



**Università Federico II di Napoli**

**Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e  
Naturali**

**Corso di laurea in Informatica**

**Fisica Sperimentale I  
Gruppo 1**

**Docente Prof. Leopoldo Milano**

[http://www.docenti.unina.it/docenti/web/index.php?id\\_prof=36](http://www.docenti.unina.it/docenti/web/index.php?id_prof=36)

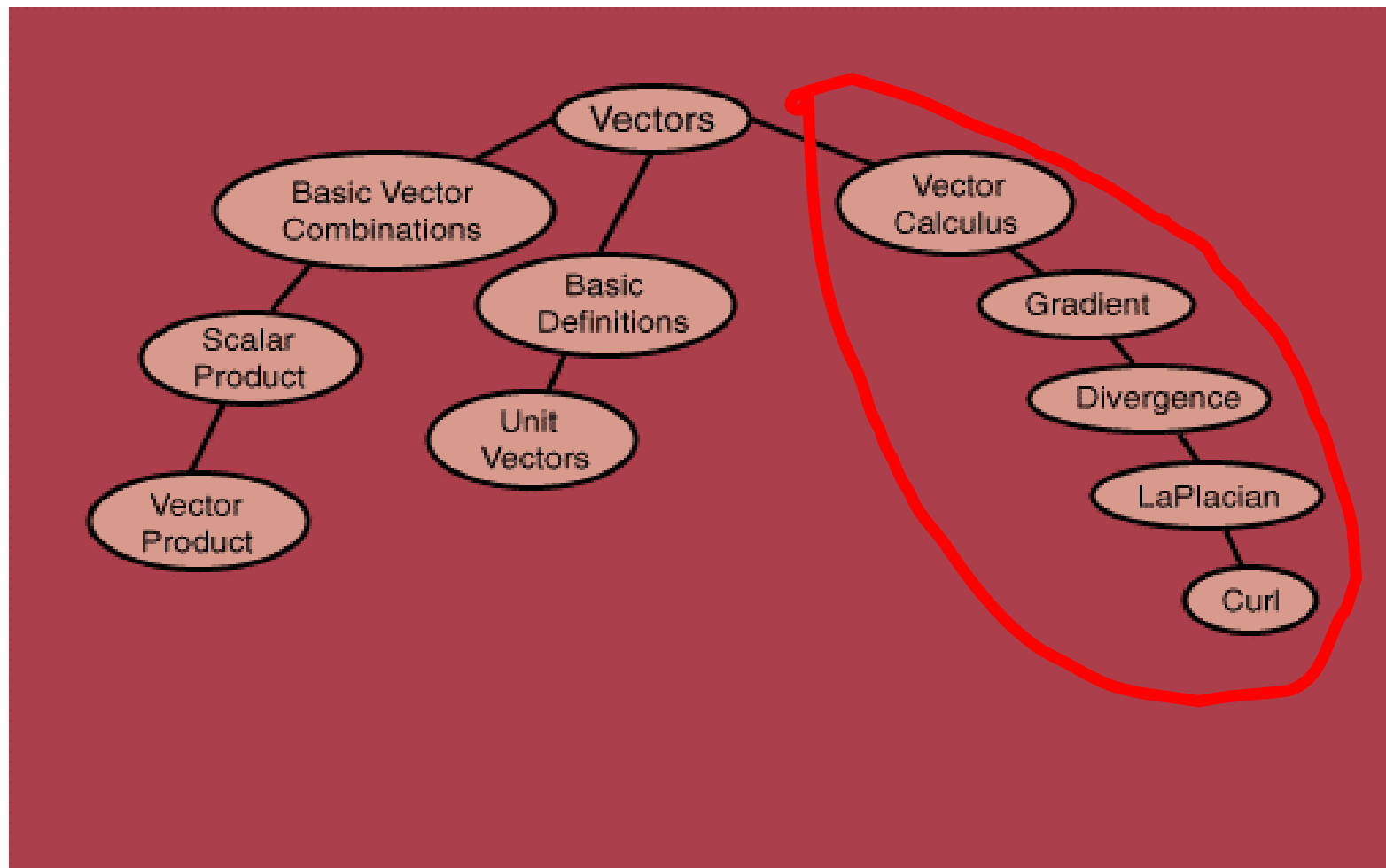
**Anno accademico 2002-2003**



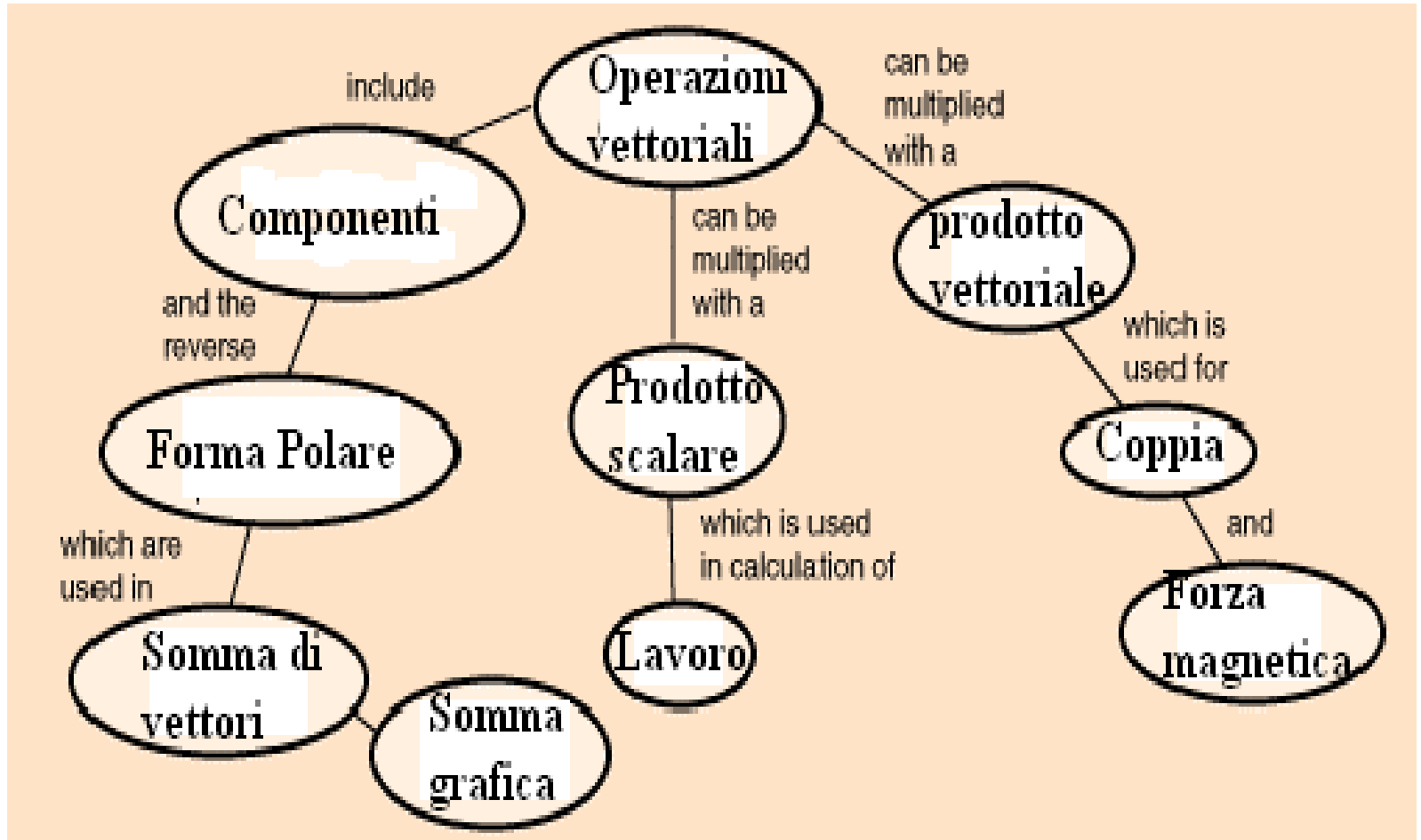
# Vettori

- Definizione: una grandezza vettoriale contiene informazioni sia sulla intensità o modulo della grandezza che sulla sua direzione e verso di azione.
- Es. Se sto viaggiando tra le città A e B e so che la loro distanza è di 100 km ho dato una informazione che non mi dice se sto procedendo da A verso B o da B verso A: occorre quindi precisare direzione e verso per dare la informazione completa. Per fare questo occorre assegnare anche un sistema di riferimento.
- Si presenta poi il problema di assegnare le regole per sommare, sottrarre, moltiplicare o dividere tra loro grandezze vettoriali: si tratta di comporre non solo moduli ma anche direzioni e versi.
- Ci sono anche diverse modalità di rappresentazione dei vettori, in funzione del sistema di riferimento che si assume per la determinazione dei moduli delle direzioni e dei versi.
- NB: Non è complicato come può sembrare a prima vista!

# Vettori



# Vettori



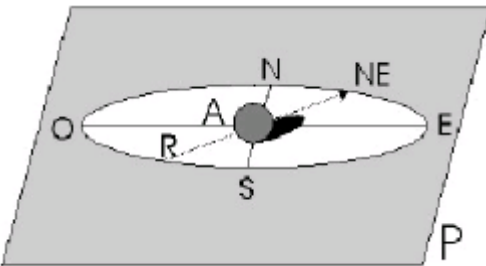
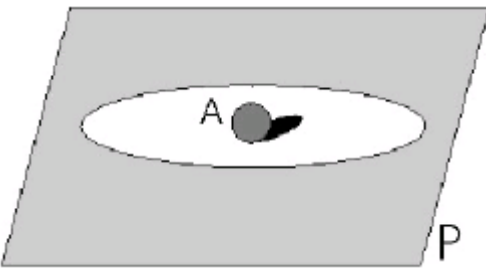
# I VETTORI

## Definizioni

**GRANDEZZE**

**Scalari:** sono completamente definite quando se ne conosce la sola misura (es. tempo, massa, temperatura, volume...)

**Vettoriali:** richiedono un maggior contenuto informativo (es. velocità, accelerazione, forza...)

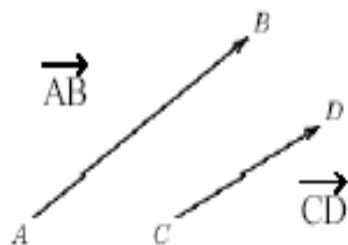


1. Distanza da A:  $d = 1 \text{ m}$
2. Direzione individuata dalla retta R
3. Verso: Nord – Est

**VETTORE SPOSTAMENTO**  
(modulo, direzione, verso)



# SEGMENTI ORIENTATI

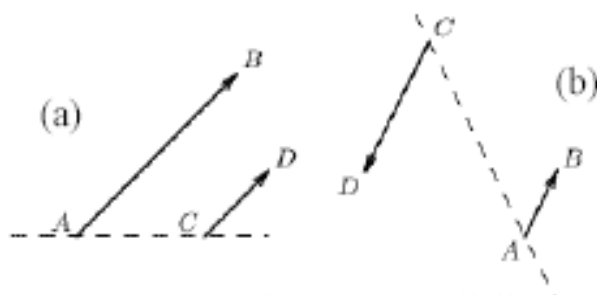


$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$$

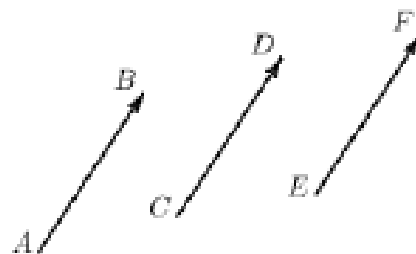
$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}|$$

← Si chiama modulo

Un vettore può essere rappresentato graficamente da un segmento orientato.



Segmenti orientati paralleli concordi (a) ed opposti (b).

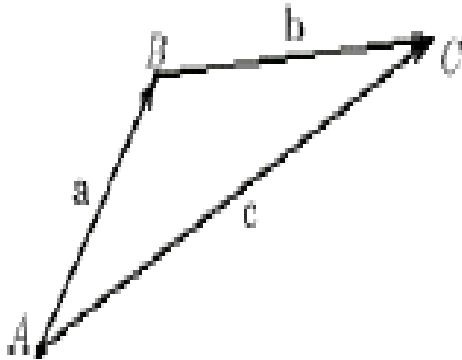


Segmenti orientati rappresentativi di uno stesso vettore.

**Definizione:** Un vettore nel piano o nello spazio è definito come l'insieme di tutti i segmenti orientati aventi la medesima direzione, verso e lunghezza (modulo).



# SOMMA DI VETTORI



**Definizione:** La somma di due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  è un vettore  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  la cui direzione e verso si ottengono nel modo seguente: si fissa il vettore  $\mathbf{a}$  e, a partire dal suo punto estremo, si traccia il vettore  $\mathbf{b}$ . Il vettore che unisce l'origine di  $\mathbf{a}$  con l'estremo di  $\mathbf{b}$  fornisce la somma  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

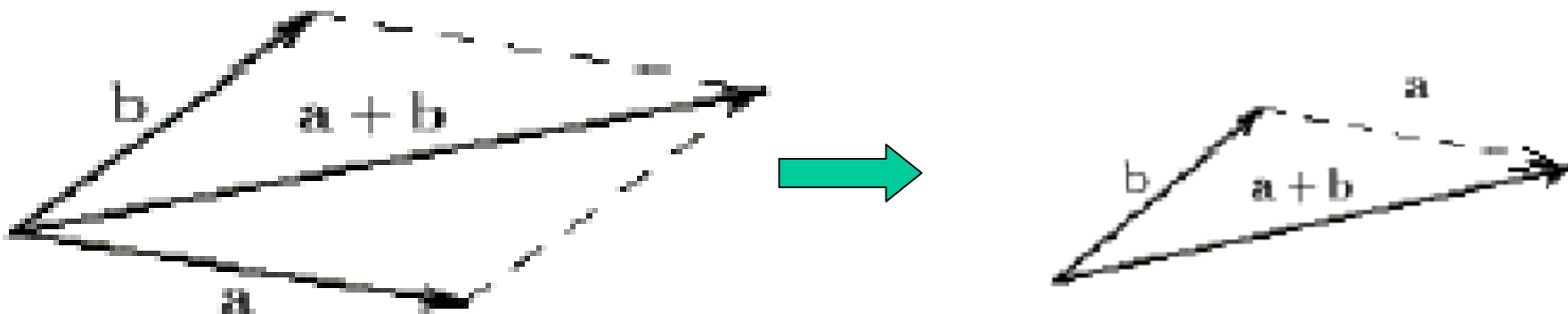
Proprietà commutativa:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

Proprietà associativa:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

Elemento neutro:  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

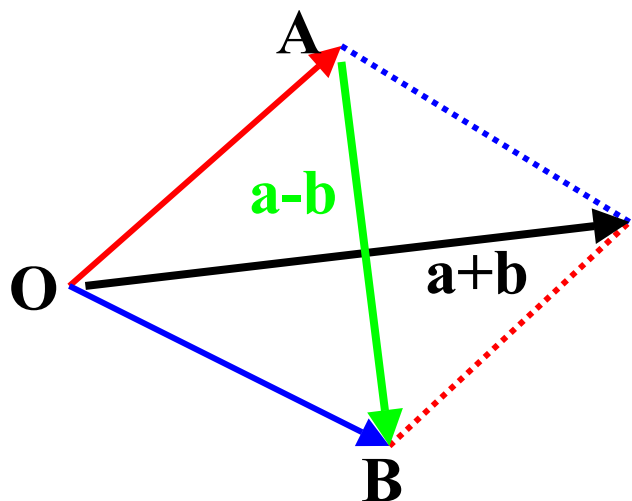
## Regola del parallelogramma

La somma di due vettori non collineari è data dal vettore rappresentato dalla diagonale del parallelogramma costruito usando i segmenti orientati rappresentativi dei due vettori e disposti in modo da avere l'origine in comune.



- **Definizione:** Il vettore opposto ad  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  è  $-\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$ .
- Per definizione, i moduli di  $\mathbf{a}$  e  $-\mathbf{a}$  sono posti uguali, la direzione si intende la medesima e i versi vanno considerati opposti.

**Definizione:** La differenza  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  di due vettori è la somma del vettore  $\mathbf{a}$  con l'opposto del vettore  $\mathbf{b}$ , ossia:  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$



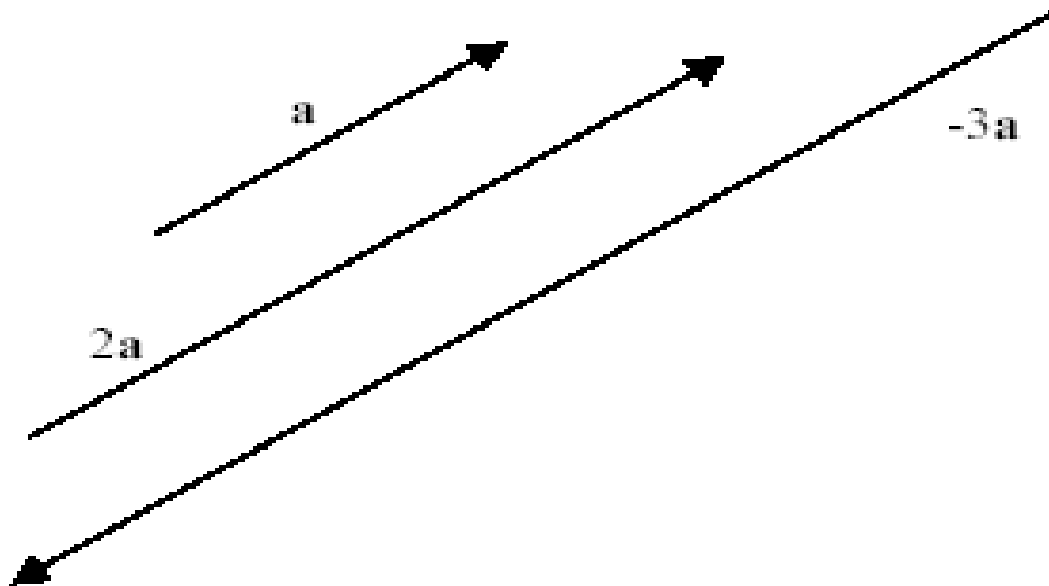
Va notato che se, sulla base di  $\mathbf{a}$  e di  $\mathbf{b}$  disposti con la medesima origine O, si costruisce un parallelogramma, allora la lunghezza della diagonale uscente da O esprime la lunghezza di  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  mentre la lunghezza dell'altra diagonale è pari alla lunghezza del vettore  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

## MOLTIPLICAZIONE SCALARE-VETTORE

- **Definizione:** La moltiplicazione  $\alpha \mathbf{a}$  (o  $\mathbf{a}\alpha$ ) di un vettore  $\mathbf{a}$  con il numero reale  $\alpha$  è un vettore  $\mathbf{b} = \mathbf{a}\alpha$ , collineare ad  $\mathbf{a}$ , di modulo  $|\alpha| \cdot |\mathbf{a}|$  e verso coincidente con quello di  $\mathbf{a}$  se  $\alpha > 0$ , opposto a quello di  $\mathbf{a}$  se  $\alpha < 0$ .
- Nel caso che sia  $\alpha = 0$  o  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , il vettore  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

### Proprietà:

1.  $\alpha(\beta \mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$
2.  $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$
3.  $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$



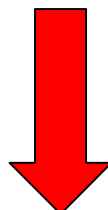
# COMPONENTI CARTESIANE DI UN VETTORE /1

- **Definizione:** Si dice **versore**, un vettore **u** tale che  $|\mathbf{u}| = 1$ . Dato un qualsiasi vettore **a**, è immediato costruire un versore **u** che abbia la medesima direzione di **a** e con verso concorde con **a**. Ponendo

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \vec{a}$$

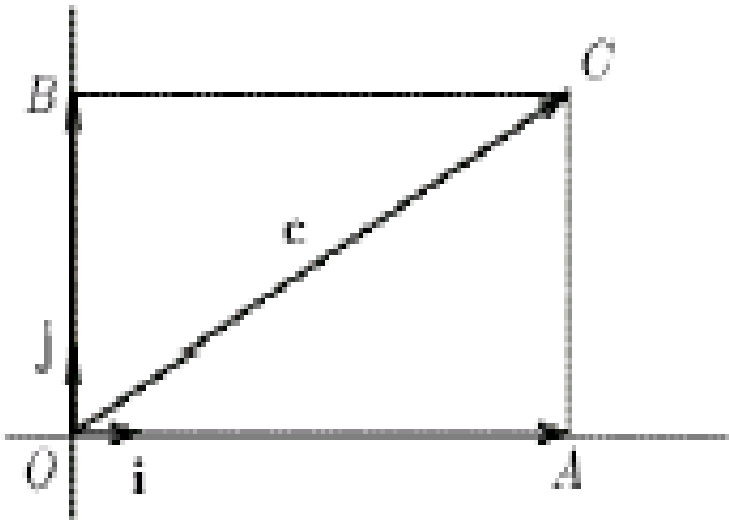
Un sistema cartesiano ortogonale si ritiene assegnato quando, fissati due assi ortogonali, su questi si stabiliscono un'origine, un verso positivo ed una unità di misura. In alternativa si possono scegliere due versori ortogonali **i** e **j**. E si ottiene la rappresentazione di  $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j}$   
Tramite le componenti secondo gli assi cartesiani individuati dai versori

**i e j**



Segue

# COMPONENTI CARTESIANE DI UN VETTORE /1



$(c_x, c_y) \longrightarrow$  componenti cartesiane di  $\mathbf{c}$

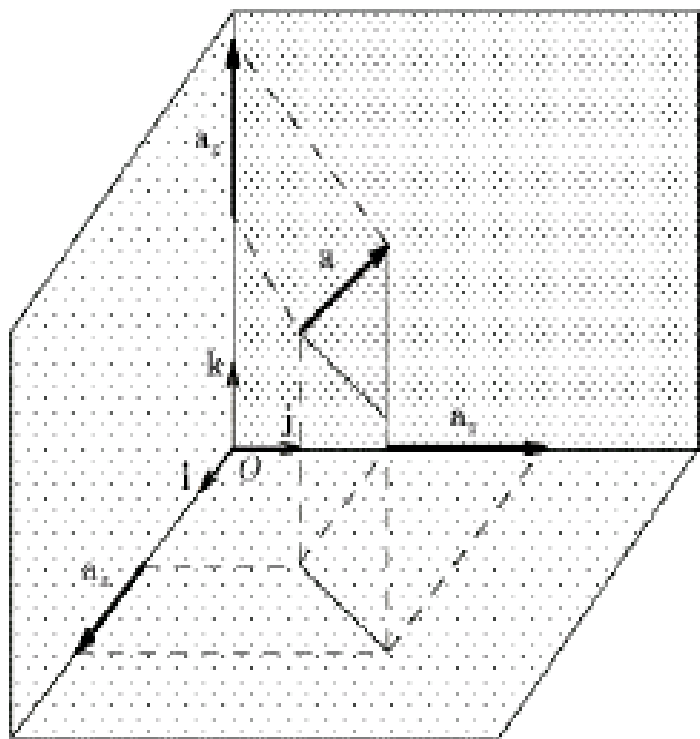
$\left. \begin{array}{l} c_x \mathbf{i} \\ c_y \mathbf{j} \end{array} \right\} \longrightarrow$  vettori componenti di  $\mathbf{c}$

**Proprietà:** Le componenti di un vettore qualsiasi  $\vec{OC}$  si ottengono dalla differenza delle corrispondenti coordinate dell'estremo C con quelle del punto iniziale O, ossia:

$$\vec{OC} = (x_c - x_o) \mathbf{i} + (y_c - y_o) \mathbf{j} \quad |\vec{OC}| = \sqrt{(x_c - x_o)^2 + (y_c - y_o)^2} = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$$

# COMPONENTI CARTESIANE DI UN VETTORE /2

Analogamente in tre dimensioni:  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$



Le operazioni finora introdotte possono essere scritte in una nuova forma:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}$$

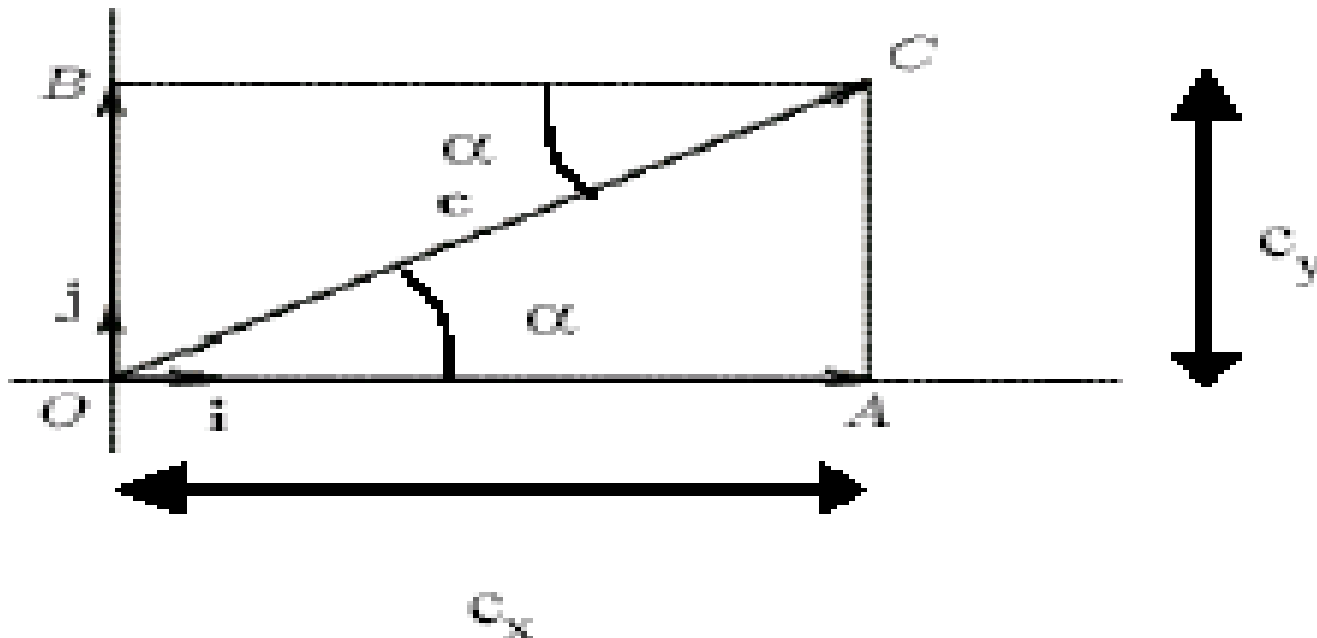
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x)\mathbf{i} + (a_y - b_y)\mathbf{j} + (a_z - b_z)\mathbf{k}$$

$$\alpha \mathbf{a} = \alpha a_x \mathbf{i} + \alpha a_y \mathbf{j} + \alpha a_z \mathbf{k}$$

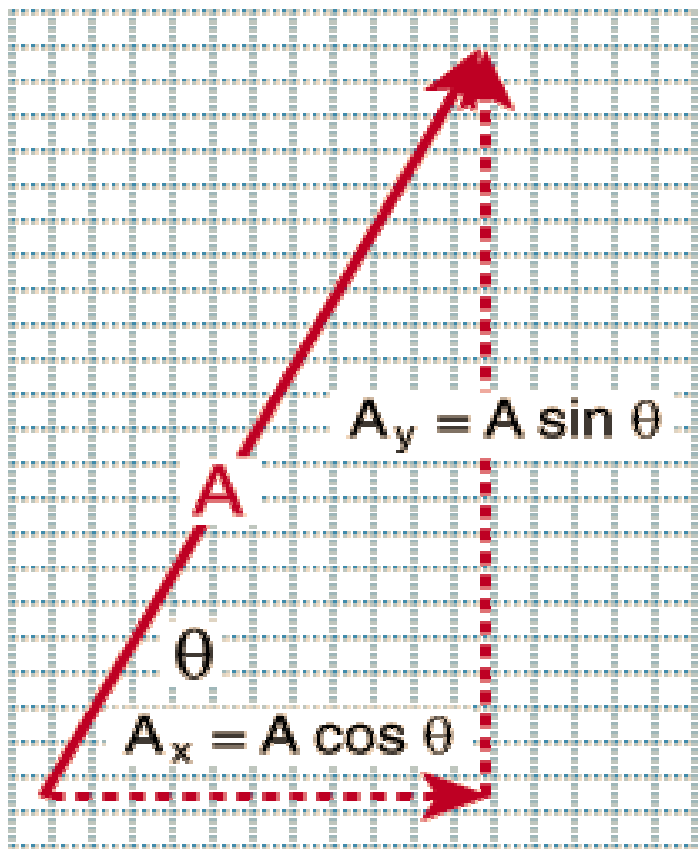
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Scegliendo un opportuno sistema di riferimento, risulta evidente che è sempre possibile esprimere le componenti cartesiane di un vettore  $\mathbf{c}$  come:

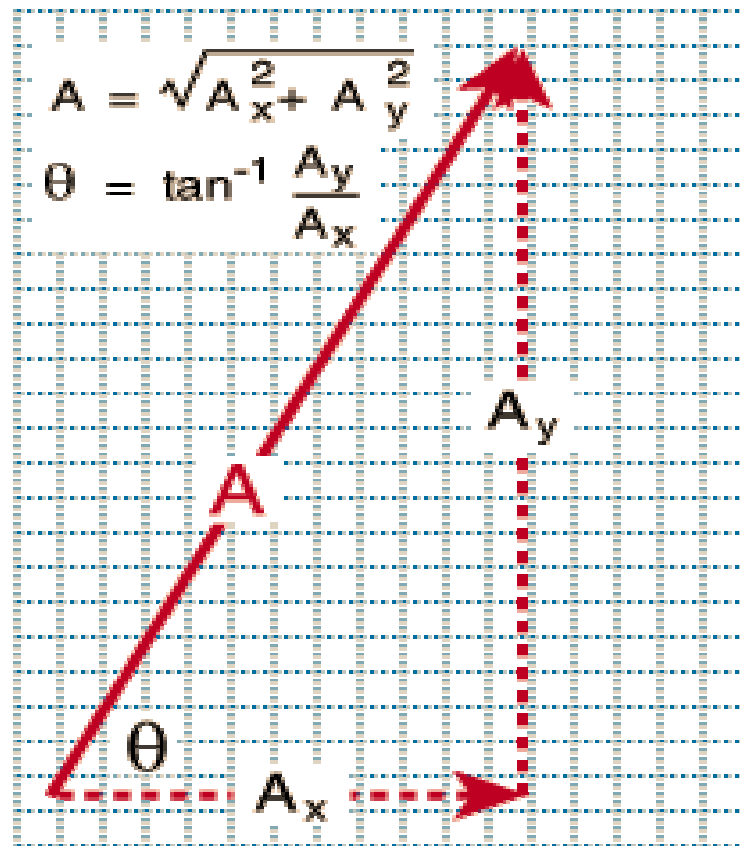
$$\left. \begin{aligned} c_x &= |\mathbf{c}| \cos\alpha \\ c_y &= |\mathbf{c}| \sin\alpha \end{aligned} \right\}$$



# Vettori: Forma Polare



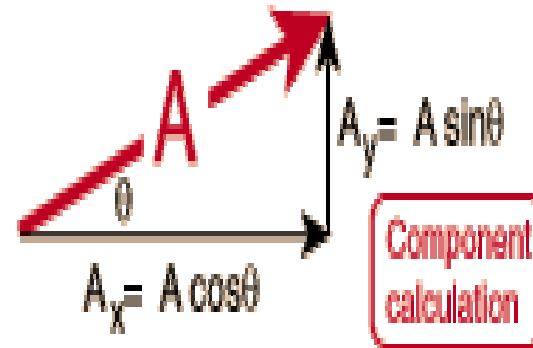
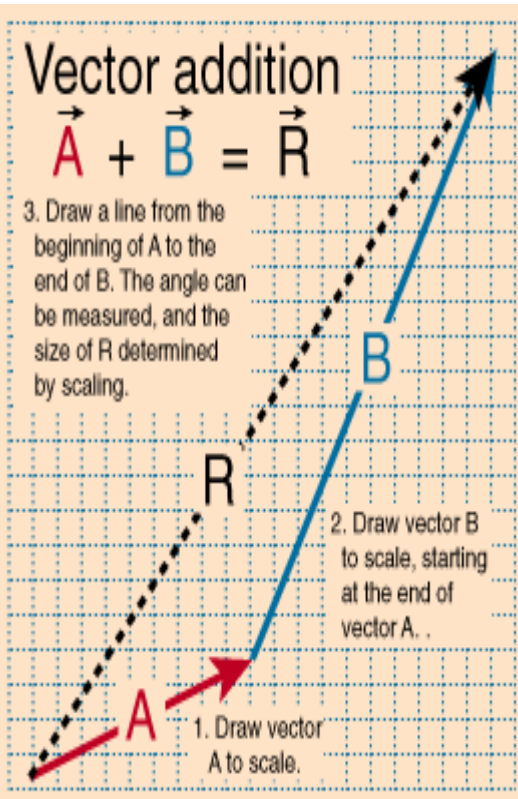
Tra  
sfor  
ma  
zio  
ne  
  
 $x, y \Leftrightarrow \rho, \theta$



La forma polare di un vettore in coordinate polari sarà data dal raggio vettore  $\rho$  e dall'anomalia  $\theta$  misurata a partire da un asse di origine delle anomalie ( angoli) contate positivamente in senso antiorario.



# Vettori: Somma $\rightarrow$ Riferimento Cartesiano

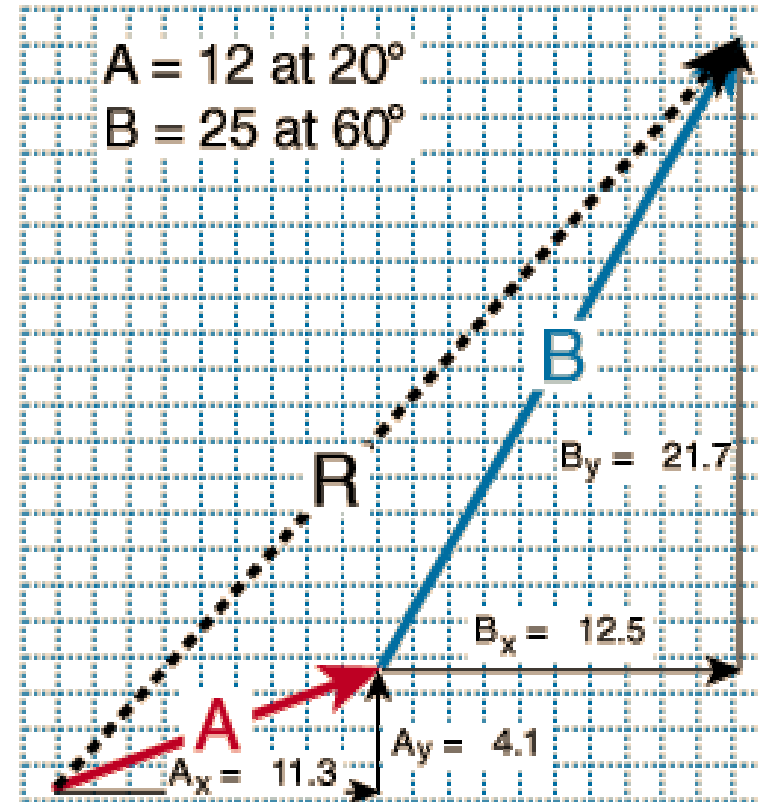


$$A_x = 12 \cos 20^\circ = 11.3$$

$$A_y = 12 \sin 20^\circ = 4.1$$

$$B_x = 25 \cos 60^\circ = 12.5$$

$$B_y = 25 \sin 60^\circ = 21.7$$



$$R_x = A_x + B_x = 11.3 + 12.5 = 23.8$$

$$R_y = A_y + B_y = 4.1 + 21.7 = 25.8$$



# Vettori: Somma → Riferimento Cartesiano

$$R_x = A_x + B_x = 11.3 + 12.5 = 23.8$$

$$R_y = A_y + B_y = 4.1 + 21.7 = 25.8$$

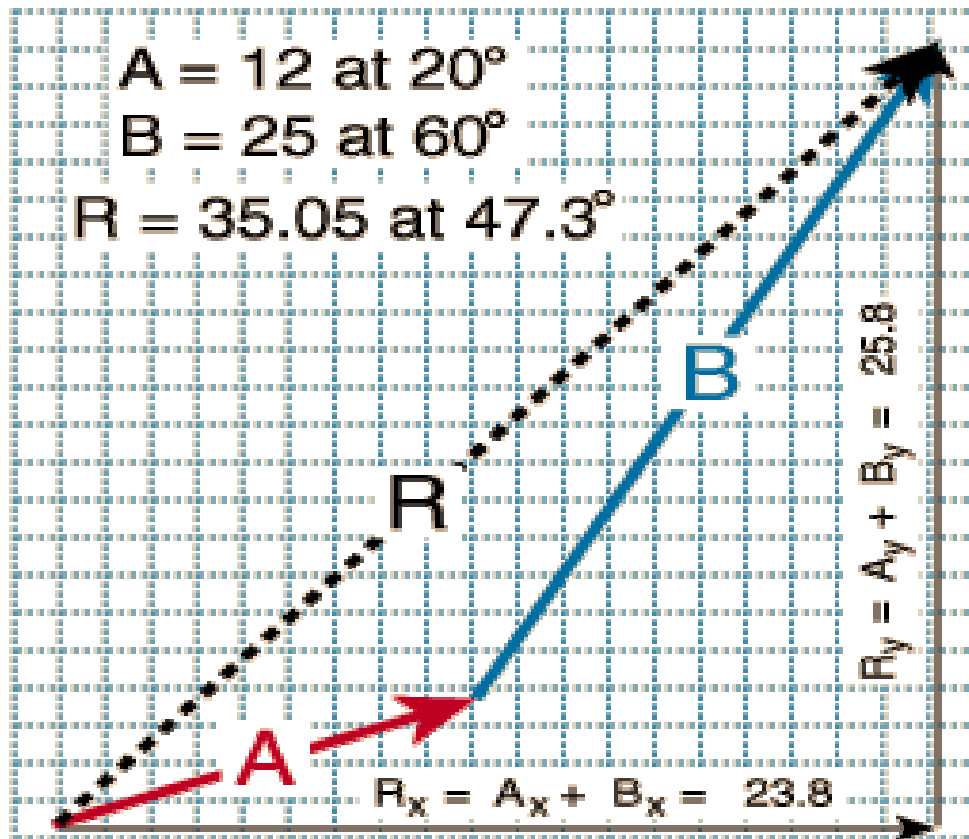
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{23.8^2 + 25.8^2} = 35.05$$

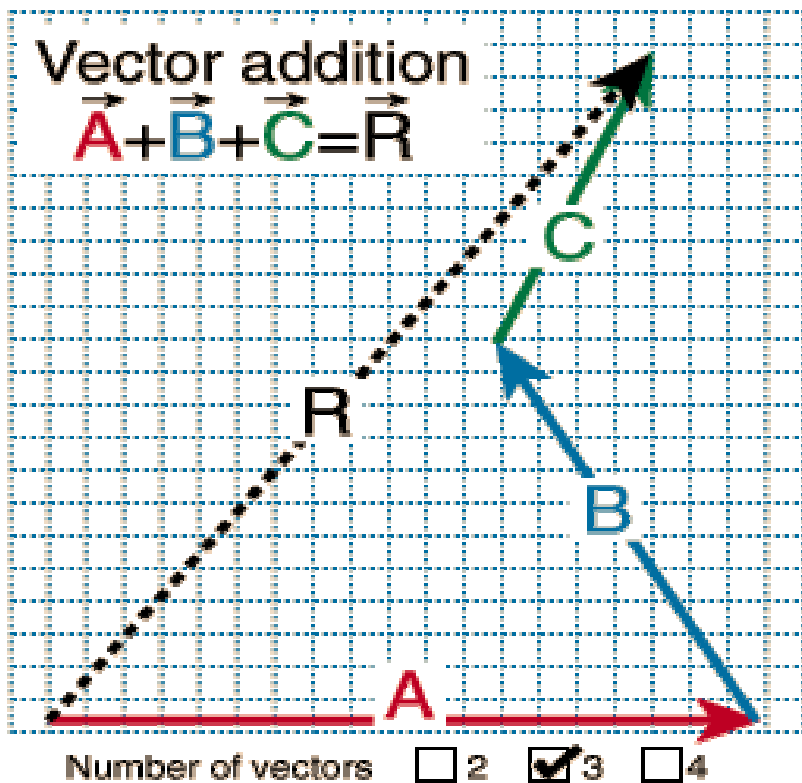
$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1} 1.084$$

$$\theta = 47.3^\circ$$

Polar form  
calculation

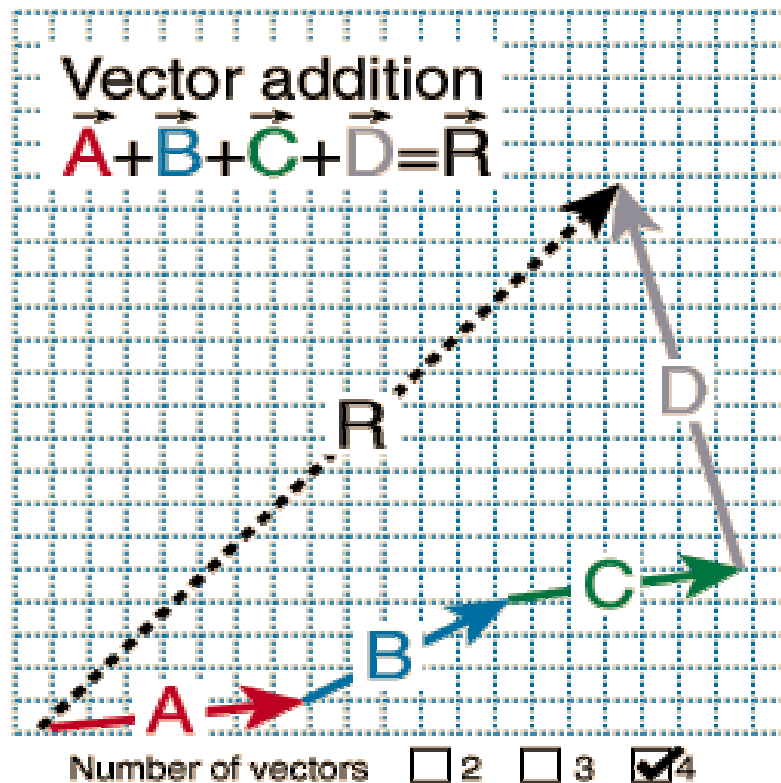


# Vettori: Somma di più vettori



$$A_y + B_y + C_y = R_y$$

$$A_x + B_x + C_x = R_x$$



$$A_y + B_y + C_y + D_y = R_y$$

$$A_x + B_x + C_x + D_x = R_x$$

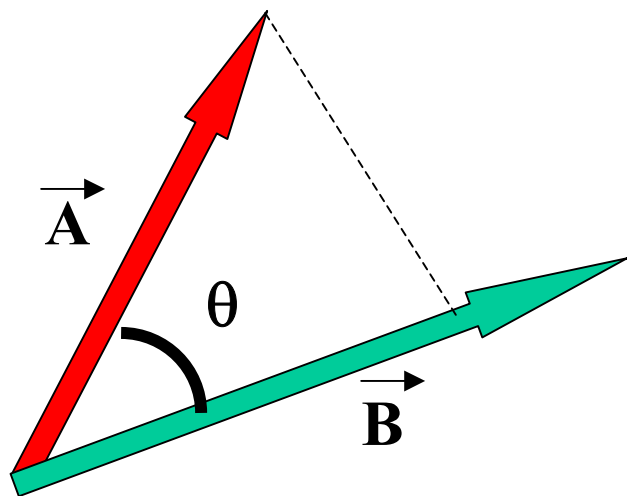


# Vettori: Prodotto scalare

Il prodotto scalare tra due vettori è uno scalare che è uguale al prodotto dei moduli dei vettori fattori moltiplicato il coseno dell'angolo tra essi compreso.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos \theta$$

Se  $\vec{A}$  è una forza e  $\vec{B}$



uno spostamento il prodotto scalare rappresenta il lavoro della forza in direzione dello spostamento.  $A \cos \theta$  rappresenta la componente della forza in direzione dello spostamento

**Caso particolare:  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .** In questo

caso:  **$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cos 90^\circ = \mathbf{0}$ .**

Vale anche il viceversa: se il prodotto scalare di due vettori è nullo, allora ci sono due possibilità: **uno dei due**

**vettori coincide con il vettore nullo oppure i due vettori sono  $\perp$**

**Proprietà:**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$\alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) =$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}$$



Rappresentazione cartesiana del prodotto scalare:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \left( A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \right) \bullet \left( B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \right)$$

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = \vec{j} \bullet \vec{j} = \vec{k} \bullet \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{i} \bullet \vec{k} = \vec{k} \bullet \vec{j} = 0$$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



## Vettori: Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori **a** e **b** è un vettore **c**. Si indica con la notazione:  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  e si legge 'a vettor b'. A questo punto occorre definire qual è il modulo del vettore **c** e qual è la sua direzione ed il verso.

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha$$

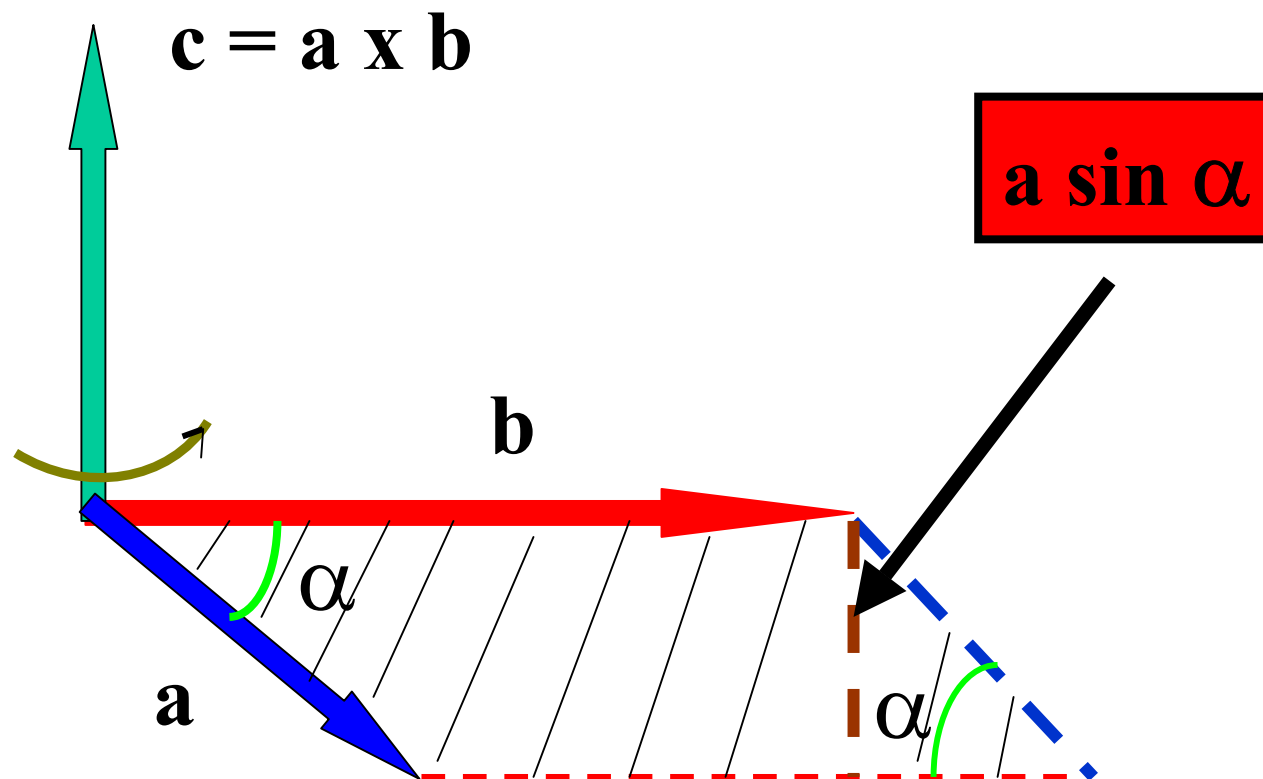
L'angolo  $\alpha$  tra i vettori **a** e **b** è l'angolo minore di  $180^\circ$  compreso tra i due vettori. Questa condizione è necessaria perché il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{c}' = \mathbf{b} \times \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{c} = -\mathbf{c}'$$

La direzione ed il verso di **c** sono individuate dalla direzione perpendicolare al piano individuato dai due vettori **a** e **b** mentre il verso è determinato dal verso in cui si vede avvenire la rotazione di **a** verso **b**. Vediamo di capire



Segue

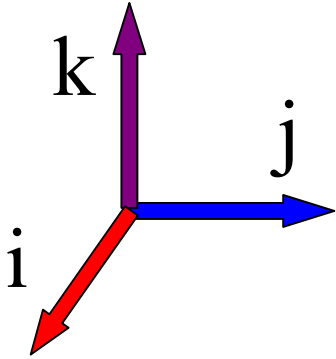


Area  $A_r$  del parallelogramma costruito sui vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$

$$A_r = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \sin \alpha$$



## Vettori: Prodotto vettoriale/cont



$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$



Memento:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{aligned} \right\} \downarrow$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$



# ESERCIZI

1. Disegnare il vettore di componenti  $(4, -1)$ .
2. Dati i due punti dello spazio  $A(3,5,-4)$  e  $B(4,-9,1)$ , trovare le tre componenti cartesiane del vettore da essi individuato.
3. Quanto vale la somma di due vettori di componenti  $(-2,1)$  e  $(5,2)$ ?
4. Tre vettori hanno moduli uguali e formano fra loro angoli di  $120^\circ$ . Rappresentarli su un foglio e trovarne la risultante.
5. Dimostrare che i vettori  $\mathbf{u}(6,-4,2)$ ,  $\mathbf{v}(2,-6,10)$  e  $\mathbf{w}(4,2,-8)$  formano un triangolo rettangolo.
6. Determinare il vettore forza  $\mathbf{F}$  risultante dal prodotto vettoriale  $q\mathbf{v}(2,-3,4) \times \mathbf{B}(1,4,-2)$ .  $q=2$ . (Forza  $\mathbf{F}$  su un elettrone di carica  $q$  e velocità  $\mathbf{v}$  in un campo magnetico  $\mathbf{B}$ )

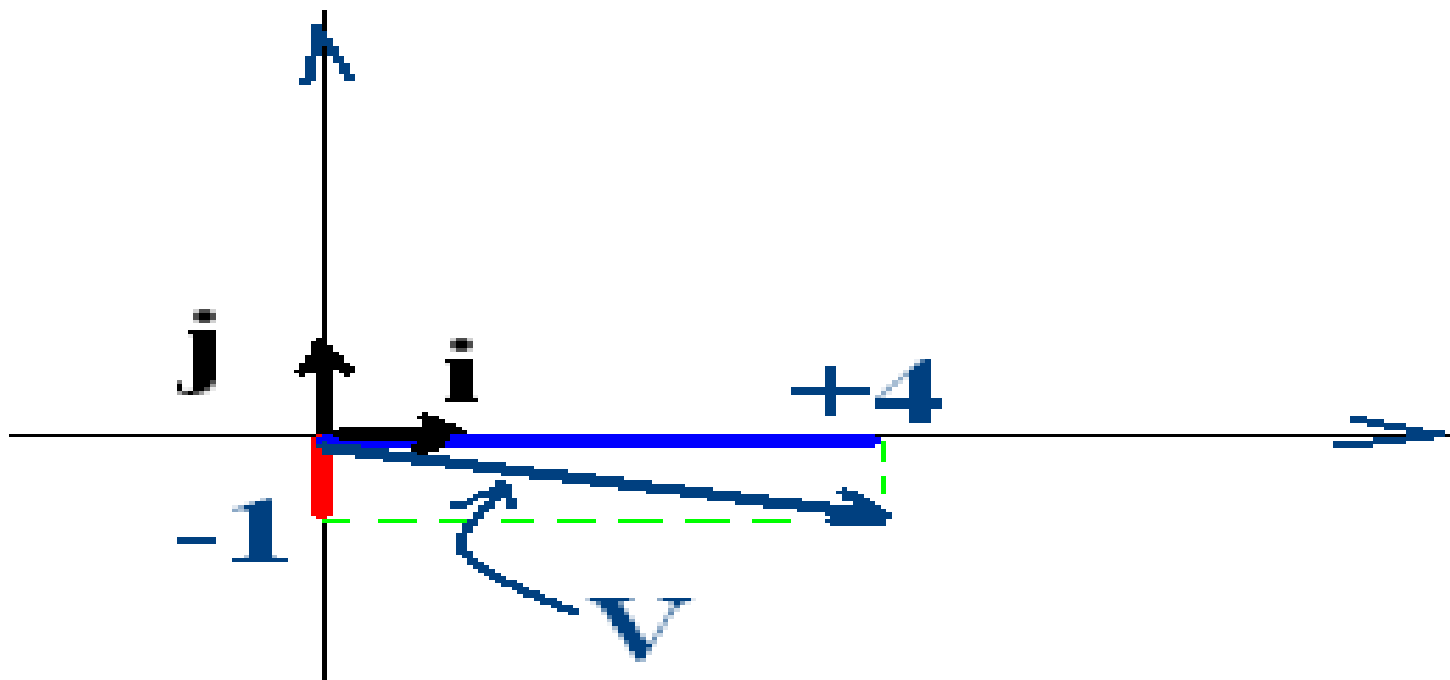
# ESERCIZI

## Soluzione

1. Disegnare il vettore di componenti (4, -1).

Il vettore  $\mathbf{V}$  ha componenti  $V_x = +4$  e  $V_y = -1$  quindi:

$$\mathbf{V} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$$





## Esercizi

2. Dati i due punti dello spazio  $A(3,5,-4)$  e  $B(4,-9,1)$ , trovare le tre componenti cartesiane del vettore da essi individuato.

Osserviamo che:

$$\left. \begin{array}{ll} x_A = 3 & x_B = 4 \\ y_A = 5 & y_B = -9 \\ z_A = -4 & z_B = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Quindi le componenti} \\ \text{cartesiane del vettore} \\ \vec{AB} \end{array}$$

Saranno date da:

$$\left. \begin{array}{l} x_{AB} = x_B - x_A = 4 - 3 = +1 \\ y_{AB} = y_B - y_A = -9 - 5 = -13 \\ z_{AB} = z_B - z_A = 1 - (-4) = +5 \end{array} \right\}$$

$$\vec{AB} = \mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

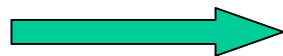
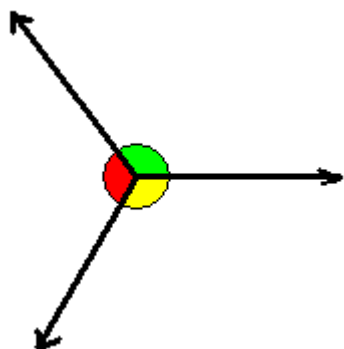


## Esercizi

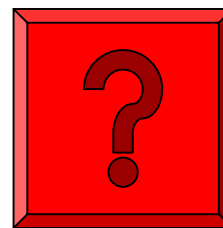
3. Quanto vale la somma di due vettori di componenti  $(-2,1)$  e  $(5,2)$ ?

I due vettori sono :  $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$  e  $\mathbf{v}_2 = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$  la loro somma  $\mathbf{S}$  è:  $\mathbf{S} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (-2+5)\mathbf{i} + (1+2)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

4. Tre vettori hanno moduli uguali e formano fra loro angoli di  $120^\circ$ . Rappresentarli su un foglio e trovarne la risultante.



**Risultante**





# Esercizi

5. Dimostrare che i vettori  $\mathbf{u}(6,-4,2)$ ,  $\mathbf{v}(2,-6,10)$  e  $\mathbf{w}(4,2,-8)$  formano un triangolo rettangolo.

➤ Prima di tutto vediamo se i tre vettori formano un triangolo. Usiamo il prodotto scalare tra i vettori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  per determinare gli angoli tra essi.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \left( u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \right) \bullet \left( v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \right)$$

$$\vec{u} \bullet \vec{w} = \left( u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \right) \bullet \left( w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k} \right)$$

$$\vec{w} \bullet \vec{v} = \left( w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k} \right) \bullet \left( v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \right)$$



$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet \vec{v} &= (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z) = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha_{uv} = \\ &= 6 \times 2 + (-4) \times (-6) + 2 \times 10 = 12 + 24 + 20 = 56\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet \vec{w} &= (u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z) = |\vec{u}| |\vec{w}| \cos \alpha_{uw} = \\ &= 6 \times 4 + (-4) \times 2 + 2 \times (-8) = 24 - 8 - 16 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \bullet \vec{w} &= (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z) = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \alpha_{vw} = \\ &= 2 \times 4 + (-6) \times 2 + 10 \times (-8) = 8 - 12 - 80 = -84\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\cos \alpha_{uv} &= \frac{(u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \\ &= \frac{56}{\sqrt{36 + 16 + 4} \sqrt{4 + 36 + 100}} = \frac{56}{\sqrt{56} \sqrt{140}} = \frac{56}{88.5438}\end{aligned}$$

$$\cos \alpha_{uv} = 0.6325 \Rightarrow \alpha_{uv} \approx 50.8^\circ$$

Procedendo in modo analogo per gli altri angoli si trova che:

$$\alpha_{uv} \approx 50.8^\circ$$

$$\alpha_{uw} \approx 90^\circ \quad \longrightarrow \quad \alpha_{uv} + \alpha_{uw} + \alpha_{vw} = 180^\circ$$

$\alpha_{vw} \approx 39.2^\circ$  Inoltre **u** e **w** sono tra loro perpendicolari  
Essendo nullo il prodotto scalare dei due vettori