

matrice rappresentativa di \mathbf{T} (si osservi che il rango di tale matrice non dipende né dalla base prescelta né dal tipo di componenti).

Diremo infine che un tensore euclideo è **non degenerare** se ha rango coincidente con la dimensione dello spazio (ovvero, equivalentemente, se il determinante di ogni sua matrice rappresentativa è diverso da 0) mentre diremo che un tensore euclideo è **degenerare** se ha rango p minore di n ; in questo secondo caso il suo spazio nullo ha dimensione $k = n - p > 0$.

Appare chiaro come il concetto di tensore euclideo possa estendersi ai tensori di ogni ordine; per le formule che collegano le componenti di diverso tipo di uno stesso tensore euclideo d'ordine k generico continuano a valere le regole di abbassamento ed innalzamento degli indici precedentemente enunciate. La somma diretta degli spazi dei tensori euclidei di ogni ordine definisce l'**algebra dei tensori euclidei** associata ad E_n .

7. Autovalori ed autovettori dei tensori doppi euclidei.

Definizione 7. Assegnato un tensore euclideo \mathbf{T} dello spazio vettoriale euclideo E_n , sia (λ, \mathbf{x}) una coppia costituita da uno scalare λ e da un vettore euclideo non nullo \mathbf{x} di E_n tali che

$$(7.1) \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Si dice allora che λ è un **autovalore** di \mathbf{T} e che \mathbf{x} è un **autovettore** di \mathbf{T} relativo all'autovalore λ .

La precedente definizione trova una naturale interpretazione quando si identifichi \mathbf{x} con un vettore di E_n e \mathbf{T} con un endomorfismo di E_n ; si ha allora $\mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ e la (7.1) equivale alla richiesta che il vettore \mathbf{x} sia trasformato da \mathbf{T} in un nuovo vettore ad esso parallelo.

La linearità di \mathbf{T} comporta che l'insieme V_λ degli autovettori di \mathbf{T} associati ad un medesimo autovalore λ risulti un sottospazio di E_n . Infatti, se \mathbf{x} e \mathbf{y} appartengono a V_λ , per ogni coppia di scalari a e b si ha

$$\mathbf{T} \cdot (a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\mathbf{T} \cdot \mathbf{x} + b\mathbf{T} \cdot \mathbf{y} = a\lambda\mathbf{x} + b\lambda\mathbf{y} = \lambda(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})$$

e pertanto $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in V_\lambda$. La dimensione del sottospazio V_λ associato all'autovalore λ si denomina **molteplicità geometrica** di λ ; un autovalore di molteplicità geometrica 1 è anche detto **semplice**. L'insieme $S(\mathbf{T})$ di tutti gli autovalori di \mathbf{T} prende il nome di **spettro** di \mathbf{T} .

Si chiama **problema agli autovalori** per il tensore \mathbf{T} il problema della determinazione del suo spettro $S(\mathbf{T})$ e, per ogni suo elemento λ , del sottospazio degli autovettori V_λ ad esso associato.

La (7.1) equivale alla seguente altra equazione

$$(7.2) \quad (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} = 0$$

nella quale $\mathbf{1}$ è il tensore unitario. La formulazione (7.2) del problema agli autovalori consente di affermare che un vettore \mathbf{x} è un autovettore di \mathbf{T} relativo ad un fissato numero reale λ se appartiene allo spazio nullo del tensore $\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}$; se quest'ultimo è non degenerare allora il suo spazio nullo è formato dal solo vettore nullo e pertanto il problema agli autovalori non ammette soluzioni. Se, al contrario, per un certo valore di λ , $\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}$ è degenerare, allora il problema agli autovalori ammette soluzioni e lo spazio degli autovettori V_λ ha dimensione $k = n - p$, essendo p il rango di $\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}$. Quanto appena affermato dimostra il

Teorema 8. Lo spettro $S(\mathbf{T})$ di un tensore euclideo \mathbf{T} coincide con l'insieme dei numeri reali λ che rendono degenerare il tensore $\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}$.

Per determinare effettivamente gli autovalori di \mathbf{T} è necessario introdurre una base (e_i) in E_n ed esprimere la (7.2) in componenti così da pervenire ad un sistema di equazioni ad essa equivalente. La forma di tale sistema dipende dal tipo di componenti che si assume per rappresentare i tensori \mathbf{T} ed $\mathbf{1}$; in termini di quelle miste la (7.2) diventa

$$(7.3) \quad (T_j^i - \lambda \delta_j^i) x^j = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

mentre in componenti covarianti si ha

$$(7.4) \quad (T_{ij} - \lambda g_{ij}) x^j = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Detta \mathbf{T} la matrice formata dalle componenti miste di \mathbf{T} nella base introdotta, si ponga

$$(7.5) \quad P_n(\lambda) = \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}).$$

La (7.5) definisce un polinomio di grado n nella variabile λ i cui coefficienti, benché siano funzioni degli elementi di \mathbf{T} , non dipendono dalla base introdotta. Infatti, indicata con \mathbf{T}' la matrice delle componenti miste di \mathbf{T} in una seconda base, si ha $\mathbf{T}' = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1})\mathbf{A}$, essendo \mathbf{A} la matrice rappresentativa del cambiamento di base; risulta allora

$$P_n'(\lambda) = \det \mathbf{A}^{-1} \det \mathbf{A} \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}) = P_n(\lambda).$$

I polinomi P_n e P_n' coincidono per ogni valore di λ e pertanto, per il principio d'identità dei polinomi, hanno i medesimi coefficienti. Chiameremo $P_n(\lambda)$ **polinomio caratteristico** di \mathbf{T} per sottolinearne l'indipendenza dalla base e noteremo con I_i il coefficiente del suo termine di grado $n - i$; in particolare, si ha $I_0 = (-1)^n$ e pertanto possiamo scrivere

$$(7.6) \quad P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + I_1 \lambda^{n-1} + \dots + I_n.$$

⚡ Nella teoria delle matrici si suole chiamare **invariante** di \mathbf{T} ogni funzione delle sue componenti che non cambi valore nelle trasformazioni del tipo $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{A}$

con \mathbf{A} matrice non singolare. Definito **minore principale** di ordine i di \mathbf{T} ogni minore ottenuto sopprimendo $n - i$ righe qualsiasi e le colonne di uguale indice e denotato con J_i la somma di tutti i minori principali d'ordine i di \mathbf{T} , si mostra che, per ogni i tra 1 ed n , J_i è un invariante di \mathbf{T} che si denomina **invariante principale d'ordine i** ; in particolare J_1 coincide con la traccia di \mathbf{T} (somma degli elementi appartenenti alla diagonale principale) mentre J_n è il determinante di \mathbf{T} . Verificare nei casi $n = 2$ ed $n = 3$ che fra i coefficienti del polinomio caratteristico e gli invarianti principali sussiste la seguente relazione:

$$I_i = (-1)^i J_i.$$

Siamo ora in grado di affermare che gli autovalori di un tensore \mathbf{T} sono tutti e soli gli zeri reali del suo polinomio caratteristico, ovvero le soluzioni reali dell'equazione algebrica di grado n

$$(7.7) \quad P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + I_1 \lambda^{n-1} + \dots + I_n = 0.$$

Infatti, per tali valori di λ il tensore $\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}$ ha determinante nullo e dunque è degenere. La (7.7) si denomina **equazione caratteristica o secolare** per il tensore \mathbf{T} . Si dice **molteplicità algebrica** di un autovalore λ la sua molteplicità come radice dell'equazione caratteristica.

Qualora si sia scelto di rappresentare \mathbf{T} ed $\mathbf{1}$ in componenti covarianti, le precedenti considerazioni vanno leggermente modificate; indicata infatti con $\bar{\mathbf{T}}$ la matrice delle componenti covarianti di \mathbf{T} , si ha

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{g}\mathbf{T}.$$

Posto

$$\bar{P}_n(\lambda) = \det(\bar{\mathbf{T}} - \lambda \mathbf{g}),$$

si ha allora

$$\bar{P}_n(\lambda) = \det[\mathbf{g}(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1})] = \det \mathbf{g} \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1})$$

ovvero, indicato con g il determinante di \mathbf{g} ,

$$(7.8) \quad \bar{P}_n(\lambda) = g P_n(\lambda).$$

Dalla (7.8) consegue, innanzi tutto, che il polinomio \bar{P}_n non coincide, in generale, con quello caratteristico; inoltre, poiché g dipende esplicitamente dalla base, cioè è vero anche per \bar{P}_n . D'altra parte \bar{P}_n differisce da P_n per un coefficiente moltiplicativo g diverso da 0 e pertanto le radici dei due polinomi sono le stesse. Risulta allora lecito determinare gli autovalori di \mathbf{T} risolvendo l'equazione $\bar{P}_n(\lambda) = 0$ al posto di quella caratteristica.

Risolto completamente il problema della determinazione degli autovalori di \mathbf{T} , per calcolare gli autovettori è sufficiente risolvere il sistema lineare (7.3) o,

equivalentemente, quello (7.4) in corrispondenza a ciascun elemento dello spettro. Ognuno di tali sistemi ammette infinite soluzioni tra le quali se ne possono individuare $k = n - p$ indipendenti se k è il rango di $\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}$ in corrispondenza al particolare autovalore in considerazione. Tali soluzioni indipendenti costituiscono le componenti di un sistema $(\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_k)$ di autovettori di \mathbf{T} che formano una base del sottospazio V_λ associato all'autovalore λ .

È ovviamente auspicabile poter individuare il maggior numero di autovettori indipendenti di un tensore. In particolare, se si riesce a determinare n autovettori indipendenti $(\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n)$ di \mathbf{T} (anche in corrispondenza di differenti autovalori), questi formano una base i cui elementi verificano le condizioni

$$\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{e}}_i = \lambda_i \bar{\mathbf{e}}_i,$$

in corrispondenza ad opportuni valori λ_i non necessariamente tutti distinti. Nella base $(\bar{\mathbf{e}}_i)$ \mathbf{T} ammette dunque la rappresentazione diagonale

$$(7.9) \quad \bar{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

In realtà non è sempre possibile pervenire ad una rappresentazione diagonale di un tensore. Intanto, l'equazione caratteristica può non ammettere alcuna soluzione reale, nel qual caso il problema agli autovalori non possiede soluzioni. Se poi esistono autovalori reali, nulla si può affermare, in generale, circa le dimensioni dei sottospazi ad essi associati ed al numero totale di autovettori indipendenti. Se, però, il tensore \mathbf{T} è simmetrico è allora possibile dimostrare che esistono certamente basi di E_n formate da suoi autovettori e, per di più, che tra di esse vi sono basi ortonormali.

Allo scopo di pervenire al risultato preannunciato, dimostriamo preliminarmente il

Teorema 9. *Se \mathbf{T} è un tensore doppio simmetrico di uno spazio vettoriale euclideo E_n , tutte le radici della sua equazione caratteristiche sono reali; inoltre, autovettori appartenenti ad autovalori distinti sono ortogonali.*

DIM - Sia λ una soluzione dell'equazione caratteristica di \mathbf{T} ; se (\mathbf{e}_i) è una base ortonormale di E_n il sistema (7.4) si scrive

$$(7.10) \quad T_{ij} x^j = \lambda \delta_{ij} x^j;$$

tanto λ quanto le soluzioni (x^j) del sistema (7.10) possono, a priori, essere complesse. Denotato con \bar{x}^i il coniugato di x^i , la (7.10) comporta

$$T_{ij} \bar{x}^i x^j = \lambda \delta_{ij} \bar{x}^i x^j.$$

Il primo membro della precedente espressione è certamente reale in quanto, essendo la matrice rappresentativa di \mathbf{T} reale e simmetrica, risulta

$$\overline{T_{ij} \bar{x}^i x^j} = T_{ij} x^i \bar{x}^j = T_{ji} x^i \bar{x}^j = T_{ij} x^j \bar{x}^i.$$

D'altra parte

$$\delta_{ij} \bar{x}^i x^j = \sum_{i=1}^n \bar{x}^i x^i = \sum_{i=1}^n |x^i|^2$$

è a sua volta reale e pertanto è tale anche

$$\lambda = \frac{T_{ij} x^j}{\sum_{i=1}^n |x^i|^2}.$$

Se ora λ_1 e λ_2 sono autovalori distinti di \mathbf{T} ed \mathbf{x}_1 ed \mathbf{x}_2 due rispettivi autovettori, si ha

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2;$$

moltiplicando scalarmente la prima identità per \mathbf{x}_2 e la seconda per \mathbf{x}_1 si ha

$$\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2;$$

Sottraendo poi membro a membro queste relazioni e tenendo conto della simmetria di \mathbf{T} si ricava

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0.$$

Dall'ipotesi $\lambda_1 \neq \lambda_2$ segue l'asserto. ■

E' ora possibile dimostrare il

Teorema 10. *Se \mathbf{T} è un tensore doppio simmetrico di uno spazio vettoriale euclideo E_n esiste allora una base ortonormale di autovettori di \mathbf{T} .*

DIM - Siano $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ le soluzioni distinte dell'equazione caratteristica ($r \leq n$); sia poi V_{λ_k} il sottospazio vettoriale associato all'autovalore λ_k . Si ponga

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r};$$

è evidente che V è un sottospazio di E_n avente come dimensione la somma delle molteplicità geometriche di tutti gli autovalori di \mathbf{T} . Si consideri il complemento ortogonale V_{\perp} di V ; se $\mathbf{y} \in V_{\perp}$ ed $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_r \in V$ ($\mathbf{x}_k \in V_{\lambda_k}$), per la simmetria di \mathbf{T} si ha

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \sum_{h=1}^r \lambda_h \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}_h = 0.$$

Pertanto \mathbf{T} trasforma V_{\perp} in sé. Si supponga ora che la dimensione di V sia minore di n e che, dunque, V_{\perp} abbia dimensione positiva; sia \mathbf{T}_{\perp} la restrizione di \mathbf{T} a V_{\perp} . \mathbf{T}_{\perp} è allora un tensore simmetrico definito nello spazio euclideo V_{\perp} e pertanto ammette almeno un autovalore reale $\bar{\lambda}$; se \mathbf{y} è un autovettore di \mathbf{T}_{\perp} relativo a $\bar{\lambda}$ si ha

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{T}_{\perp} \cdot \mathbf{y} = \bar{\lambda} \mathbf{y}$$

e dunque \mathbf{y} è autovalore di \mathbf{T} ; ciò contrasta con l'ipotesi che \mathbf{y} è ortogonale a tutti gli autovettori di \mathbf{T} . Si conclude allora che V coincide con E_n , ovvero

$$E_n = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}.$$

Si individui ora in ogni spazio V_{λ_k} una base ortonormale e si consideri il sistema formato da tutti i vettori che compongono tali basi. In questo modo si determina un sistema formato da n vettori che costituisce una base ortonormale di E_n formata da autovettori di \mathbf{T} . Infatti tutti i vettori che la compongono sono, per definizione, autovettori unitari di \mathbf{T} ; inoltre, se due di essi appartengono allo stesso autovalore, sono ortogonali per costruzione; se appartengono ad autovalori distinti sono ortogonali per il teorema 9. ■

Il teorema appena dimostrato equivale all'affermazione che, assegnati in uno spazio vettoriale E_n due tensori covarianti simmetrici \mathbf{g} e \mathbf{T} il primo dei quali non degenera e definito positivo, è possibile individuare un'unica base nella quale entrambi i tensori sono rappresentati da una matrice diagonale; è poi senz'altro possibile determinare tale base in modo che la matrice rappresentativa del primo tensore sia unitaria.

L'interesse di tale teorema è evidente. Esso comporta infatti la possibilità di individuare delle basi in cui tutte le relazioni che coinvolgono il tensore \mathbf{T} assumono una forma particolarmente semplice senza peraltro rinunciare ai vantaggi legati all'utilizzazione di una base ortonormale.

Una ulteriore fondamentale proprietà dei tensori simmetrici è espressa dal

Teorema 11. *La molteplicità geometrica di un autovalore λ di un tensore doppio euclideo simmetrico \mathbf{T} , ovvero la dimensione del sottospazio V_{λ} ad esso associato, coincide con la sua molteplicità algebrica.*

DIM - Dai teoremi precedentemente dimostrati segue che in una base ortonormale di autovettori ($\bar{\mathbf{e}}_i$) \mathbf{T} ammette una rappresentazione diagonale del tipo (7.9). In tale rappresentazione alcuni dei valori della diagonale principale possono coincidere; risulta evidente dal modo stesso in cui si è definita la base ($\bar{\mathbf{e}}_i$) che, indicata con k_h la dimensione del sottospazio V_{λ_k} associato all'autovalore λ_k , questo appare nella rappresentazione (7.9) appunto k_h volte. D'altra parte, l'equazione caratteristica, scritta nella base ($\bar{\mathbf{e}}_i$), assume la forma

$$P_n(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) = 0$$

ovvero, raccogliendo tutti i termini in cui figura uno stesso autovalore λ_h ,

$$P_n(\lambda) = \prod_{h=1}^p (\lambda_h - \lambda)^{k_h} = 0.$$

Quest'ultima forma dell'equazione caratteristica mostra che la molteplicità di ciascuna soluzione λ_h coincide con la dimensione k_h del sottospazio ad essa associato. ■

Se un tensore \mathbf{T} , oltre ad essere simmetrico, risulta anche definito positivo, allora tutti i suoi autovalori sono positivi. Infatti la condizione

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} > 0,$$

che deve essere verificata da ogni vettore non nullo \mathbf{x} , si scrive nella base di autovettori di \mathbf{T} nella forma

$$\sum_{i=1}^n \lambda^i (\bar{x}^i)^2 > 0.$$

In particolare, ponendo $\mathbf{x} = \bar{e}_i$, l'ultima relazione comporta

$$\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

8. Trasformazioni ortogonali.

Nel paragrafo 2.11 si sono studiate le prime proprietà degli endomorfismi di uno spazio vettoriale. Nel caso degli spazi euclidei un ruolo speciale va attribuito a quegli endomorfismi che non alterano il prodotto scalare tra vettori; ciò conduce alla

Definizione 8. *Un endomorfismo \mathbf{Q} di uno spazio vettoriale euclideo E_n è detto una trasformazione ortogonale se lascia invariato il prodotto scalare tra vettori; se, cioè, per ogni coppia di elementi \mathbf{x} ed \mathbf{y} di E_n si ha*

$$(8.1) \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

La precedente definizione si estende al tensore euclideo individuato dall'endomorfismo \mathbf{Q} .

Si osservi che dalla definizione 8 segue che, se (e_i) è una base ortonormale, tale è anche $(\mathbf{Q}(e_i))$. Per il teorema 2.5 \mathbf{Q} è allora un automorfismo di E_n . In particolare, la sua matrice rappresentativa in qualsiasi base ha determinante non nullo ed è dunque invertibile.

Introdotta in E_n una generica base (e_i) la condizione (8.1) si esprime in componenti attraverso le formule

$$(8.2) \quad g_{hk} Q_i^h Q_j^k = g_{ij}$$

le quali vanno interpretate come $n(n+1)/2$ restrizioni sugli n^2 coefficienti della matrice rappresentativa di \mathbf{Q} i quali non possono dunque assegnarsi tutti in modo arbitrario. Denotata con \mathbf{g} la matrice metrica, con \mathbf{Q} quella rappresentativa di \mathbf{Q} e con \mathbf{Q}^T la sua trasposta nella base assegnata, la (8.2) può porsi nella forma

$$(8.3) \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{g} \mathbf{Q} = \mathbf{g}.$$

Le condizioni di ortogonalità espresse dalle (8.2) o dalle (8.3) divengono particolarmente espressive quando la base (e_i) è ortonormale; in tal caso, infatti, si ha $g_{ij} = \delta_{ij}$ (ovvero $\mathbf{g} = \mathbf{I}$) e dunque la (8.2) diventa

$$(8.4) \quad \sum_{h=1}^n Q_i^h Q_j^h = \delta_{ij}$$

mentre la (8.3) si scrive

$$(8.5) \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{I} \mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

ovvero, più semplicemente,

$$(8.6) \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}.$$

La (8.4) esprime la richiesta che l'ordinario prodotto scalare tra due colonne di \mathbf{Q} (intese come elementi di \mathbb{R}^n) valga 0 per due colonne distinte ed 1 nel caso del prodotto di una colonna per se stessa. La (8.6) comporta, per l'unicità dell'inversa di una matrice, l'identità

$$(8.7) \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1},$$

ovvero l'uguaglianza tra la matrice inversa e quella trasposta di \mathbf{Q} . Entrambe queste proprietà, tra loro equivalenti, possono assumersi a definizione delle cosiddette **matrici ortogonali**; dunque, una trasformazione ortogonale è rappresentata, in una base ortonormale, da una matrice ortogonale.

Dalla definizione 8 segue in maniera immediata che la composizione di trasformazioni ortogonali è una trasformazione ortogonale; inoltre la trasformazione identica \mathbf{I} che ad un vettore associa se stesso è a sua volta ortogonale. Si può allora attribuire all'insieme di tali trasformazioni una struttura di gruppo il cui elemento neutro è, per l'appunto, \mathbf{I} ; si definisce in tal modo il **gruppo ortogonale** $O(E_n)$.