

# Riduzione a forma canonica delle quadriche di $\mathbf{P}_3(\mathbb{C})$

Nicola Durante

November 14, 2011

Nello spazio proiettivo tridimensionale complesso  $\mathbf{P}_3(\mathbb{C})$  in cui le coordinate omogenee dei punti saranno denotate con  $(x, y, z, t)$  sia  $\mathcal{R}$  un fissato riferimento reale affine e, posto  $\tilde{X} = (x, y, z, t)_T$  sia assegnata la quadrica reale  $Q$  di equazione  $\tilde{X}_T A \tilde{X} = 0$  ove  $A$  é una matrice simmetrica ad elementi reali di ordine 4. Se  $A_4 = (a_{41}, a_{42}, a_{43})$ ,  $A_{44}$  denota il minore di  $A$  formato con le prime tre righe e prime tre colonne di  $A$  e  $X = (x, y, z)_T$  l'equazione della quadrica  $Q$  si può scrivere anche, in coordinate affini  $(x, y, z)$  come  $X_T A_{44} X + 2A_4 X + a_{44} = 0$ . Passiamo dall'equazione di  $Q$  nel riferimento  $\mathcal{R}$  all'equazione di  $Q$  in un nuovo riferimento reale affine  $\mathcal{R}'$ . Se  $P$  é la matrice non-degenere quadrata di ordine 3 che permette di passare dal riferimento  $\mathcal{R}$  al riferimento  $\mathcal{R}'$ , ossia  $X = PX'$  con  $X' = (x', y', z')_T$  (stiamo prendendo il nuovo riferimento  $\mathcal{R}'$  con la stessa origine del riferimento  $\mathcal{R}$ ). Nel riferimento  $\mathcal{R}'$  l'equazione di  $Q$  é:  $X'_T (P_T A_{44} P) X' + 2A_4 P X' + a_{44} = 0$ . La matrice  $A_{44}$  é simmetrica ad elementi reali per cui é ortogonalmente diagonalizzabile. Quindi é possibile scegliere la matrice  $P$  (in cui le colonne formano una base ortonormale di autovettori per  $A_{44}$ ) in modo che  $P_T A_{44} P$  sia la matrice diagonale  $D$  avente sulla diagonale gli autovalori (tutti reali)  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  di  $A_{44}$ . Scegliendo tale matrice  $P$  otteniamo che l'equazione di  $Q$  in  $\mathcal{R}'$  diventa  $X'_T D X' + 2A_4 P X' + a_{44} = 0$  ossia  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_{41} x' + 2a'_{42} y' + 2a'_{43} z' + a_{44} = 0$  ove abbiamo posto  $A_4 P = (a'_{41}, a'_{42}, a'_{43})$ . Considerando la traslazione di assi di equazioni  $x' = x'' + \alpha, y' = y'' + \beta, z' = z'' + \gamma$  passiamo da  $\mathcal{R}'$  a un nuovo riferimento  $\mathcal{R}''$  in cui l'equazione di  $Q$  diventa:

$$X''_T D X'' + 2(\alpha\lambda_1 + a'_{41})x'' + 2(\beta\lambda_2 + a'_{42})y'' + 2(\gamma\lambda_3 + a'_{43})z'' + \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + \lambda_3\gamma^2 + a_{44} = 0.$$

Cominciamo con l'osservare che non essendo  $A_{44}$  la matrice nulla i tre autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  non possono essere tutti e tre uguali a zero. Distinguiamo vari casi:

- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ .

Scegliendo nella traslazione di assi  $\alpha, \beta, \gamma$  in modo da annullare i termini di primo grado nell'equazione di  $Q$ , ossia  $\alpha = -a'_{41}/\lambda_1, \beta = -a'_{42}/\lambda_2, \gamma = -a'_{43}/\lambda_3$  otteniamo che l'equazione di  $Q$  in  $\mathcal{R}''$  diventa

$$Q : \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = d.$$

\*  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0, d > 0$ .

Posto  $\lambda_1/d = 1/a^2, \lambda_2/d = 1/b^2, \lambda_3/d = 1/c^2$  l'equazione di  $Q$  diventa  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  (avendo tolto per comodità il doppio indice " alle incognite  $x, y, z$ ). Si tratta di un *ellissoide con punti reali*. Infatti é immediato verificare che  $|A| < 0, |A_{44}| \neq 0$  e che la conica impropria  $\Gamma_\infty : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0$  risulta quindi non degenerare e inoltre é priva di punti reali.

\*  $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, d > 0$ .

L'equazione di  $Q$  é del tipo  $Q : x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ . Si tratta di un *iperboloide a una falda o a punti iperbolici*. Infatti  $|A| > 0, |A_{44}| \neq 0$  e la conica impropria é una ellisse con punti reali.

(Lo stesso tipo di quadrica si ottiene se un solo autovalore  $\lambda_i$  é negativo e due autovalori sono positivi e  $d > 0$ ).

\*  $\lambda_1 > 0, \lambda_2, \lambda_3 < 0, d > 0$ .

L'equazione di  $Q$  diventa  $Q : x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ . Si tratta di un *iperboloide a due falde o a punti ellittici*. Infatti  $|A| < 0, |A_{44}| \neq 0$  e la conica impropria é una iperbole (quindi con punti reali).

(Lo stesso tipo di quadrica si ottiene se due autovalori sono negativi e uno solo positivo e  $d > 0$ ).

\*  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0, d > 0$ .

L'equazione di  $Q$  diventa  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = -1$ . Si tratta di un *ellissoide privo di punti reali*. Infatti é immediato verificare che  $|A| < 0, |A_{44}| \neq 0$  e che la conica impropria  $\Gamma_\infty : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0$  risulta quindi non degenerare e inoltre é priva di punti reali.

\*  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0, d = 0$ . In tal caso l'equazione di  $Q$  diventa  $Q : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$ . Si tratta di un cono di vertice l'origine  $O(0, 0, 0)$  (Infatti  $|A| = 0, |A_{44}| \neq 0$  e  $O(0, 0, 0)$  é l'unico punto doppio). Inoltre se  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tutti dello stesso segno allora il cono non ha punti reali, a parte l'origine e quindi é un *cono che proietta una conica priva di punti reali*. Se  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  hanno segno diverso si tratta di un *cono che proietta una conica dotata di punti reali*.

N.B. In questo ultimo caso non possiamo specificare ulteriormente il cono. Infatti i piani non per l'origine intersecano tutti il cono in coniche non-degeneri ma ci saranno piani che intersecano in ellissi, piani che intersecano in iperboli e piani che intersecano in parabole. Ad es. se  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  e  $\lambda_3 < 0$  l'equazione di  $Q$  diventa  $Q : x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ . Il piano  $z = c$  interseca il cono in una ellisse con punti reali, il piano  $x = a$  interseca il cono in una iperbole e il piano  $x = a/cz + 1$  interseca il cono in una parabola.

•  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$ .

(Gli stessi tipi di quadriche si ottengono se due qualsiasi autovalori tra i  $\lambda_i$

sono diversi da zero e uno di essi é zero).

In questo caso nel passaggio da  $\mathcal{R}$  ad  $\mathcal{R}''$  otteniamo un'equazione del tipo  $Q : \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2a'_{43} z'' = d$ , avendo posto  $\alpha$  e  $\beta$  come nel caso precedente. Inoltre possiamo scegliere il termine  $\gamma$  in  $z' = z'' + \gamma$  in modo da annullare il termine noto (se  $a'_{34} \neq 0$ ) ottenendo la seguente equazione

$$Q : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2a'_{43} z = 0.$$

\*  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

La quadrica  $Q$  ha equazione del tipo  $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$  o  $z = -x^2/a^2 - y^2/b^2$  (a seconda che  $a'_{43} < 0$  o  $a'_{43} > 0$ ) e abbiamo, in entrambi i casi un *paraboloide ellittico* (infatti  $|A| < 0$  e  $|A_{44}| = 0$ )

\*  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$  (o viceversa).

La quadrica  $Q$  ha equazione del tipo  $z = x^2/a^2 - y^2/b^2$  o  $z = -x^2/a^2 + y^2/b^2$ . In entrambi i casi si tratta di un *paraboloide iperbolico* (infatti  $|A| > 0, |A_{44}| = 0$ ).

Se invece nella precedente equazione  $a'_{43} = 0$  allora otteniamo per  $Q$  la seguente equazione

$$Q : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = d.$$

\*  $\lambda_1, \lambda_2 > 0, d > 0$ .

La quadrica  $Q$  ha equazione del tipo  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  ed é un *cilindro ellittico dotato di punti reali* (ad es  $(0, b, 0, 1), (0, -b, 0, 1)$ ). Infatti  $|A| = 0, r(A) = 3, |A_{44}| = 0$  ed inoltre la conica impropria  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$  é unione di due rette complesse e coniugate per il punto  $(0, 0, 1, 0)$ .

\*  $\lambda_1, \lambda_2 < 0, d > 0$ .

La quadrica  $Q$  ha equazione del tipo  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = -1$  ed é un *cilindro ellittico privo di punti reali* (a parte il punto improprio  $(0, 0, 1, 0)$ ). Infatti  $|A| = 0, r(A) = 3, |A_{44}| = 0$  ed inoltre la conica impropria  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$  é unione di due rette complesse e coniugate per il punto  $(0, 0, 1, 0)$ .

\*  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$  (o viceversa)  $d > 0$ .

La quadrica  $Q$  ha equazione del tipo  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  oppure  $-x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  ed é un *cilindro iperbolico*. Infatti  $|A| = 0, r(A) = 3, |A_{44}| = 0$  ed inoltre la conica impropria  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$  é unione di due rette reali e distinte per il punto  $(0, 0, 1, 0)$ .

\*  $d = 0$ .

In tal caso la quadrica  $Q$  ha equazione  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$  ed é quindi *unione di due piani reali e distinti* se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono discordi, *complessi e coniugati* se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono concordi.

•  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$ .

(Gli stessi tipi di quadriche si ottengono se due qualsiasi autovalori sono uguali

a zero).

L'equazione di  $Q$  diventa  $\lambda_3 z^2 + 2a'_{41}x + 2a'_{42}y = 0$  oppure  $\lambda_3 z^2 = d$ . Nel primo caso, se  $(a'_{41}, a'_{42}) \neq (0, 0)$  si tratta di un *cilindro parabolico*. Infatti  $r(A) = 3$ ,  $|A_{44}| = 0$  e la conica impropria é una retta contata due volte. Se  $a'_{41} = a'_{42} = 0$  si tratta ovviamente del *piano*  $z = 0$  *contato due volte*. Nel secondo caso si tratta dell'*unione di due piani reali e distinti* se  $\lambda_3, d$  sono concordi, *complessi e coniugati* se  $\lambda_3, d$  sono discordi e di *un piano contato due volte* se  $d = 0$ .