale è $\left(\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{e}_2 = (0,1,0)\right)$, mentre

$$V(4) = V(2)^\perp = \mathcal{L}((1,0,1))$$

una cui base ortonormale è $\left(\mathbf{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$. Si verifica facilmente che $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A, e quindi la rotazione del sistema di riferimento è descritta dalla matrice ortogonale

$$P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Il centro di simmetria dell' ellissoide è la soluzione del sistema lineare dato dalle prime tre righe della matrice B. Poiché però mancano i termini lineari, l' ellissoide è solo ruotato e quindi il centro di simmetria è l' origine del sistema di riferimento. In sintesi, il cambio di coordinate è descritto da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P_2 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

• La quadrica σ_4 è definita da un' equazione omogenea di secondo grado, e quindi è un cono con vertice nell' origine degli assi. L' equazione coincide con la forma quadratica associata alla quadrica σ_3, già studiata, e quindi la forma canonica di σ_4 è uguale alla forma canonica della forma quadratica, che è

$$2X^2 + 2Y^2 + 4Z^2 = 0.$$

Quindi, σ_4 è un cono il cui unico punto reale è il vertice. Il cambio di coordinate che la riporta in forma canonica è lo stesso della quadrica σ_3.

- La quadrica σ_5 è associata alla matrice

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è $\det(B) = 64 > 0$ e quindi σ_5 è una quadrica liscia a punti iperbolici. La forma quadratica ad essa associata è la stessa della quadrica σ_3 ed è quindi già stata studiata. Calcolando il termine noto della forma canonica dall' equazione $16\delta = \det(B)$ otteniamo $\delta = 4$, da cui si ricava che la forma canonica di σ_5 è

$$2X^2 + 2Y^2 + 4Z^2 + 4 = 0$$

e quindi σ_5 è un ellissoide senza punti reali. Il cambio di coordinate che la riporta in forma canonica è lo stesso di σ_3 perché, mancando i termini di primo grado, la quadrica è solo ruotata.

- La quadrica σ_6 è associata alla matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed il determinante di B vale $\det(B) = -8 < 0$. Quindi, σ_6 è una quadrica liscia a punti ellittici. La matrice della forma quadratica ad essa associata è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è $p_A(t) = -t(2-t)^2$ ed i suoi autovalori sono $t_1 = 0$, semplice, e $t_2 = 2$ doppio. In sintesi, σ_6 è un paraboliode ellittico, di rotazione. Una sua forma canonica è del tipo $2Y^2 + 2Z^2 + 2\varepsilon X = 0$ dove ε è soluzione dell' equazione $-4\varepsilon^2 = \det(B)$ ossia $\varepsilon = \pm\sqrt{2}$ ed il segno va scelto in accordo con il cambio di coordinate.

Gli autospazi di A sono

$$V(0) = \{(x, y, z) | x + y = 0, z = 0\} = \mathcal{L}((1, -1, 0))$$

una cui base ortonormale è $\left(\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right)$, e

$$V(2) = V(0)^\perp = \mathcal{L}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$$

una cui base ortonormale è $\left(\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\right)$. Si verifica facilmente che $(be_1, \mathbf{e}_2, \mathrm{be}_3)$ è una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A e quindi la matrice ortogonale

$$P_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{sqrt2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

descrive la rotazione degli assi per riportare σ_6 in forma canonica. Per completare il cambio di coordinate, bisogna trovare il vertice del paraboloide. A tale scopo, intersechiamo il paraboloide con il piano $V(0)^\perp$ ortogonale all' asse di simmetria della quadrica, ottenendo un' ellisse, eventualmente degenere. L' asse di simmetria passa per il centro di simmetria dell' ellisse. Per poterlo calcolare facilmente, proiettiamo l' ellisse su uno dei piani coordinati, calcoliamo il centro di simmetria dell' ellisse proiettata, e riportiamo tale punto sul piano $V(0)^{\perp}$. Tale punto è il centro di simmetria dell' ellisse, che stiamo cercando. In dettaglio, $V(0)^{\perp} : x - y = 0$, e la sua intersezione con σ_6 è

$$\Gamma : \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

ossia $\Gamma : y = x, 4x^2 + 2z^2 - 4x = 0$. La proiezione $p(\Gamma)$ di Γ sul piano $[xz]$ si ottiene eliminando la y dal precedente sistema, ed è quindi la curva

$$p(\Gamma) : \begin{cases} y = 0 \\ 4x^2 + 2z^2 - 4x = 0. \end{cases}$$

Il centro di simmetria di $p(\Gamma)$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 4x - 2 = 0 \\ 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ed è il punto $(\frac{1}{2}, 0, 0)$. Per riportare tale punto sul piano $V(0)^{\perp}$, intersechiamo il piano $V(0)^{\perp}$ con la retta per $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ parallela all' asse y. Quindi, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. L' asse di simmetria ha allora equazione parametrica

$$a : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = \frac{1}{2} - t \\ z = 0 \end{cases}$$

ed il vertice del paraboloide è l' intersezione di a con σ_6. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = \frac{1}{2} - t \\ z = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

otteniamo $V(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)$. Il cambio di coordiante è quindi descritto da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P_3 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando tale cambio di coordinate alla quadrica σ_6 otteniamo l' equazione della stessa in forma canonica, che è

$$2Y^2 + 2Z^2 - 2\sqrt{2}X = 0.$$

- La matrice associata alla quadrica σ_7 è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

ed il suo rango è $r(B) = 3$. Ne segue che $\det(B) = 0$ e σ_7 è una quadrica singolare a punti parabolici, ossia è un cono oppure un cilindro. La forma quadratica associata a σ_7 è la stessa di quella associata a σ_6, e mancando i termini lineari dall' equazione di σ_7, essa è solo ruotata. Quindi, una sua forma canonica è

$$2Y^2 + 2Z^2 - 4 = 0$$

e σ_7 è un cilindro ellittico. Il cambio di coordinate che la riporta in forma canonica è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P_3 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

- La matrice associata alla quadrica σ_8 è

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è $\det(B) = -18 > 0$. Quindi, σ_8 è una quadrica liscia a punti ellittici. La matrice associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix};$$

il suo polinomio caratteristico è $p_A(t) = (-3-t)(-1-t)(2-t)$ ed i suoi autovalori sono $t_1 = -3, t_2 = -1, t_3 = 2$, tutti semplici. Poichè gli autovalori hanno segni discordi e la quadrica ha punti ellittici, σ_8 è un iperboloide ellittico, anche detto iperboloide a 2 falde. La sua forma canonica è $-3X^2 - Y^2 + 2Z^2 + \delta = 0$, dove $6\delta = \det(B)$, ossia $\delta = -3$. Quindi, la forma canonica di σ_8 è

$$-3X^2 - Y^2 + 2Z^2 - 3 = 0.$$

Per scrivere il cambio di coordinate che la riporta in forma canonica abbiamo bisogno degli autospazi di A.

$$V(-3) = \{(x, y, z) | x = 0, y - z = 0\} = \mathcal{L}((0, 1, 1))$$

una cui base ortonormale è $\left(\mathbf{e}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$,

$$V(-1) = \{(x, y, z) | x = 0, y + z = 0\} = \mathcal{L}((0, 1, -1))$$

una cui base ortonormale è $\left(\mathbf{e}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$, mentre

$$V(2) = \{(x, y, z) | y = z = 0\} = \mathcal{L}((1, 0, 0))$$

una cui base ortonormale è $(\mathbf{e}_3 = (1, 0, 0))$. Si verifica facilmente che $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è una base ortonormale negativa di $\mathbb{R}^3$ e quindi la matrice che descrive la rotazione è

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

ottenuta cambiando il segno di $\mathbf{e}_2$. Il centro di simmetria dell' iperboloide è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y - z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

ed è il punto $(0,0,0)$. Infatti, mancando i termii lineari, la quadrica è solo ruotata. Il cambio di coordinate è quindi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P_4 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

• La matrice associata a σ_9 è

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è $\det(B) = 18 > 0$. Quindi, σ_9 è una quadrica liscia a punti iperbolici. La forma quadratica associata a σ_9 è uguale a quella associata a σ_8 e quindi σ_9 è un iperboloide iperbolico, anche detto iperboloide ad 1 falda. La sua forma canonica è $-3X^2 - Y^2 + 2Z^2 + \delta = 0$ dove δ è la soluzione dell' equazione $6\delta = \det(B)$ da cui $\delta = 3$. La forma canonica di σ_9 è quindi

$$-3X^2 - Y^2 + 2Z^2 + 3 = 0.$$

Anche in questo caso, la quadrica è solo ruotata, perché mancano i termini lineari, e quindi il cambio di coordinate che la riporta in forma canonica è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P_4 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

• L' equazione che descrive la quadrica σ_{10} è omogenea di secondo grado, e quindi σ_{10} è un cono con vertice nell' origine. Inoltre, l' equazione coincide con la forma quadratica associata a σ_8 e quindi la forma canonica di σ_{10} è

$$-3X^2 - Y^2 + 2Z^2 = 0$$

mentre il cambio di coordinate che la riporta in forma canonica è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P_4 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che la matrice associata alla quadrica ha rango 3, coerente con la classificazione data a σ_{10}.

• La matrice associata a σ_{11} è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

il cui rango è $r(B) = 3$. Quindi, σ_{11} è una quadrica singolare a punti parabolici, ossia è un cono oppure un cilindro. La matrice della forma quadratica associata è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $p_A(t) = t^2(2-t)$ ed i cui autovalori sono $t_1 = 0$ doppio, e $t_2 = 2$ semplice. Quindi, σ_{11} è un cilindro parabolico. Per riportarlo in forma canonica, bisogna individuare un vettore parallelo alle generatrici del cilindro, uno parallelo all' asse di simmetria di una parabola sezione del cilindro con un piano ortogonale alle generatrici, ed un terzo vettore ortogonale ad entrambi. Il primo di tali vettori è l' intersezione di $V(0)$ con l' unico sottospazio parallelo ad un piano tangente a σ_{11} in un suo punto.

$$V(0) = \{(x,y,z)|x-y=0\}$$

mentre, essendo $Q(0,0,1) \in \sigma_{11}$, il piano tangente a σ_{11} in Q è

$$\pi_Q : (0,0,1,1)B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

ossia $\pi_Q : x+y+z-1 = 0$. L' unico sottospazio parallelo a π_Q è il piano parallelo per l' origine, che ha equazione $x+y+z=0$. L' intersezione tra i due sottospazi è

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

una cui base ortonormale è $\left(\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right)$. Un vettore parallelo all' asse di simmetria della parabola sezione di σ_{11} con un piano ortogonale alle generatrici è un vettore di $V(0)$ ortogonale a $\mathbf{e}_1$. Quindi, risolve il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $\mathcal{L}((1,1,1))$, ed una cui base ortonormale è $\left(\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

I vettori ortogonali a $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ sono quelli di $V(2)$. Svolgendo i calcoli, otteniamo

$$V(2) = \{(x,y,z)|x+y=0, z=0\} = \mathcal{L}((1,-1,0)).$$

Una sua base ortonrmale è $\left(\mathbf{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right)$. Si verifica facilmente che $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^3$, e quindi la matrice

$$P_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

descrive la rotazione degli assi. Applicando il cambio di coordinate

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P_5 \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

alla quadrica otteniamo l' equazione

$$2Z'^2 - 4\sqrt{3}Y' + 4 = 0$$

che può essere scritta come

$$2Z'^2 - 4\sqrt{3}(Y' - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 0.$$

Operando la traslazione $X' = X, Y' = Y + \frac{1}{\sqrt{3}}, Z' = Z$ otteniamo la forma canonica di $\sigma_{11} : Z^2 - 2\sqrt{3}Y = 0$. Il cambio di coordinate che tiene conto della traslazione è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P_5 \begin{bmatrix} X \\ Y + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ Z \end{bmatrix} = P_5 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

- La matrice associata alla quadrica σ_{12} è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui rango è $r(B) = 2$. Quindi, σ_{12} è l' unione di due piani. Le equazioni dei due piani si calcolano trattando l' equazione come equazione di secondo grado rispetto alla x. Svolgendo i calcoli otteniamo

$$x = -y - 1 \pm \sqrt{y^2 + 2y + 1 - y^2 + z^2 - 2y - 2z} = -y - 1 \pm (z - 1).$$

Quindi, i due piani hanno equazioni $x + y + z = 0$ e $x + y - z + 2 = 0$.

Soluzione dell' Esercizio 8. Basta usare la formula, ed otteniamo

$$(0, \sqrt{2}, 0, 1)B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

dove B è la matrice associata alla quadrica σ_3. Il piano tangente ha quindi equazione $y = \sqrt{2}$.

Soluzione dell' Esercizio 9. Basta intersecare la quadrica σ_1 con il piano tangente alla quadrica nel punto A. Il piano tangente ha equazione $4x+2y-5z-\frac{5}{2} = 0$ e l' intersezione è data dal sistema

$$\begin{cases} 4x + 2y - 5z - \frac{5}{2} = 0 \\ 6xz + 8yz - 5x = 0. \end{cases}$$

Calcolando la y dall' equazione del piano, e sostituendo nella quadrica, otteniamo un' equazione che è prodotto di due equazioni lineari. In dettaglio, i calcoli sono $y = -2x + \frac{5}{2}z + \frac{5}{4}$ e $-2xz + 4z^2 + 2z - x = 0$, ossia $(-x + 2z)(2z + 1) = 0$. Quindi, le due rette sono $r : x - 2z = 0, 4x + 2y - 5z - \frac{5}{2} = 0$ e $s : z = -\frac{1}{2}, 2x + y = 0$.