

PROPRIETÀ DEI PROCESSI STOCASTICI

-TEOREMA DI WOLD

OGNI PROCESSO STOCASTICO DEBOLMENTE STAZIONARIO Y_t DI VALORE MEDIO μ PUO' DECOMPORSI IN DUE PROCESSI STOCASTICI INCORRELATI

$$Y_t = f(t) + Z_t$$

- $f(t)$ E' LA COMPONENTE **DETERMINISTICA** (MEDIA, TREND, STAGIONALITÀ, ECC.)

- Z_t E' LA COMPONENTE **NON DETERMINISTICA** CHE SI OTTIENE COME COMBINAZIONE LINEARE DI PROCESSI W_t

$$Z_t = W_t + \psi_1 W_{t-1} + \psi_2 W_{t-2} + \dots$$

SI PUO' VERIFICARE CHE:

E' PRESENTE SOLO LA COMPONENTE DETERMINISTICA

$$P(Z_t \equiv 0, \forall t) = 1$$

E' PRESENTE SOLO LA COMPONENTE STOCASTICA

$$P(f_t \equiv 0, \forall t) = 1$$

il teorema di Wold consente di studiare tutti i processi debolmente stazionari mediante lo studio di due componenti dotate di una formulazione standard

-INVERTIBILITA'

UN PROCESSO STOCASTICO E' **INVERTIBILE** QUANDO:

$$Y_t = f(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots) + W_t$$



PASSATO

INVERTIBILITA'



PREVEDIBILITA'

-DATO UN PROCESSO **STAZIONARIO** $\implies$ Y_t È POSSIBILE
CALCOLARE IN MODO UNIVOCO LA SUA FUNZIONE DI
AUTOCOVARIANZA E DI AUTOCORRELAZIONE

-DATA UNA FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA $\implies$ È POSSIBILE
DEFINIRE IN MODO UNIVOCO IL PROCESSO Y_t **STAZIONARIO ED
INVERTIBILE** AD ESSA ASSOCIATO

STIMA DEI MOMENTI DEI PROCESSI STOCASTICI

UN PROCESSO STOCASTICO E' *ERGODICO* RISPETTO AD UN DATO MOMENTO SE LA SUA STIMA TEMPORALE CONVERGE IN MEDIA QUADRATICA A TALE PARAMETRO

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left[(\hat{v}(Y_t) - v(Y_t))^2 \right] = 0$$

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ IL PROCESSO SIA ERGODICO RISPETTO AL VALORE MEDIO E' CHE:

LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE TENDA A ZERO

ERGODICITÀ  INFERENZA

SE UN PROCESSO È STAZIONARIO ED ERGODICO

LA SERIE STORICA SI PUÒ CONSIDERARE UNA REALIZZAZIONE FINITA DI OSSERVAZIONI ESTRATTE DA VARIABILI CHE GODONO DELLE PROPRIETÀ DI AVERE LA STESSA MEDIA, VARIANZA E FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE INDIPENDENTE DA T
INOLTRE LE OSSERVAZIONI SONO UN CAMPIONE RAPPRESENTATIVO POICHÉ LA FUNZIONE

$$\rho_k \rightarrow 0$$

MEMORIA FINITA

SI POSSONO QUINDI CONSIDERARE I SEGUENTI STIMATORI:

$$\hat{\mu} = \sum_{t=1}^T y_t$$

STIME CORRETTE E CONSISTENTI

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$$

STIME CONSISTENTI MA DISTORTE

SERIE STORICHE E MODELLI STATISTICI

SERIE STORICA

UNA PARTE FINITA DELLA REALIZZAZIONE DI UN PROCESSO STOCASTICO

PROCESSO STOCASTICO A PARAMETRO DISCRETO

UNA SUCCESSIONE DI V.C. LA CUI CONOSCENZA COMPLETA E' ACQUISITA SOLO TRAMITE LA FAMIGLIA DELLE RIPARTIZIONI FINITE

MODELLO STATISTICO

UNA QUALSIASI PARAMETRIZZAZIONE DI UN PROCESSO STOCASTICO CHE SIA FUNZIONE ESPlicita DI PARAMETRI NOTI SIA DIRETTAMENTE CHE TRAMITE FUNZIONI-MOMENTO

**STUDIO DEI PROCESSI
MODELLABILI**

PROCESSI STOCASTICI AR(p)

UN MODELLO AUTOREGRESSIVO DI ORDINE p HA L'OBIETTIVO DI STUDIARE LA VARIABILE Y_t IN FUNZIONE DEL SUO COMPORTAMENTO PRECEDENTE FINO AD UNA DISTANZA TEMPORALE PARI A p

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + W_t$$

parametri costanti $\phi_i \quad \forall i = 0, \dots, p$

LA SINGOLA OSSERVAZIONE AD UN DATO ISTANTE TEMPORALE



COMBINAZIONE LINEARE DI p TERMINI PRECEDENTI E DI UNO SHOCK CASUALE ALLO STESSO ISTANTE

consideriamo l'operatore ritardo B e indichiamo con

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

APPLICHIAMO TALE FUNZIONE A Y_t

$$\phi(B)Y_t = \phi_0 + W_t$$

CARATTERISTICHE DI UN PROCESSO STOCASTICO AR(p)

È SEMPRE INVERTIBILE (PER DEFINIZIONE) MA È STAZIONARIO SOLO SE L'EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$$1 - \phi B = 0$$

CHE SI VERIFICA QUANDO LE RADICI IN MODULO SONO TUTTE MAGGIORI DI UNO $|B_i| > 1$

PARAMETRI

MEDIA

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_0 - \dots \phi_p}$$

$$\text{se } \phi_0 = 0 \rightarrow \mu = 0$$

VARIANZA

$$\gamma_o = \frac{\sigma_w^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \dots \phi_p \rho_p}$$

AUTOCORRELAZIONE

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad \rho_k \rightarrow 0$$

la funzione di autocorrelazione globale tende a 0

la funzione di autocorrelazione parziale è uguale a 0 quando $k > p$

PROCESSO STOCASTICO AR(1)

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + W_t$$

È SEMPRE INVERTIBILE (PER DEFINIZIONE) MA È STAZIONARIO SOLO SE

$$1 - \phi_1 B = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{1}{\phi_1} \quad \Longrightarrow \quad |\phi_1| < 1$$

PARAMETRI