

CORSO DI  
CALCOLO ANELASTICO E A ROTTURA DELLE STRUTTURE

Prof. Luciano Nunziante

Appunti sulla

ANALISI LIMITE TRAMITE LA PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

A.A. 2006-2007

## 1 PREMESSE.

La *programmazione lineare* è quella teoria matematica il cui problema centrale consiste nel determinare il massimo o il minimo di una data funzione lineare, sotto talune restrizioni o *vincoli* espressi da equazioni o disequazioni lineari.

Allo scopo di farne intravedere la potenzialità e anche di giungere alla formulazione di algoritmi utili nell'analisi limite delle strutture, si ritiene utile sviluppare qui un primo esempio svolto in forma semplificata, con l'aiuto anche della descrizione geometrica delle equazioni.

Si consideri la trave una volta iperstatica di 1.

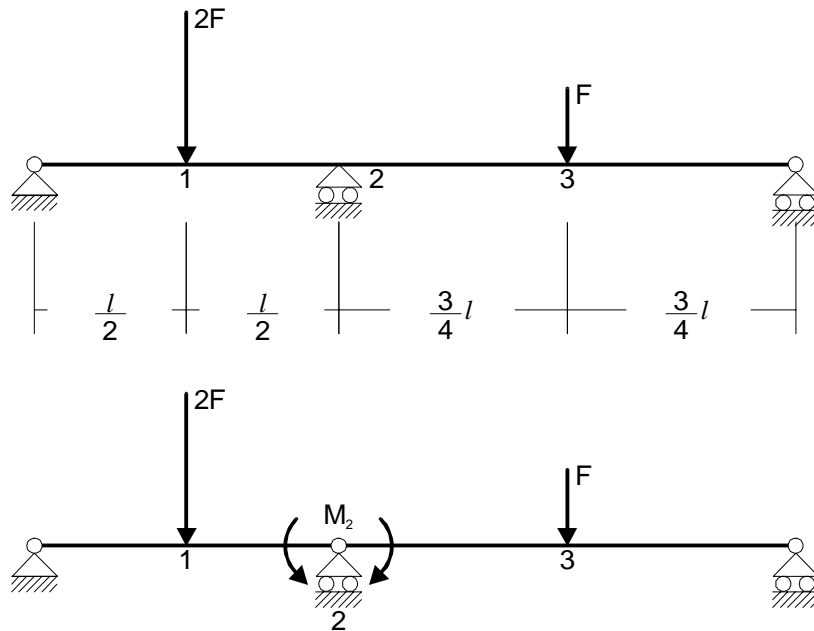


Figure 1:

Tale trave sia di resistenza simmetrica di valore  $M_0$ , e cioè il dominio di resistenza sia dipendente della sola caratteristica flettente, e sia costituito dall'intervallo numerico

$$(-M_0, +M_0), \quad \text{con } M_0 > 0.$$

La trave sia soggetta al sistema di forze di figura, determinato dal parametro monotono crescente di carico proporzionale  $F$ .

Si voglia determinare il valore del parametro  $F$  sotto il quale avviene il collasso della struttura.

Il problema viene affrontato discretizzando la struttura in tre elementi coincidenti con le sezioni caratteristiche numerate 1, 2, 3.

Si sceglie come incognita il momento flettente  $M_2$  nella sezione 2, come segnato in figura.  $M_2$  costituisce l'unica variabile del presente problema.

Si riscrivono i valori del momento flettente nelle rimanenti sezioni caratteristiche 1 e 3, utilizzando le equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{F l}{2} + \frac{M_2}{2} \\ M_3 &= \frac{3}{8} F l + \frac{M_2}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

Seguendo l'approccio *statico* il problema viene risolto determinando il massimo valore di  $F$  soddisfacente le disequazioni di compatibilità plastica scritte di seguito:

$$\begin{aligned} -M_0 &\leq M_1 \leq +M_0, \\ -M_0 &\leq M_2 \leq +M_0, \\ -M_0 &\leq M_3 \leq +M_0. \end{aligned} \quad (2)$$

La sostituzione delle 1 nelle 2, che assicura anche l'equilibrio delle soluzioni, conduce al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} -M_0 \leq M_2 \leq +M_0 \\ -M_0 \leq \frac{F l}{2} + \frac{M_2}{2} \leq +M_0 \\ -M_0 \leq \frac{3}{8} F l + \frac{M_2}{2} \leq +M_0 \end{cases} \quad (3)$$

Volendo risolvere il problema nella forma della minimizzazione, si pone

$$z = -\frac{F l}{2 M_0}. \quad (4)$$

Si tratterà pertanto di determinare il *minimo* della *funzione obiettivo*  $z$ , soddisfacente le 3.

Con la posizione

$$X = \frac{M_2}{M_0}, \quad (5)$$

il sistema 3 viene riscritto nella forma

$$\begin{cases} -1 \leq X \leq +1 & ; \text{ rette 1 e 2} \\ -1 \leq -z + \frac{X}{2} \leq +1 & ; \text{ rette 3 e 4} \\ -1 \leq -\frac{3}{4}z + \frac{X}{2} \leq +1 & ; \text{ rette 5 e 6} \end{cases} \quad (6)$$

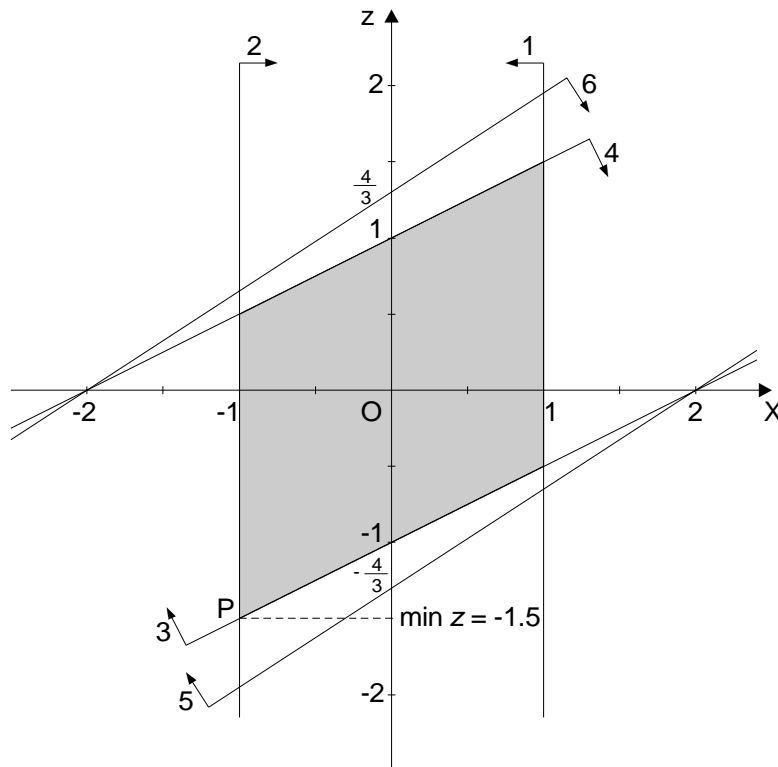


Figure 2:

Le esplicitazioni con il segno di eguaglianza (a sinistra e a destra) delle 6, costituiscono le equazioni di sei rette nel piano  $(X, z)$  che vengono rappresentate nella 2.

Il dominio colorato in grigio costituisce l'insieme dei punti  $(X, z)$  soddisfacenti le 6. Il punto

$$P = \left(-1, -\frac{3}{2}\right)$$

è evidentemente il punto che minimizza  $z$  nel rispetto delle disequazioni 6.

Si ha pertanto

$$\min z = -\frac{3}{2}, \quad X_{\min z} = -1. \quad (7)$$

La soluzione 7 sostituita nelle 4 e 5 fornisce la cercata soluzione strutturale del problema:

$$F = 3\frac{M_0}{l}, \quad M_2 = -M_0; \quad (8)$$

i valori 8 sostituiti nelle 1 forniscono inoltre i momenti nelle rimanenti sezioni

caratteristiche 1 e 3:

$$M_1 = M_0, \quad M_3 = \frac{5}{8}M_0.$$

Il diagramma del momento flettente nella situazione limite di collasso è quello consegnato in 3, unitamente al cinematismo che ne consegue.

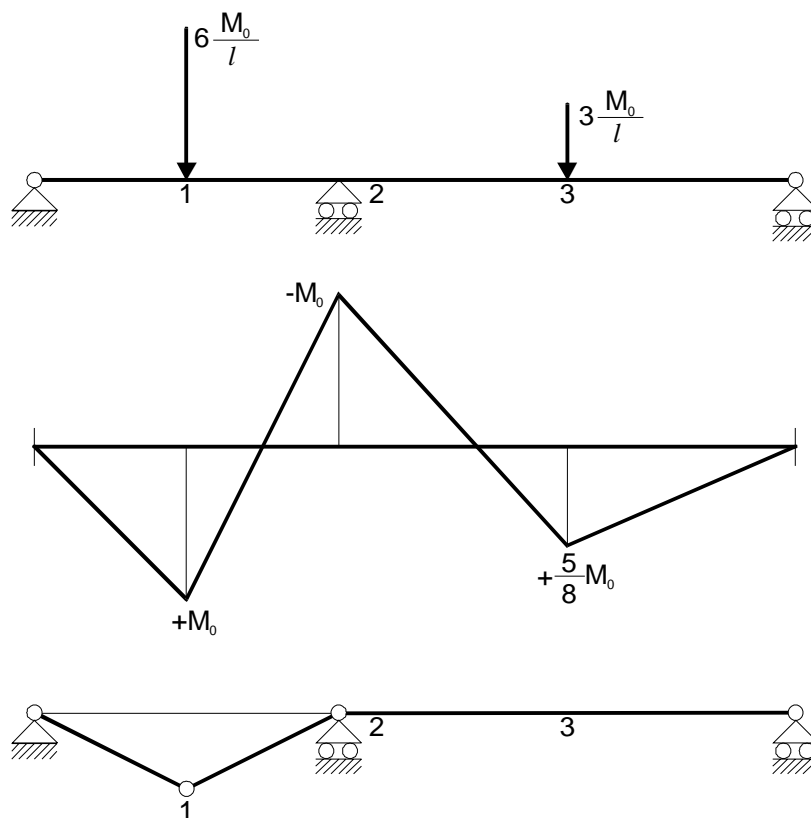


Figure 3:

Dallo svolgimento di tale esercizio, si evidenzia che la determinazione del moltiplicatore di collasso di una struttura, può effettuarsi in generale, con l'ausilio del teorema statico, massimizzando il parametro di carico, nel rispetto delle equazioni di compatibilità plastica e di equilibrio.

Dallo sviluppo dell'esercizio si evince che essendo la struttura una sola volta iperstatica, il tracciamento grafico della frontiera del dominio dei punti  $(X, z)$  soddisfacenti la 3 è stato possibile nel piano  $(X, z)$  e ha condotto alla immediata individuazione del valore  $\min z$ . Tale rappresentazione grafica evidentemente non è possibile per strutture con grado di iperstaticità maggiore di 2: in generale si avrà a che fare con un sistema di numerose disequazioni in molteplici variabili,

e la ricerca del  $\min z$  dovrà necessariamente essere condotta per via analitica, operando in modo opportuno sul sistema di disequazioni.

Quanto enunciato costituisce oggetto di applicazione della Teoria della Programmazione Lineare della quale si forniscono nei paragrafi seguenti gli elementi necessari.

Prima di chiudere questo paragrafo, giova notare che il sistema di disequazioni 6 può risciversi nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 : -1 \leq X \\ E_2 : X \leq +1 \\ E_3 : -1 \leq -z + \frac{X}{2} \\ E_4 : -z + \frac{X}{2} \leq +1 \\ E_5 : -1 \leq -\frac{3}{4}z + \frac{X}{2} \\ E_6 : -\frac{3}{4}z + \frac{X}{2} \leq +1 \end{array} \right. , \quad (9)$$

nella quale si sono numerate le 6 disequazioni da  $E_1$  a  $E_6$ .

Si noti che tale sistema di disequazioni è stato scritto senza porre limitazioni al segno di  $X$ . Peraltro, per quanto si esporrà in seguito, è necessario avere a che fare con variabili non negative, ovvero ristrette in segno; la variabile non ristretta  $X$  deve pertanto esprimersi come somma della sua *parte non negativa*  $x$  e della sua *parte non positiva*  $-y$  nella forma

$$X = x - y, \quad x, y \geq 0. \quad (10)$$

La posizione di sopra è nota in Programmazione Lineare come *non negatività delle variabili*.

Il sistema 9 si riscrive, utilizzando le 10:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 : -1 \leq x - y \\ E_2 : x - y \leq +1 \\ E_3 : -1 \leq -z + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \\ E_4 : -z + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \leq +1 \\ E_5 : -1 \leq -\frac{3}{4}z + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \\ E_6 : -\frac{3}{4}z + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \leq +1 \end{array} \right. , \quad (11)$$

ove

$$x, y \geq 0.$$

Il sistema di disequazioni 11 può inoltre essere trasformato in un sistema di equazioni mediante l'introduzione di variabili di scarto, o variabili *slack*, una per ogni disequazione; infatti, dovendo risultare verificata la  $E_1$  (per esempio):

$$E_1 : -1 \leq x - y ,$$

deve esistere un numero  $t_1 \geq 0$  tale che

$$x - y - t_1 = -1.$$

Operando in modo analogo ciascuna disequazione genera una equazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 : x - y - t_1 = -1 \\ E_2 : x - y + t_2 = +1 \\ E_3 : -z + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - t_3 = -1 \\ E_4 : -z + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + t_4 = +1 \\ E_5 : -\frac{3}{4}z + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - t_5 = -1 \\ E_6 : -\frac{3}{4}z + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + t_6 = +1 \end{array} \right. , \quad (12)$$

con

$$x, y, t_i \geq 0.$$

Si noti che la prima coppia di equazioni  $E_1$  e  $E_2$  può riscriversi nella forma equivalente

$$\begin{array}{l} E_1 : x - y - t_1 = -1 \\ E_2 : t_1 + t_2 = 2 \end{array} ,$$

avendo eseguito la differenza  $E_1 - E_2$  e sostituito questa alla seconda equazione.

Operando in modo analogo con le rimanenti coppie di equazioni, si riscrivono le 12 nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 : x - y - t_1 = -1 \\ E_2 : t_1 + t_2 = 2 \\ E_3 : \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - z - t_3 = -1 \\ E_4 : t_3 + t_4 = 2 \\ E_5 : \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{3}{4}z - t_5 = -1 \\ E_6 : t_5 + t_6 = 2 \end{array} \right. , \quad (13)$$

ove

$$x, y, t_i \geq 0.$$

Il sistema di equazioni 13 nelle variabili non negative  $x, y, t_i$  può peraltro trasformarsi ulteriormente allo scopo di fare comparire esplicitamente la forma lineare costituente la funzione obiettivo  $z$ .

A ciò fare è sufficiente eseguire l'operazione  $-\frac{3}{4}E_3 + E_5$  che fornisce l'equazione

$$\frac{x}{8} - \frac{y}{8} + \frac{3}{4}t_3 - t_5 = -\frac{1}{4},$$

che viene sostituita alla  $E_3$ .

Il sistema 13 viene riscritto nella forma equivalente

$$\begin{cases} E_1: & x - y - t_1 = -1 \\ E_2: & t_1 + t_2 = 2 \\ E_3: & \frac{x}{8} - \frac{y}{8} + \frac{3}{4}t_3 - t_5 = -\frac{1}{4} \\ E_4: & t_3 + t_4 = 2 \\ E_5: & t_5 + t_6 = 2 \end{cases} . \quad (14)$$

La funzione obiettivo  $z$  è fornita dalla

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{2} - z - t_3 = -1. \quad (15)$$

Il sistema  $14 \cap 15$ , scritto con riferimento all'esempio sopra svolto, costituisce il sistema di equazioni al quale vanno applicati gli algoritmi della Programmazione Lineare allo scopo di determinare la soluzione ottima

$$(x, y, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, z),$$

e cioè quella che minimizza la funzione obiettivo  $z$ , nel rispetto delle 14 e 15.

La scrittura delle 14 e 15 costituisce la cosiddetta *forma standard* del problema di Programmazione Lineare enunciato.

## 2 LA TRASFORMAZIONE DI UN SISTEMA DI DISEQUAZIONI LINEARI IN UNO DI EQUAZIONI.

Si consideri la disequazione

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n < b.$$

È facile notare che ove la disequazione *stretta* di sopra costituisca un *vincolo* per un problema di programmazione lineare relativo alla massimizzazione di una funzione obiettivo del tipo

$$z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \cdots + C_n X_n,$$

non (sempre) esiste una soluzione.

Infatti le disequazioni strette del tipo scritto sopra definiscono insiemi *aperti* nello spazio delle  $n$  variabili, nei quali le funzioni lineari, pur potendo essere dotate di estremo, non ammettono (necessariamente) massimo (o minimo).

Così come nell'intervallo aperto

$$X \in ]0, d[$$

la funzione

$$z = X$$

non ammette né massimo né minimo, pur ammettendo estremo inferiore ed estremo superiore.

Tale circostanza, invece, non si verifica ove tutte le disequazioni siano *non strette*, del tipo cioè

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n \leq b.$$

Abbiamo già mostrato con l'esempio del § 1 che un sistema di disequazioni deve essere ricondotto alla forma equivalente del sistema di equazioni, mediante un procedimento che riconduce il problema ad una forma cosiddetta *standard* simile a quella espressa dalle 14.

Tale procedimento richiede in primo luogo l'uso di variabili non negative, come già visto nel § 1.

Ciascuna variabile  $X_i$  non ristretta in segno, deve essere espressa mediante l'uso di altre due variabili non negative:

$$x'_i, x''_i \geq 0,$$

in modo che

$$X_i = x'_i - x''_i,$$

con un immediato raddoppio delle variabili. Inoltre ciascuna disequazione del tipo

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n \leq b$$

deve essere sostituita da una equazione.

Per il soddisfacimento della disequazione deve necessariamente esistere una quantità reale non negativa  $t \geq 0$  tale che risulti

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n + t = b.$$

Così come per il soddisfacimento di una disequazione del tipo

$$d \leq a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

deve esistere una quantità  $s \geq 0$  tale che

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n - s = d.$$

Le  $t$  e  $s$  si chiamano *variabili di scarto* e la loro introduzione permette di riscrivere il sistema di disequazioni nella forma equivalente del sistema di equazioni, al prezzo di un ulteriore aumento delle variabili del problema pari al numero delle disequazioni.

Una volta modificato il sistema di disequazioni iniziali con il vincolo della non negatività delle variabili e con l'introduzione delle variabili di scarto, il sistema di equazioni al quale si perviene, del tipo 14/15, viene detto in *forma standard*; il sistema iniziale di  $m$  disequazioni in  $p$  variabili è diventato un sistema di  $m$  equazioni in  $2p + m$  variabili non negative.

### 3 IL PROBLEMA MATEMATICO DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE.

Mediante l'esempio svolto nel § 1 e il procedimento descritto nel § 2, si è mostrato come si pervenga ad un sistema di equazioni in forma standard pronto per essere portato a soluzione mediante l'utilizzo della teoria della programmazione lineare, la quale ha lo scopo della massimizzazione (o minimizzazione) di una funzione lineare, detta funzione obiettivo, del tipo 15, nelle variabili non negative, nel rispetto di un certo sistema di equazioni di vincolo del tipo 14, anche esse lineari nelle variabili.

Il sistema in forma standard si scrive in generale

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 : a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ E_2 : a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ E_m : a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{array} \right. , \quad (16)$$

ove generalmente è  $m < n$ ; le variabili sono non negative, risultando

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

La funzione obiettivo è espressa in generale nella forma

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n. \quad (17)$$

Sistemi del tipo 16 con  $m \neq n$  si dicono *rettangolari*; nel caso  $m = n$  il sistema si dice *quadrato*.

È evidente che la minimizzazione della 17 equivale alla massimizzazione della funzione  $-z$ .

Viene chiamato *programma principale* quello che operando sul sistema 16∩17 minimizza la funzione obiettivo nel rispetto delle equazioni di vincolo.

## 4 RICHIAMI SUI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI.

Si consideri il sistema 16 di  $m$  equazioni in  $n$  variabili. Una qualunque  $n$ -pla ordinata

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), \quad \bar{\mathbf{x}} \in R^n \quad (18)$$

soddisfacente le 16 viene chiamata *soluzione del sistema 16*.

Un vettore del tipo 18, essendo soluzione, verifica

$$a_{j1} \bar{x}_1 + a_{j2} \bar{x}_2 + \dots + a_{jn} \bar{x}_n = b_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

In generale nel seguito si ammetterà l'esistenza di più soluzioni per il sistema 16: ciò è possibile per il fatto che risulta  $m < n$  e pertanto un certo numero di variabili può essere prefissato ad arbitrio, si da caratterizzare talune classi di soluzioni; peraltro non interessa in questa sede una discussione sulla *esistenza* e sulla *numerosità* delle soluzioni.

Un sistema che ammetta almeno una soluzione si dice *risolvibile*; diversamente si parlerà di *irrisolvibilità* del sistema.

Dal sistema 16 possono generarsi nuove equazioni mediante *combinazioni lineari* di quelle esistenti operando come segue: si fissa un opportuno vettore  $\mathbf{k}$  di  $m$  costanti non tutte nulle:

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m), \quad \mathbf{k} \in R^m, \quad \mathbf{k} \neq \mathbf{0}. \quad (19)$$

Una combinazione lineare delle 16 secondo il vettore 19 si esegue moltiplicando ciascuna equazione per la corrispondente costante e sommando le equazioni del sistema membro a membro.

In forma simbolica la nuova equazione si scrive

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + \dots + k_m E_m, \quad (20)$$

e in forma esplicita

$$\begin{aligned} & k_1 a_{11} x_1 + k_1 a_{12} x_2 + \dots + k_1 a_{1n} x_n + \\ & + k_2 a_{21} x_1 + k_2 a_{22} x_2 + \dots + k_2 a_{2n} x_n + \\ & + \dots + \\ & + k_m a_{m1} x_1 + k_m a_{m2} x_2 + \dots + k_m a_{mn} x_n = \\ & = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_m b_m. \end{aligned} \quad (21)$$

La 21, mettendo a fattore i coefficienti delle  $n$  incognite, assume la forma

$$\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \dots + \bar{a}_n x_n = \bar{b},$$

ove

$$\bar{a}_j = k_1 a_{1j} + k_2 a_{2j} + \dots + k_m a_{mj}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

e

$$\bar{b} = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_m b_m.$$

Si dimostra qui di seguito che una soluzione del sistema iniziale 16 è anche soluzione del sistema ampliato mediante la combinazione lineare 20; infatti riscrivendo la 20 nella forma 21 come di seguito trasformata

$$\begin{aligned} & k_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n - b_1) + \\ & + k_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n - b_2) + \\ & + \cdots + \\ & + k_m (a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n - b_m) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

è agevole osservare che, in corrispondenza di una soluzione del sistema 16, ciascuna soluzione di questo è soddisfatta; inoltre la 22 presentando le quantità in parentesi tutte nulle, è anch'essa soddisfatta qualunque sia  $\mathbf{k}$ ; pertanto tutte le  $m + 1$  equazioni sono verificate.

È evidente peraltro che un vettore che non sia soluzione del sistema 16, non soddisfa in generale nemmeno la combinazione 22.

Pertanto ampliando il sistema 16 con combinazioni lineari, non si perdono soluzioni del problema né se ne guadagnano di nuove.

Il sistema ampliato, come descritto sopra, mediante combinazioni lineari si dice *ridondante*: in generale si dice *ridondante* un sistema nel quale almeno una equazione sia combinazione lineare di quelle rimanenti; questa stessa equazione inoltre viene chiamata *equazione ridondante*.

Se un sistema di equazioni non è ridondante, le sue equazioni si dicono *indipendenti*.

Due sistemi di equazioni si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni. A seguito di quanto dimostrato sopra può dimostrarsi, come viene fatto di seguito, che un sistema di equazioni ottenuto da un altro mediante l'eliminazione di equazioni ridondanti, è equivalente a questo: essi hanno le stesse soluzioni.

Si consideri un sistema nella forma 16; si supponga che esso sia non ridondante. Si consideri una combinazione lineare secondo un vettore di costanti del tipo 19, e sia per ipotesi diversa da zero la  $i$ esima costante:  $k_i \neq 0$ . Tale combinazione venga chiamata  $E$ .

Si considerino a questo punto tre sistemi  $S_0, S_1, S_2$ ; il sistema  $S_0$  sia quello iniziale nella forma 16; il sistema  $S_1$  sia quello ampliato ottenuto da quello  $S_0$  con in più l'equazione  $E$  ridondante; quello  $S_2$  sia invece ottenuto da quello  $S_0$  mediante la sostituzione della  $i$ esima equazione con quella  $E$ .

Il sistema  $S_1$  è equivalente a quello  $S_0$  per quanto dimostrato sopra. D'altra parte il sistema  $S_1$  è ridondante, in quanto contiene l'equazione  $E$ : tale equazione ha la forma 22, e inoltre presenta  $k_i \neq 0$ .

Si può a questo punto dimostrare che il sistema  $S_2$ , ottenuto per eliminazione di un'equazione ridondante dal sistema  $S_1$  (si allude qui alla  $i$ esima equazione del sistema  $S_1$ ), è equivalente a questo e pertanto lo è anche a quello iniziale  $S_0$ .

Infatti la  $E_i$  del sistema  $S_1$  può essere riguardata come combinazione lineare delle equazioni del sistema  $S_2$  mediante il vettore di costanti

$$\bar{\mathbf{k}} = (\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_i, \dots, \bar{k}_m) = \left( -\frac{k_1}{k_i}, -\frac{k_2}{k_i}, \dots, \frac{1}{k_i}, \dots, -\frac{k_m}{k_i} \right).$$

Pertanto il sistema  $S_1$  costituisce un ampliamento ridondante del sistema  $S_2$ , ed è ad esso equivalente.

Ne risulta che i sistemi  $S_0, S_1, S_2$  sono a due a due equivalenti; ne risulta inoltre dimostrato che la sostituzione nel sistema  $S_0$  della  $i$ -esima equazione con una combinazione lineare che presenti  $k_i \neq 0$  conduce al sistema  $S_2$  ad esso equivalente.

Si può affermare a questo punto che l'aggiunta o l'eliminazione di equazioni ridondanti non modifica la soluzione del sistema.

## 5 METODI DI RISOLUZIONE.

I metodi di risoluzione dei sistemi di equazioni lineari rettangolari consistono nel trasformare il sistema 16 dalla forma iniziale standard in una equivalente che viene chiamata *canonica*, particolarmente adatta a generare soluzioni. A tale scopo conviene fare prima qualche richiamo sulla risoluzione dei sistemi quadrati.

### 5.1 Metodo di Gauss per i sistemi quadrati.

Nel caso che nelle 16 risulti  $m = n$  il sistema è quadrato e si scrive nella forma

$$\begin{cases} E_1 : & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ E_2 : & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ E_n : & a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases} . \quad (23)$$

Il sistema 23 ammetta una ed una sola soluzione.

Il metodo abitualmente usato per la risoluzione del sistema 23, introdotto da Gauss, consta di due fasi di seguito descritte.

Si operi preventivamente un ordinamento delle equazioni, tale che risulti

$$a_{ii} \neq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (24)$$

#### 5.1.1 Fase 1: eliminazione diretta.

Nella *fase 1*, detta anche *di eliminazione diretta*, si opera sul sistema con eliminazioni di variabili dalle equazioni, si da condurlo alla cosiddetta forma triangolare superiore.

Considerando ad esempio le prime due equazioni si sostituisce la seconda equazione con una particolare combinazione lineare della prima e della seconda che presenti il coefficiente della  $x_1$  pari a zero. A ciò fare basta moltiplicare la prima equazione per lo scalare  $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$  e sommare a questa la seconda:

$$\begin{aligned} E'_1 : & -a_{21} x_1 - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} x_2 - \cdots - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n} x_n = -\frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 ; \\ E_2 : & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \end{aligned}$$

sommando membro a membro le due equazioni di sopra si ottiene

$$E'_2 : 0 x_1 + \left( -\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} + a_{22} \right) x_2 + \cdots + \left( -\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n} + a_{2n} \right) x_n = -\frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 + b_2 .$$

L'operazione compiuta può riassumersi nella seguente forma simbolica:

$$E'_2 = -\frac{a_{21}}{a_{11}} E_1 + E_2.$$

In tale modo si è ottenuta un'equazione nella quale è assente la variabile  $x_1$ , essa viene sostituita alla seconda equazione originaria. Nel corso di tale operazione il termine in  $x_1$  della prima equazione viene chiamato *pivot*.

Da ora in poi con l'apice a fianco al simbolo della  $i$ -esima equazione  $E'_i$  si indicherà una forma manipolata di tale equazione che sostituita a quella originaria riproduce un sistema equivalente; nei passaggi successivi di norma si tornerà alla scrittura  $E_i$  ad indicare l'ultima forma assunta da tale equazione.

L'operazione effettuata fra  $E_1$  e  $E_2$ , viene poi ripetuta su  $E_1$  e  $E_3$ , mantenendo lo stesso pivot; tale operazione si riassume come segue:

$$E'_3 = -\frac{a_{21}}{a_{11}}E_1 + E_3.$$

Si continua poi sempre con lo stesso pivot  $x_1$  operando fra la prima e la  $i$ -esima equazione:

$$E'_i = -\frac{a_{21}}{a_{11}}E_1 + E_i.$$

Alla fine di tali  $n - 1$  operazioni il sistema è stato ricondotto alla forma

$$\begin{cases} E_1 : & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ E_2 : & a'_{22} x_2 + \cdots + a'_{2n} x_n = b'_2 \\ \vdots & \vdots \\ E_n : & a'_{n2} x_2 + \cdots + a'_{nn} x_n = b'_n \end{cases},$$

nella quale, evidentemente, i coefficienti dipendono da tutte le operazioni eseguite.

A partire da tale forma, si considera come nuovo termine pivot quello  $a'_{22} x_2$  della seconda equazione e si opera come fatto già prima, per annullare i coefficienti della variabile  $x_2$  in tutte le rimanenti  $n - 2$  equazioni al disotto della  $E_2$ . Si avrà

$$E'_3 = -\frac{a'_{32}}{a'_{22}}E_2 + E_3$$

e in generale

$$E'_i = -\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}E_2 + E_i.$$

Continuando in modo analogo con tutti i pivot della diagonale principale, si giungerà alla fine alla cercata *forma triangolare superiore* del sistema:

$$\begin{cases} E_1 : & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ E_2 : & a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ E_n : & a_{nn} x_n = b_n \end{cases}, \quad (25)$$

nella quale i coefficienti delle variabili, pur se ribattezzati con il nome originario, assumono nuovi valori dipendenti da tutte le operazioni eseguite.

La 25 costituisce la forma finale della fase 1, a partire dalla quale si inizia la fase 2 che conduce alla soluzione. Tale fase 2 può condursi in due modi: il primo che si esporrà è proprio dei sistemi quadrati e il secondo è tipico dei sistemi rettangolari, come si mostrerà nel seguito.

### 5.1.2 Fase 2: 1° modo o sostituzione inversa.

Dalla  $n$ -esima equazione delle 25, data l'ipotesi 24

$$a_{nn} \neq 0,$$

si ottiene immediatamente il cercato valore della soluzione per la variabile  $x_n$ :

$$\bar{x}_n = \frac{b_n}{a_{nn}}. \quad (26)$$

Il valore 26, sostituito nella penultima equazione delle 25 fornisce il valore della soluzione per  $x_{n-1}$ :

$$\bar{x}_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}} - \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Il procedimento di sostituzione inversa viene continuato sostituendo  $\bar{x}_n$  e  $\bar{x}_{n-1}$  nella  $E_{n-2}$ , a determinare la  $x_{n-2}$  e così via fino alla completa determinazione della soluzione del sistema 23:

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

### 5.1.3 Fase 2: 2° modo o eliminazione inversa (metodo di Gauss-Jordan).

In tale fase, si parte dal sistema 25 e si considera il termine  $a_{nn} x_n$  della  $E_n$  quale termine pivot allo scopo di azzerare i coefficienti della variabile  $x_n$  da tutte le  $n-1$  equazioni precedenti la  $E_n$ , con metodo uguale a quello seguito nella fase 1.

Si otterrà

$$E'_{n-1} = -\frac{a_{in}}{a_{nn}} E_n + E_{n-1}$$

e in generale

$$E'_i = -\frac{a_{in}}{a_{nn}} E_n + E_i.$$

Utilizzando poi come pivot il termine in  $x_{n-1}$  della  $E_{n-1}$  si annulleranno i coefficienti della variabile  $x_{n-1}$  da tutte le equazioni precedenti quella  $(n-1)$ -esima.

Tale procedimento continuerà con tutti i pivot giacenti sulla diagonale principale, fino a giungere alla seguente forma diagonale (gli  $a_{ij}$  e  $b_i$  scritti stanno qui a rappresentare valori aggiornati dei coefficienti):

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 : a_{11} x_1 \qquad \qquad \qquad = b_1 \\ E_2 : \qquad \qquad a_{22} x_2 \qquad \qquad = b_2 \\ \vdots \\ E_n : \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad a_{nn} x_n = b_n \end{array} \right. , \quad (27)$$



La soluzione 29 soddisfa le prime  $m$  equazioni del sistema 28 e soddisfa inoltre  $n - m$  fra le  $n$  disequazioni del sistema 28: in totale la soluzione di base soddisfa  $m + n - m = n$  equazioni del sistema 28.

Possono al più non rimanere soddisfatte dalla soluzione di base le prime  $m$  disequazioni fra quelle del sistema 28, nel senso che non è necessariamente assicurata la non negatività al più per le  $m$  variabili di base.

**Nota.** Nell'uso della Programmazione Lineare per la risoluzione di problemi di *Limit Design*, e in particolare nell'applicazione del Teorema Statico, si perviene frequentemente alla scrittura di disequazioni del tipo

$$-k_1 \leq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \leq k_2,$$

con

$$x_i \geq 0, \quad k_1, k_2 > 0.$$

La disequazione doppia sopra scritta si trasforma nelle due equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n - t_1 &= -k_1 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + t_2 &= k_2 \end{aligned}$$

con

$$x_i \geq 0, \quad t_1, t_2 \geq 0, \quad k_1, k_2 > 0.$$

Una soluzione consistente di immediata deduzione è la seguente:

$$\begin{aligned} t_1 &= k_1, \quad t_2 = k_2, \\ x_i &= 0, \quad z = 0. \end{aligned}$$

Tale ragionamento può utilmente essere generalizzato.





determinare una nuova soluzione migliore della 35 in quanto corrispondente ad un valore di  $z$  minore di quello precedente.

Sia  $g \in \{m + 1, m + 2, \dots, n\}$  l'indice del coefficiente tale che risulti

$$c_g < 0;$$

nel caso di molteplici coefficienti negativi, il ragionamento va riferito al coefficiente

$$c_g = \min c_i : c_i < 0$$

(in caso di parità il coefficiente verrà scelto in modo casuale). Al crescere al di sopra dello zero della sola variabile non di base  $x_g$ , identificata dall'indice  $g$ , mentre le altre variabili non di base si mantengono nulle, la funzione obiettivo decresce, infatti risulta

$$z = z_0 + c_g x_g,$$

nella quale

$$c_g x_g < 0.$$

Il valore migliore della  $z$  verrà attinto in corrispondenza del massimo valore possibile di  $x_g > 0$ .

Esso viene identificato mantenendo la condizione di non negatività sulle variabili di base che viene espressa in forma esplicita scrivendo il sistema 34 in una forma nella quale compaiono le sole variabili di base e la variabile non di base  $x_g$  in considerazione (mantenendo nulle le altre variabili non di base diverse dalla  $x_g$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 : x_1 = b_1 - a_{1g} x_g \\ E_2 : x_2 = b_2 - a_{2g} x_g \\ \vdots \\ E_m : x_m = b_m - a_{mg} x_g \\ E : z = z_0 + c_g x_g \end{array} \right. . \quad (36)$$

Partendo dalle prime  $m$  equazioni del sistema 36 e imponendo la condizione al limite di non negatività

$$x_i = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

si determina una  $m$ pla di valori per  $x_g$ :

$$\begin{array}{l} x_{g1} = \frac{b_1}{a_{1g}} \\ x_{g2} = \frac{b_2}{a_{2g}} \\ \vdots \\ x_{gm} = \frac{b_m}{a_{mg}} \end{array} . \quad (37)$$

Fra gli  $x_{gi}$  così determinati si considerino solo quelli positivi. Il minore di questi:

$$\bar{x}_g = \min x_{gi} = \min \frac{b_i}{a_{ig}} : x_{gi} \geq 0, \quad (38)$$

costituisce il massimo possibile valore di  $x_g$  compatibile con l'ipotesi di non negatività delle variabili di base; esso determina il valore migliore della  $z$  ottenibile mediante sostituzione della 38 nell'ultima equazione del sistema 36:

$$z = z_0 + c_g \bar{x}_g.$$

Infatti valori  $x_g > \bar{x}_g$  sarebbero tali da violare la non negatività delle variabili di base per almeno una di esse.

Si noti che, una volta identificato l'indice  $g$ , le condizioni 37 vanno considerate per le sole equazioni nelle quali  $a_{ig}$  è positivo; infatti ove  $a_{ig}$  fosse negativo o nullo la variabile di base esplicitata tramite la corrispondente equazione

$$x_i = b_i - a_{ig} x_g,$$

non potrebbe mai violare la condizione di non negatività, qualunque fosse il valore  $x_g > 0$ .

Da quanto dedotto consegue il seguente:

**Theorem 2** *Se la forma canonica di base 34, che ammette soluzione consistente, nell'ultima equazioni che definisce la funzione obiettivo  $z$  presenta almeno un coefficiente  $c_g < 0$ , e la colonna  $[a_{ig}]$  è composta di elementi tutti non positivi, la funzione obiettivo non è limitata inferiormente.*

Peraltro il procedimento di miglioramento della soluzione degenera se accade che in almeno una delle 37, in presenza di  $a_{jg} > 0$  risulta  $b_j = 0$ .

Infatti in tale caso il massimo cercato per  $x_g$  è coincidente con lo zero; valori di  $x_g > 0$  renderebbero negativa la variabile di base  $x_j$  (vedi la  $j$ -esima equazione delle 36), e pertanto il valore di  $z$  non può essere migliorato in questo modo.

Nel caso vi sia uno o più valori  $b_i = 0$  il metodo degenera. In tali casi si dovrà scegliere in modo casuale quale fra le variabili di base iniziali del tipo  $x_j$  debba essere riposta fra quelle non di base, per fare posto alla neopromossa  $x_g$  fra quelle di base.

Da tutto quanto esposto fin qui discende senza bisogno di ulteriore dimostrazione il seguente:

**Theorem 3** *Un sistema in forma canonica di base 34, a soluzione consistente 35, che presenti almeno un coefficiente*

$$c_g < 0, \quad \forall g \in \{m+1, m+2, \dots, n\},$$

*e almeno uno dei coefficienti della  $g$ -esima colonna positivo*

$$a_{jg} > 0,$$

con il corrispondente termine noto positivo

$$b_j > 0,$$

ammette un'altra soluzione consistente migliore di quella 35, e cioè con funzione obiettivo di valore minore di quello precedentemente determinato.

Il semplice richiamo sintetico di quanto fin qui esposto costituisce la dimostrazione del teorema enunciato: infatti, sostituendo nel vettore delle variabili di base  $(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m)$  la variabile  $x_g$  a quella  $x_j$ , si ottiene un altro vettore di variabili di base:

$$(x_1, x_2, \dots, x_g, \dots, x_m), \quad (39)$$

la cui soluzione corrispondente è consistente, risultando

$$\begin{aligned} x_i &= b_i - a_{ig} x_g \geq 0, \quad \forall i \in (\{1, 2, \dots, m\} - \{j\}) \\ x_g &= \frac{b_i}{a_{jg}} > 0 \\ x_j &= 0 \\ x_i &= 0, \quad \forall i \in (\{m+1, m+2, \dots, n\} - \{g\}). \end{aligned}$$

Tale soluzione è diversa da quella 35 risultando per ipotesi  $b_j > 0$ ; pertanto ne risultano variati i valori delle precedenti variabili di base (in corrispondenza dei valori  $a_{ig} \neq 0$ ), inoltre ne discende  $x_g > 0$ ,  $x_j = 0$ ; risultando poi

$$c_g x_g < 0,$$

sarà

$$z = z_0 + c_g x_g < z_0;$$

a questo punto è completamente dimostrato che sotto le ipotesi del teorema esiste una soluzione consistente migliore di quella precedente. Peraltro l'ipotesi fatta che risulti  $a_{jg} > 0$  consente di adoperare il termine  $a_{jg} x_g$  della  $j$ -esima equazione come termine pivot allo scopo di eliminare la  $x_g$  da tutte le altre equazioni eccetto che da quella  $j$ -esima, pervenendo alla nuova forma canonica di base del nuovo vettore di variabili di base 39.

La dimostrazione fatta sopra viene condotta in modo simile nel caso che risulti più di un elemento della  $g$ -esima colonna positivo  $a_{kg} > 0$  con i corrispondenti termini noti positivi  $b_k > 0$ ; in tale caso l'indice  $j$  di cui sopra viene identificato come quello dell'equazione per la quale risulti minimo il rapporto

$$\frac{b_k}{a_{kg}}.$$

L'indice  $j$  così identificato indica quale variabile  $x_j$  di base deve lasciare il posto a quella nuova  $x_g$ , e ciò in quale equazione deve accadere (nella  $j$ -esima equazione).

L'applicazione sistematica del criterio di ottimalità e della procedura di miglioramento della soluzione, provenienti dai teoremi dimostrati, costituiscono il nucleo dell'algoritmo del simplesso che, con eccezione per i casi degeneri, permette di migliorare la soluzione consistente di partenza e di pervenire dopo un numero finito di passi alla soluzione ottimale (o ad una classe di soluzioni con  $z$  non limitata inferiormente).

## 7 LA RICERCA DELL'OTTIMO MEDIANTE IL CALCOLO AUTOMATICO.

### 7.1 La procedura del Metodo del Simpleso.

Si è visto nel § 6.3 che partendo da una forma canonica di base del sistema che ammetta soluzione consistente, ma non ottima, è possibile costruire una soluzione consistente migliore di questa.

Pertanto la procedura generale del metodo del simpleso, da automatizzarsi con appositi codici di calcolo, deve in primo luogo generare una soluzione di base consistente, e poi ottimizzare tale soluzione.

La generazione all'inizio di una forma canonica che ammetta soluzione consistente viene condotta come segue.

Con riferimento alla forma standard iniziale del sistema 16, si consideri un ulteriore vettore

$$(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$$

di variabili cosiddette *artificiali*, che intervengono ciascuna nella corrispondente equazione:

$$\begin{cases} E_1 : & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1 \\ E_2 : & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ E_m : & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} . \quad (40)$$

Si considerino inoltre le due equazioni

$$\begin{cases} E_{m+1} : & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n - z = 0 \\ E_{m+2} : & f - (x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m}) = 0 \end{cases} . \quad (41)$$

La  $E_{m+1}$  fornisce la funzione obiettivo  $z$  del problema, la  $E_{m+2}$  definisce la cosiddetta *funzione di consistenza*  $f$ .

Risulti

$$\begin{aligned} x_i &\geq 0, & \forall i \in \{1, 2, \dots, n+m\} \\ b_i &\geq 0, & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Le 40∩41 costituiscono la scrittura del sistema in forma canonica di base rispetto al vettore di variabili di base

$$(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}, z, f); \quad (42)$$

la soluzione di base consistente definita dalle 40∩41 è la seguente:

$$\begin{aligned} x_i &= 0, & \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ x_j &= b_j, & \forall j \in \{n+1, n+2, \dots, n+m\} \\ z &= 0 \\ f &= b_1 + b_2 + \dots + b_m \end{aligned} . \quad (43)$$



La soluzione ottima, se esistente, viene attinta in un numero finito di passi, essendo finito e pari a

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

il numero dei possibili vettori delle  $n$  variabili di base.

La procedura del metodo del sempliceo può pertanto essere riassunta nel diagramma di flusso riportato in 4.

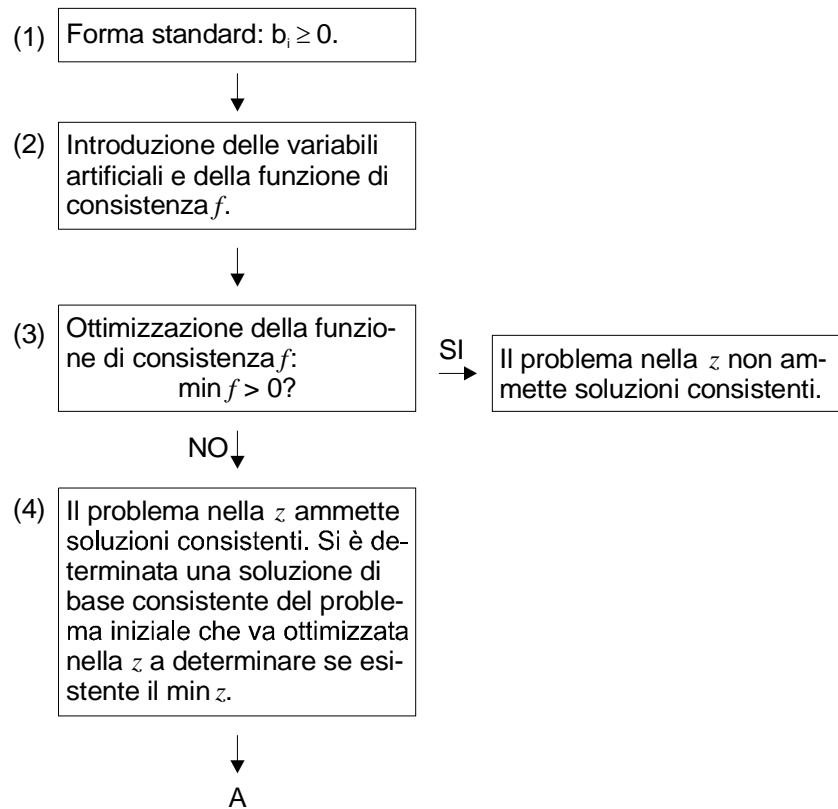


Figure 4:

Nel processo di ottimizzazione sia della funzione  $f$  contenuto nel blocco 3 di 4, sia della  $z$  nel blocco 4, si adopera il procedimento del sempliceo, basato sull'uso alternato del criterio di ottimalità e del miglioramento della soluzione. Tale procedimento è schematicamente espresso dal diagramma di flusso di 5 (con riferimento alla funzione obiettivo  $z$ ).

## 7.2 Formulazione del problema di programmazione lineare per la ricerca del max $z$ .

La formulazione del problema di Programmazione Lineare volto alla ricerca del massimo è perfettamente analoga a quella già esplicitata per il minimo, e viene di seguito particolarizzata.

### 7.2.1 Criterio di ottimalità.

Con riferimento al problema di Programmazione Lineare

$$\max z = \max (z_0 + c_1 x_{m+1} + c_2 x_{m+2} + \cdots + c_n x_n)$$

sotto i vincoli

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$
$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

si sia già determinata una soluzione consistente nella base  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , e il corrispondente valore della funzione obiettivo sia

$$z = z_0;$$

se esiste almeno un

$$c_g > 0, \quad g \in \{m+1, m+2, \dots, n\},$$

in corrispondenza del quale esiste almeno un

$$a_{jg} > 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}$$

con il corrispondente  $b_j > 0$ , esiste un'altra soluzione migliore di quella determinata, di valore

$$z = z_0 + c_g x_g > z_0,$$

risultando

$$c_g > 0, \quad x_g > 0.$$

Il valore di  $x_g$  è posto pari a

$$\min \frac{b_i}{a_{ig}}, \quad \frac{b_i}{a_{ig}} > 0.$$

La soluzione  $z_0$  costituisce il massimo della funzione  $z$  ove risulti

$$c_i \leq 0, \quad \forall i \in \{m+1, m+2, \dots, n\}.$$

Infatti dalla

$$z = z_0 + c_1 x_{m+1} + c_2 x_{m+2} + \cdots + c_n x_n$$

si ha

$$z - z_0 = \sum_{i=1}^{n-m} c_i x_{m+i};$$

il secondo membro, risultando  $c_i \leq 0$  e  $x_i \geq 0$ , deve essere non positivo; deve pertanto risultare

$$z - z_0 \leq 0 \Rightarrow z \leq z_0$$

e  $z_0$  è il cercato massimo.

## 8 FORMULAZIONE MATRICIALE DEL PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE.

### 8.1 Premesse.

L'algebra matriciale consente una formulazione più compatta del Problema della Programmazione Lineare.

Dette  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  due matrici  $m \times n$ , si hanno le seguenti scritte equivalenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} > \mathbf{B} &\Leftrightarrow a_{ij} > b_{ij}, \quad \forall i, j \\ \mathbf{A} \geq \mathbf{B} &\Leftrightarrow a_{ij} \geq b_{ij}, \quad \forall i, j \\ \mathbf{A} < \mathbf{B} &\Leftrightarrow a_{ij} < b_{ij}, \quad \forall i, j \\ \mathbf{A} \leq \mathbf{B} &\Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}, \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

Le scritte di cui sopra vengono espresse dalle rispettive dizioni che seguono:

- la matrice  $\mathbf{A}$  è maggiore di quella  $\mathbf{B}$ ;
- la matrice  $\mathbf{A}$  è maggiore o uguale (è non minore) di quella  $\mathbf{B}$ ;
- la matrice  $\mathbf{A}$  è minore di quella  $\mathbf{B}$ ;
- la matrice  $\mathbf{A}$  è minore o uguale (è non maggiore) di quella  $\mathbf{B}$ .

Il problema generale di Programmazione Lineare può scriversi allora in termini di disequazioni nel seguente modo: determinare il massimo di

$$z = z_0 + \mathbf{C}_0^T \mathbf{x}'$$

con i vincoli

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{x}' \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}' \geq \mathbf{0}, \tag{46}$$

ove

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n'} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n'} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n'} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn'} \end{bmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le dimensioni delle matrici scritte sono le seguenti:

- matrici  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{C}_0$ ,  $\mathbf{0}$ : dimensioni  $n \times 1$ ;
- matrice  $\mathbf{A}_0$ : dimensioni  $m \times n'$ ;

- matrice  $\mathbf{b}$ : dimensioni  $m \times 1$ ;
- matrici  $z, z_0$ : scalari di dimensioni  $1 \times 1$ .

Le 46, mediante l'aggiunta delle variabili di scarto

$$\mathbf{x}''^T = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}),$$

passano dalla forma di disequazione alla forma di equazione. Il problema di Programmazione Lineare si riformula pertanto: massimizzare

$$z = z_0 + \mathbf{C}^T \mathbf{x}$$

con i vincoli

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (47)$$

ove

$$\mathbf{A} = [ \mathbf{A}_0 \quad \mathbf{I}_m ], \quad \mathbf{x}^T = [ \mathbf{x}'^T \quad \mathbf{x}''^T ], \quad \mathbf{C}^T = [ \mathbf{C}_0^T \quad \mathbf{0}^T ].$$

Le matrici  $\mathbf{x}', \mathbf{C}_0, \mathbf{0}$  hanno dimensioni  $(m+n) \times 1$ ; la  $\mathbf{A}$  ha dimensioni  $m \times (m+n)$ ; la  $\mathbf{b}$  ha dimensioni  $m \times 1$ .

Nel seguito, con riferimento a quanto accade nella generica *forma canonica di base*, nella quale  $m$  colonne della matrice  $\mathbf{A}$  sono vettori unitari, risultando non singolare la corrispondente sottomatrice quadrata di ordine  $m$ , si supporrà che *tutte* le sottomatrici  $m \times m$  della matrice aumentata

$$[ \mathbf{A} \quad \mathbf{b} ],$$

siano non *singolari*. I casi in contrasto con tale ipotesi debbono essere trattati a parte.

L'ipotesi fatta si dice di *non degenerazione* del Problema di Programmazione Lineare.

## 8.2 Soluzioni di base.

Una soluzione di base consiste nello scegliere un sotto vettore  $\mathbf{x}_0$  di  $\mathbf{x}$  di dimensioni  $m \times 1$ , e la corrispondente sottomatrice  $\mathbf{K}$  non singolare, di ordine  $m \times m$  della  $\mathbf{A}$  nel risolvere il sistema

$$\mathbf{K} \mathbf{x}_0 = \mathbf{b},$$

determinando

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{b},$$

e nel porre uguali a zero tutti i valori delle  $x_i$  non rientranti nel vettore  $\mathbf{x}_0$  scelto come base.

Nel procedimento si lavora con una matrice  $\mathbf{T}$  dei coefficienti, che raccoglie le equazioni 47 e la funzione obiettivo nella forma partizionata

$$\mathbf{T} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{C}^T & z_0^T \end{array} \right]. \quad (48)$$

La 48 raccoglie come sottomatrici le seguenti parti di essa:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &: m \times n, & \mathbf{C} &: 1 \times n \\ \mathbf{b} &: m \times 1, & \mathbf{z}_0 &: 1 \times 1. \end{aligned}$$

Nell'applicazione del metodo del Simplex si opera trasformando la matrice 48 in diverse forme del tipo

$$\mathbf{T}' = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{b}' \\ \hline -\mathbf{C}'^T & z' \end{array} \right].$$

Le righe della parte superiore  $\mathbf{A}'$  e  $\mathbf{b}'$  si ottengono mediante operazioni di combinazioni lineari delle sole righe di questa parte.

L'ultima riga  $-\mathbf{C}'^T$  e  $z'$  muta forma mediante la somma della sua forma precedente con combinazioni lineari delle righe superiori.

La forma 48 può anche risciversi in modo da fare comparire in termini espliciti i coefficienti delle *variabili di base* e quelli delle *variabili non di base*:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, & \mathbf{x}_1 &= \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T} &= \left[ \begin{array}{cccc|cccc|c} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_{m+n} & \mathbf{b} \\ \hline -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_m & -c_{m+1} & -c_{m+2} & \cdots & -c_{m+n} & z_0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

e cioè nella ulteriore forma

$$\mathbf{T} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{C}_1^T & -\mathbf{C}_2^T & z_0 \end{array} \right],$$

che consente di scrivere

$$\mathbf{T} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{49}$$

con

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

ove, supposto essere le prime  $m$  variabili di base,  $\mathbf{B}$  ne raccoglie i coefficienti;  $\mathbf{D}$  raccoglie i coefficienti delle variabili non di base. Analogamente nella parte della funzione obiettivo. Le dimensioni delle matrici coinvolte sono segnate di seguito:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &: m \times m, & \mathbf{C}_2 &: 1 \times (n - m), \\ \mathbf{D} &: m \times (n - m), & z_0 &: 1 \times 1, \\ \mathbf{b} &: m \times 1, & \mathbf{x}_0 &: m \times 1, \\ \mathbf{C}_1 &: 1 \times m, & \mathbf{x}_1 &: (n - m) \times 1. \end{aligned}$$

Nel passaggio dalla forma generica 49 a quella canonica equivalente nella base scelta si deve operare mediante una matrice di trasformazione espressa nella forma partizionata del tipo seguente:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{V}^T & \mathbf{1} \end{array} \right], \tag{50}$$

date le operazioni consentite sopradescritte, in modo che premoltiplicando la 49 per la 50 si pervenga alla forma

$$\det \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{D}' & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{0}^T & -\mathbf{C}_2'^T & z'_0 \end{array} \right],$$

che costituisce la forma canonica nella base  $\mathbf{x}_0$ .

Deve risultare cioè la equivalenza fra le due matrici seguenti:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{F} & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{V}^T & \mathbf{1} & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{C}_1^T & -\mathbf{C}_2^T & z_0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{D}' & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{0}^T & -\mathbf{C}_2'^T & z'_0 \end{array} \right].$$

Il primo membro può svilupparsi come segue:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{F}\mathbf{B} & \mathbf{F}\mathbf{D} & \mathbf{F}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{V}^T\mathbf{B} - \mathbf{C}_1^T & \mathbf{V}^T\mathbf{D} - \mathbf{C}_2^T & \mathbf{V}^T\mathbf{b} + z_0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{D}' & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{0}^T & -\mathbf{C}_2'^T & z'_0 \end{array} \right],$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{B} = \mathbf{I} &\Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{B}^{-1}, \\ \mathbf{D}' = \mathbf{F}\mathbf{D} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}, \\ \mathbf{b}' = \mathbf{F}\mathbf{b} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \\ \mathbf{V}^T\mathbf{B} - \mathbf{C}_1^T = \mathbf{0}^T &\Rightarrow \mathbf{V}^T\mathbf{B} = \mathbf{C}_1^T \Rightarrow \mathbf{V}^T = \mathbf{C}_1^T\mathbf{B}^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{V} &= (\mathbf{B}^{-1})^T\mathbf{C}_1. \end{aligned}$$

Per determinare quale cambiamento effettuare nella base basta il segno dei coefficienti della  $-\mathbf{C}_2'^T$ :

$$-\mathbf{C}_2'^T = \mathbf{V}^T\mathbf{D} - \mathbf{C}_2^T = \mathbf{C}_1^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{C}_2^T,$$

cosa che richiede il calcolo della inversa della matrice  $\mathbf{B}$  ogni volta che cambia la base  $\mathbf{x}_0$ .

Il *Simplesso revisionato* permette di non ricalcolare ogni volta tutti i coefficienti della matrice  $\mathbf{B}$  ma di scambiare, in ogni ciclo, una colonna della  $\mathbf{B}$  con una della  $\mathbf{D}$  e poi computare l'inversa della  $\mathbf{B}'$  così ottenuta per solo cambiamento di una colonna utilizzando la matrice  $\mathbf{B}^{-1}$  già calcolata precedentemente.

LA sostituzione nella matrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} = [ \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_i \quad \cdots \quad \mathbf{b}_m ]$$

della sola colonna *iesima* con la nuova colonna  $\mathbf{b}'_i$  proveniente dalla matrice  $\mathbf{D}$  e corrispondente alla nuova variabile di base che va a sostituire quella *iesima* precedente si effettua mediante l'operazione

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + (\mathbf{b}'_i - \mathbf{b}_i) \mathbf{e}_i^T, \quad (51)$$

ove

$$\mathbf{e}_i^T = [ e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_i \quad \cdots \quad e_m ] = [ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0 ].$$

La 51 posta nella forma generale

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \mathbf{G} \mathbf{E},$$

si inverte secondo la relazione

$$(\mathbf{B}')^{-1} = \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{B}^{-1}, \quad (52)$$

ove

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} + \mathbf{E} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G}. \quad (53)$$

Le 52 e 53 sono da intendersi eseguibili ove risultino non singolari le matrici  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{K}$ ; sotto tali ipotesi la  $\mathbf{B}'$  è non singolare.

Tale procedimento permette di ricalcolare l'inversa dell'aggiornamento  $\mathbf{B}'$  della matrice  $\mathbf{B}$ , utilizzando l'inversa della matrice  $\mathbf{B}$  originaria, e senza modificare la tabella iniziale.

## 9 SIGNIFICATO GEOMETRICO DEGLI ALGORITMI DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE.

Il più generale problema di Programmazione Lineare può porsi nella forma seguente volta alla determinazione del massimo della funzione  $z$  lineare nelle variabili  $\mathbf{x}$ :

$$\max z, \quad z = \mathbf{C}^T \mathbf{x} + z_0,$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \in V_n,$$

nel rispetto delle condizioni di vincolo (lineari nella  $\mathbf{x}$ )

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

### 9.1 Varietà lineari.

Si consideri lo spazio vettoriale a  $n$  dimensioni  $V_n$ . Dato uno spazio vettoriale  $V_k$ , con  $0 < k \leq n$  e dato un elemento  $\mathbf{a} \in V_n$ , è una varietà lineare  $L_k$  l'insieme

$$(6) \quad \mathbf{y} = \mathbf{v} + \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{v} \in V_k.$$

Posto

$$\mathbf{A}^T = [ \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n ],$$

consideriamo la funzione lineare

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{x}^T \mathbf{a}_i. \quad (54)$$

L'insieme dei vettori che annullano la 54 è un *sottospazio* di dimensione  $n-1$  di  $V_n$  e verrà indicato con  $V_{n-1}$ . Esso è definito da:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

L'insieme definito dalla 54 è un *iperpiano* ed è una varietà lineare di dimensione  $n-1$ :

$$\mathbf{x}^T \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i. \quad (55)$$

L'insieme dei vettori  $\mathbf{x}$  per i quali risulta

$$\mathbf{x}^T \mathbf{a}_i \leq \mathbf{b}_i \quad (56)$$

è un *semispazio* di origine l'iperpiano.

Il semispazio 56 è un insieme *convesso, chiuso, illimitato, privo di vertici, avente come frontiera l'iperpiano* 55.

Combinazioni lineari convesse dei vettori appartenenti al semispazio 56, vi appartengono:

$$\begin{aligned} \lambda_i &\in R_0^+, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = 1, \\ \mathbf{y} &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{x}_r \in \text{semispazio}. \end{aligned}$$

La disequazione matriciale

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (57)$$

definisce l'intersezione di  $m$  semispazi del tipo

$$\mathbf{x}^T \mathbf{a}_i \leq \mathbf{b}_i;$$

tale insieme è convesso in quanto intersezione di insiemi convessi.

Anche la disequazione vettoriale

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (58)$$

esplicitabile in  $n$  disequazioni del tipo

$$x_i \geq 0,$$

definisce  $n$  semispazi; tale insieme è un *nangoloide* di origine  $\mathbf{0}$  che coincide con il quadrante dei vettori non negativi.

Tale insieme è un *cono* di  $V_n$ .

Un *cono*  $C$  è un sottoinsieme di  $V_n$  tale che, data una qualunque  $r$ pla di suoi vettori

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\} : \mathbf{x}_i \in C,$$

una qualunque loro combinazione lineare non negativa gli appartiene

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{x}_r \in C, \quad \forall \lambda_i \in R_0^+.$$

$\mathbf{0}$  è l'origine del cono definito dalla 58.

## 9.2 Poliedri.

L'insieme definito dalla unione di 57 e 58 se non è vuoto e illimitato si chiama *poliedro*: esso è un insieme convesso chiuso e limitato avente un numero finito di vertici (7). I poliedri verranno indicati con  $P$ .

Ogni poliedro convesso è l'insieme delle combinazioni lineari convesse dei suoi vertici.

Un vettore  $\mathbf{v}$  si dice *vertice* ove non sia mai ottenibile come combinazione lineare di un'altra coppia di vettori appartenenti a  $P$  diversi da  $\mathbf{v}$  e diversi fra loro.

### 9.3 Sempleso.

Particolari poliedri in  $V_n$  vengono generati da insiemi di vertici costituiti da  $m$  vettori con

$$m \leq n + 1,$$

non appartenenti a una varietà lineare  $L_{m-2}$  (cosa che accade se essi sono linearmente indipendenti). La dimensione del *simplesso* è  $m - 1$ .

### 9.4 Esempi.

Il segmento di vertici  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  nello spazio  $V_2$  è un simplesso (8). Risulta  $m = 2$ , ed è quindi di dimensione  $m - 1 = 1$ .

Si ha anche che:

- un triangolo è un simplesso in  $V_2$  con  $m = 3 \leq n + 1 = 3$  e di dimensione  $m - 1 = 2$ ;
- un tetraedro è un simplesso in  $V_3$  con  $m = 4 \leq n + 1 = 4$  e di dimensione  $m - 1 = 3$ ;
- un rettangolo in  $V_2$  non è un simplesso essendo  $m = 4 > n + 1 = 3$ ;
- un cubo in  $V_3$  non è un simplesso giacché risulta  $m = 8 > n + 1 = 4$ ;
- in un simplesso qualunque coppia di vertici definisce uno *spigolo*.

### 9.5 Teorema.

**Theorem 4** *Gli elementi  $\mathbf{v}$  dei poliedri  $P$  di  $V_n$  sono vertici se e solo se esistono  $n$  iperpiani generatori fra quelli  $n + m$  che definiscono  $P$  (del tipo 57 $\cup$ 58) aventi  $\mathbf{v}$  come unico elemento comune.*

*Il soddisfacimento con l'eguaglianza di  $n$  fra le  $n + m$  disequazioni 57 $\cup$ 58, determina un vertice del poliedro.*

*I vertici sono in numero finito non superiore a*

$$\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!m!},$$

*e sono costituiti dalle intersezioni uniche di  $n$  iperpiani generatori.*

*I vertici corrispondono alle soluzioni di base trattate precedentemente.*

### 9.6 Troncione.

Ove l'intersezione dei semispazi 57 e 58 sia *non limitata*, essa si chiama un *troncone*; ogni troncone  $T$  può ottenersi come somma di un poliedro convesso  $K$  e di un cono poliedrico convesso  $C$  (9).

Le disequazioni 57 e 58 definiscono o un poliedro convesso o un troncone: tali insiemi di vettori di  $V_n$  costituiscono le *soluzioni ammissibili* del problema.

## 9.7 Funzione obiettivo.

La funzione  $z$  da massimizzare sia del tipo

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (59)$$

con

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

L'equazione

$$z = 0 \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$$

definisce la retta  $r$  ortogonale al vettore  $\mathbf{c}$  (10).

La 59 può essere calcolata per qualunque vettore  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} \in V_2$  che sia anche soluzione ammissibile delle 57∪58.

In  $\mathbf{a}$  si ha

$$z(\mathbf{a}) = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}^T \mathbf{a};$$

il valore della funzione obiettivo calcolato in  $\mathbf{a}$  è interpretabile come distanza con segno dell'estremo di  $\mathbf{a}$  dalla retta  $r$  ortogonale al vettore  $\mathbf{c}$ , amplificata secondo il modulo di  $\mathbf{c}$  (10):

$$\mathbf{c}^T \mathbf{a} = |\mathbf{c}| |\mathbf{a}| \cos \alpha = |\mathbf{c}| d.$$

La funzione obiettivo assume valori positivi in uno dei semipiani determinati dalla  $r \perp \mathbf{c}$  e valori negativi nell'altro semispazio. Su  $r$  la  $z$  assume valore nullo.

L'ottimizzazione della funzione obiettivo  $z$  nel problema del max  $z$  corrisponde a determinare nell'insieme  $S_a$  delle soluzioni ammissibili (poliedro o troncone) la massima distanza dalla retta  $r \perp \mathbf{c}$  (11 e 12).

## 9.8 Teorema fondamentale della Programmazione Lineare.

**Theorem 5** *Se l'insieme delle soluzioni ottimali di un problema di Programmazione Lineare non è vuoto, esso contiene almeno un vertice dell'insieme delle soluzioni ammissibili: se esistono soluzioni ottimali ve ne è almeno una che è soluzione di base (e corrisponde a un vertice).*

Una soluzione di base è *degenere* se corrisponde a un vertice di  $S_a$  contenuto in più di  $n$  iperpiani generatori, e cioè se sono soddisfatte più di  $n$  fra le equazioni 57∪58.

La soluzione degenere costituisce il caso limite di una situazione con due vertici  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  vicini portati a coincidere (13).

## 9.9 Interpretazione geometrica del metodo del simplesso.

Sulla scorta di quanto fin qui esposto, il metodo del simplesso descritto precedentemente gode della seguente interpretazione geometrica.

Il calcolo della soluzione di base consistente iniziale  $\bar{\mathbf{x}}$ , così come il calcolo di una qualunque soluzione di base consistente, consiste nel soddisfacimento con l'uguaglianza di  $n$  fra le  $m + n$  disequazioni che reggono il problema.

Ciò significa che nello spazio vettoriale  $V_n$  a  $n$  dimensioni, la soluzione individuata  $\bar{\mathbf{x}}$  appartiene a  $n$  iperpiani; a  $\bar{\mathbf{x}}$  corrisponde un vertice del dominio delle soluzioni ammissibili.

Il calcolo della funzione obiettivo nel punto  $(\bar{\mathbf{x}}, z(\bar{\mathbf{x}}))$  costituisce un minorante del  $\max z$  cercato:

$$z(\bar{\mathbf{x}}) \leq \max z.$$

L'applicazione del criterio di ottimalità alla forma  $z(\bar{\mathbf{x}})$  permette di giudicare se il valore  $z(\bar{\mathbf{x}})$  è ottimo oppure no.

Se  $z(\bar{\mathbf{x}})$  non è il valore ottimo, l'algoritmo del simplesso, mediante la sostituzione di una sola variabile non di base nel vettore  $\mathbf{x}$  di base iniziale, in pratica sposta la soluzione dal vertice  $\bar{\mathbf{x}}$  a un altro vertice  $\bar{\bar{\mathbf{x}}}$  ad esso adiacente, nel quale la funzione obiettivo  $z$  assumerà un valore migliore del precedente:

$$z(\bar{\bar{\mathbf{x}}}) > z(\bar{\mathbf{x}})$$

in forza del Criterio di Ottimalità.

L'esistenza di un altro vertice, oltre quello  $\bar{\mathbf{x}}$ , è certa, perché in caso contrario, ove  $\bar{\mathbf{x}}$  fosse l'unico vertice, esso dovrebbe necessariamente costituire la soluzione ottima, alla luce del Teorema Fondamentale.

Poiché il numero dei vertici del dominio delle soluzioni ammissibili è finito, come già mostrato, in un numero finito di passi viene determinata, se esistente, la soluzione ottima.

Il numero di passi necessario alla convergenza numerica del procedimento è in realtà molto minore del numero totale dei vertici ed è stato valutato sperimentalmente che esso appartiene sempre all'intervallo numerico

$$\left( \frac{2}{3}m, m \right),$$

ove  $m$  è il numero delle equazioni di vincolo.

Quanto detto sopra vale ovviamente nei casi non degeneri.

## 10 CASI DEGENERI NEL METODO DEL SIMPLESSO.

### 10.1 Indeterminatezza fra più vettori di base.

Con riferimento a un problema di Programmazione Lineare volto alla ricerca del

$$\max z,$$

può accadere che, determinata la variabile  $x_g$  che il criterio di ottimalità indica doversi inserire nella base, il procedimento pervenga a una indeterminatezza.

La determinazione di quale variabile fra quelle della base precedente sia da sostituire può essere ambigua: ciò accade ove risulti per almeno due indici  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$\frac{b_i}{a_{ig}} = \frac{b_j}{a_{jg}} = \min_k \frac{b_k}{a_{kg}}, \quad \forall \frac{b_k}{a_{kg}} > 0.$$

In tale caso c'è indeterminatezza fra quale delle equazioni di vincolo debba essere efficace rispetto alla  $g$ -esima variabile.

Dal punto di vista numerico tale possibilità è molto remota; comunque in tali casi si opererà una scelta casuale fra  $i$  e  $j$ .

Tale degenerazione consiste nel verificare che rispetto a diversi vettori di variabili di base la  $z$  assume lo stesso valore, cosa che contrasta con i casi non degeneri trattati con il criterio di ottimalità.

### 10.2 Vincoli contraddittori.

Il problema di Programmazione Lineare di seguito espresso

$$\max z$$

sotto le condizioni

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_1 + x_2 &\leq 2, \end{aligned} \tag{60}$$

non ammette soluzioni, risultando vuoto l'insieme delle soluzioni ammissibili definito dalle 60 (14).

Il problema 60 esemplifica quei casi detti di *vincoli contraddittori*, nei quali applicando il procedimento analitico generale risulterà che la funzione di consistenza  $f$  ammette un minimo positivo.

Poiché  $f$  è definita da

$$\begin{aligned} f &= x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m}, \\ x_j &\geq 0, \quad j \in \{n+1, n+2, \dots, n+m\}, \end{aligned}$$

risultando  $\min f > 0$ , esiste almeno un  $x_j > 0$ , pertanto il problema originario nel quale risultava  $x_j = 0$  non ammette soluzione.

### 10.3 Funzione obiettivo non limitata.

In un problema del tipo

$$\max z = x_1 + x_2 = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

con i vincoli

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 2, \\ 2x_1 - x_2 &\geq -2, \\ x_i &\geq 0, \end{aligned} \tag{61}$$

può facilmente verificarsi non esistere il massimo di  $z$  in quanto il dominio delle soluzioni ammissibili  $S_a$  definito dalle 61 è non limitato nella direzione  $\mathbf{c}$  (15).

In tali situazioni, e in corrispondenza della variabile non di base  $x_g$  da inserire fra quelle di base, si determinerà una colonna  $a_g$  negativa di coefficienti:

$$\mathbf{a}_g < \mathbf{0},$$

cosicché la  $x_g$  possa divergere senza mai infrangere la non negatività delle variabili di base precedenti:

$$x_i = b_i - a_{ig} x_g.$$

In tale caso il procedimento iterativo deve essere bloccato.

### 10.4 Soluzione ottimale non unica.

In un problema di Programmazione Lineare del tipo

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

se risulta  $c_j < 0$  per ogni  $j$ , meno uno per il quale risulta  $c_j = 0$  in corrispondenza di una variabile  $j$  non di base, allora la  $z$  assume il valore di massimo per almeno due vettori differenti  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  e pertanto ogni combinazione lineare convessa di  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  è anch'essa soluzione:

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2, \quad \lambda \in R_0^+.$$

Ciò dipende dal fatto che, risultando  $c_j = 0$  si può variare l'insieme delle variabili di base facendo intervenire valori diversi della  $x_j$ , senza modificare il valore della funzione obiettivo. Graficamente (16) ciò corrisponde al parallelismo fra l'iperpiano

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$$

e uno degli iperpiani dati dalle equazioni di vincolo

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i \mathbf{x} &= \mathbf{b}_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ x_j &= 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

## 11 LA DUALITÀ NEI PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE.

### 11.1 Esempio.

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\max z = 8x_1 + 10x_2 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (62)$$

nel rispetto delle seguenti disequazioni di vincolo:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_i &\geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (63)$$

La soluzione ottima è la seguente:

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 2, \quad \max z = 36.$$

La tabella dei coefficienti delle 62 e 63, nella forma iniziale, si scrive

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ \hline 8 & 10 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^T & z_0 \end{array} \right].$$

In 17 viene rappresentato graficamente il problema in questione.

Il vettore  $\mathbf{c}$  può esprimersi come combinazione lineare non negativa, tramite il moltiplicatore

$$\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix}$$

delle due normali  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  ai due lati efficaci che determinano la soluzione ottima  $S_0 = \mathbf{x}^*$

$$\mathbf{c} = y_1^* \mathbf{n}_1 + y_2^* \mathbf{n}_2$$

che esplicitata diventa

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = y_1^* \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y_2^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e risolta rispetto a  $y_1^*$  e  $y_2^*$  fornisce

$$y_1^* = 2, \quad y_2^* = 6.$$

I vettori  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  costituiscono i coefficienti delle righe di  $\mathbf{A}$  e pertanto sono i trasposti delle righe di  $\mathbf{A}$  corrispondenti alle disequazioni soddisfatte come equazioni in  $\mathbf{x}^*$  ottimo, e pertanto dette disequazioni sono come suol dirsi *attive* in  $\mathbf{x}^*$ , relativamente alle variabili di base di  $\mathbf{x}^*$ , nel sistema

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$$

## 11.2 La dualità.

Se  $\mathbf{x}^*$  massimizza

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

sotto i vincoli

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

$\mathbf{c}^T$  può esprimersi come combinazione lineare non negativa di quelle righe di  $\mathbf{A}$  corrispondenti alle disequazioni soddisfatte con l'eguaglianza nella soluzione  $\mathbf{x}^*$ :

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}^*,$$

ove le componenti di  $\mathbf{y}^*$  corrispondenti alle disequazioni *non attive* in  $\mathbf{x}^*$  debbono essere nulle.

Sia  $\mathbf{y}$  un qualunque vettore  $m \times 1$  soddisfacente i vincoli duali

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad (64)$$

e cioè

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (65)$$

Poiché risulta

$$\mathbf{A} \mathbf{x}^* \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}, \quad (66)$$

ne consegue, in forza delle 64 e 65,

$$\mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*. \quad (67)$$

Inoltre, poiché  $\mathbf{y}^*$  è nullo nelle componenti corrispondenti alle righe non attive, mentre nelle altre righe le disequazioni  $\mathbf{A} \mathbf{x}^* \leq \mathbf{b}$  sono soddisfatte con l'eguaglianza, si ha:

$$\mathbf{y}^{*T} \mathbf{b} = \mathbf{y}^{*T} \mathbf{A} \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*. \quad (68)$$

Dalle 67 e 68 si ottiene

$$\mathbf{y}^T \mathbf{b} \geq \mathbf{y}^{*T} \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*,$$

valida per i vettori  $\mathbf{y}$  soddisfacenti le 64 e 65.

**Theorem 6**  $\mathbf{y}^*$  risolve il problema di Programmazione Lineare duale 66:

$$\text{minimizzare } \mathbf{b}^T \mathbf{y},$$

sotto i vincoli

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}; \quad (69)$$

il minimo di  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ , indicato con  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$ , coincide con il valore massimo  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$  determinato con il programma principale 69

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Table 1:

Programma principale						
Variabile	$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$				Relazione	Termini noti Progr. princip.
$y_1 \geq 0$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1n}$	$\leq$	$b_1$
$y_2 \geq 0$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2n}$	$\leq$	$b_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_m \geq 0$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mn}$	$\leq$	$b_m$
Relazione	$\geq$	$\geq$	$\dots$	$\geq$	$\geq$	$\min w$
Termini noti Progr. duale	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_n$	$\leq$	$\max z$

### 11.3 La scrittura del programma duale.

Ove il programma principale, volto alla determinazione del  $\max z$ , sia scritto nella forma

$$\begin{aligned} \max z &= \max (\mathbf{c}^T \mathbf{x}), \\ \mathbf{A} \mathbf{x} &\leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

il programma duale tende alla determinazione del minimo della funzione  $w$  e si scrive:

$$\begin{aligned} \min w &= \min (\mathbf{b}^T \mathbf{y}), \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

La scrittura dei due programmi può farsi in modo sintetico tramite la rappresentazione in 1.

La tabella letta in orizzontale fornisce la scrittura del Programma Principale, letta in verticale fornisce il

Programma Duale.

### 11.4 Sintesi dei teoremi della dualità.

1. Il problema duale di quello duale coincide con quello primale.
2. Un vettore  $\mathbf{x}$  soddisfacente il problema primale

$$\begin{aligned} &\text{massimizzazione } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{sotto i vincoli } \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{70}$$

e un vettore  $\mathbf{y}$  soluzione del problema duale di quello 70

$$\begin{aligned} &\text{minimizzare } \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ &\text{sotto i vincoli } \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{71}$$

soddisfano (la condizione di complementarità)

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}.$$

3. Vettori  $\mathbf{x}^*$  e  $\mathbf{y}^*$  rispettivamente soddisfacenti le 70 e 71, tali che risulti

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*,$$

sono soluzioni ottimali per i rispettivi problemi.

4. Se ambedue i problemi 70 e 71, non degeneri, ammettono soluzioni consistenti (o ammissibili), essi ammettono soluzioni ottime e i loro valori ottimi coincidono.
5. Se uno dei due problemi 70 e 71 non ammette (nemmeno) una soluzione consistente, nessuno dei due problemi ammette ottimo.

## 12 ELEMENTI DI ALGEBRA DELLE MATRICI.

### 12.1 Premesse.

L'*algebra delle matrici* fornisce alcuni strumenti indispensabili per la formulazione compatta dei problemi espressi da equazioni e disequazioni lineari e per una loro facile manipolazione; peraltro essa da un lato introduce *naturalmente* ai metodi matematici che costituiscono lo strumento indispensabile per la formulazione dei problemi di *plasticità*, dall'altro alla loro risoluzione mediante l'uso del calcolatore elettronico. Nel prosieguo si daranno solo gli elementi indispensabili dell'algebra matriciale sorvolando sulle dimostrazioni che sono presenti nei numerosi trattati esistenti sull'argomento.

### 12.2 Definizioni.

Nell'ambito della presente trattazione si definisce *matrice* un insieme di *elementi* ordinati in un quadro rettangolare con doppio indice; il primo riferentesi al numero d'ordine della *riga* (allineamento orizzontale), il secondo riferentesi al numero d'ordine della *colonna* (allineamento verticale).

Di norma gli elementi sono numeri reali, ma può anche farsi riferimento ad altri numeri o a oggetti più generali.

Le matrici vengono indicate di volta in volta in modo diverso, a seconda della loro caratteristica sulla quale vuole porsi l'attenzione.

Ad esempio sono perfettamente equivalenti le seguenti scritture:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{\textit{j}esima colonna} \\ \downarrow \end{array} \\
 \mathbf{A} = [a_{ij}] = & \begin{array}{c} \text{\textit{i}esima riga} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \quad (72) \\
 & = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 9 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Il simbolo di lettera maiuscola in carattere grosseto serve semplicemente a denominare una certa matrice  $\mathbf{A}$ .

La scrittura  $[a_{ij}]$  evidenzia il generico termine della matrice  $\mathbf{A}$  appartenente alla  $i$ esima riga e alla  $j$ esima colonna.

Il primo indice  $i$  può variare fra 1 e  $m$ , ove  $m$  è il numero delle righe presenti.

Il secondo indice  $j$  può variare fra 1 e  $n$ , essendo  $n$  le colonne presenti. I numeri naturali  $m$  e  $n$  vengono talvolta chiamati *dimensioni* della matrice, e si scrivono  $m \times n$ .

Con riferimento all'esempio 72 di sopra risulta  $m = 3$  e  $n = 4$ ; si può notare, ad esempio, che risulta  $a_{24} = 1$ ,  $a_{33} = 2$ , etc.

Per evidenziare il numero di righe  $m$  e di colonne  $n$  della matrice, si usano talvolta i due indici nel pedice:

$$\mathbf{B}_{m \times n}, \quad [b_{ij}]_{m \times n}, \quad \mathbf{A}_{3 \times 4}.$$

Le matrici che presentano il numero di colonne uguale a quello delle righe si chiamano *quadrate*; in tale caso per indicare la numerosità delle sue linee sarà sufficiente un solo indice; ad esempio per indicare la matrice quadrata  $\mathbf{C}$  avente  $n$  righe e  $n$  colonne si scriverà

$$\mathbf{C}_n,$$

oppure

$$\mathbf{C}_{n \times n}.$$

Il naturale  $n$  si chiama in tal caso *ordine* della matrice.

Le matrici che hanno  $m$  righe ed una sola colonna, vengono anche chiamate *vettori*; peraltro tale denominazione, che ne caratterizza la particolarità, non fa godere loro di alcun privilegio particolare.

Nella scrittura simbolica della generica matrice  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

possono individuarsi le cosiddette sottomatrici.

Ad esempio, sono sottomatrici della  $\mathbf{A}$  le seguenti:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [a_{mn}].$$

Le sottomatrici della  $\mathbf{A}$  formate da una sola riga o da una sola colonna si dicono rispettivamente *sottomatrice riga* e *sottomatrice colonna*.

Per indicare la sottomatrice costituita dalla seconda riga della  $\mathbf{A}$  si scrive

$$\mathbf{A}_{2,j} = [ a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n} ].$$

Così per indicare la sottomatrice costituita dalla terza colonna della  $\mathbf{A}$  si scrive

$$\mathbf{A}_{i,3} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{bmatrix}.$$

Una matrice avente una riga e  $n$  colonne viene chiamata *matrice riga*.

### 12.2.1 Esempi di matrice.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = [-1],$$

$$\mathbf{F} = [ 2 \quad -3 \quad -1 \quad 5 ], \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

La matrice  $\mathbf{B}$  è quadrata  $2 \times 2$ ; la matrice  $\mathbf{C}$  è un vettore  $5 \times 1$ :  $\mathbf{C}_{5 \times 1}$ ; la matrice  $\mathbf{D}$  presenta una sola riga e una sola colonna: l'unico elemento è  $a_{11} = -1$ ; la  $\mathbf{F}$  è una matrice riga:  $\mathbf{F}_{1 \times 4}$ ; la  $\mathbf{G}$  è una matrice *nulla* in quanto ha tutti gli elementi nulli.

Gli elementi  $a_{ii}$  di una matrice quadrata costituiscono la cosiddetta *diagonale principale*.

Una matrice quadrata che presenta uguali gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale si dice *simmetrica*. Pertanto se risulta

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (73)$$

la matrice è simmetrica.

Una matrice quadrata che presenta i termini simmetrici rispetto alla diagonale principale uguali e di segno opposto:

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

si dice *antisimmetrica*.

Le matrici antisimmetriche, dovendo avere

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

hanno elementi tutti nulli sulla diagonale principale.

Di norma le lettere maiuscole in grottesco denotano matrici generiche:  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ; le minuscole in grottesco denotano i vettori  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  (righe o colonne).

## 12.3 Operazioni elementari sulle matrici.

### 12.3.1 Eguaglianza di due matrici.

Due matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  si dicono *uguali* se hanno gli stessi numeri di righe e di colonne, e se hanno tutti uguali gli elementi con gli stessi indici.

Dovrà in sintesi risultare per le due matrici

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{m \times n} &= [a_{ij}], \quad \mathbf{B}_{m \times n} = [b_{ij}], \\ a_{ij} &= b_{ij}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

### 12.3.2 Somma di due matrici.

Due matrici si dicono *compatibili rispetto alla somma* se hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne.

Si definisce *somma* di due matrici compatibili rispetto alla somma

$$\mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}], \quad \mathbf{B}_{m \times n} = [b_{ij}],$$

la matrice

$$\mathbf{C}_{m \times n} = [c_{ij}]$$

definita dall'avere

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

L'operazione di addizione delle matrici verrà rappresentata con la stessa simbologia valida per le operazioni numeriche:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \tag{74}$$

oppure

$$[c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Data la natura aritmetica dell'operazione, consistente nell'operare la somma degli elementi *omologhi* (aventi cioè gli stessi indici), ne risultano soddisfatte le *proprietà associativa e commutativa*:

- Proprietà associativa:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}), \\ (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} &= a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}), \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

- Proprietà commutativa:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A}, \\ a_{ij} + b_{ij} &= b_{ij} + a_{ij}.\end{aligned}$$

### 12.3.3 Matrice opposta.

Si definisce matrice *opposta* di  $\mathbf{A}$ , e si indica con  $-\mathbf{A}$ , la matrice che sommata alla  $\mathbf{A}$  da luogo alla matrice *nulla*  $\mathbf{0}$ , avente tutti gli elementi nulli [0].

La matrice  $-\mathbf{A}$  ha come propri elementi quelli di  $\mathbf{A}$  cambiati di segno.

Ne risulta ovviamente

$$\begin{aligned}-\mathbf{A} &= -[a_{ij}] = [-a_{ij}], \\ \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) &= [a_{ij}] + [-a_{ij}] = [0] = \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{75}$$

Ne discende in particolare

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A},$$

o, per commutazione,

$$\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Dalle definizioni dell'operazione di somma 74 e di matrice opposta 75 di una data matrice discende la definizione dell'operazione di *sottrazione* fra due matrici.

Si dirà *differenza* fra le matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  la matrice  $\mathbf{C}$  determinata dalla somma di  $\mathbf{A}$  e dell'opposta di  $\mathbf{B}$ , e si indicherà con

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{A} - \mathbf{B}, \\ [c_{ij}] &= [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij}] + [-b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}].\end{aligned}$$

Dalla definizione di somma fra matrici, discende poi quella di *moltiplicazione di una matrice per uno scalare*; risultando in particolare

$$\mathbf{A} + \mathbf{A} = [a_{ij} + a_{ij}] = [2 a_{ij}],$$

è naturale definire *prodotto* di una matrice per uno scalare  $k$  una nuova matrice ottenibile dalla  $\mathbf{A}$  moltiplicandone tutti gli elementi per lo scalare.

Si scriverà

$$2 \mathbf{A} = 2 [a_{ij}] = [2 a_{ij}],$$

e in generale

$$k \mathbf{A} = k [a_{ij}] = [k a_{ij}], \quad \forall k \in R.$$

Da evidenti passaggi aritmetici, discendono le seguenti proprietà regolanti l'operazione di prodotto fra matrici e scalari:

$$\begin{aligned}k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= k \mathbf{A} + k \mathbf{B}, \\ k(l \mathbf{A}) &= (kl) \mathbf{A}, \\ -1 \mathbf{A} &= -\mathbf{A}, \\ 0 \mathbf{A} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

## 12.4 Prodotto matriciale.

L'operazione di moltiplicazione fra due matrici è quella che si discosta maggiormente da una semplice riconduzione alla analoga operazione aritmetica, e merita pertanto considerazioni particolari.

Consideriamo in primo luogo una matrice riga di  $m$  elementi,  $\mathbf{x}$ , e una matrice colonna o vettore avente  $m$  elementi,  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{x} = [ x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m ], \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Si definisce *prodotto matriciale* delle matrici riga e colonna, aventi lo stesso numero  $m$  di elementi, e si indica con il simbolo  $\mathbf{xy}$ , la matrice di dimensioni  $1 \times 1$  così definita:

$$\mathbf{xy} = \left[ \sum_{i=1}^m x_i y_i \right]. \quad (76)$$

Si noti che la definizione 76 equivale a quella di prodotto scalare o cartesiano fra i due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

### 12.4.1 Compatibilità di due matrici rispetto al prodotto matriciale.

Due matrici  $\mathbf{A}_{m \times n}$  e  $\mathbf{B}_{q \times p}$  sono *compatibili* rispetto al prodotto matriciale  $\mathbf{AB}$ , se e solo se il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda, e cioè se risulta

$$n = q.$$

Sono pertanto compatibili rispetto al prodotto matriciale  $\mathbf{AB}$ , nel quale  $\mathbf{A}$  è detta *premultiplicante* e  $\mathbf{B}$  *postmultiplicante*, solo le matrici del tipo

$$\mathbf{A}_{m \times n}, \quad \mathbf{B}_{n \times p}.$$

Si definisce *prodotto matriciale*  $\mathbf{AB}$  di due matrici per le quali sia soddisfatta la condizione di compatibilità, la matrice  $\mathbf{C}$  il cui generico elemento  $c_{ij}$  è dato dall'unico elemento della matrice prodotto della *iesima* sottomatrice riga della  $\mathbf{A}$  per la *jesima* sottomatrice colonna della  $\mathbf{B}$ .

Si scrive:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = [c_{ij}],$$

con

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj},$$

ovvero, utilizzando la definizione 76

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j.$$

L'operazione di prodotto è efficacemente rappresentata dal seguente quadro:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \boxed{b_{2j}} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & \boxed{b_{nj}} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ & & \boxed{c_{ij}} & & & \\ \ddots & & & & & \end{bmatrix},$$

che evidenzia il generico termine  $c_{ij}$  del prodotto come risultato del prodotto della  $i$ -esima riga di  $\mathbf{A}$  per la  $j$ -esima colonna di  $\mathbf{B}$ .

La matrice  $\mathbf{C}$  prodotto di una matrice  $\mathbf{A}_{m \times n}$  per una matrice  $\mathbf{B}_{n \times p}$  ha dimensioni  $m \times p$ :

$$\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times p} = \mathbf{C}_{m \times p}.$$

Consideriamo le due matrici seguenti:

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}.$$

Il prodotto  $\mathbf{AB}$  è costituito dalla matrice  $2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} \end{bmatrix}.$$

Invece il prodotto  $\mathbf{BA}$  è costituito dalla matrice  $3 \times 3$

$$\begin{bmatrix} b_{11} a_{11} + b_{21} a_{21} & b_{11} a_{12} + b_{21} a_{22} & b_{11} a_{13} + b_{21} a_{23} \\ b_{21} a_{11} + b_{22} a_{21} & b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22} & b_{21} a_{13} + b_{22} a_{23} \\ b_{31} a_{11} + b_{32} a_{21} & b_{31} a_{12} + b_{32} a_{22} & b_{31} a_{13} + b_{32} a_{23} \end{bmatrix}.$$

È evidente che, anche ove fosse rispettata la condizione di compatibilità del prodotto sia per la  $\mathbf{AB}$  che per la  $\mathbf{BA}$ , i risultati dei due prodotti sono in generale diversi.

Date  $\mathbf{A}_{k \times m}$  e  $\mathbf{B}_{l \times n}$ , l'esistenza di ambedue le matrici  $\mathbf{AB}$  e  $\mathbf{BA}$  richiede che sia  $m = l$  e  $k = n$ .

Da quanto mostrato si deduce che in generale *non vale la proprietà commutativa* nel prodotto fra matrici:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Esistono, peraltro, particolari matrici per le quali risulta

$$\mathbf{CD} = \mathbf{DC};$$

esse vengono chiamate *commutative* rispetto al prodotto.

Per il prodotto fra matrici valgono invece la *proprietà distributiva e quella associativa*, che vengono di seguito dimostrate in tutta generalità, ricorrendo alla esplicitazione delle operazioni algebriche fra elementi delle matrici.

### 12.4.2 Proprietà distributiva del prodotto matriciale.

Date le tre matrici  $\mathbf{A}_{m \times n}$ ,  $\mathbf{B}_{n \times p}$ ,  $\mathbf{C}_{n \times p}$  e supponendo soddisfatte tutte le condizioni di compatibilità necessarie, dallo sviluppo dei passaggi algebrici che seguono

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= [a_{ij}] [b_{jl} + c_{jl}] = \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{jl} + c_{jl}) \right], \\ \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C} &= [a_{ij}] [b_{jl}] + [a_{ij}] [c_{jl}] = \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl} \right] + \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jl} \right] = \\ &= \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{jl} + c_{jl}) \right],\end{aligned}$$

si evince che

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}.$$

### 12.4.3 Proprietà associativa del prodotto matriciale.

Date le tre matrici  $\mathbf{A}_{m \times n}$ ,  $\mathbf{B}_{n \times p}$ ,  $\mathbf{C}_{p \times r}$  si dimostra che vale la proprietà associativa, espressa da:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}).$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} &= \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right] [c_{kl}] = \left[ \sum_{k=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} \right] = \\ &= \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right], \\ \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) &= [a_{ij}] \left[ \sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl} \right] = \left[ \sum_{j=1}^n \left( a_{ij} \sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl} \right) \right] = \\ &= \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right],\end{aligned}$$

### 12.4.4 Potenza di una matrice.

Data una matrice quadrata  $\mathbf{A}_n$ , a seguito della definizione di prodotto fra matrici, può naturalmente dedursi la definizione di *potenza mesima* intera di questa, dalla seguente scrittura ( $m$  intero non negativo):

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^m = \mathbf{A}\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}, \quad m \text{ volte.}$$

Da tutto quanto detto sopra si deduce che nelle operazioni matriciali bisogna comunque lasciare invariato l'ordine delle premoltiplicanti e delle postmoltiplicanti, potendosi adoperare la proprietà associativa, distributiva e la definizione di potenza.

Dalla definizione data segue inoltre

$$\mathbf{A}^n \mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{n+m}, \quad (\mathbf{A}^n)^m = \mathbf{A}^{nm}.$$

Si definisce inoltre

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}.$$

Per esempio sono possibili i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{A}^3) \mathbf{A} (\mathbf{A} \mathbf{C}^2 \mathbf{B}) \mathbf{B}^2 &= (\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{A}^3) (\mathbf{A}^2 \mathbf{C}^2 \mathbf{B}^3) = \\ &= \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{A}^5 \mathbf{C}^2 \mathbf{B}^3. \end{aligned}$$

Sarebbe gravemente errato l'ulteriore passaggio  $\mathbf{A}^6 \mathbf{C}^3 \mathbf{B}^4$  in quanto modificerebbe l'ordine delle moltiplicazioni matriciali.

#### 12.4.5 Legge di cancellazione.

Con riferimento alla equazione matriciale

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{Y},$$

si possono effettuare i seguenti passaggi:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{A} \mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{Y} - \mathbf{A} \mathbf{Y} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{A} \mathbf{Y} = \mathbf{0}.$$

Si perviene poi alla forma

$$\mathbf{A} (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \mathbf{0},$$

dalla quale non può in generale dedursi la alternativa

$$\mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ oppure } \mathbf{X} - \mathbf{Y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{Y}.$$

Infatti esistono matrici non nulle il cui prodotto è nullo; a titolo di esempio posto

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

si ha

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{0},$$

pur non risultando nulle né la  $\mathbf{A}$  né la  $\mathbf{B}$ .

Da quanto osservato si deduce anche che in generale non vale la *legge di cancellazione* per il prodotto fra matrici, e cioè *non è lecito* effettuare il passaggio che segue:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

(si mostrerà in seguito che tale proprietà è valida solo nel caso particolare che la matrice  $\mathbf{A}$  sia dotata di sinistrinversa).

## 12.5 Matrice trasposta.

Dicesi *trasposta* della matrice

$$\mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

la matrice  $\mathbf{A}_{n \times m}^T$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ottenibile dalla  $\mathbf{A}$  scambiandone la righe con le colonne.

Detto  $b_{ji}$  il generico elemento della  $\mathbf{A}^T$ , risulta

$$b_{ji} = a_{ij};$$

esso è uguale all'elemento della  $\mathbf{A}$  avente gli indici di ordine invertito.

L'operazione di *trasposizione* di matrice ora introdotta gode delle seguenti proprietà.

1. La trasposizione è commutativa rispetto alla somma. Infatti considerando le matrici e i loro elementi generici

$$\mathbf{A} = [a_{ij}], \quad \mathbf{B} = [b_{ij}], \quad \mathbf{A}^T = [a_{ij}], \quad \mathbf{B}^T = [b_{ij}],$$

e la loro somma

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = [c_{ij}],$$

risulta

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

pertanto

$$\mathbf{C}^T = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T.$$

2. L'applicazione di un numero pari di volte dell'operazione di trasposizione su una data matrice  $\mathbf{A}$  riproduce  $\mathbf{A}$ ; con un numero dispari di volte si riproduce  $\mathbf{A}^T$ . In particolare risulta

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}, \quad [(\mathbf{A}^T)^T]^T = \mathbf{A}^T.$$

3. La trasposta del prodotto di due matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  è uguale al prodotto delle trasposte eseguito nell'ordine inverso:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

Posto infatti

$$\mathbf{A}_{m \times n}, \quad \mathbf{B}_{n \times p},$$

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{C} = [c_{ik}] = \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right],$$

il generico termine  $d_{ik}$  della  $\mathbf{C}^T$  si ottiene scambiando  $i$  con  $k$  in  $c_{ik}$ :

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{C}^T = [d_{ik}] = \left[ \sum_{j=1}^n a_{kj} b_{ji} \right].$$

D'altra parte il prodotto  $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$  presenta il generico elemento  $f_{ik}$  ottenibile mediante il prodotto della  $i$ -esima riga di  $\mathbf{B}^T$  per la  $k$ -esima colonna di  $\mathbf{A}^T$  e cioè

$$[f_{ik}] = \left[ \begin{array}{cccc} b_{1i} & b_{2i} & \cdots & b_{ni} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{array} \right] = \left[ \sum_{j=1}^n b_{ji} a_{kj} \right],$$

da cui ne risulta dimostrato  $d_{ik} = f_{ik}$  e l'assunto.

4. Ogni matrice  $\mathbf{A}$  simmetrica, caratterizzata perciò dalla proprietà 73, è uguale alla propria trasposta:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

Per le matrici antisimmetriche risulta

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T.$$

5. Il prodotto  $\mathbf{A} \mathbf{B}$  di due matrici simmetriche in generale non è simmetrico, e cioè

$$\mathbf{A} \mathbf{B} \neq (\mathbf{A} \mathbf{B})^T.$$

Infatti date  $\mathbf{A}_n$  e  $\mathbf{B}_n$  tali che  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$ , si ha

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{B} \mathbf{A} \neq \mathbf{A} \mathbf{B}.$$

6. Data una matrice  $\mathbf{A}_n$  simmetrica e una qualsiasi matrice  $\mathbf{B}_{n \times m}$ , il prodotto  $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$  è simmetrico di ordine  $m$ ; infatti si dimostra che essa è uguale alla sua trasposta:

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B})^T = (\mathbf{A} \mathbf{B})^T \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}.$$

7. Data una qualunque matrice quadrata  $\mathbf{A}$ , la matrice

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$$

è antisimmetrica. Posto infatti

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^T = [a_{ij} - a_{ji}] = [b_{ij}],$$

risulta

$$\begin{aligned} b_{ij} &= 0, & \forall i = j, \\ b_{ij} &= -b_{ji}, & \forall i \neq j. \end{aligned}$$

La matrice

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$$

è simmetrica; infatti risulta

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = c_{ji}.$$

8. Da quanto detto al punto precedente discende che una qualunque matrice quadrata  $\mathbf{A}$  può decomporre univocamente nella somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica, nel seguente modo:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T).$$

## 12.6 Matrice unitaria (o identica).

Con  $\mathbf{I}_n$  si denota la matrice quadrata di ordine  $n$  che si esplicita qui di seguito:

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Essa è caratterizzata dall'aver gli elementi sulla diagonale principale di valore unitario, mentre gli altri sono tutti nulli.

Per semplicità nel seguito si scriverà  $\mathbf{I}$  al posto di  $\mathbf{I}_n$ .

L'elemento  $\delta_{ij}$  di  $\mathbf{I}$ , chiamato anche *delta di Kronecker*,

$$\mathbf{I} = [\delta_{ij}],$$

è definito dalle relazioni seguenti:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \forall i = j \\ 0, & \forall i \neq j \end{cases}.$$

La caratteristica della matrice  $\mathbf{I}$  è che il prodotto con una qualunque matrice  $\mathbf{A}$  di ordine  $n \times m$  riproduce la  $\mathbf{A}$  stessa, come può agevolmente verificarsi:

$$\mathbf{I} \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Risulta inoltre, per la matrice  $\mathbf{I}$  di ordine  $m$ :

$$\mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{A}.$$

La matrice  $\mathbf{I}$  pertanto opera sulle matrici allo stesso modo in cui il numero 1 opera sugli scalari; da tale analogia discende il suo nome.

## 12.7 Determinante di una matrice.

Data una matrice  $\mathbf{A}$  quadrata di ordine  $n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

si definisce *determinante* della  $\mathbf{A}$  lo scalare

$$\det \mathbf{A} = \sum \pm a_{1i} a_{2j} a_{3k} \cdots . \quad (77)$$

Nella 77 gli indici di riga sono assunti nell'ordine naturale crescente, mentre gli indici di colonna debbono costituire una qualunque permutazione degli indici aventi l'ordinamento naturale. La sommatoria va effettuata rispetto alle  $p$  permutazioni degli indici di colonna. Essendo  $n$  gli indici di colonna, il numero degli addendi della sommatoria è

$$p = n!.$$

Il segno di ciascuno degli addendi della 77 sarà positivo ove la permutazione degli indici di colonna sia pari, sarà negativo ove essa sia dispari.

### 12.7.1 Proprietà dei determinanti.

I determinanti hanno le seguenti proprietà:

- i determinanti della  $\mathbf{A}$  e della  $\mathbf{A}^T$  sono uguali;
- lo scambio di una coppia di righe o di colonne fa cambiare segno al determinante;
- una matrice avente una riga o una colonna nulla presenta determinante nullo;
- moltiplicare una riga o una colonna di  $\mathbf{A}$  per una costante  $k \neq 0$ , conduce a un determinante di valore  $k \det \mathbf{A}$ ;
- i determinanti di matrici aventi due linee parallele uguali o proporzionali sono nulli.

## 12.8 Minore complementare. Cofattore. Matrice aggiunta.

Con riferimento alla matrice quadrata di ordine  $n$  valgono le seguenti definizioni.

- *Minore complementare di  $a_{ij}$ .* Si definisce minore complementare dell'elemento  $a_{ij}$  e si indica con  $M_{ij}$ , il determinante della matrice quadrata di ordine  $n - 1$  ottenibile dalla  $\mathbf{A}$  mediante l'eliminazione della riga e della colonna contenenti l'elemento  $a_{ij}$ , e cioè l'eliminazione della  $i$ -esima riga e della  $j$ -esima colonna.
- *Cofattore di  $a_{ij}$ .* Si definisce cofattore (o *complemento algebrico*) di  $a_{ij}$  e si indica con  $A_{ij}$  lo scalare

$$A_{ij} = -1^{i+j} M_{ij},$$

ottenibile dal minore complementare di  $a_{ij}$  preso con il proprio segno o col segno cambiato a seconda che la somma  $i + j$  sia rispettivamente pari o dispari.

Definito il cofattore di  $a_{ij}$ , il determinante di  $\mathbf{A}$  può anche scriversi mediante le due espressioni equivalenti, dette *formule dello sviluppo di Laplace del determinante*:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{r=1}^n a_{ir} A_{ir} = \sum_{r=1}^n a_{rj} A_{rj}.$$

La prima costituisce la ben nota formula dello sviluppo del determinante secondo la riga  $i$ -esima; la seconda sviluppa il determinante secondo gli elementi della  $j$ -esima colonna.

La formula dello sviluppo di Laplace per righe costituisce un caso particolare della somma per righe riportata di seguito con il corrispondente risultato:

$$\sum_{r=1}^n a_{ir} A_{kr} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \forall k = i \\ 0, & \forall k \neq i \end{cases}$$

e per colonne

$$\sum_{r=1}^n a_{rj} A_{rk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \forall k = j \\ 0, & \forall k \neq j \end{cases}.$$

Si definisce *matrice aggiunta* della  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  e si indica con  $\mathbf{A}^*$  la matrice trasposta di quella avente per generico elemento il cofattore di  $a_{ij}$ ; risulta cioè

$$\mathbf{A}^* = [A_{ij}]^T = [A_{ji}].$$

Si verifica immediatamente risultare

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^* = (\det \mathbf{A}) \mathbf{I}.$$

## 12.9 La matrice inversa.

Il generico sistema di  $n$  equazioni lineari nelle  $n$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$  si scrive

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases} \quad (78)$$

Il sistema 99 con le definizioni che seguono:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

si scrive in forma compatta

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (79)$$

La 79 ha la stessa struttura dell'equazione lineare di primo grado in una sola variabile

$$a x = b, \quad (80)$$

e ne costituisce la generalizzazione al caso di  $n$  variabili.

La 80 ammette la soluzione

$$x = a^{-1} b,$$

ove risulti  $a \neq 0$ . Tale soluzione è formalmente ottenibile moltiplicando i due membri per  $a^{-1}$ .

In modo analogo deve potersi affrontare il problema della risoluzione della 79.

In particolare, ove esista una matrice  $\mathbf{S}$  tale che risulti

$$\mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad (81)$$

la soluzione della 79 sarà determinata da

$$\mathbf{x} = \mathbf{S} \mathbf{b},$$

dovendo risultare

$$\mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{I} \mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{S} \mathbf{b}.$$

La matrice  $\mathbf{S}$  definibile tramite la 81, se esistente, viene chiamata *sinistrinversa* della matrice  $\mathbf{A}$ .

In modo analogo si definisca *destrinversa* della matrice  $\mathbf{A}$ , la matrice  $\mathbf{D}$  tale che risulti

$$\mathbf{A} \mathbf{D} = \mathbf{I}.$$

Si può dimostrare che ove esistano sia la  $\mathbf{S}$  che la  $\mathbf{D}$ , esse sono uguali.

Infatti risulta

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{I} = \mathbf{S}(\mathbf{A}\mathbf{D}) = (\mathbf{S}\mathbf{A})\mathbf{D} = \mathbf{I}\mathbf{D} = \mathbf{D}.$$

In modo analogo può mostrarsi che, ove esistesse un'altra sinistrinversa  $\mathbf{S}_1$ , essa dovrebbe risultare uguale alla  $\mathbf{D}$ . Pertanto il comune valore sarebbe anche unico.

Nel caso che una matrice ammetta destrinversa, coincidente con la sinistrinversa, questa verrà più semplicemente chiamata la *inversa di  $\mathbf{A}$* , ed espressa dal simbolo  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}.$$

In tale caso si ha

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (82)$$

Le matrici quadrate  $\mathbf{A}$  o ammettono matrice inversa  $\mathbf{A}^{-1}$ , oppure non ammettono né destrinversa né sinistrinversa.

Le matrici rettangolari non hanno matrice inversa.

Quanto è stato mostrato con l'esercizio ?? vale in realtà per la matrice quadrata  $\mathbf{A}$  di ordine  $n$  qualsiasi. Si può infatti affermare che la matrice inversa di questa,  $\mathbf{A}^{-1}$ , esiste se e solo se risulta

$$\det \mathbf{A} \neq 0. \quad (83)$$

Ove valga la 83, la matrice  $\mathbf{A}^{-1}$  inversa della  $\mathbf{A}$  può determinarsi nel modo che segue.

Si esegue il prodotto di  $\mathbf{A}$  con la sua aggiunta  $\mathbf{A}^*$ :

$$\mathbf{B} = [b_{ij}] = \mathbf{A}\mathbf{A}^*.$$

Il generico elemento  $b_{ij}$  ha la forma

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \sum_{r=1}^n a_{ir}A_{jr} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \forall i = j \\ 0, & \forall i \neq j \end{cases}.$$

Pertanto la matrice  $\mathbf{B}$  presenta gli elementi della diagonale principale uguali al valore  $\det \mathbf{A}$ ; tutti gli altri elementi sono nulli. Si ha allora

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}.$$

Ove risulti non nullo il determinante della  $\mathbf{A}$

$$\det \mathbf{A} \neq 0,$$

si ha

$$\frac{\mathbf{A}\mathbf{A}^*}{\det \mathbf{A}} = \mathbf{I},$$

e pertanto in forza della 82

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{\det \mathbf{A}}. \quad (84)$$

La 84 risolve il problema della determinazione della matrice inversa di una matrice a determinante non nullo: tali matrici verranno dette *non singolari*, o *invertibili*.

Si diranno matrici *singolari* quelle per le quali non esiste inversa.

Determinata la inversa della matrice  $\mathbf{A}$ , ove esistente, è possibile trovare la soluzione del sistema di equazioni lineari 79 come segue:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{A}^*}{\det \mathbf{A}} \mathbf{b}. \quad (85)$$

Tale soluzione è formalmente identica a quella dell'equazione in una variabile 80.

Poiché la determinazione dell'inversa di una matrice di ordine  $n$  equivale alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari in  $n$  incognite, il procedimento seguito per pervenire alla soluzione tramite la preventiva determinazione di  $\mathbf{A}^{-1}$  è utile ove si debba risolvere il sistema 79 per svariati valori del vettore delle costanti  $\mathbf{b}$ ; sicché il lavoro iniziale fatto per la determinazione di  $\mathbf{A}^{-1}$  permette le immediate corrispondenti determinazioni dei vettori incogniti 85.

## 12.10 Inversione del prodotto di matrici.

La matrice  $\mathbf{C}$ , prodotto delle matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B},$$

ove esistano le  $\mathbf{A}^{-1}$  e  $\mathbf{B}^{-1}$ , ha inversa ottenibile dalla

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1};$$

essa è ottenibile come prodotto delle inverse prese con l'ordine cambiato. Tale regola è verificabile con i passaggi seguenti:

$$\mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

La regola sopra definita si generalizza al prodotto di un numero qualsiasi di matrici.

Per esempio, data la  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D},$$

ove esistano le  $\mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{B}^{-1}$ ,  $\mathbf{C}^{-1}$ ,  $\mathbf{D}^{-1}$ , si ha

$$\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}.$$

## 12.11 Matrici partizionate.

La generica matrice

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \left[ \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right]$$

può essere partizionata in sottomatrici, mediante il tracciamento di linee che ne suddividono il quadro in sottomatrici costituenti elementi che assemblati in modo appropriato equivalgono alla matrice iniziale.

Nel caso esposto la  $\mathbf{A}$  può risciversi nella forma partizionata equivalente

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

ove

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{2 \times 2} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_{2 \times 1} &= \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}_{1 \times 2} &= \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, & \mathbf{E}_{1 \times 1} &= [a_{33}]. \end{aligned}$$

### 12.11.1 Addizione tra matrici partizionate.

Con riferimento alle matrici partizionate  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{F}$  scritte di seguito

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ \mathbf{L} & \mathbf{M} \end{bmatrix},$$

può eseguirsi l'addizione fra  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{F}$  solo se esse hanno le stesse dimensioni globali  $m \times n$  e inoltre se il partizionamento è stato compiuto in modo congruente, se cioè accade che le dimensioni delle matrici parti sono quelle di seguito indicate:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{G} &: b \times c, \\ \mathbf{C} \text{ e } \mathbf{H} &: b \times (n - c), \\ \mathbf{D} \text{ e } \mathbf{L} &: (m - b) \times c, \\ \mathbf{E} \text{ e } \mathbf{M} &: (m - b) \times (n - c), \\ &b \leq m, \quad c \leq n. \end{aligned}$$

In tal caso si ha

$$\mathbf{A} + \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{G} & \mathbf{C} + \mathbf{H} \\ \mathbf{D} + \mathbf{L} & \mathbf{E} + \mathbf{M} \end{bmatrix}. \quad (86)$$

### 12.11.2 Prodotto fra matrici partizionate.

Siano date le due matrici  $\mathbf{A}_{m \times n}$  e  $\mathbf{B}_{n \times k}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix};$$

esse siano globalmente compatibili rispetto al prodotto  $\mathbf{A}\mathbf{B}$ .

Peraltro si considerino i seguenti partizionamenti delle due matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_5 & \mathbf{A}_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_5 & \mathbf{B}_6 \end{bmatrix}.$$

Si riportano per esteso le matrici parti della  $\mathbf{A}$  con le relative dimensioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 & : b \times c, & \mathbf{A}_2 & : b \times d, & \mathbf{A}_3 & : b \times [n - (c + d)], \\ \mathbf{A}_4 & : (m - b) \times c, & \mathbf{A}_5 & : (m - b) \times d, & \mathbf{A}_6 & : (m - b) \times [n - (c + d)], \end{aligned}$$

e quelle della  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 & : c \times e, & \mathbf{B}_2 & : d \times e, & \mathbf{B}_3 & : [n - (c + d)] \times e, \\ \mathbf{B}_4 & : c \times (k - e), & \mathbf{B}_5 & : d \times (k - e), & \mathbf{B}_6 & : [n - (c + d)] \times (k - e). \end{aligned}$$

Le due matrici così partizionate mediante la scelta dei quattro numeri naturali  $b, c, d, e$ , sono in una forma compatibile rispetto al prodotto  $\mathbf{A}\mathbf{B}$ , risultando

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_3 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_5 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_4 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_6 \\ \mathbf{A}_4\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_5\mathbf{B}_3 + \mathbf{A}_6\mathbf{B}_5 & \mathbf{A}_4\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_5\mathbf{B}_4 + \mathbf{A}_6\mathbf{B}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Le matrici parti del prodotto sono elencate sotto con le rispettive dimensioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} & : b \times e, & \mathbf{D} & : b \times (k - e), & \mathbf{E} & : (m - b) \times e, & \mathbf{F} & : (m - b) \times (k - e), \\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2\mathbf{B}_3, \mathbf{A}_3\mathbf{B}_5 & : b \times e, & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2, \mathbf{A}_2\mathbf{B}_4, \mathbf{A}_3\mathbf{B}_6 & : b \times (k - e), \\ \mathbf{A}_4\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_5\mathbf{B}_3, \mathbf{A}_6\mathbf{B}_5 & : (m - b) \times e, & \mathbf{A}_4\mathbf{B}_2, \mathbf{A}_5\mathbf{B}_4, \mathbf{A}_6\mathbf{B}_6 & : (m - b) \times (k - e). \end{aligned}$$

La 86 e la 87 esprimono rispettivamente l'addizione e il prodotto fra matrici partizionate in modo compatibile nei riguardi di tali operazioni. Giova qui notare che le relazioni ottenute trattano formalmente le matrici parti allo stesso modo nel quale le operazioni di addizione e di prodotto fra matrici trattano gli elementi di queste.

### 12.11.3 Inversa di una matrice partizionata.

Si consideri la matrice quadrata  $\mathbf{A}$  non singolare partizionata in quattro sottomatrici, in modo che le due matrici sulla diagonale principale siano quadrate:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

La inversa  $\mathbf{A}^{-1}$  della  $\mathbf{A}$  sia partizionata anch'essa in modo uguale e sia

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Deve risultare

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

e cioè

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

La 88 equivale alle seguenti quattro relazioni matriciali:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{11} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{12} \mathbf{A}_{21} = 1 \\ \mathbf{B}_{11} \mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12} \mathbf{A}_{22} = 0 \\ \mathbf{B}_{21} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{22} \mathbf{A}_{21} = 0 \\ \mathbf{B}_{21} \mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{22} \mathbf{A}_{22} = 1 \end{cases}. \quad (89)$$

Le 89 risolte con semplici passaggi, che ricordano formalmente quelli validi per gli ordinari sistemi di equazioni lineari, conducono al risultato

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{11} = \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12})^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \\ \mathbf{B}_{12} = -\mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12})^{-1} \\ \mathbf{B}_{21} = -\mathbf{B}_{22} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \\ \mathbf{B}_{22} = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12})^{-1} \end{cases}. \quad (90)$$

Le 90 permettono di determinare l'inversa della  $\mathbf{A}$ , operando inversioni di matrici di ordine pari a quello delle sue sottomatrici.

## 12.12 Autovettori e autovalori.

Si consideri l'equazione matriciale

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \quad (91)$$

con  $\mathbf{A}$  matrice quadrata di ordine  $n$ ,  $\mathbf{x}$  vettore di dimensioni  $n \times 1$  e  $\lambda$  scalare indeterminato.

La 91 può scriversi

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (92)$$

La 92 ammette soluzione non banale purché risulti

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (93)$$

e cioè deve risultare nullo il determinante della matrice seguente

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

La 93 dà luogo ad una equazione di grado  $n$  in  $\lambda$  del tipo

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0, \quad (94)$$

che si chiama *equazione caratteristica della matrice  $\mathbf{A}$* .

Le radici della 94

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (95)$$

si chiamano *autovalori* della matrice  $\mathbf{A}$ .

Gli autovalori 95 soddisfano la condizione

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr } \mathbf{A}, \quad (96)$$

ove si definisce *traccia* di  $\mathbf{A}$  la quantità

$$\text{tr } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Oltre alla 96 gli autovalori soddisfano anche la condizione

$$\prod_i \lambda_i = \det \mathbf{A},$$

ove  $\prod_i \lambda_i$  è il prodotto degli  $n$  autovalori.

Gli  $n$  autovalori  $\lambda_i$  95, sostituiti uno alla volta nel sistema 92, determinano a meno di una costante altrettanti valori  $\mathbf{x}_i$  detti *autovettori* della  $\mathbf{A}$ .

Può dimostrarsi che le matrici reali simmetriche ammettono autovalori tutti reali.

Detto  $\lambda$  il generico autovalore di  $\mathbf{A}$ , il generico autovalore di  $\mathbf{A}^k$  è dato da  $\lambda^k$ .

Due matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  legate dalla relazione di similitudine

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C},$$

ove  $\mathbf{C}$  è una matrice non singolare, hanno gli stessi autovalori.

### 12.12.1 Minori di una matrice. Rango.

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice quadrata di ordine  $n$ .

Si consideri un qualunque naturale positivo  $k < n$ . Vengono inoltre scelte  $k$  righe in  $\mathbf{A}$

$$r_1, r_2, \dots, r_k,$$

e  $k$  colonne

$$c_1, c_2, \dots, c_k.$$

Gli elementi del tipo  $a_{r_i, c_i}$  appartenenti alle righe e alle colonne prescelte, determinano una matrice quadrata di ordine  $k$  che viene detta *minore* della matrice  $\mathbf{A}$  e indicato con  $\mathbf{M}_k(\mathbf{A})$ .

Una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  di ordine  $n$  avente determinante nullo

$$\det \mathbf{A} = 0$$

si dice *singolare* o *degenere*.

Se tutti i minori di ordine  $k + 1$  estratti dalla  $\mathbf{A}$  sono singolari, e cioè hanno determinante nullo

$$\det \mathbf{M}_{k+1}^i(\mathbf{A}) = 0,$$

mentre fra quelli di ordine  $k$  ve ne è almeno uno non singolare, allora  $k$  prende il nome di *rango* della matrice e si indica

$$R(\mathbf{A}) = k.$$

La stessa definizione di minore può darsi anche per le matrici rettangolari  $\mathbf{A}$  di dimensioni  $r \times s$ , purché risulti  $k < r$ ,  $k < s$ .

### 12.13 Sistemi quadrati di equazioni lineari. Sistemi non omogenei.

Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{97}$$

ove  $\mathbf{A}$  sia una matrice quadrata di ordine  $n$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{b}$  siano vettori di dimensioni  $n \times 1$ , il sistema di equazioni si dice *quadrato*; il numero  $n$  delle equazioni uguaglia il numero delle incognite  $x_i$ . Inoltre risulti  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , in tale caso il sistema si dice *non omogeneo*.

Si consideri la cosiddetta matrice aumentata  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C} = [ \mathbf{A} \quad \mathbf{b} ],$$

di dimensioni  $n \times (n + 1)$ .

Per il sistema non omogeneo di equazioni lineari 97 vale la condizione di compatibilità di Rouché-Capelli:

- il sistema 97 ammette soluzione se e solo se il rango di  $\mathbf{A}$  uguaglia quello di  $\mathbf{C}$ :

$$R(\mathbf{A}) = R([ \mathbf{A} \quad \mathbf{b} ]).$$

Inoltre se risulta  $R(\mathbf{A}) = n$ , la soluzione è unica, mentre per  $R(\mathbf{A}) < n$  si possono fissare a piacere  $n - R(\mathbf{A})$  valori di altrettante incognite e determinare i valori di quelle rimanenti in funzione di queste.

#### 12.13.1 Sistemi omogenei.

Già nel §12.9 si è determinata la soluzione del sistema 97 nella forma

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{A}^*}{\det \mathbf{A}} \mathbf{b}, \tag{98}$$

ove risulta per ipotesi  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , essendo  $\mathbf{A}$  non singolare.

La 98 continua a valere anche per i sistemi omogenei, aventi  $b = 0$ . Se ne deduce allora che i sistemi lineari quadrati omogenei aventi matrice  $\mathbf{A}$  non singolare ammettono come unica soluzione quella banale

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Segue da quanto esposto sopra:

- condizione necessaria affinché un sistema quadrato omogeneo di equazioni lineari ammetta soluzione diversa da quella banale è che risulti  $\det \mathbf{A} = 0$ .

Cioè deve risultare

$$R(\mathbf{A}) < n. \quad (99)$$

La 99 può dimostrarsi essere per i sistemi omogenei anche condizione sufficiente per l'esistenza di soluzione diversa da quella banale.

### 12.14 Sistemi lineari rettangolari.

Si consideri il sistema di  $m$  equazioni lineari nelle  $n$  variabili  $x_i$  definito dalla

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (100)$$

nella quale  $\mathbf{A}$  è una matrice di dimensioni  $m \times n$ ,  $\mathbf{x}$  è il vettore delle variabili di dimensioni  $n \times 1$  e  $\mathbf{b}$  è un vettore di costanti di dimensioni  $m \times 1$ .

Si consideri la cosiddetta *matrice aumentata*

$$\mathbf{C} = [ \mathbf{A} \quad \mathbf{b} ]$$

già definita più sopra; essa si scrive per esteso come di seguito:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Senza entrare nel dettaglio del procedimento in questa sede, basta qui notare che con sole operazioni di scambio di righe fra di loro, e di sostituzione della  $i$ -esima riga con combinazioni lineari delle  $m$  righe mediante un vettore di coefficienti

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}, \quad \text{con } k_i \neq 0,$$

è possibile pervenire a forme diverse del sistema 100 equivalenti a questo, del tipo

$$\mathbf{A}' \mathbf{x} = \mathbf{b}', \quad \mathbf{C}' = [ \mathbf{A}' \quad \mathbf{b}' ]. \quad (101)$$

Si dimostra in tutta generalità che le 100 e 101 sono equivalenti nel senso che hanno le stesse soluzioni.

In particolare assume grande rilevanza il procedimento di trasformazione della forma 100 che conduce alla cosiddetta *forma a gradini* o *a scaglioni*.

La matrice  $\mathbf{C}'$  viene detta nella forma a gradini se il numero di zeri che precede il primo elemento non nullo di una riga va aumentando al crescere dell'indice di riga, fino a che restano solo righe di zeri, e cioè se esistono degli elementi non nulli

$$c_{1j_1}, c_{2j_2}, \dots, c_{rj_r} \quad (102)$$

con

$$j_1 < j_2 < \dots < j_r, \quad r \leq n + 1,$$

e

$$c_{ij} = 0 \text{ per } i \leq r, j < j_i \text{ e per } i > r.$$

Ove poi gli elementi non nulli 102 siano stati portati al valore unitario, la forma della matrice si dice *a gradini ridotta*.

Si riporta qui di seguito una tipica forma a gradini ridotta di una matrice, in cui con il simbolo  $\times$  si denotano quantità non precisate:

$$\begin{array}{ccccccc} & & j_1 & & j_2 & & j_3 \\ \left[ \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{array}$$

Si noti che si ha in tale caso

$$j_1 = 3, \quad j_2 = 5, \quad j_3 = 6, \quad r = 3.$$

Le colonne di indici  $j_1, j_2, \dots, j_r$  sono i vettori unitari  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r$ ; una colonna che sia a sinistra di quella  $j_1$  è nulla; una colonna di numero d'ordine  $j$  tale che risulti

$$j_k < j < j_{k+1}$$

presenta gli ultimi  $m - k$  elementi nulli.

Può dimostrarsi in tutta generalità che la forma a gradini ridotta di una matrice è unica; inoltre il numero di righe non nulle nella forma a gradini ridotta di una matrice, è indipendente dalla effettiva sequenza di operazioni di riga effettuate; tale numero è anche il rango della matrice.

**Theorem 7** Per il sistema lineare non omogeneo di equazioni

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

con

$$\mathbf{A}_{m \times n}, \quad \mathbf{x}_{n \times 1}, \quad \mathbf{b}_{m \times 1} \neq \mathbf{0},$$

può verificarsi una sola delle seguenti possibilità:

1. il rango della matrice aumentata

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]$$

è più grande del rango della  $\mathbf{A}$ : in tale caso il sistema di equazioni non ammette soluzione e si dice inconsistente:

$$R([\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]) > R(\mathbf{A});$$

2. il rango della matrice aumentata è uguale al rango di  $\mathbf{A}$  ed è inoltre uguale al numero delle incognite  $n$ : il sistema ammette una sola soluzione:

$$R([\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]) = R(\mathbf{A}) = n;$$

3. il rango della matrice aumentata è uguale a quello di  $\mathbf{A}$  ed è minore del numero  $n$  delle incognite: il sistema ammette infinite soluzioni:

$$R([\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]) = R(\mathbf{A}) < n.$$

La proposizione 1 è di immediato riscontro purché si faccia riferimento alle forme a gradini ridotte delle matrici  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{A}$ .

L'affermazione

$$R([\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]) > R(\mathbf{A})$$

significa che la matrice  $\mathbf{C}$  nella forma a gradini ridotta presenta una riga non nulla in più rispetto a quella di  $\mathbf{A}$ ; l'ultima riga non nulla della  $\mathbf{C}$  deve pertanto presentare valore unitario nella ultima colonna e valori nulli nelle altre posizioni. Detto  $r$  l'indice della riga in questione, si è di fronte alla situazione impossibile

$$0 = 1;$$

il sistema di equazioni non ammette soluzione e viene detto inconsistente.

La proposizione 2, riguardata sotto il profilo della forma a righe ridotta, riconduce il problema ad un sistema non omogeneo costituito dalle prime  $n$  equazioni; infatti le prime  $n$  righe sono non nulle, mentre le successive  $m - n$  essendo nulle non modificano la soluzione.

Si ricade nel caso già trattato precedentemente per i sistemi quadrati non omogenei (§ 12.13).

Analogamente può ragionarsi in relazione alla proposizione 3.

**Theorem 8 (Alternativa di Fredholm)** *Si consideri il sistema quadrato di equazioni lineari*

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{103}$$

con

$$\mathbf{A}_{n \times n}, \quad \mathbf{x}, \quad \mathbf{b}_{n \times 1}.$$

Il sistema 103 ammette una ed una sola soluzione  $\mathbf{x}$  per ogni  $\mathbf{b}$  se e solo se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  è l'unica soluzione del sistema

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

E cioè può verificarsi una sola delle seguenti possibilità:

1.  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  ha una sola soluzione per ogni  $\mathbf{b}$ ;
2.  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$  ammette una soluzione  $\mathbf{x}$  non nulla.

Le due possibilità non possono verificarsi insieme.

L'utilità del presente teorema sta nel ricondurre tutte le questioni di esistenza e unicità per i sistemi  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  (scritti per generici vettori  $\mathbf{b}$ ) al problema della unicità della soluzione della sola equazione  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

È evidente che l'alternativa di Fredholm afferma che il sistema  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  ammette una ed una sola soluzione per ogni  $\mathbf{b}$ , se e solo se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  è l'unica soluzione della equazione  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ; tale proposizione peraltro equivale ad affermare che il rango di  $\mathbf{A}$  eguaglia il numero delle incognite:

$$R(\mathbf{A}) = n,$$

ovvero ad affermare che il determinante di  $\mathbf{A}$  è diverso da zero:

$$\det \mathbf{A} \neq 0.$$

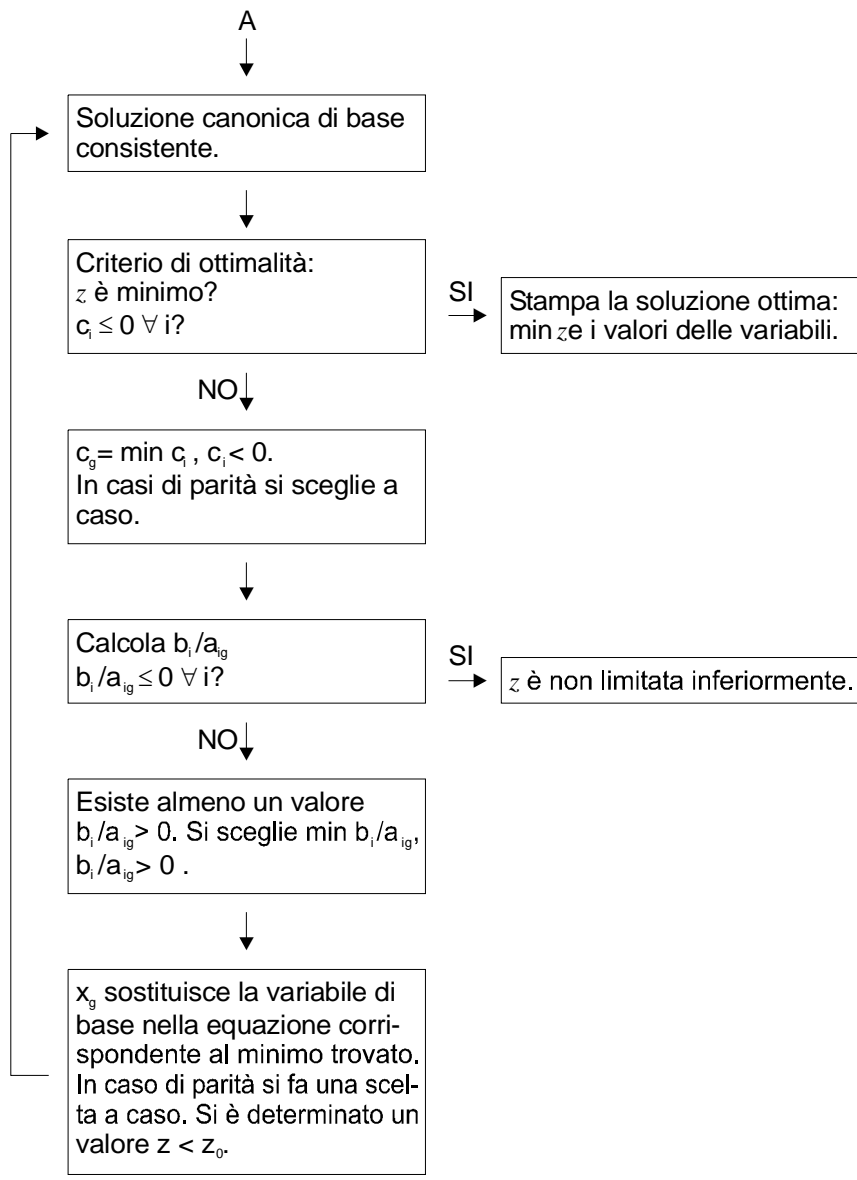


Figure 5:

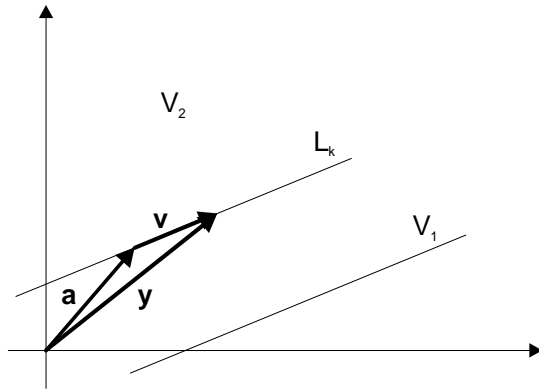


Figure 6:

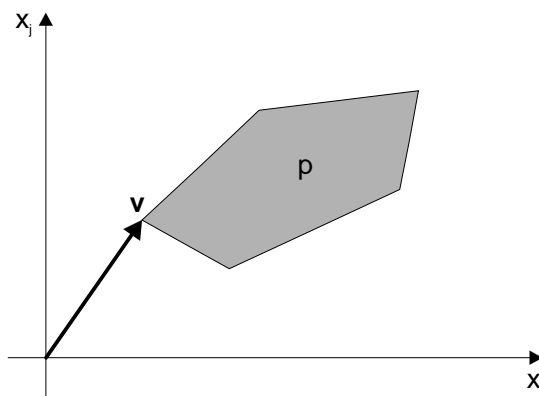


Figure 7:

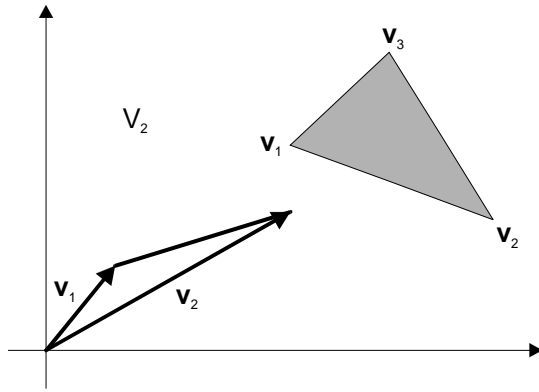


Figure 8:

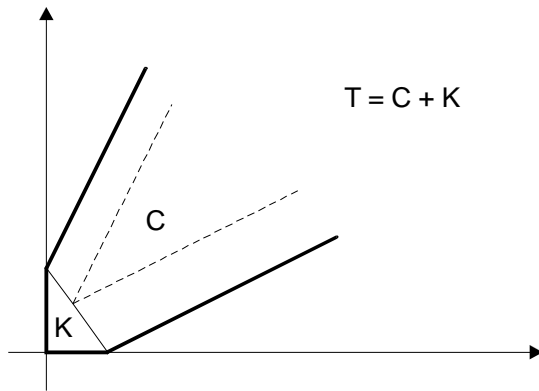


Figure 9:

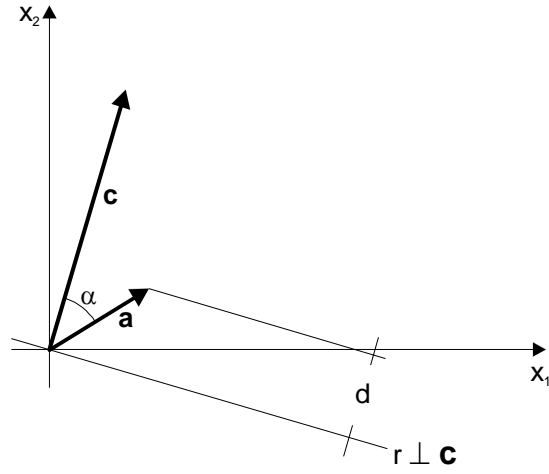


Figure 10:

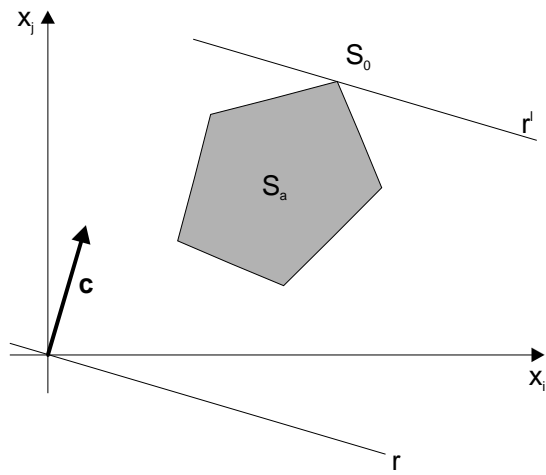


Figure 11:

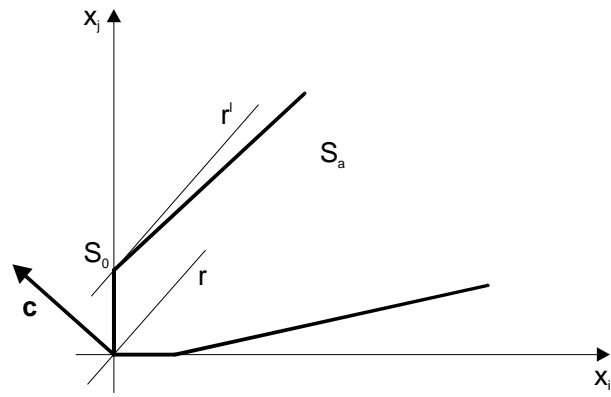


Figure 12:

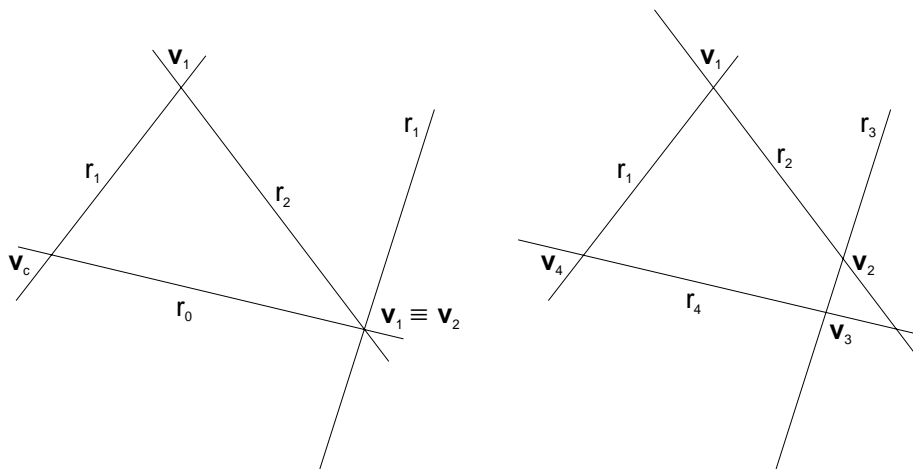


Figure 13:

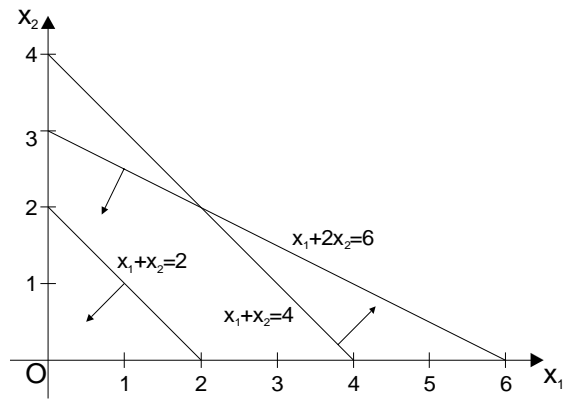


Figure 14:

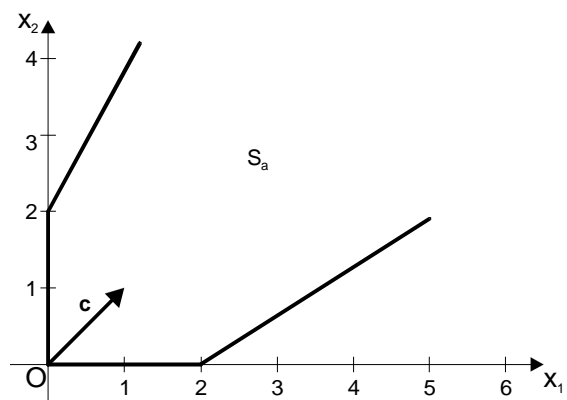


Figure 15:

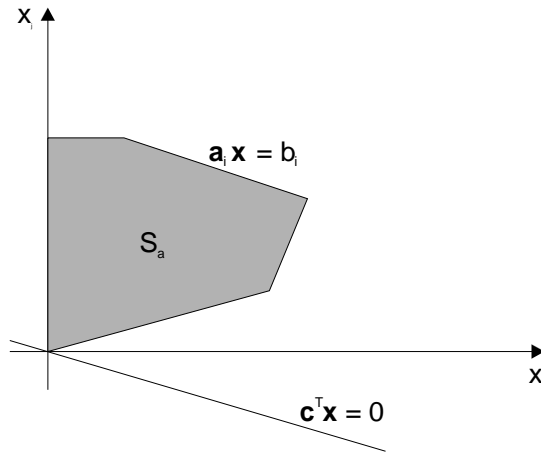


Figure 16:

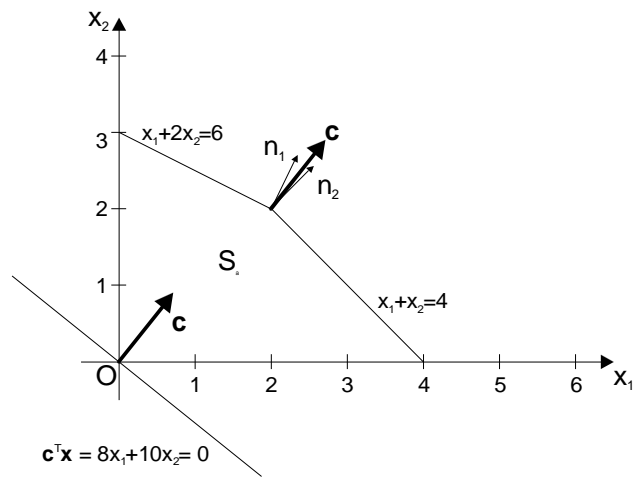
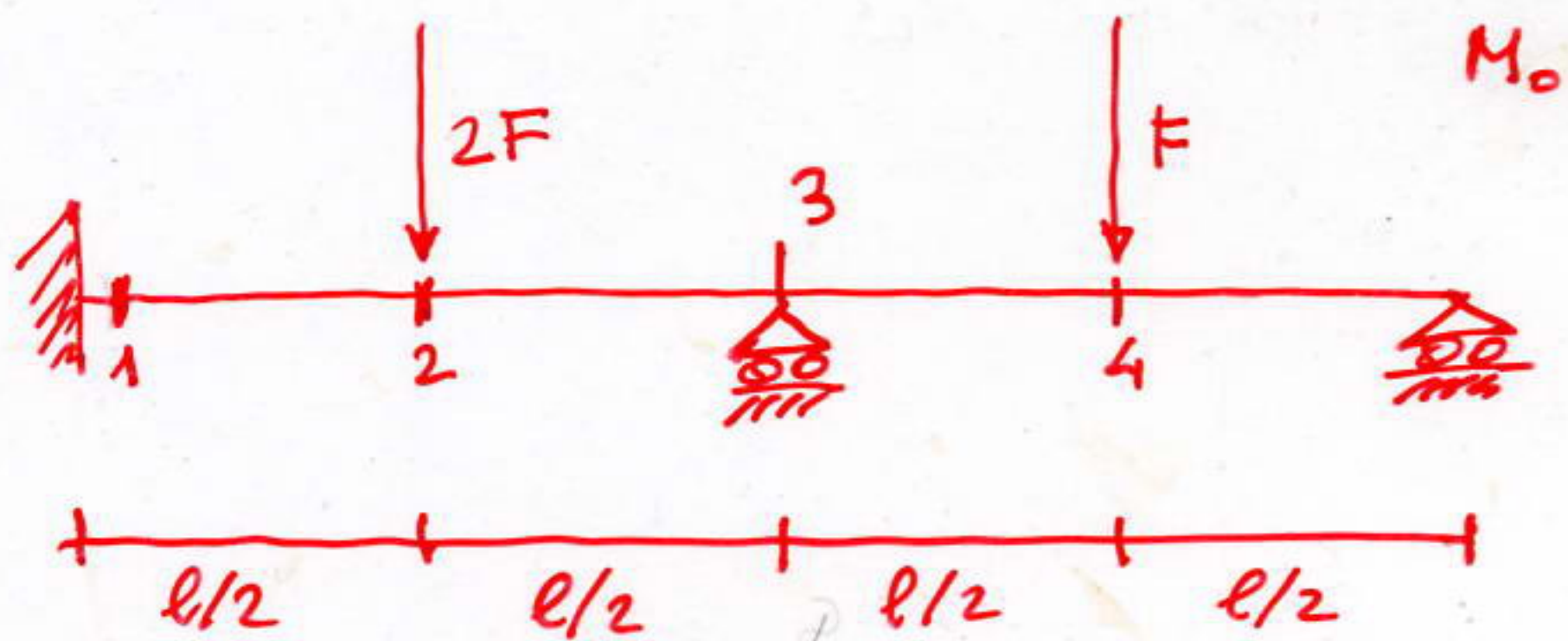


Figure 17:

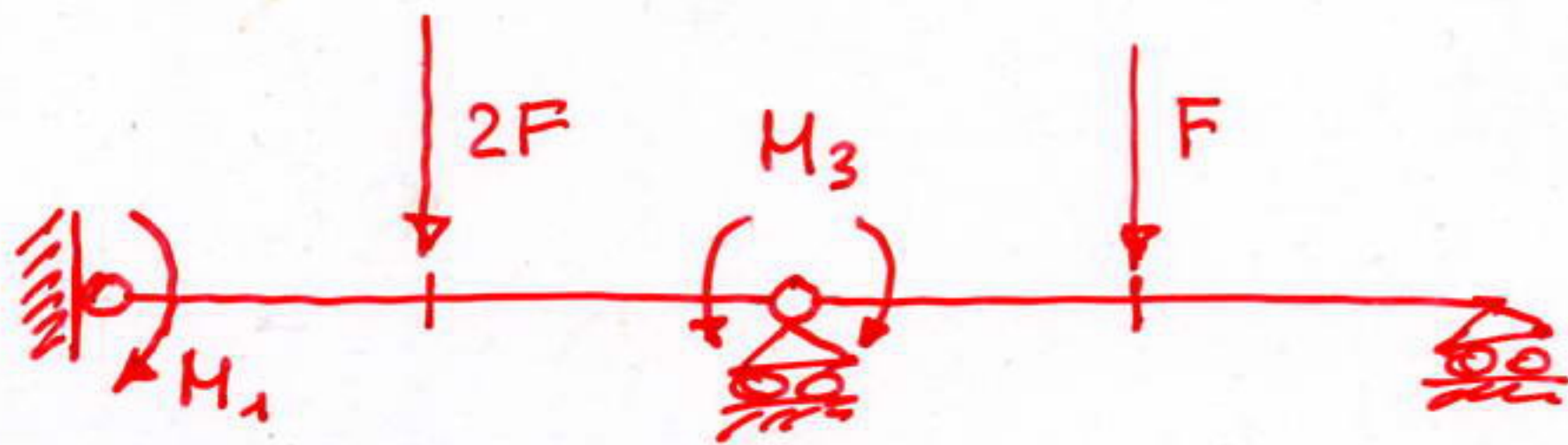
## ESEMPIO n. 1 - Trave



$$i = 2 : (M_1, M_3)$$

$$c = 4$$

Sistema  
principale



Equazioni di equilibrio (2)

$$M_2 = \frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{2} + \frac{Fl}{2}$$

$$M_4 = \frac{M_3}{2} + \frac{Fl}{4}$$

Equazioni di compatibilità plastica (4)

$$-M_0 \leq M_1 \leq M_0$$

$$-M_0 \leq M_2 \leq M_0$$

$$-M_0 \leq M_3 \leq M_0$$

$$-M_0 \leq M_4 \leq M_0$$

Posizioni:  $X_1 = \frac{M_1}{M_0}$ ,  $X_3 = \frac{M_3}{M_0}$ ,  $Z = -\frac{Fl}{M_0}$

$$-1 \leq X_1 \leq +1$$

$$-1 \leq X_3 \leq +1$$

$$-1 \leq \frac{X_1}{2} + \frac{X_3}{2} - \frac{Z}{2} \leq +1$$

$$-1 \leq \frac{X_3}{2} - \frac{Z}{4} \leq +1$$

Variabili non negative:

$$X_1 = x_1 - y_1, \quad x_1 \geq 0, \quad y_1 \geq 0$$

$$X_3 = x_3 - y_3, \quad x_3 \geq 0, \quad y_3 \geq 0$$

Variabili "slack" o di scarto:

$$x_1 - y_1 - t_1 = -1$$

$$t_1 + t_2 = 2$$

$$x_3 - y_3 - t_3 = -1$$

$$t_3 + t_4 = 2$$

$$\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} + \frac{x_3}{2} - \frac{y_3}{2} - \frac{Z}{2} - t_5 = -1$$

$$t_5 + t_6 = 2$$

$$\frac{x_3}{2} - \frac{y_3}{2} - \frac{Z}{4} - t_7 = -1$$

$$t_7 + t_8 = 2$$

riscrivendo la forma iniziale del problema

di P.L.:

$$\min Z = (\max F) = \min(2x_1 - 2y_1 - 4t_5 + 4t_7)$$

sotto i vincoli

$$-x_1 + y_1 + t_1 = 1$$

$$-x_3 + y_3 + t_3 = 1$$

$$\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} - \frac{x_3}{2} + \frac{y_3}{2} - t_5 + 2t_7 = 1$$

$$t_1 + t_2 = 2$$

$$t_3 + t_4 = 2$$

$$t_5 + t_6 = 2$$

$$t_7 + t_8 = 2$$

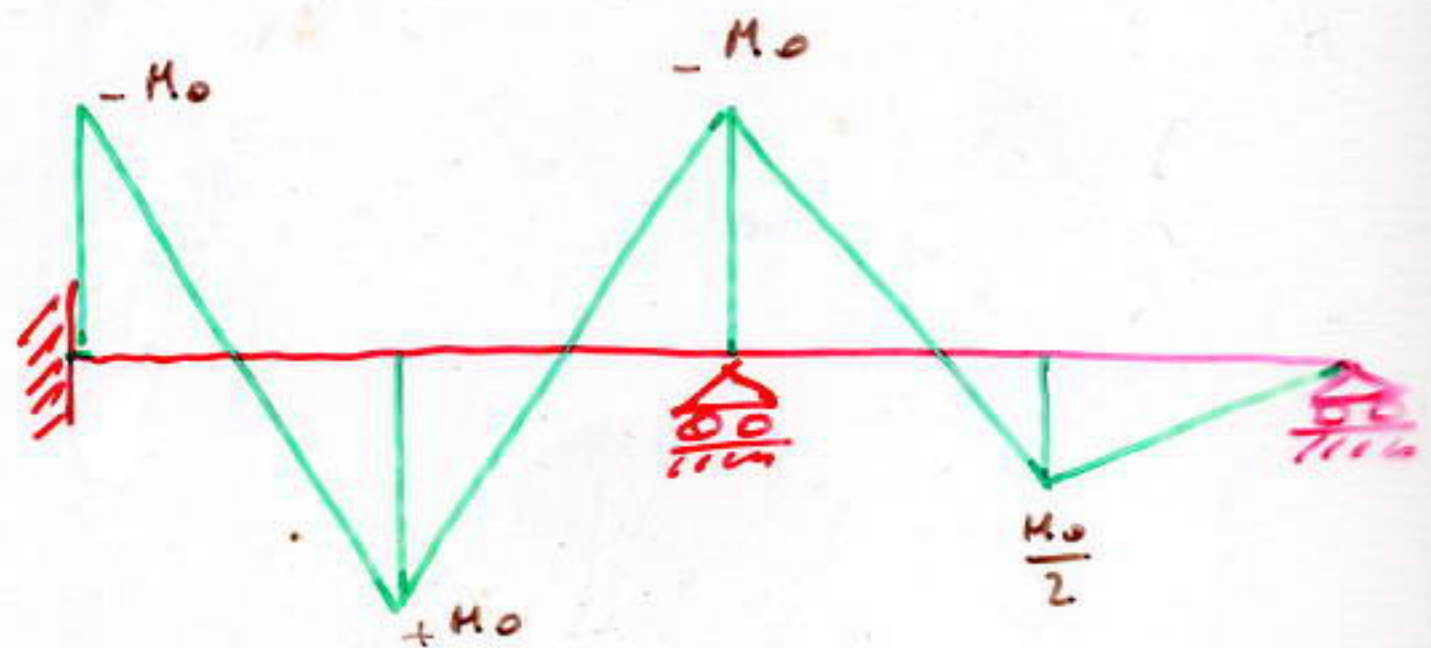
Mediante il metodo del Simplex si determina la soluzione strutturale:

$$M_1 = M_3 = -M_0$$

$$M_2 = M_0$$

$$M_4 = \frac{M_0}{2}$$

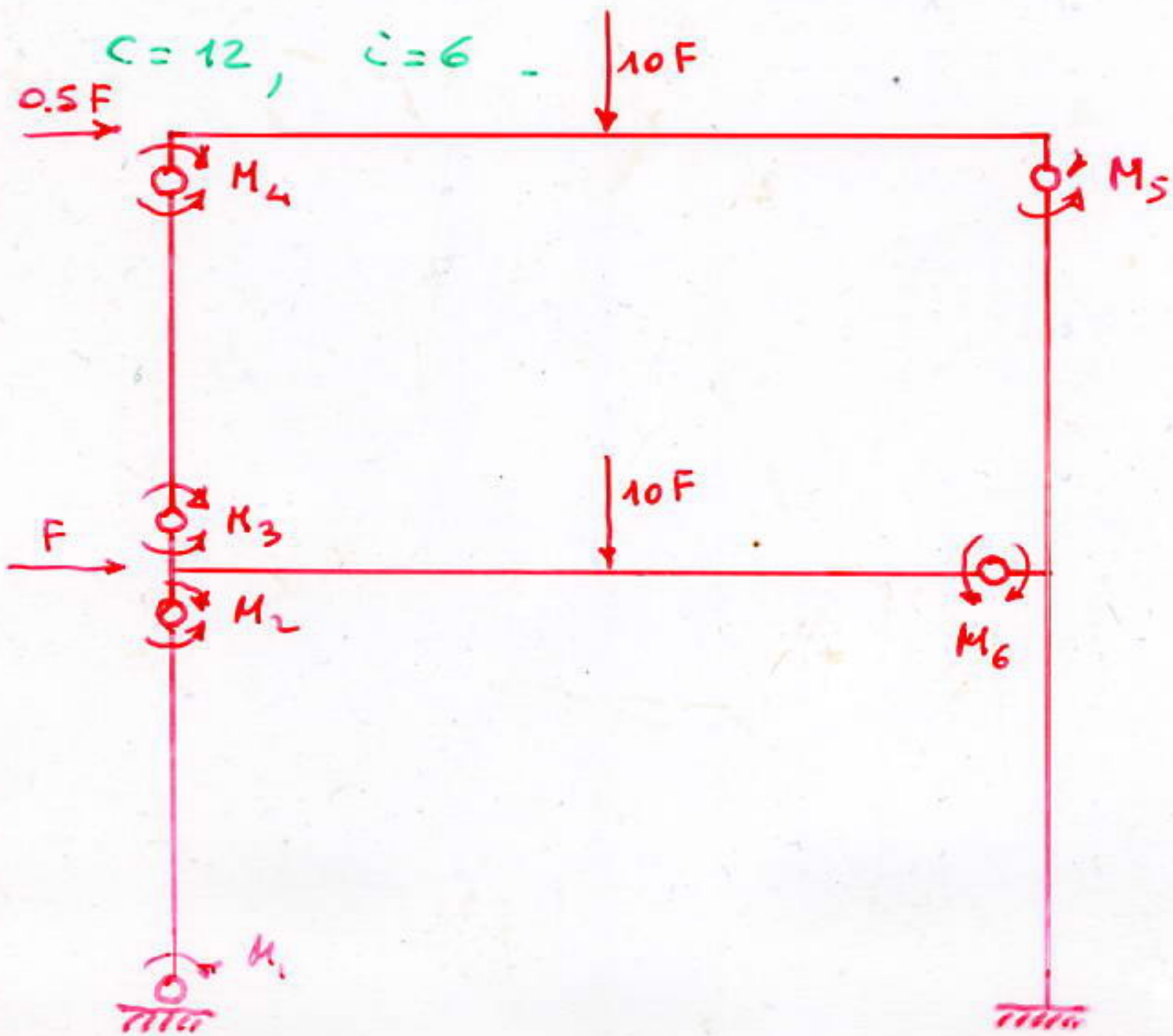
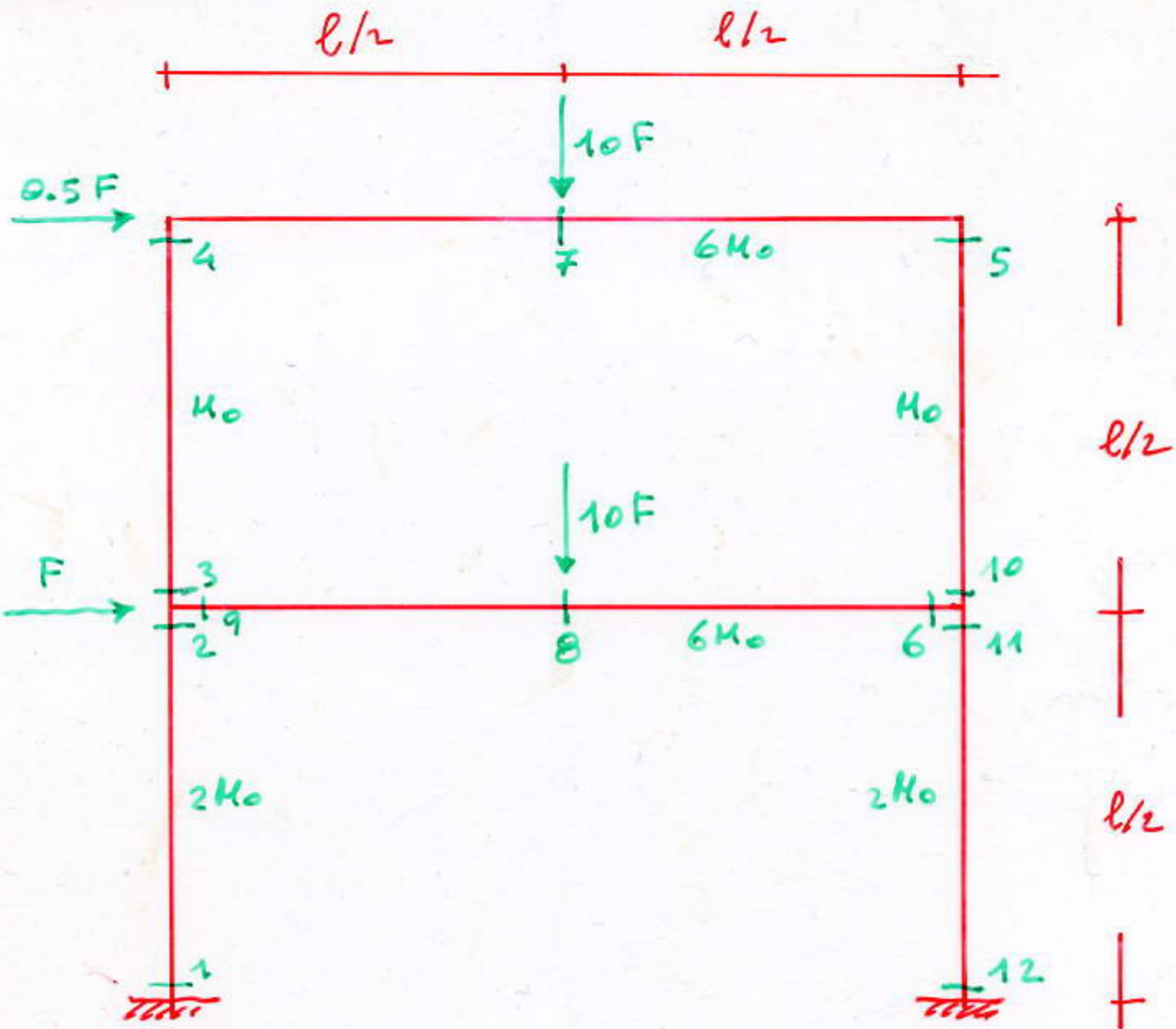
$$F_{\max} = \frac{4M_0}{l}$$



CINEMATISMO



Esempio 2 - Telaio



5

Equazioni di equilibrio: (6)

$$M_7 = 2.5 Fl + \frac{M_4}{2} - \frac{M_5}{2}$$

$$M_8 = 2.5 Fl + \frac{M_2}{2} - \frac{M_3}{2} + \frac{M_6}{2}$$

$$M_9 = M_2 - M_3$$

$$M_{10} = -0.25 Fl - M_3 + M_4 + M_5$$

$$M_{11} = -0.25 Fl - M_3 + M_4 + M_5 - M_6$$

$$M_{12} = -Fl - M_1 + M_2 - M_3 + M_4 + M_5 - M_6$$

Diseguazioni di compatibilità plastica

$$-2M_0 \leq M_1 \leq 2M_0$$

$$-2M_0 \leq M_2 \leq 2M_0$$

$$-M_0 \leq M_3 \leq M_0$$

$$-M_0 \leq M_4 \leq M_0$$

$$-M_0 \leq M_5 \leq M_0$$

$$-6M_0 \leq M_6 \leq 6M_0$$

$$-6M_0 \leq 10 \frac{Fl}{4} + \frac{M_4}{2} - \frac{M_5}{2} \leq 6M_0$$

$$-6M_0 \leq 10 \frac{Fl}{4} + \frac{M_2}{2} - \frac{M_3}{2} + \frac{M_6}{2} \leq 6M_0$$

$$-6M_0 \leq M_2 - M_3 \leq 6M_0$$

$$-M_0 \leq -\frac{Fl}{4} - M_3 + M_4 + M_5 \leq M_0$$

$$-2M_0 \leq -\frac{Fl}{4} - M_3 + M_4 + M_5 - M_6 \leq 2M_0$$

$$-2M_0 \leq -Fl - M_1 + M_2 - M_3 + M_4 + M_5 - M_6 \leq 2M_0$$

con le posizioni

$$X_i = \frac{M_i}{M_0} = x_i - y_i \quad (x_i \geq 0, y_i \geq 0)$$

$$Z = - \frac{Fl}{M_0}$$

e con l'introduzione delle variabili slack  $t_i$  si ha:

$$-x_1 + y_1 + t_1 = 2$$

$$t_1 + t_2 = 4$$

$$-x_2 + y_2 + t_3 = 2$$

$$t_3 + t_4 = 4$$

$$-x_3 + y_3 + t_5 = 1$$

$$t_5 + t_6 = 2$$

$$-x_4 + y_4 + t_7 = 1$$

$$t_7 + t_8 = 2$$

$$-x_5 + y_5 + t_9 = 1$$

$$t_9 + t_{10} = 2$$

$$-x_6 + y_6 + t_{11} = 6$$

$$t_{11} + t_{12} = 12$$

$$t_{13} + t_{14} = 12$$

$$-\frac{x_4}{2} + \frac{y_4}{2} + \frac{x_5}{2} - \frac{y_5}{2} + \frac{x_2}{2} - \frac{y_2}{2} - \frac{x_3}{2} + \frac{y_3}{2} + \frac{x_6}{2} - \frac{y_6}{2} + t_{13} - t_{15} = 0$$

$$t_{15} + t_{16} = 12 \quad ; \quad -x_2 + y_2 + x_3 - y_3 + t_{17} = 6$$

$$t_{17} + t_{18} = 12 \quad ; \quad -\frac{21}{20}x_4 + \frac{21}{20}y_4 - \frac{19}{20}x_5 + \frac{19}{20}y_5 + x_3 - y_3 + \frac{t_{12}}{10} + t_{19} = 1$$

$$t_{19} + t_{20} = 2 \quad ; \quad x_3 - y_3 - \frac{21}{20}x_4 + \frac{21}{20}y_4 - \frac{19}{20}x_5 + \frac{19}{20}y_5 + x_6 - y_6 + \frac{t_{13}}{10} + t_{21} = 2$$

$$t_{21} + t_{22} = 4 \quad ; \quad \begin{cases} x_1 - y_1 - x_2 + y_2 + x_3 - y_3 - 1.2x_4 + 1.2y_4 - 0.8x_5 + 0.8y_5 + x_6 \\ -y_6 + \frac{2}{5}t_{13} + t_{23} = \frac{22}{5} \end{cases}$$

$$t_{23} + t_{24} = 4$$

$$Z = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}y_3 - \frac{5.5}{4}x_4 + \frac{5.5}{4}y_4 - \frac{6.5}{4}x_5 + \frac{6.5}{4}y_5 - \frac{t_{13}}{4} + \frac{3}{2}t_{19}$$

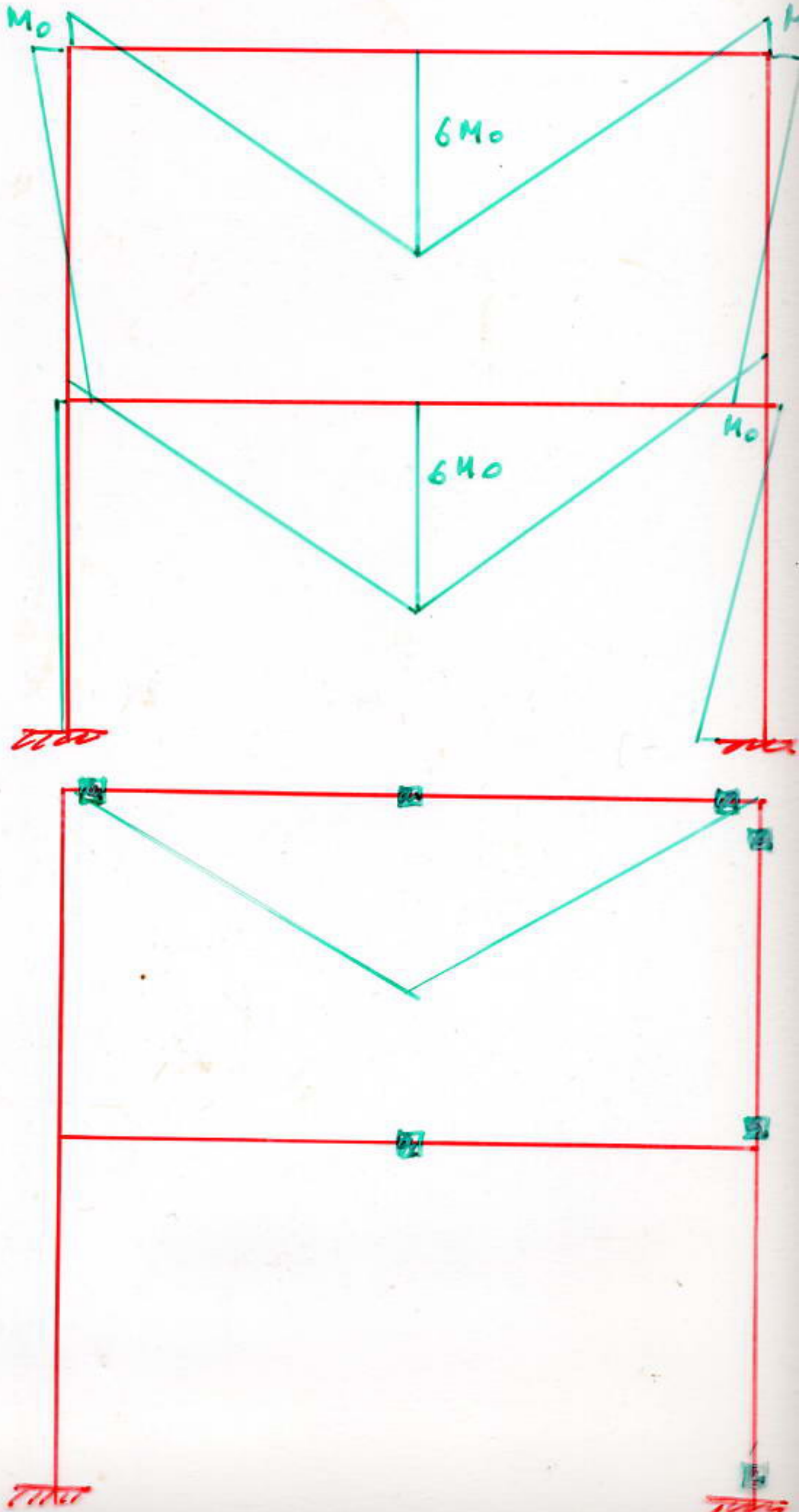
# Soluzioni

$$z = -2.8$$

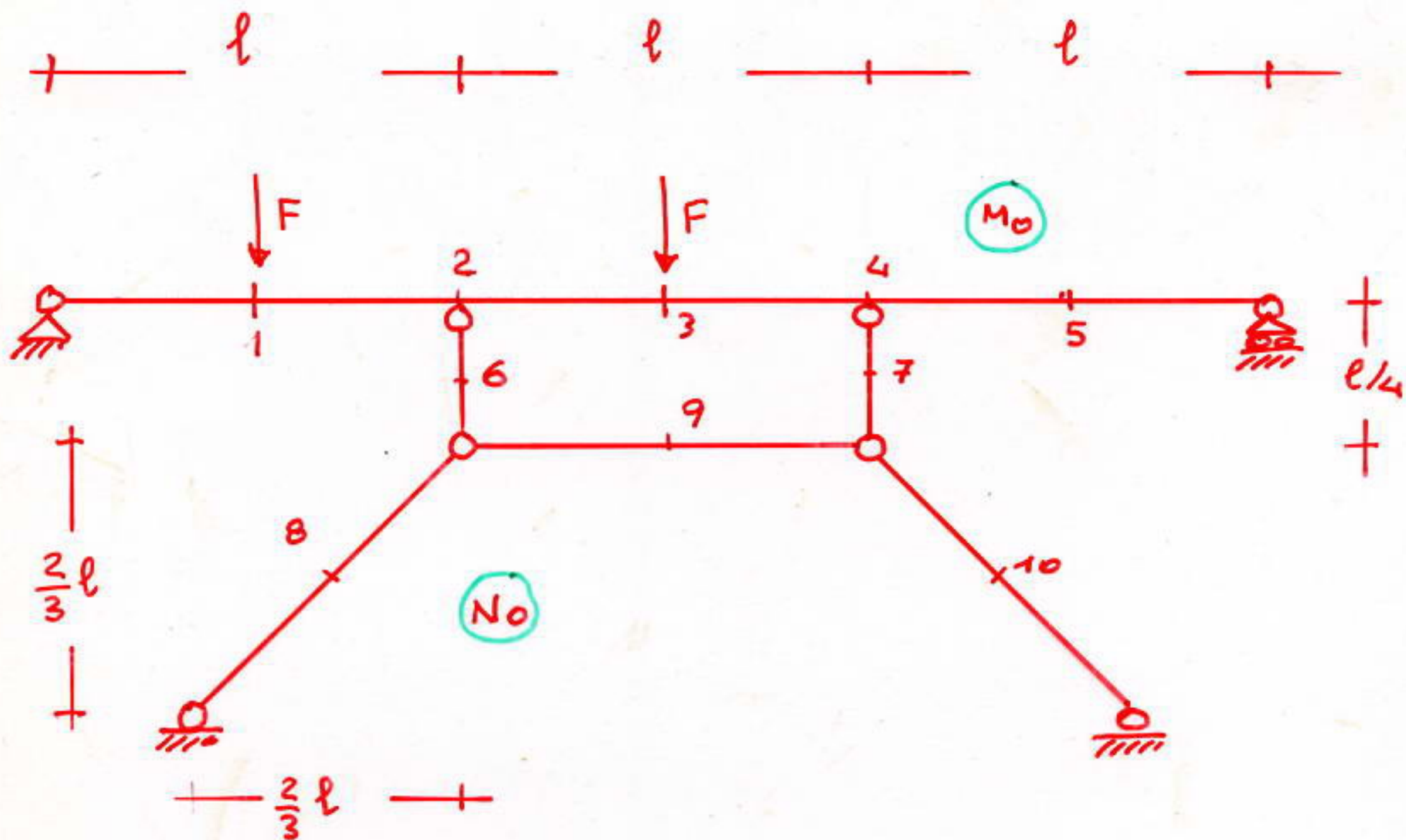
$$M_1 = 0, M_2 = -0.3M_0, M_3 = 0.3M_0, M_4 = -M_0, M_5 = M_0,$$

$$M_6 = -1.4M_0, M_7 = M_8 = 6M_0, M_9 = 0.6M_0, M_{10} = -M_0,$$

$$M_{11} = 0.4M_0; M_{12} = -2M_0$$

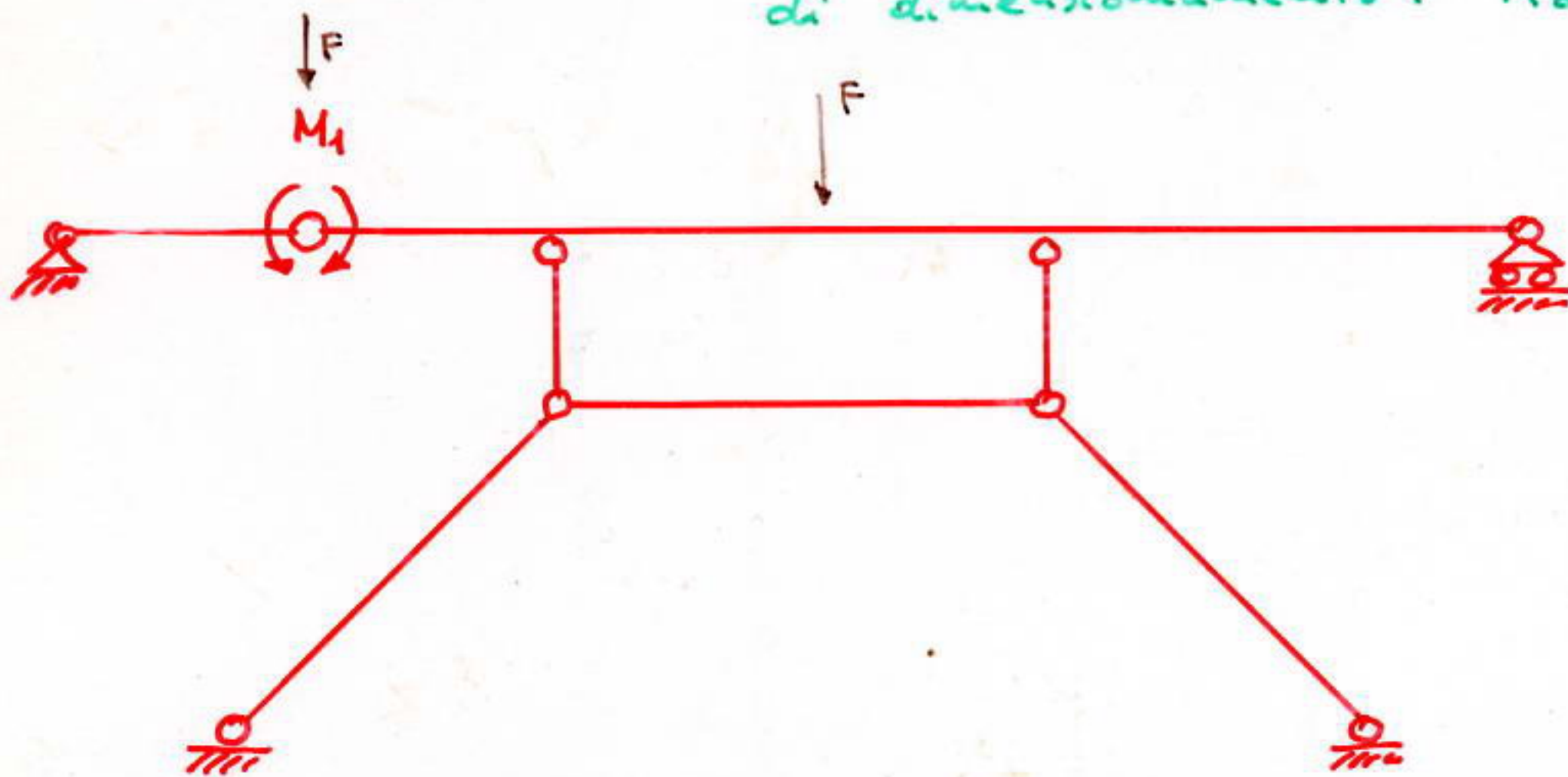


Esempio 3 - Ponte a trave irrigidita



$i=1, C=10.$

$(-M_0, +M_0), (-N_0, 3N_0)$   
 Parametro di resistenza relativa e  
 di dimensionamento:  $K_0 = \frac{N_0 l}{M_0}$



## Equilibrio

$$M_2 = 2M_1 - \frac{Fl}{2}$$

$$M_3 = 2M_1 - \frac{Fl}{3}$$

$$M_4 = 2M_1 - \frac{2}{3}Fl$$

$$M_5 = M_1 - \frac{Fl}{3}$$

$$N_6 = N_7 = N_9 = \frac{2M_1}{l} - \frac{4}{3}F$$

$$N_8 = N_{10} = \frac{4M_1}{l\sqrt{2}} - \frac{8F}{3\sqrt{2}}$$

## Compatibilità plastica

$$-M_0 \leq M_1 \leq +M_0$$

$$-M_0 \leq 2M_1 - \frac{Fl}{2} \leq +M_0$$

$$-M_0 \leq 2M_1 - \frac{Fl}{3} \leq +M_0$$

$$-M_0 \leq 2M_1 - \frac{2}{3}Fl \leq +M_0$$

$$-M_0 \leq M_1 - \frac{Fl}{3} \leq +M_0$$

$$-N_0 \leq \frac{2M_1}{l} - \frac{4}{3}F \leq 3N_0$$

$$-N_0 \leq \frac{4M_1}{l\sqrt{2}} - \frac{8F}{3\sqrt{2}} \leq 3N_0$$

## Posizioni

$$X_i = \frac{M_i}{M_0} = x_i - y_i \quad (x_i \geq 0, y_i \geq 0)$$

$$Z = -\frac{Fl}{M_0}$$

$$\frac{N_0 l}{M_0} = k_0$$

$t_i$

$$-x_1 + y_1 + t_1 = 1$$

$$t_1 + t_2 = 2$$

$$t_3 + t_4 = 2$$

$$-\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}t_3 + t_5 = \frac{1}{3}$$

$$t_5 + t_6 = 2$$

$$-\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{4}{3}t_3 - t_7 = \frac{1}{3}$$

$$t_7 + t_8 = 2$$

$$\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}t_3 + t_9 = \frac{1}{3}$$

$$t_9 + t_{10} = 2$$

$$-\frac{10}{3} \frac{x_1}{K_0} + \frac{10}{3K_0} y_1 + \frac{8}{3K_0} t_3 - t_{11} = \frac{8}{3K_0} - 1$$

$$t_{11} + t_{12} = 4$$

$$-\frac{20}{3K_0\sqrt{2}} x_1 + \frac{20}{3K_0\sqrt{2}} y_1 + \frac{16}{3K_0\sqrt{2}} t_3 - t_{13} = \frac{16}{3K_0\sqrt{2}} - 1$$

$$t_{13} + t_{14} = 4$$

$$Z = -6x_1 + 6y_1 + 6t_3 - 6t_9$$

Soluzioni parametrizzate con

$$K_0 = 1$$

$$K_0 = 15$$

$$K_0 = 50$$

$K_0 = 1 \Rightarrow M_0 = N_0 l$

Soluzione 1

$M_1 = 0.785 M_0$

$M_2 = 0.716 M_0$

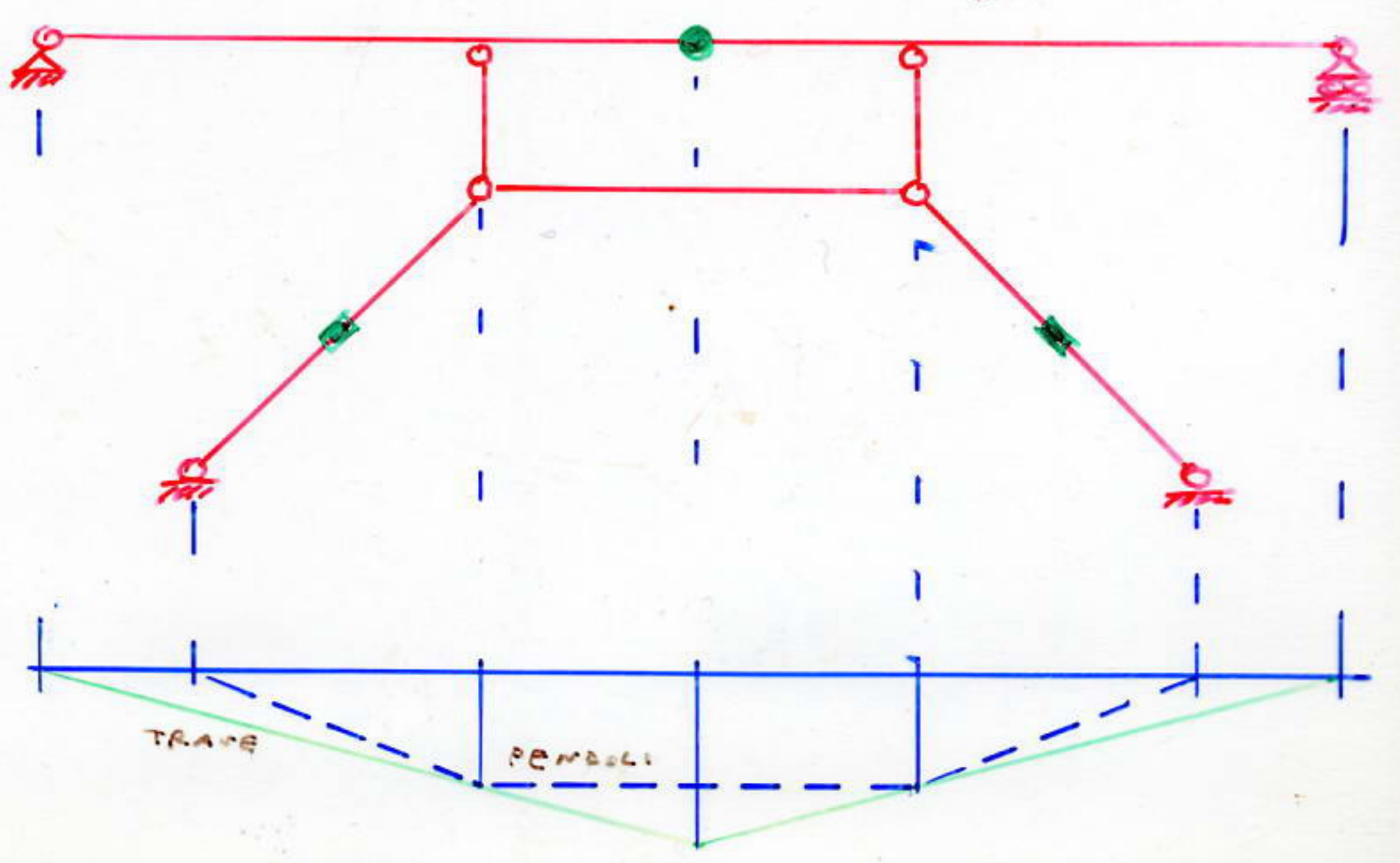
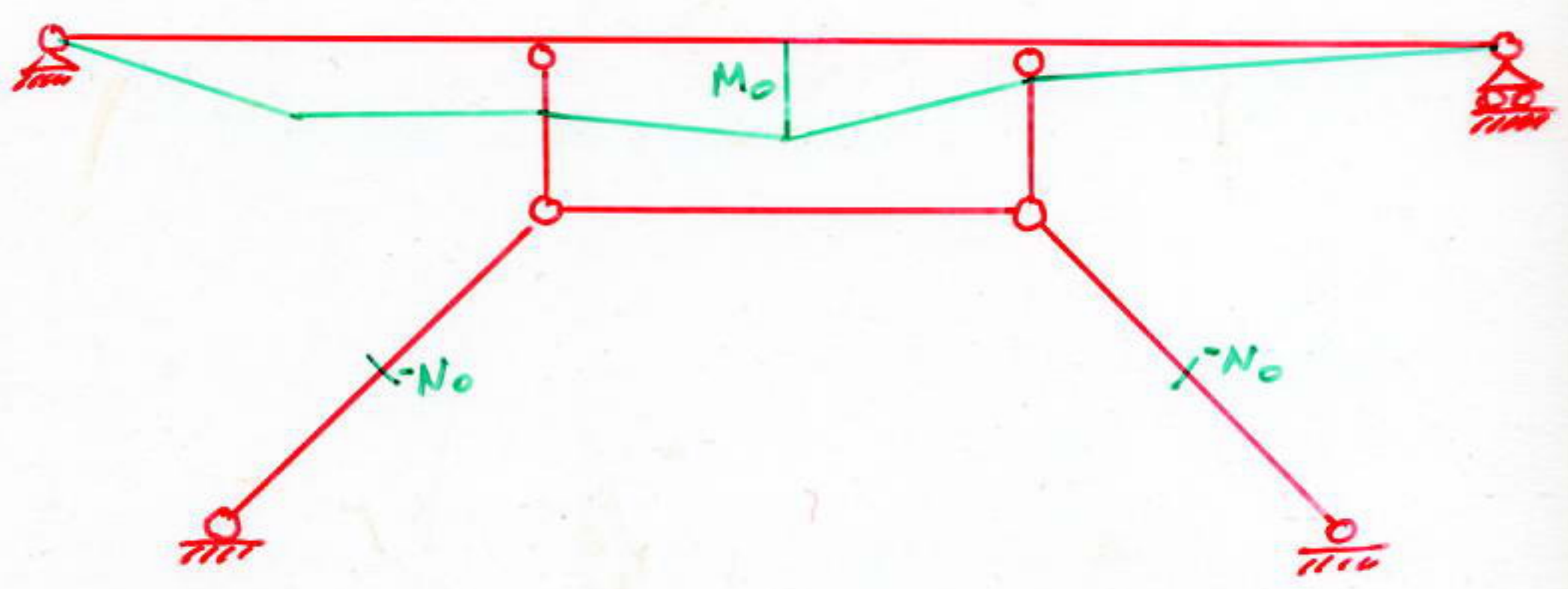
$M_3 = M_0$

$M_4 = 0.432 M_0$

$M_5 = 0.216 M_0$

$N_6 = N_7 = N_9 = -0.706 N_0$

$N_8 = N_{10} = -N_0$



Soluzione per  $\kappa_0 = 15$  ;  $N_0 l = 15 M_0$

$$F = 4.5 \frac{M_0}{l}$$

$$M_1 = M_0$$

$$M_2 = -0.25 M_0$$

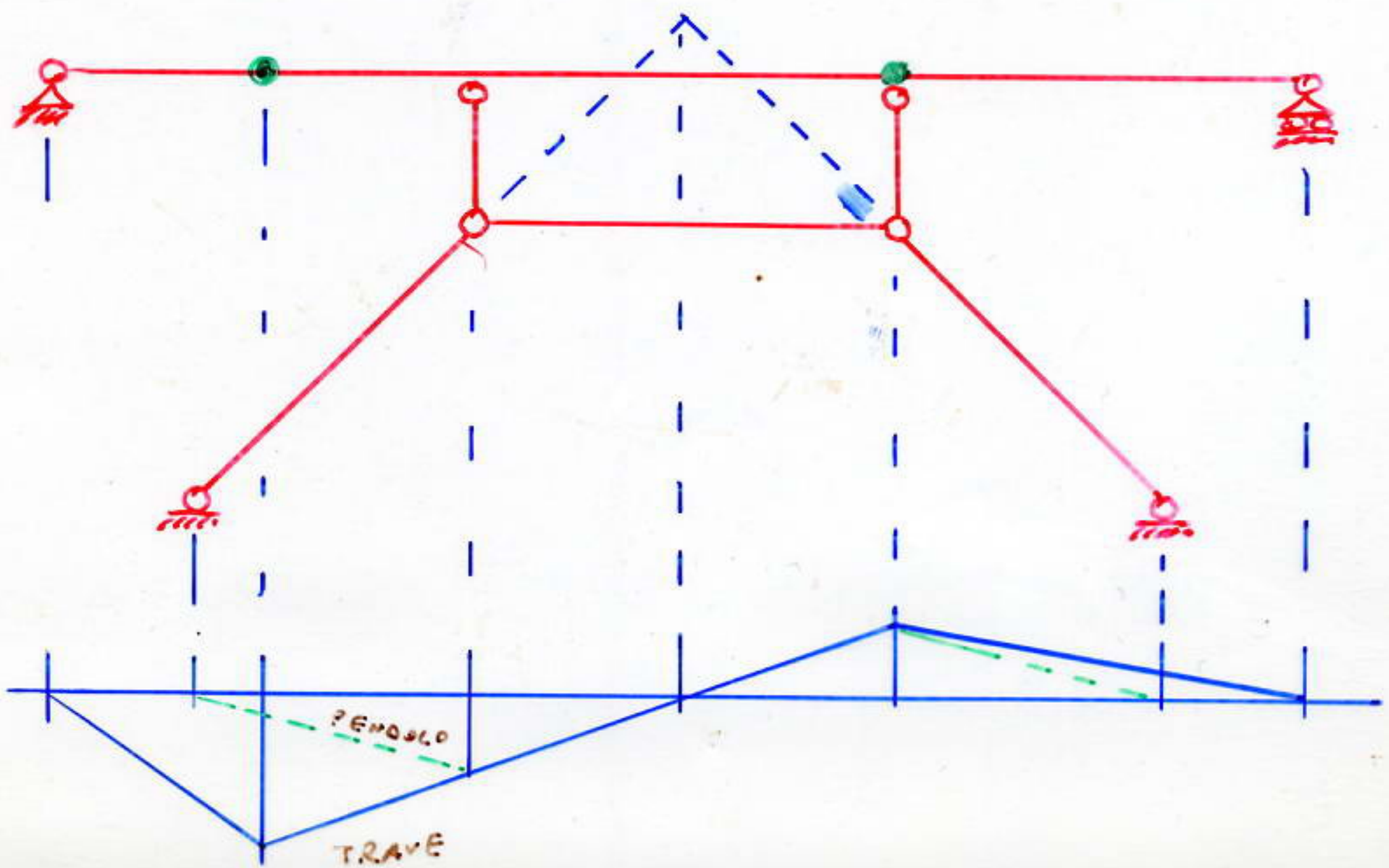
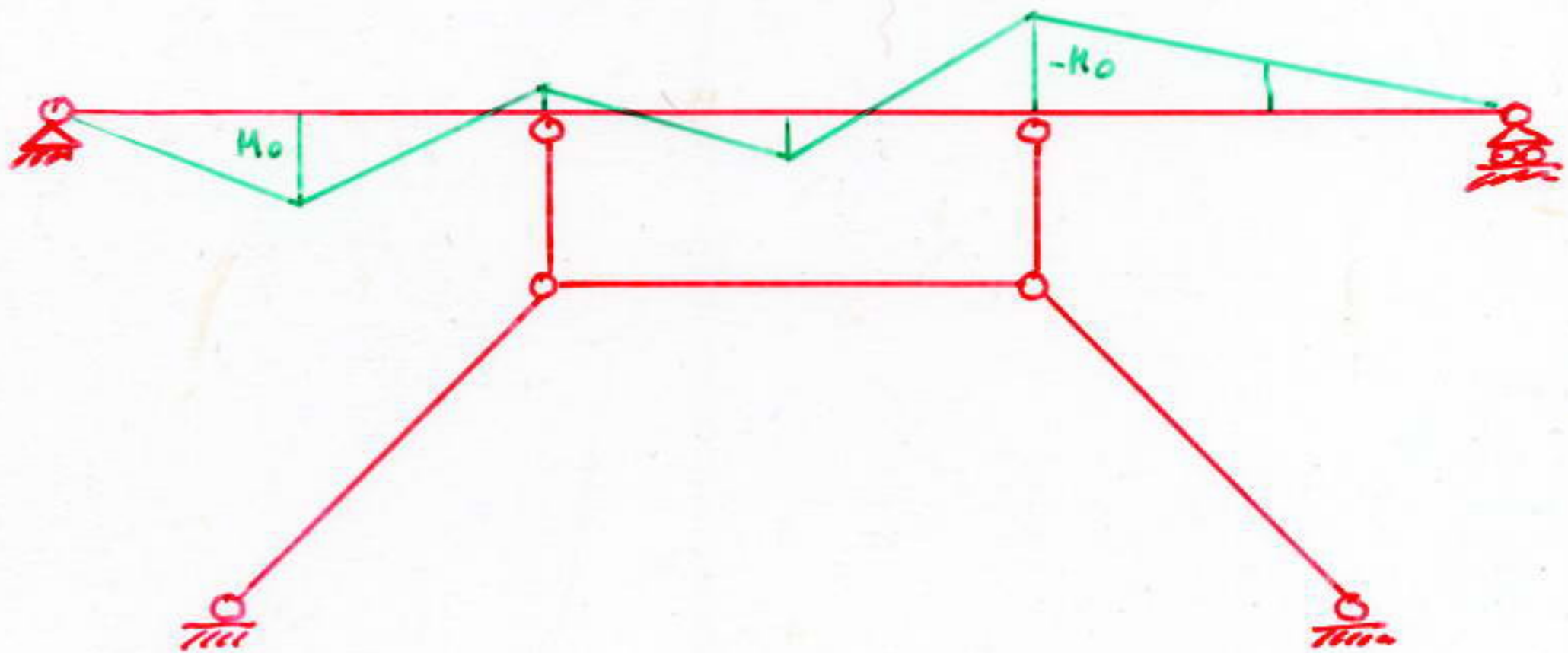
$$M_3 = 0.5 M_0$$

$$M_4 = -M_0$$

$$M_5 = -0.5 M_0$$

$$N_6 = N_7 = N_9 = -0.27 N_0$$

$$N_8 = N_{10} = -0.377 N_0$$



13  
Per  $\kappa_0 = 50$ ,  $N_0 l = 50 M_0$  la soluzione  
cinematica è la stessa determinata per  $\kappa_0 = 15$ .

La trave presenta gli stessi momenti ottenuti

per  $\kappa_0 = 15$  -  $F = 4.5 M_0/l$

Sulla struttura pendolare inipolente si determina

invece:

$$N_6 = N_7 = N_9 = -0.081 N_0$$

$$N_8 = N_{10} = -0.113 N_0$$