



**Università Federico II di Napoli**

**Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e  
Naturali**

**Corso di laurea in Informatica**

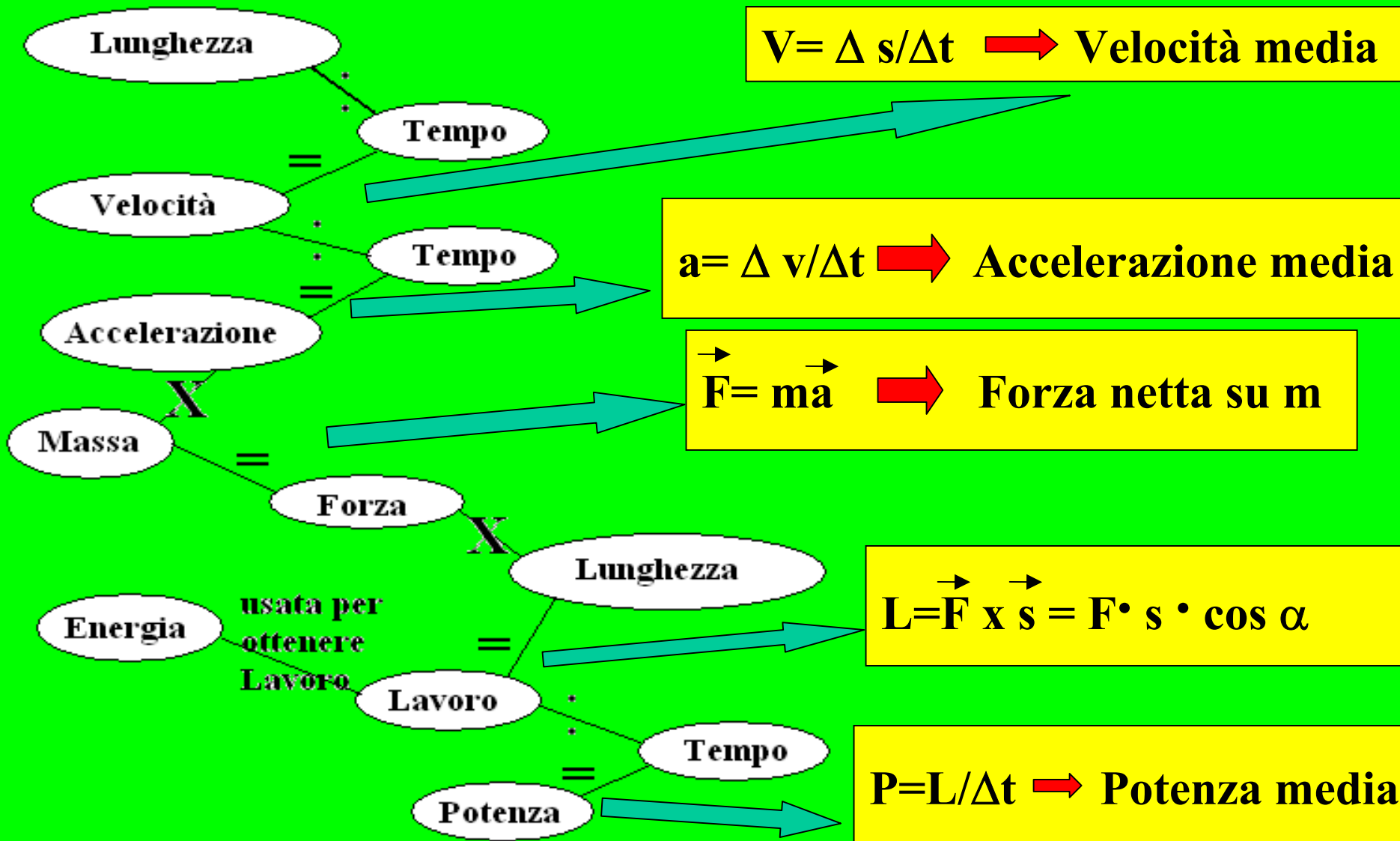
**Fisica Sperimentale I  
Gruppo 1**

Docente Prof. Leopoldo Milano

Anno accademico 2003-2004

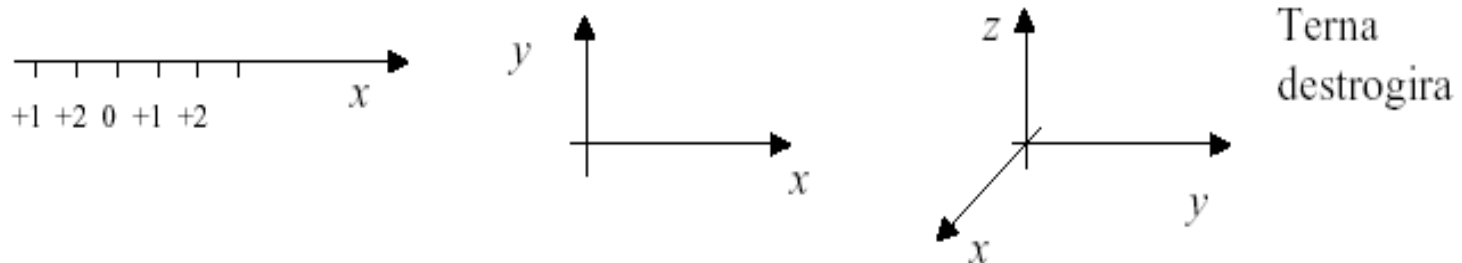


# Relazioni tra grandezze fisiche in Meccanica



# Cinematica del punto materiale

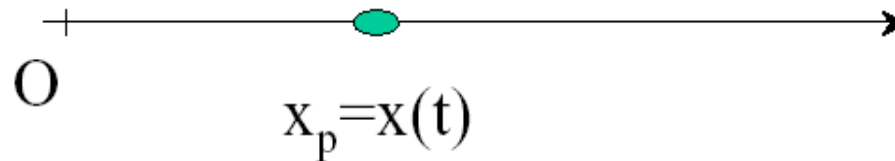
- Cinematica: studio del moto. Nessun interesse alle cause
- Occorre definire un sistema di riferimento:
  - Le grandezze posizione, velocità e accelerazione verranno sempre riferite al sistema di riferimento scelto
  - La scelta più semplice è quella del sistema cartesiano:



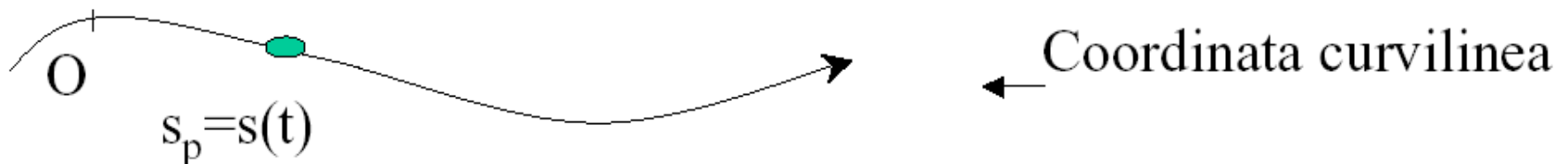
- Traiettoria:
  - successione delle posizioni assunte dal punto materiale nel sistema di riferimento

# Moto Unidimensionale

- Moto unidimensionale:
  - è sufficiente una sola coordinata per definire la traiettoria



E non è detto che sia un moto rettilineo:

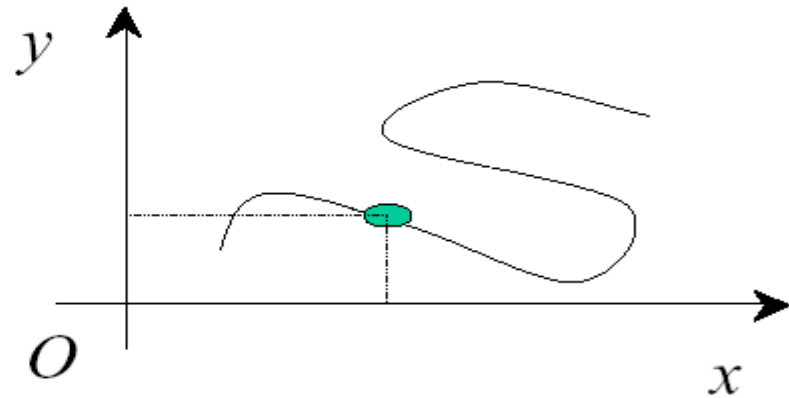


# Moti a più dimensioni

- Moto bidimensionale:

- necessita di **due** coordinate per definire la traiettoria  $\Rightarrow$  moto piano

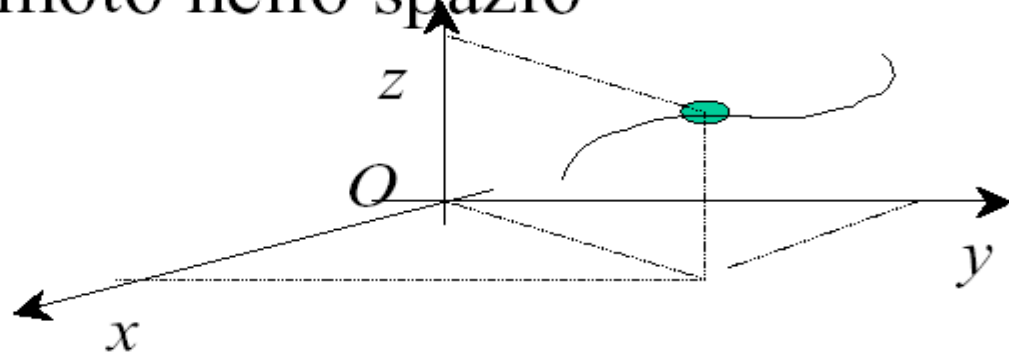
$$\begin{cases} x_p = x(t) \\ y_p = y(t) \end{cases}$$



- Moto tridimensionale:

- necessita di **tre** coordinate per definire la traiettoria  $\Rightarrow$  moto nello spazio

$$\begin{cases} x_p = x(t) \\ y_p = y(t) \\ z_p = z(t) \end{cases}$$

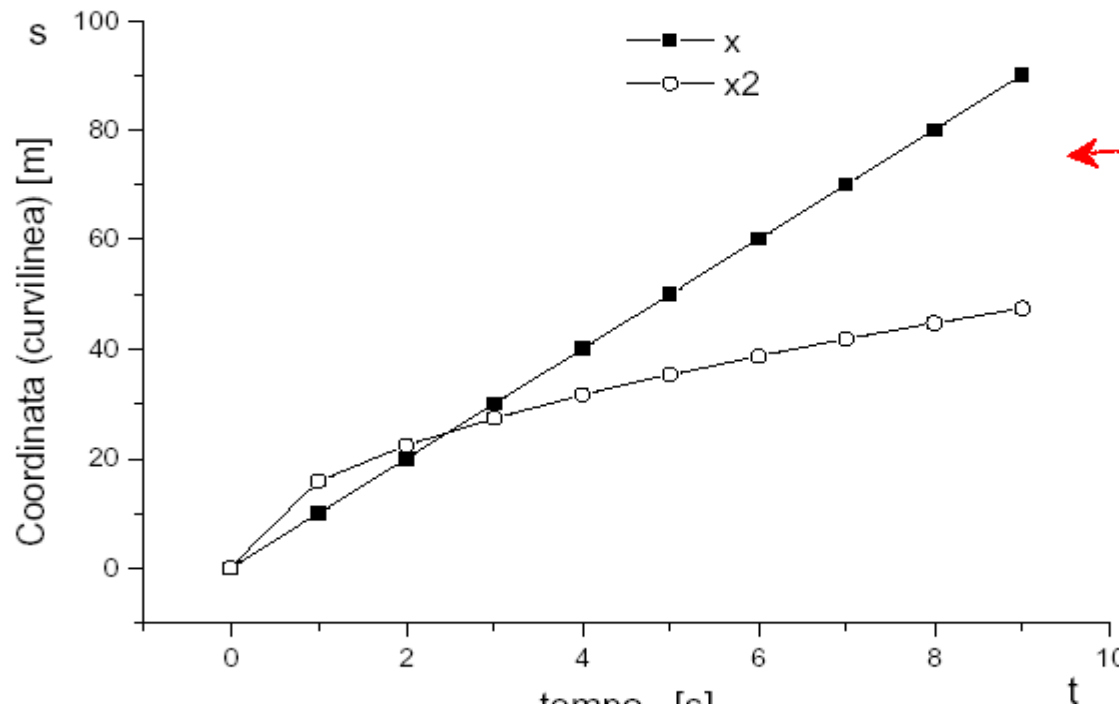


# Moto unidimensionale

- Tabella oraria:

Tempo in s.	Ascissa (curvilinea) In m.
0	0
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	60
7	70
8	80
9	90

- Diagramma orario:



Esempio di moto rettilineo uniforme (lo vedremo fra poco)

# Nozioni Matematiche Necessarie

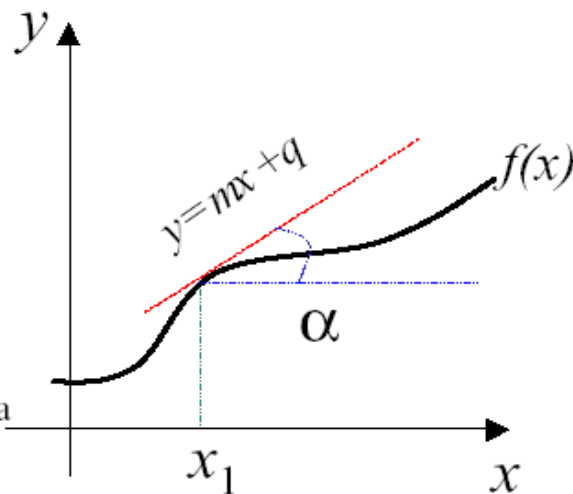
- Derivata di una funzione  $f(x)$ :

$$\frac{d}{dx} f(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Significato geometrico della derivata:

$$m = \tan \alpha = \left[ \frac{df(x)}{dx} \right]_{x=x_1}$$

Cioè, la derivata di  $f(x)$ , calcolata nel punto  $x_1$  rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva  $f(x)$  nel punto  $x_1$  stesso



## Alcune regole utili:

$$a = \text{cost} \Rightarrow \frac{d}{dx} a = 0$$

$$\frac{d}{dx} [a \cdot f(x)] = a \frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \cos(x) = -\text{sen}(x)$$

$$f(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \text{sen}(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

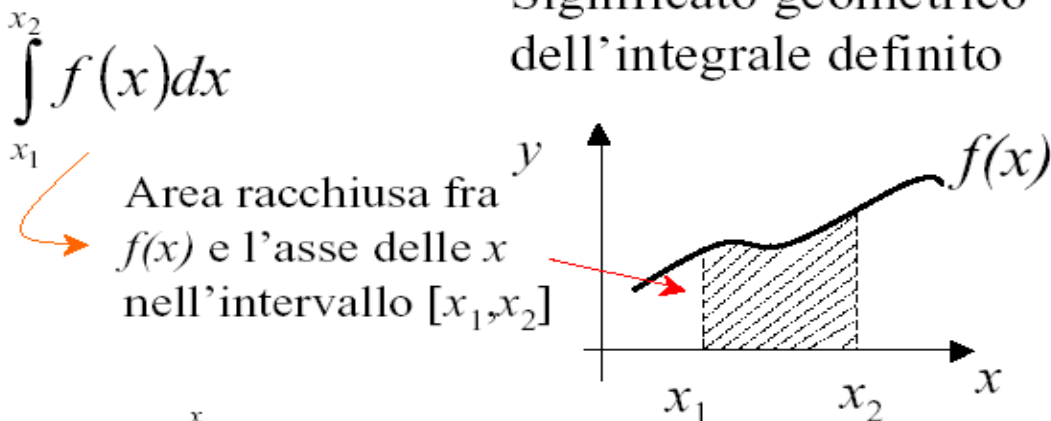
$$f(x) = e^x \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

# Nozioni Matematiche Necessarie ...2

- Integrale

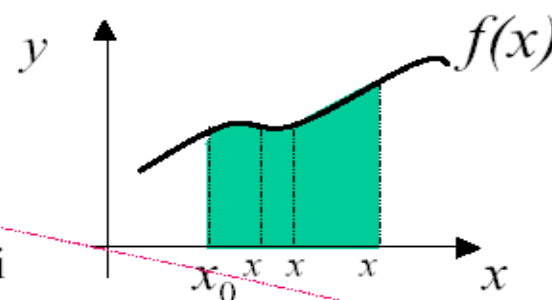
- integrale definito:  $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$

Significato geometrico dell'integrale definito



- Funzione integrale:  $F(x) = \int_{x_0}^x f(x') dx'$

- Si dimostra che:  $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$



cioè, le operazioni di derivazione e di integrazione sono l'una l' "inversa" dell'altra

Data una funzione  $f(x)$  si definisce primitiva della  $f(x)$  ogni funzione  $P(x)$  tale che:

$$\frac{dP(x)}{dx} = f(x) \quad \leftarrow \text{Quindi la funzione integrale è una primitiva della } f(x).$$

## Nozioni Matematiche Necessarie ...3

- Se ho trovato una primitiva di  $f(x)$  ne ho trovate infinite.
- Infatti, costruiamo la funzione  $F_1(x)$  come  $F_1(x) = F(x) + c_1$ , dove  $c_1$  è una costante arbitraria, per le proprietà della derivata risulta:

$$\frac{dF_1(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} + \frac{dc_1}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} + 0 = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

- Quindi possiamo affermare che le primitive di  $f(x)$  sono definite a meno di una costante arbitraria
- L'insieme di queste primitive è detto integrale indefinito e si indica con:

$$\int f(x)dx$$

- Per calcolare l'integrale definito di  $f(x)$  bisogna prima trovare una primitiva (cioè calcolarle l'integrale indefinito) e poi si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = [F(b) - F(a)]$$

- Alcune regole utili:

$$\int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int a f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

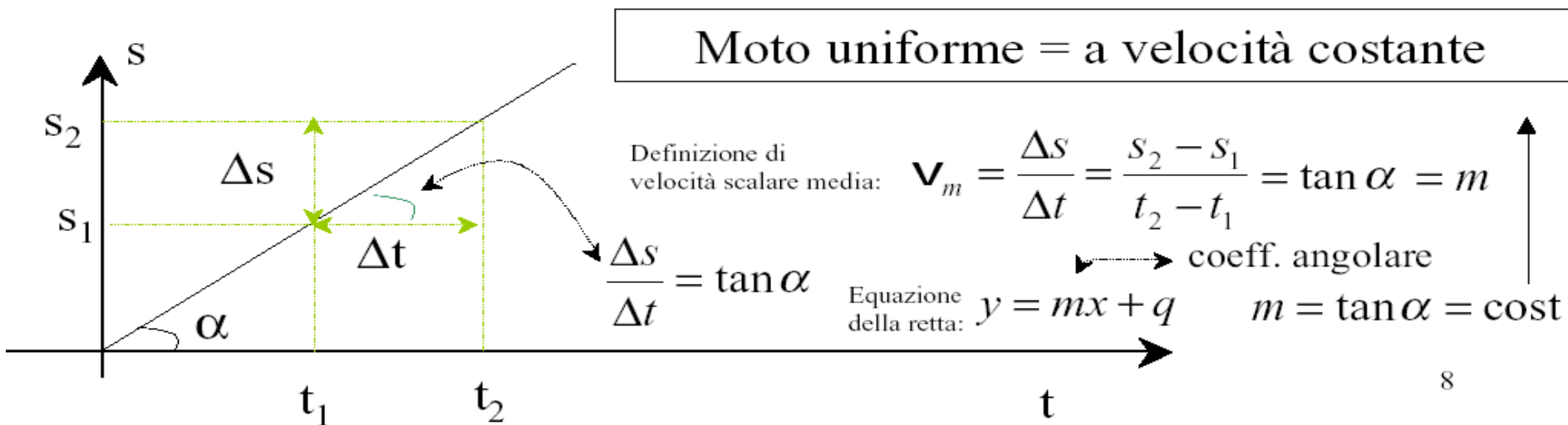
$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$

# Velocità scalare media

- Si definisce velocità media (scalare) nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  il rapporto fra lo spazio  $\Delta s$  percorso in un intervallo  $\Delta t$  e l'intervallo di tempo  $\Delta t$  stesso

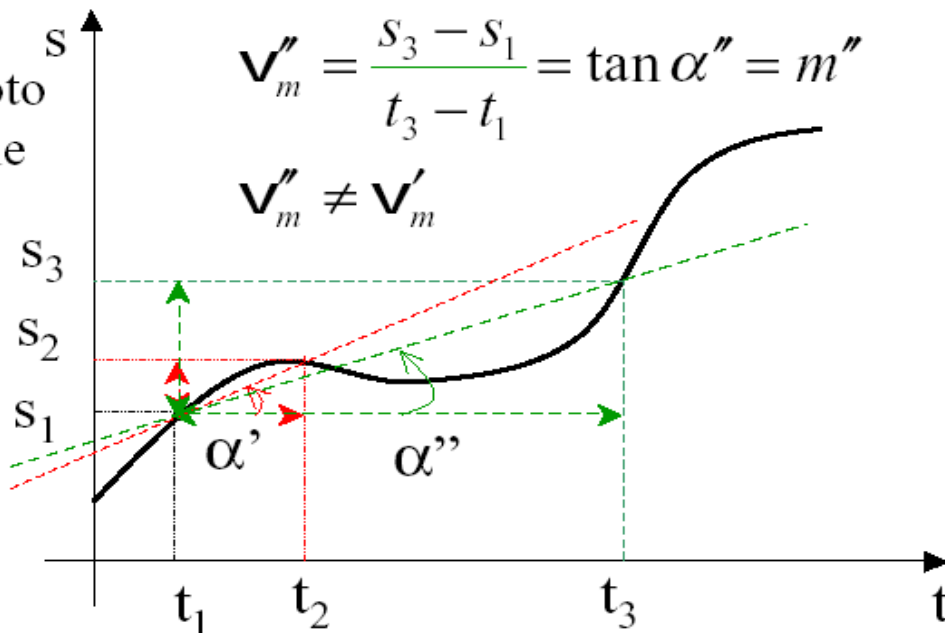
$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \longrightarrow [l \cdot t^{-1}] \longrightarrow \begin{cases} \text{m/s} & \text{S.I.} \\ \text{cm/s} & \text{CGS} \\ \text{km/h} & \end{cases}$$



# Velocità scalare istantanea

Diagramma orario di un moto unidimensionale generico

$$\mathbf{v}'_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \tan \alpha' = m'$$



La velocità media, nel punto  $(t_1, s_1)$ , non è univocamente definita, poiché dipende dalla scelta dell'istante finale  $(t_f, s_f)$

Si può definire univocamente la velocità in  $(t_1, s_1)$  ed in ogni altro punto ricorrendo alla

**Velocità istantanea:** 
$$\mathbf{v}_1 = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mathbf{v}_m) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{ds}{dt}$$

$\mathbf{v}$  può essere anche molto diverso da  $\mathbf{v}_m$ , ma nel moto unidimensionale uniforme è  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_m$

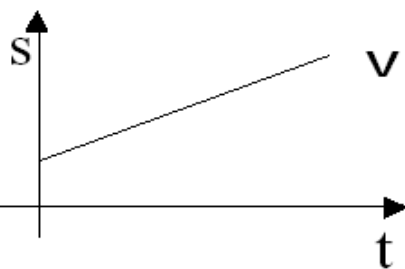


## Esempio di velocità media e velocità istantanea

- Consideriamo un moto unidimensionale con equazione

oraria:  $s(t) = \frac{1}{2}t + 1$

La velocità istantanea è costante (la pendenza della retta è sempre la stessa) ed è uguale a quella media



$$\mathbf{v} = \frac{d s(t)}{d t} = \frac{d \left( \frac{1}{2}t + 1 \right)}{d t} = \frac{1}{2} \frac{d t}{d t} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{v}_m = \frac{s(t=2) - s(t=0)}{2 - 0} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Cambiamo moto:  $s(t) = \frac{1}{5}t^2 + \frac{1}{2}t + 1$

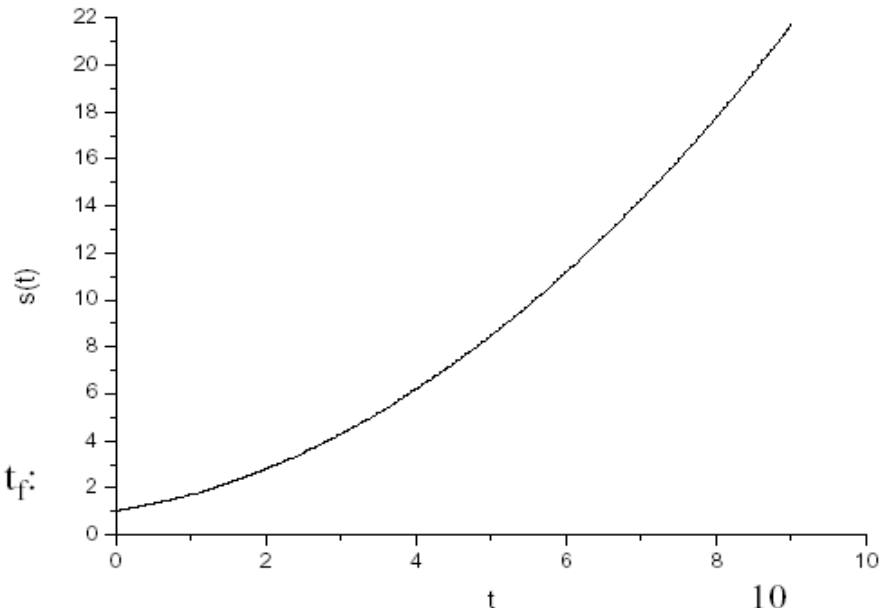
$$\mathbf{v}(t) = \frac{d s(t)}{d t} = \frac{2}{5}t + \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} t_i = 0 \\ t_f = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_m = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{\left( \frac{1}{5} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \right) - 1}{1 - 0} = 0.5$$

$$\begin{cases} t_i = 0 \\ t_f = 2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_m = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{\left( \frac{1}{5} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \right) - 1}{2 - 0} = 1.8$$

La velocità istantanea in  $t_i$  non dipende dalla scelta di  $t_f$ :

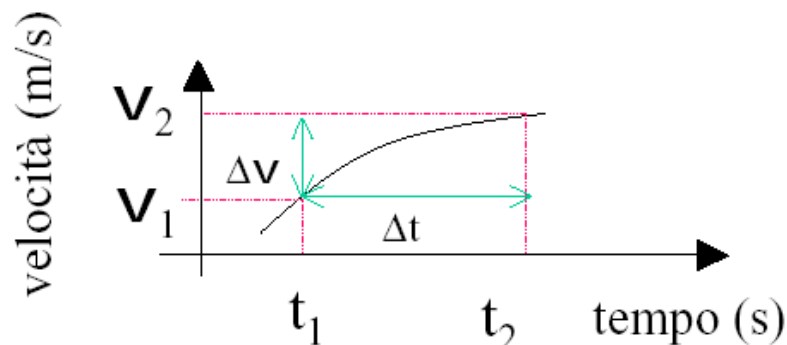
$$\mathbf{v}(t_i = 0) = \left. \frac{d s(t)}{d t} \right|_{t=0} = \frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$





# Accelerazione scalare

- Si definisce accelerazione media il rapporto:



$$a_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$$[a_m] = \frac{[\mathbf{v}]}{[t]} = \frac{[l \cdot t^{-1}]}{[t]} = [l \cdot t^{-2}] \Rightarrow m/s^2$$

Consideriamo il moto:

t (s)	v(m/s)
0	0
1	0.5
2	1
3	1.5

$$a_m(t=1) = \frac{0.5-0}{1-0} = 0.5m \cdot s^{-2}$$

$$a_m(t=2) = \frac{1-0}{2-0} = 0.5m \cdot s^{-2}$$

$$a_m(t=3) = \frac{1.5-0}{3-0} = 0.5m \cdot s^{-2}$$

t (s)	v(m/s)
0	0
1	0.5
2	2
3	4.5

$$a_m(t=1) = \frac{0.5-0}{1-0} = 0.5m \cdot s^{-2}$$

$$a_m(t=2) = \frac{2-0}{2-0} = 1m \cdot s^{-2}$$

$$a_m(t=3) = \frac{4.5-0}{3-0} = 1.5m \cdot s^{-2}$$

In questo caso l'accelerazione media dipende dall'istante finale

# Accelerazione Scalare Istantanea

- Si definisce accelerazione istantanea il limite:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (a_m) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$[a] = [l \cdot t^{-2}] \Rightarrow \frac{m}{s^2}$$

Riprendiamo gli esempi precedenti:

$$s(t) = \frac{1}{2}t + 1 \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$$

$$s(t) = \frac{1}{5}t^2 + \frac{1}{2}t + 1 \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{2}{5}t + \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{2}{5}$$

I moti possono essere distinti in base al valore e alle caratteristiche della accelerazione

# Moto (unidimensionale) uniforme

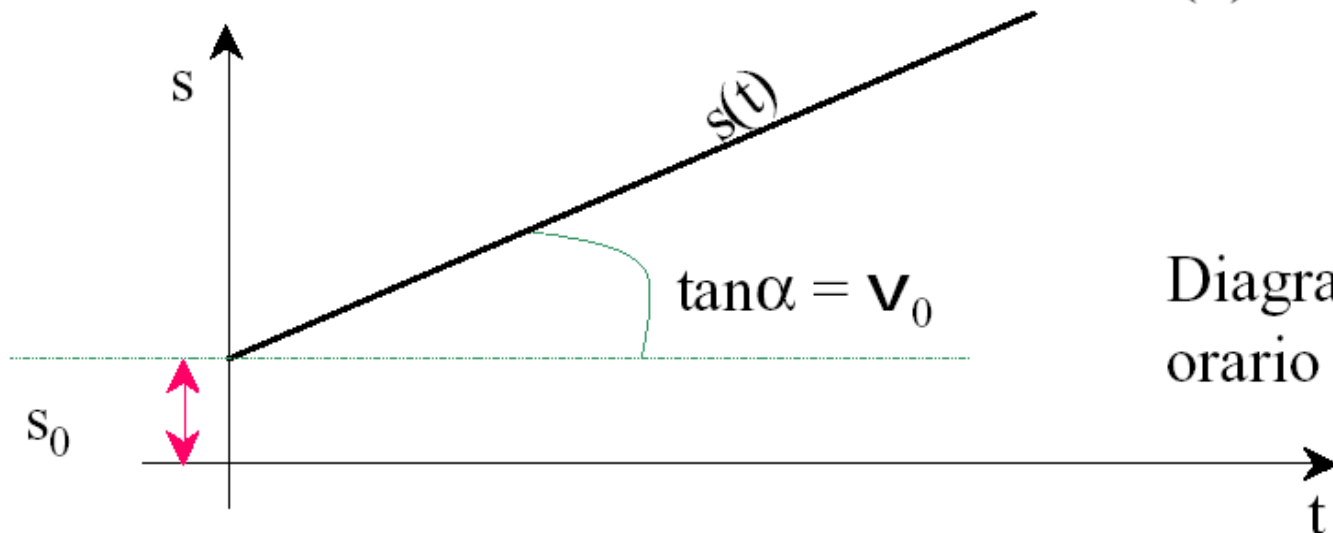
- Velocità costante  $\mathbf{v} = \text{cost} \Rightarrow a = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \Rightarrow a = 0$

– Per trovare l'equazione del moto possiamo integrare:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{ds}{dt} \Rightarrow s(t) = \int_{t=t_0}^t \mathbf{v} dt' + s_0 \quad \text{dove} \quad s_0 = s(t=t_0)$$

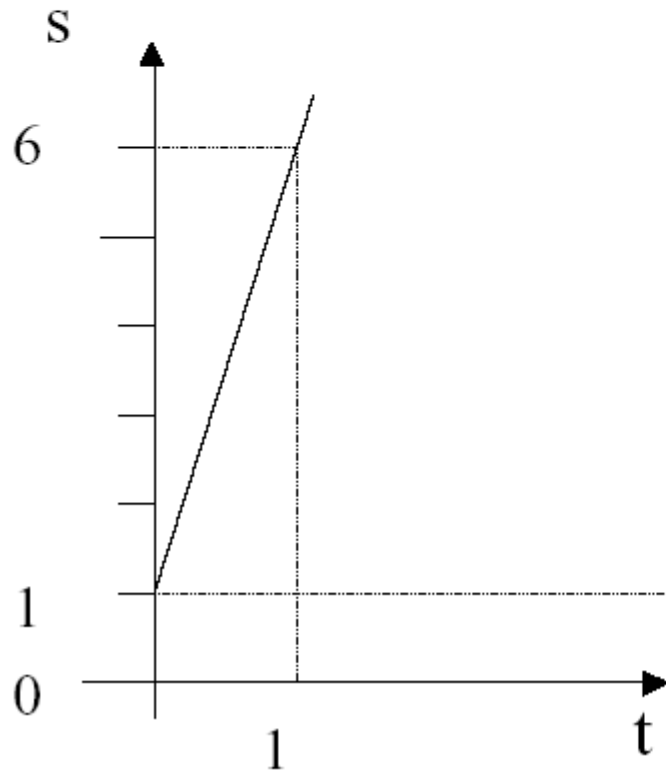
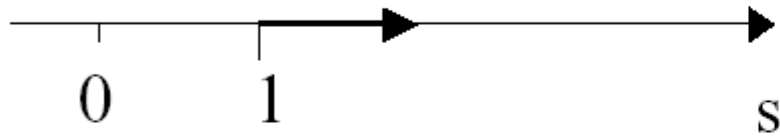
$$\mathbf{v} = \text{cost} = \mathbf{v}_0 \Rightarrow s(t) = \int_{t=0}^t \mathbf{v} dt' + s_0 = \int_0^t \mathbf{v}_0 dt' + s_0 = \mathbf{v}_0 \cdot \int_0^t dt' + s_0 = \mathbf{v}_0 \cdot [t']_0^t + s_0 = \mathbf{v}_0 t + s_0$$

$$s(t) = \mathbf{v}_0 \cdot t + s_0$$



# Esempio di moto uniforme

$$\mathbf{v}_0 = 5 \text{ m/s} \Rightarrow s(t) = 5 \cdot t + 1$$
$$s_0 = 1 \text{ m}$$



t	s
0	1
1	6
2	11
3	16

# Moto (unidimensionale) uniformemente vario..1

- Accelerazione costante

$$a = \text{cost} \\ a = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \int_{t=t_0}^t a dt' + \mathbf{v}(t=t_0) = a \int_{t_0}^t dt' + \mathbf{v}_0 = a \cdot [t']_{t_0}^t + \mathbf{v}_0 = a \cdot (t - t_0) + \mathbf{v}_0$$

$$\text{ponendo } t_0=0 \Rightarrow \mathbf{v}(t) = a \cdot t + \mathbf{v}_0$$

– si può vedere anche come:  $a = \text{cost} \Rightarrow a = a_m$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{v} = a_m \cdot \Delta t = a \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = a \cdot (t_2 - t_1) \Rightarrow \mathbf{v}_2 = a \cdot (t_2 - t_1) + \mathbf{v}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = 0, \quad t_2 = t \\ \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{t=0} = \mathbf{v}_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = a \cdot t + \mathbf{v}_0$$

# Moto (unidimensionale) uniformemente vario..2

- Per trovare l'equazione del moto dobbiamo integrare ulteriormente:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \mathbf{v}(t') dt' + s_{t=0} = \int_0^t (a \cdot t' + \mathbf{v}_0) dt' + s_0 = \\ &= \int_0^t a \cdot t' dt' + \int_0^t \mathbf{v}_0 dt' + s_0 = a \cdot \int_0^t t' dt' + \mathbf{v}_0 \cdot \int_0^t dt' + s_0 = \\ &= a \cdot \left[ \frac{1}{2} t'^2 \right]_0^t + \mathbf{v}_0 \cdot [t']_0^t + s_0 = \frac{1}{2} a t^2 + \mathbf{v}_0 t + s_0 \end{aligned}$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2 + \mathbf{v}_0 t + s_0$$

Equazione del moto uniformemente vario

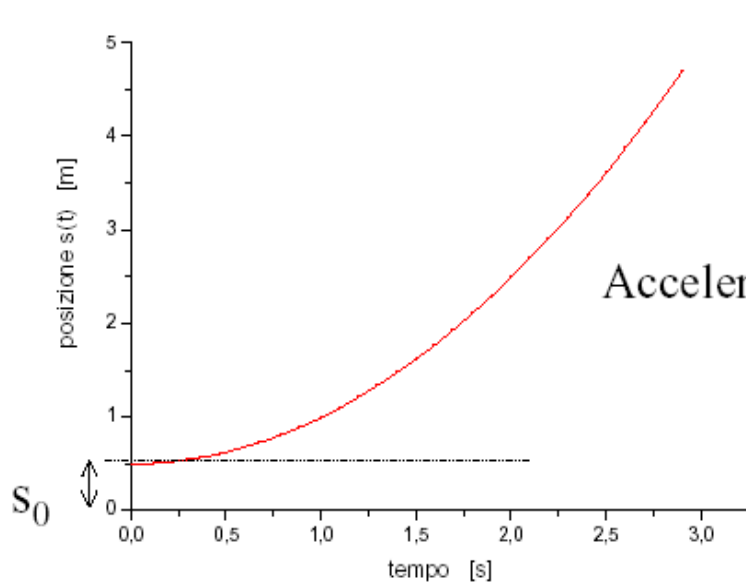
$s_0$       posizione iniziale

$\mathbf{v}_0$      velocità iniziale

$\mathbf{a}$         accelerazione

# Moto uniformemente vario: diagramma orario

- Diagramma orario: una parabola



$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ s_0 = 0.5 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 0.5$$

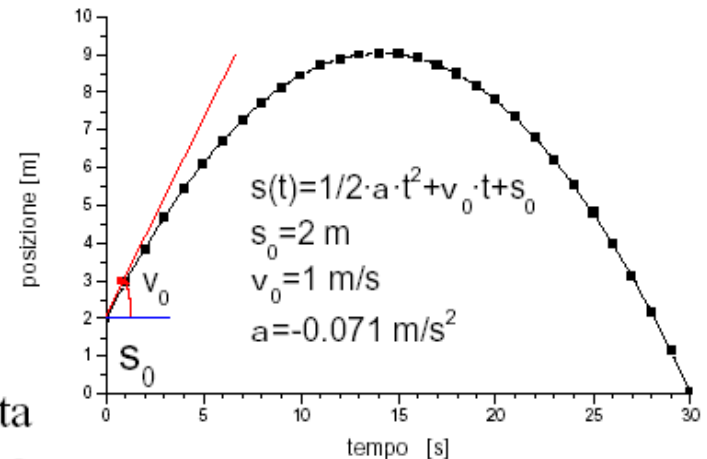
Accelerazione positiva  $\rightarrow$

moto uniformemente accelerato  
concavità verso l'alto

$a$  negativa  $\rightarrow$

moto uniformem. decelerato  
concavità verso il basso

La velocità  $v_0$  è data dalla pendenza della retta tangente alla parabola per  $t=0$





# Relazione fra velocità e posizione

- Una formula a volte utile è quella che collega la velocità con la posizione in un moto uniformemente vario:

$$\begin{cases} s = s(t) = \frac{1}{2}at^2 + \mathbf{v}_0t + s_0 \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = a \cdot t + \mathbf{v}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s - s_0 = \frac{1}{2}at^2 + \mathbf{v}_0t \\ t = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{a} \end{cases} \Rightarrow s - s_0 = \frac{1}{2}a \left[ \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{a} \right]^2 + \mathbf{v}_0 \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s - s_0 = \frac{1}{2a} [\mathbf{v}^2 + \mathbf{v}_0^2 - 2\mathbf{v}\mathbf{v}_0] + \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^2}{a} \Rightarrow 2a(s - s_0) = \mathbf{v}^2 + \mathbf{v}_0^2 - 2\mathbf{v}\mathbf{v}_0 + 2\mathbf{v}\mathbf{v}_0 - 2\mathbf{v}_0^2 \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_0^2 + 2a(s - s_0)$$

# Cambio di unità

- MKS  $\rightarrow$  CGS

$$\dagger 3,21\text{m/s} = 3,21 \cdot 10^2 \text{ cm/s} = 321\text{cm/s}$$

- CGS  $\rightarrow$  MKS

$$\dagger 44\text{cm/s} = 44 \cdot 10^{-2} \text{ m/s} = 0,44 \text{ m/s}$$

- km/h  $\rightarrow$  m/s

$$\dagger 50\text{km/h} = 50 \cdot 10^3 \text{ m/h} = 50 \cdot 10^3 \cdot (1/3600) \text{ m/s} = 50 \cdot 1/3,6 \text{ m/s} \approx 13,9 \text{ m/s}$$

- m/s  $\rightarrow$  km/h

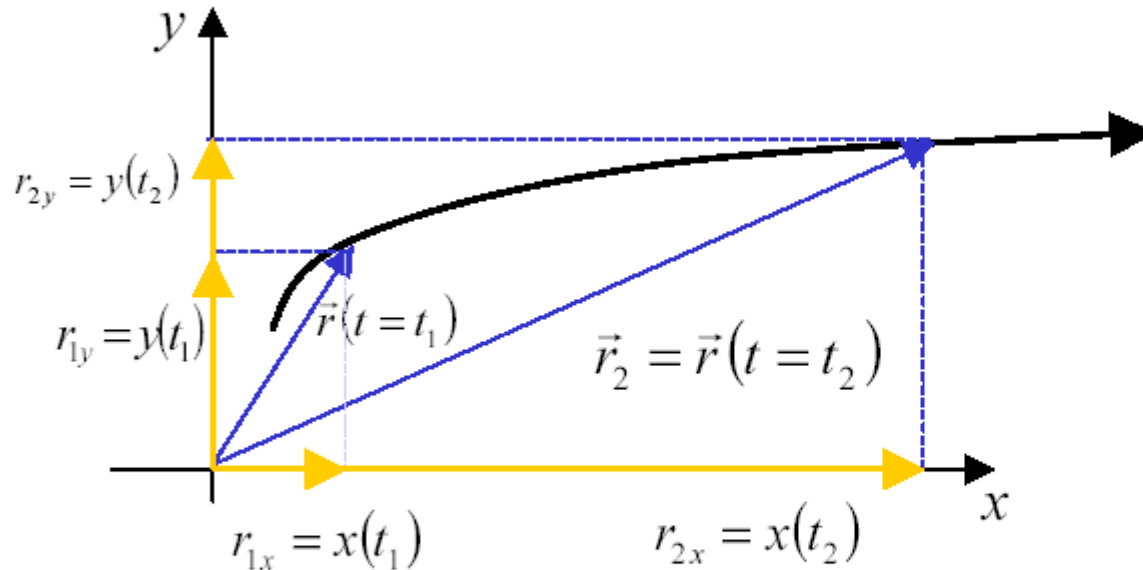
$$\dagger 40\text{m/s} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ km/s} = 40 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 \text{ km/h} = 40 \cdot 3,6 \text{ km/h} \approx 144 \text{ km/h}$$

# Grandezze Scalari

- Il moto finora trattato era espresso da una sola coordinata  $x(t)$  oppure  $s(t)$
- Tutte le grandezze trattate sono completamente definite da un numero, dotato di opportune dimensioni:
  - $t \rightarrow 10 \text{ s}$
  - $s(t) \rightarrow 5 \text{ m}$
  - $v \rightarrow 4 \text{ m/s}$
  - $a \rightarrow 0,9 \text{ m/s}^2$
- Queste grandezze sono dette scalari

# Spostamento vettoriale

- Consideriamo un moto a più dimensioni (bidimensionale):

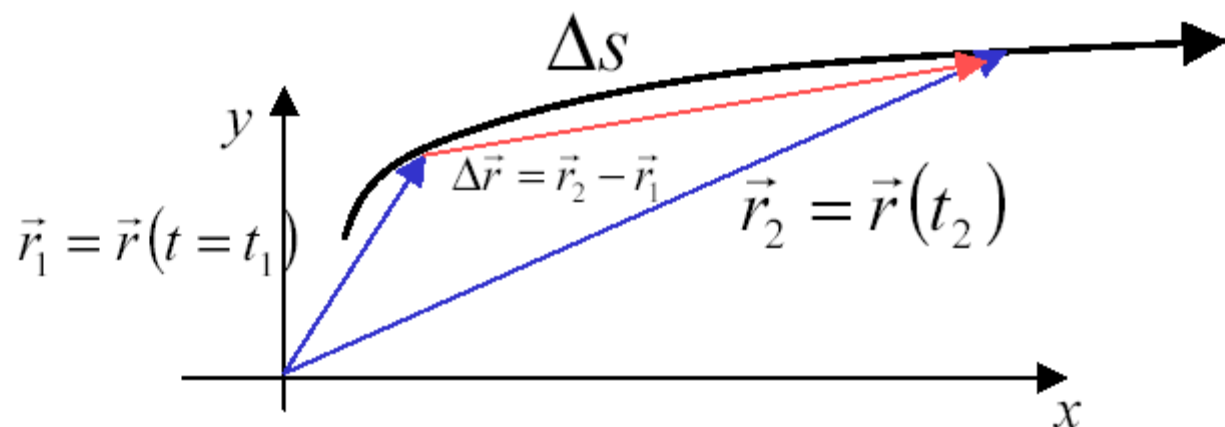


Il vettore posizione è quel vettore  $r(t)$  che congiunge l'origine degli assi con la posizione assunta all'istante  $t$  dal punto materiale in moto sulla traiettoria

Equazione del moto:  $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j}$

$$\begin{cases} x(t) = \dots \\ y(t) = \dots \end{cases}$$

# Velocità vettoriale media



Vettore spostamento:  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

- Definizione della velocità vettoriale media:

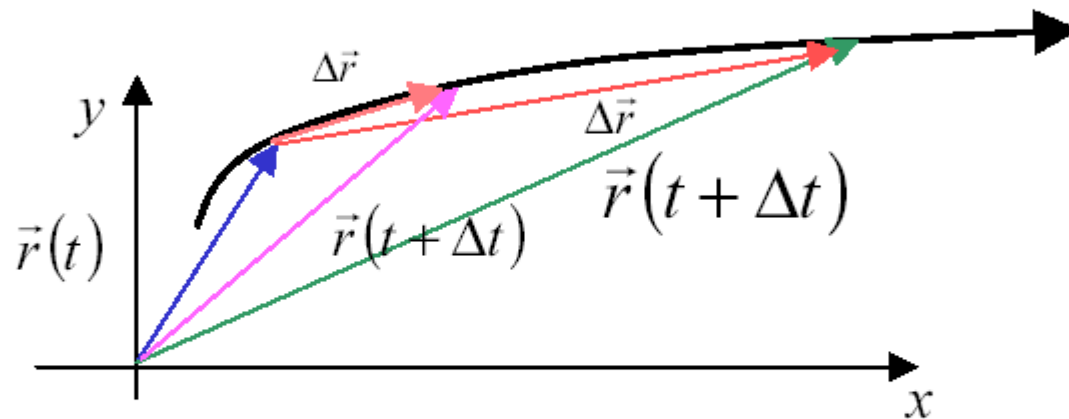
$$\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Il modulo della velocità vettoriale media  $|\vec{v}_m|$  non è detto che coincida con la velocità scalare media  $v_m$ . Infatti nel nostro caso è:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{v}_m| &\equiv \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \\ v_m &\equiv \frac{\Delta s}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\vec{v}_m| \neq v_m$$

# Velocità vettoriale istantanea

- Def:  $\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$



Facendo tendere  $\Delta t \rightarrow 0$  il vettore velocità vettoriale media tende ad assumere la direzione della retta tangente, istante per istante, alla traiettoria. Questa è una proprietà fondamentale della velocità vettoriale istantanea:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \\ v = \frac{ds}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \hat{t} = v \hat{t} \quad \text{e risulta } |\vec{v}| = v = \frac{ds}{dt}$$

↙
versore della tangente

# Accelerazione vettoriale

- Accelerazione media:  $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

- Accelerazione istantanea:  $\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

- Dalle regole della derivata del prodotto si ha:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \hat{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{\tau} + v \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{accel. tangenziale}}}{a_t} \cdot \hat{\tau} + v \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt}$$

- Il secondo termine è invece legato alla variazione della direzione del vettore velocità (e non del suo modulo)
- Per descriverlo con facilità occorre introdurre il moto circolare uniforme

# Moto circolare uniforme

- La traiettoria è un cerchio di raggio  $R$

- La velocità è costante in modulo

$$\vec{v}_1 = |\vec{v}_1| \cdot \hat{t}_1 \quad |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = |\vec{v}| = v$$

$$\vec{v}_2 = |\vec{v}_2| \cdot \hat{t}_2$$

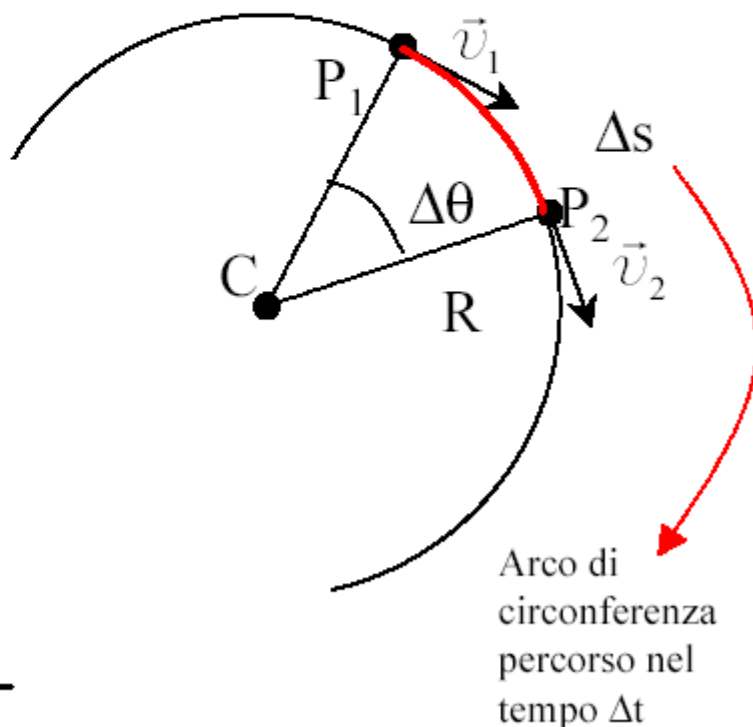
- La velocità è variabile in direzione:  $\hat{t}_1 \neq \hat{t}_2$

- La velocità in modulo è data da:

$$v \equiv \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R \cdot \Delta \theta}{\Delta t}$$

- Se la velocità cambia in modulo allora deve esistere un'accelerazione:

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$






.. moto circolare uniforme 2 - accelerazione centripeta

- Per definire il vettore accelerazione, oltre al modulo occorre trovare la direzione e il verso
- Da semplici osservazioni geometriche riguardo la direzione di  $\Delta v$  al diminuire di  $\Delta t$  (o  $\Delta\theta$ ) si ottiene che il vettore accelerazione punta verso il centro del cerchio.

- Quindi si ha:

$$\vec{a}_c = \frac{v^2}{R} \cdot \hat{n}$$

- Dove  $\mathbf{n}$  è un versore diretto verso il centro del cerchio (da cui il pedice “c” per indicare che l’**accelerazione è centripeta**)



## .. moto circolare uniforme 3 - Velocità angolare

- In un moto circolare uniforme, si definisce velocità angolare il rapporto:

$$\omega \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$$

- Esprimendo  $\Delta\theta$  in termini di  $v$ , risulta:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\theta = \frac{v}{R} \Delta t \\ \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow v = \omega R \Rightarrow a_c = \omega^2 R$$

- Il tempo in cui il punto materiale effettua un giro completo è detto **periodo T**.
- La frequenza di rotazione è definita come il reciproco del periodo T:

$$\nu = \frac{1}{T} \Rightarrow [\nu] = [t^{-1}] \Rightarrow \text{s}^{-1} = \text{Hz}$$

- Un giro completo corrisponde ad un angolo di  $360^\circ$ , cioè  $2\pi$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$$

# Accelerazione vettoriale, 2<sup>a</sup> puntata

- Ritorniamo all'espressione della accelerazione in un moto vario:

$$\vec{a} = a_t \cdot \hat{\tau} + v \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt}$$

accel. tangenziale accel. centripeda

Cerchio osculatore  
 Raggio di curvatura

- Utilizzando il raggio di curvatura posso scrivere:

$$\vec{a} = a_t \cdot \hat{\tau} + \frac{v^2}{R} \cdot \hat{n}$$

# Definizione dei moti in base all'accelerazione

- Moto (generico):

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \hat{\tau} + \frac{v^2}{R} \cdot \hat{n}$$

- Moto centripeto:

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 \Rightarrow a_t = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \hat{n} = \omega^2 R \cdot \hat{n}$$

- Moto rettilineo:

$$R = \infty \Rightarrow a_c = 0 \Rightarrow \vec{a} = a_t \cdot \hat{\tau}$$

# SINTESI

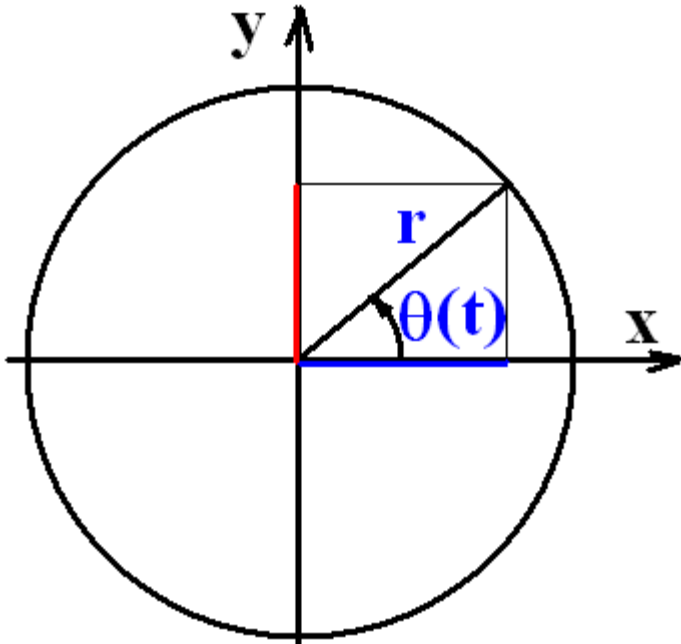
## Moto circolare uniforme

Nel moto circolare la particella si muove in un piano percorrendo una traiettoria a forma di cerchio.

Per semplicità sia  $Oxy$  il piano su cui giace la particella ed  $O$  il centro della traiettoria circolare. Ne segue che

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$$

dove  $r = |\vec{r}|$  non dipende dal tempo.



$$x(t) = r \cos(\theta(t))$$

$$y(t) = r \sin(\theta(t))$$

dove l'angolo  $\theta$  che determina la posizione della particella sul cerchio dipende dal tempo.



La velocità angolare  $\omega$  è definita come la derivata dell'angolo  $\theta(t)$  rispetto al tempo  $t$ , cioè

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

La accelerazione angolare  $\alpha$  è definita come la derivata della velocità angolare  $\omega(t)$  rispetto al tempo  $t$ , cioè

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

La frequenza angolare, o velocità angolare, si misura in radianti/secondo mentre la accelerazione angolare si misura in radianti/(secondo)<sup>2</sup>.



Il moto circolare è detto moto circolare uniforme se la velocità angolare non dipende dal tempo, cioè si ha

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \quad \text{dove } \omega_0 \text{ è indipendente dal tempo.}$$

Integrando tra il tempo 0 ed il tempo t si ottiene

$$\int_0^t \frac{d\theta}{dt} dt = \int_0^t \omega_0 dt = \omega_0 \int_0^t dt = \omega_0 t$$

ed in definitiva, posto  $\theta(0) = \theta_0$ , si ha  $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t$

Quindi la legge oraria del moto circolare uniforme risulta

$$x(t) = r \cos(\theta_0 + \omega_0 t) ; \quad y(t) = r \sin(\theta_0 + \omega_0 t) ; \quad \mathbf{0}$$



## Definizioni utili per caratterizzare il moto

Si dice periodo del moto circolare uniforme il tempo necessario alla particella per fare un giro completo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Si dice frequenza del moto circolare uniforme il numero di giri fatti dalla particella nell'unità di tempo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Nel sistema MKS l'unità di misura della frequenza è l'Hertz (Hz)  $\Rightarrow 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ .  $[\nu] = [T^{-1}]$

## Moto rettilineo uniforme

Nel moto rettilineo uniforme la velocità istantanea della particella è costante nel tempo, cioè  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$

dove  $\vec{v}_0$  è un vettore costante. Dato che il vettore velocità istantanea è costante, ne segue che il vettore accelerazione istantanea è zero. Dalla equazione  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0$

integrando tra il tempo 0 ed il tempo t si ottiene:

$$\int_0^t \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^t \vec{v}_0 dt = \vec{v}_0 \int_0^t dt = \vec{v}_0 t$$

ed in definitiva si ottiene legge oraria del moto rettilineo uniforme :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad \text{con} \quad \vec{r}_0 = \vec{r}(0)$$



## Moto uniformemente accelerato

Nel moto uniformemente accelerato la accelerazione istantanea della particella è costante nel tempo, cioè  $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$  dove  $\vec{a}_0$  è un vettore costante. Posto  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_0$

integrando tra il tempo 0 ed il tempo t si ottiene:

$$\int_0^t \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_0^t \vec{a}_0 dt = \vec{a}_0 \int_0^t dt = \vec{a}_0 t$$

e ricordando il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha:  $\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \vec{a}_0 t \longrightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{a}_0 t$

$$\int_0^t \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^t [\vec{v}(0) + \vec{a}_0 t] dt = \vec{v}(0) \int_0^t dt + \vec{a}_0 \int_0^t t dt \longrightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2$$



## Moto armonico

Nel moto armonico la particella si muove di moto periodico lungo una linea retta.

Sia l'asse delle ascisse la linea retta lungo la quale si muove la particella. Il vettore posizione della particella è dato da

$$\vec{r}(t) = (x(t), 0, 0)$$

e la legge oraria della elongazione è del tipo

$$x(t) = x_M \cos(\omega t + \theta)$$

dove  $x_M$  è l'ampiezza,  $\omega$  è la pulsazione (o velocità angolare o frequenza angolare) e  $\theta$  è la fase iniziale. L'elongazione è compresa tra  $-x_M$  ed  $x_M$ . Il moto armonico è un moto rettilineo avente per traiettoria un segmento lungo  $2 x_M$ .



La velocità e la accelerazione lungo l'asse delle ascisse sono

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \theta)$$

$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \theta) = -\omega^2 x(t)$$

Dalla formula della accelerazione si vede che l'elongazione del moto armonico soddisfa la seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

che è detta equazione differenziale armonica.

NB. Il moto elastico di una molla è un moto armonico

Il moto di un pendolo è approssimabile con un moto armonico



## Esercizi svolti sulla cinematica del punto materiale

Es1. Determinare la frequenza angolare di una ultracentrifuga che compie 6000 giri al minuto.

Soluzione:

la frequenza  $\nu$  è data da

$$\nu = 6000 \text{ giri/minuto} = 6 \times 10^3 / 60 \text{ s} = 100 \text{ Hz} .$$

Es2. Un'automobile viaggia in pianura per 30 Km verso Est e successivamente verso nord per 40 Km.

Calcolare lo spostamento risultante.

Soluzione:

in base alla regola del parallelogramma ed al teorema di Pitagora lo spostamento risultante  $x$  è dato da

$$x = \sqrt{(30^2 + 40^2)} \text{ km} = 50 \text{ Km} .$$



Es3. La velocità della luce nel vuoto è  $3 \times 10^8$  m/s. Dato che la distanza terra-sole è di  $149 \times 10^6$  Km, in quanto tempo un raggio solare arriva sulla terra?

Soluzione:

posto  $c = 3 \times 10^8$  m/s e  $L = 149 \times 10^6$  Km ,

dato che  $c = L/t$  , dove  $t$  è il tempo cercato , si ha

$$\begin{aligned} t &= L/c = 149 \times 10^6 \times 10^3 \text{ m} / (3 \times 10^8 \text{ m/s}) \\ &= 1490/3 \text{ s} = 496,6 \text{ s} . \end{aligned}$$

Es4. Se si lascia cadere un sasso, con velocità iniziale nulla, in un pozzo profondo 50 m, in quanto tempo il sasso raggiunge il fondo?

Soluzione:

la caduta libera è un moto uniformemente accelerato

quindi posto  $h = 50$  m e  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> si ha

$h = (1/2) g t^2$  , dove  $t$  è il tempo cercato. Segue che

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{(2h/g)} = \sqrt{(100 \text{ m} / 9,81 \text{ m/s}^2)} \\ &= 3,19 \text{ s} . \end{aligned}$$



Es5. Un corpo lanciato alla velocità di 2 m/s lungo un percorso rettilineo inverte il suo moto ripassando per il punto di partenza con velocità  $-4$  m/s nel tempo di 10 secondi. Calcolare l'accelerazione media del corpo.

Soluzione:

posto  $v_1 = 2$  m/s ,  $v_2 = -4$  m/s ,  $\Delta t = 10$  s

l'accelerazione media risulta

$$a_m = (v_2 - v_1)/\Delta t = (-4 - 2)/10 \text{ m/s}^2 = -0,6 \text{ m/s}^2 .$$

Es6. Un'auto percorre 40 km alla velocità di 60 km/h e successivamente 80 km alla velocità di 40 km/h. Qual è la velocità media dell'auto?

Soluzione:

posto  $L_1 = 40$  km ,  $v_1 = 60$  km/h ,

$L_2 = 80$  km ,  $v_2 = 40$  km/h ,

si trova che  $t_1 = L_1/v_1 = 2/3$  h ,  $t_2 = L_2/v_2 = 2$  h

e dunque la velocità media risulta

$$v_m = (L_1 + L_2)/(t_1 + t_2) = (120 \text{ km})/(8/3 \text{ h}) = 45 \text{ km/h} .$$



# Moto uniformemente vario

$$y = \int v dt$$

$$= \int (v_0 + at) dt$$

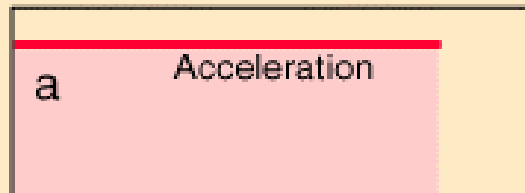
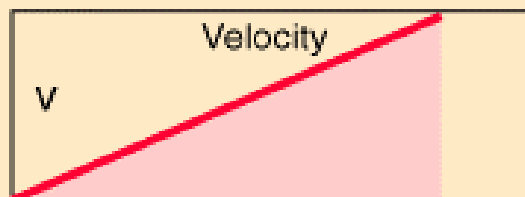
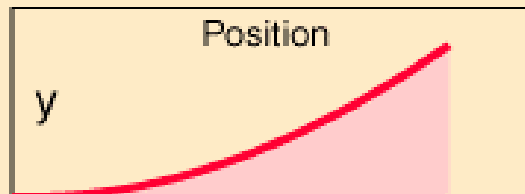
$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$



$$v = \int a dt = v_0 + at$$



$$a = \text{constant}$$



time →

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$



$$v = \frac{dy}{dt}$$

$$v = v_0 + at$$



$$a = \frac{dv}{dt} = a$$



# Dinamica del punto e dei sistemi

- Finora abbiamo parlato del movimento senza accennare alle cause che lo determinano
- La parte della meccanica che si interessa a questo aspetto si chiama dinamica
- 3 sono i principi fondamentali della dinamica e sono essenzialmente stati “riorganizzati” da Newton
- Tali principi sono stati estrapolati da una analisi critica ed attenta dei dati sperimentali



# Prima legge della dinamica

- Osservazioni sperimentali dovute a Galileo
  - Prima di lui si riteneva (Aristotele) che un corpo, per essere mantenuto in movimento rettilineo uniforme, dovesse essere comunque soggetto ad un qualche agente esterno che dovesse continuamente tirarlo o spingerlo
  - Facile da verificarsi sperimentalmente, ma è un effetto “spurio” cioè un esperimento mal congeniato
  - Galileo notò che aumentando la “levigatezza” delle superfici di contatto, il corpo tendeva sempre più a mantenere il suo stato di moto
  - Questo risultato ottenuto da Galileo costituisce il fondamento del **primo principio della Dinamica** di Newton anche detto:
- Principio d’inerzia:
  - *“Ogni corpo isolato, cioè non soggetto ad azione esterna, persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme”*

## Sistemi di riferimento inerziali

- Il primo principio della dinamica, per essere valido, deve essere referenziato ad un sistema di riferimento inerziale
- I sistemi ove è valido il primo principio della dinamica si chiamano **inerziali** (viceversa, si chiamano **non inerziali**)

Dato un sistema di riferimento inerziale, tutti i sistemi di riferimento in quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto al primo sono anch'essi inerziali

A causa del suo moto di rotazione intorno al proprio asse ed intorno al Sole, **la Terra** (ed ogni sistema di riferimento solidale con essa) **non è rigorosamente un sistema inerziale** (anche se in approssimazione molto spesso un sistema solidale con la terra viene ritenuto inerziale)

Anche un sistema di riferimento solidale col Sole non è rigorosamente inerziale

Si considera sistema di riferimento inerziale una terna solidale con le stelle fisse, da noi molto distanti

# Forza

Le cause che possono alterare la velocità di un punto materiale in un sistema di riferimento inerziale fissato (*cioè produrre un'accelerazione*) si chiamano forze

La forza ha natura vettoriale

– essa è caratterizzata da

- intensità (modulo), direzione (di applicazione), verso

Due forze si dicono eguali se applicate allo stesso corpo determinano la stessa accelerazione vettoriale

Due forze hanno la stessa intensità, ma direzione e verso diverso se, applicate allo stesso corpo, determinano accelerazioni di egual modulo, ma differente direzione e verso

Forze, applicate al medesimo punto materiale, si sommano vettorialmente

# Massa inerziale

Supponiamo di applicare ad un corpo una forza  $F_1$  di intensità  $F_1$ . Il corpo accelera con accelerazione  $a_1$  di intensità  $a_1$ .

Replichiamo l'esperimento applicando una forza  $F_2$ . Otteniamo un'accelerazione  $a_2$ .

Ripetiamo l'esperimento  $n$  volte, misurando di volta in volta l'accelerazione subita dal corpo e conoscendo la forza applicata.

Sperimentalmente si nota che il rapporto fra forza applicata e accelerazione misurata è costante in tutti gli esperimenti replicati:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots = \frac{F_n}{a_n} = \text{costante} \Rightarrow F_i = \text{cost} \cdot a_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

Quindi possiamo affermare che questa costante è indipendente dall'intensità della forza applicata e dalla accelerazione subita

Inoltre, l'accelerazione ottenuta in ognuno di questi esperimenti ha sempre stesso verso e direzione della forza imposta

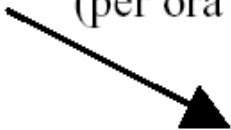
# ... massa inerziale 2

Cambiamo tipo di esperimento: applichiamo la medesima forza  $F$  ad un numero  $k$  di corpi diversi

Misuriamo, per ognuno di questi corpi l'accelerazione subita

Risulta:  $\vec{F} = \text{cost}_1 \cdot \vec{a}_1$   
 $\vec{F} = \text{cost}_2 \cdot \vec{a}_2$   
.....  
 $\vec{F} = \text{cost}_k \cdot \vec{a}_k$

- Cioè la costante di proporzionalità fra forza e accelerazione dipende dal corpo su cui applichiamo la forza
- Applicando la medesima forza  $F$  si nota che l'accelerazione subita è inversamente proporzionale al valore della costante (per ora non definita) che entra nella formula data. infatti:


$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{|\text{cst}_2|}{|\text{cst}_1|}$$

.....

$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_k|} = \frac{|\text{cst}_k|}{|\text{cst}_1|}$$

Cioè questa costante rappresenta una proprietà del corpo, indipendente dalla sua accelerazione, velocità o posizione e dalla forza applicata. Essa ne caratterizza il comportamento riguardo quelle azioni che ne perturbano lo stato di quiete o moto rettilineo uniforme

## ... massa inerziale 3 - Seconda legge della dinamica

Tale proprietà (grandezza scalare) del corpo si chiama Massa inerziale

Il suo simbolo è “ $m$ ” ed è una grandezza fondamentale. Le sue unità di misura sono:

- CGS:                      grammo                      simbolo:  $g$
- MKS (SI)                chilogrammo                simbolo:  $kg$

La massa inerziale determina l’accelerazione posseduta da un corpo sotto l’azione di una forza esterna  $\mathbf{F}$  tramite la

Seconda legge della dinamica:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Se c’è più di una forza agente sul corpo  $\mathbf{F}$  rappresenta la risultante delle forze.

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$



# Unità di misura della forza

- La forza è una grandezza derivata. Le sue dimensioni sono  $[m \cdot l \cdot t^{-2}]$  e le sue unità di misura sono:
- CGS  $\rightarrow g \cdot cm \cdot s^{-2} = \text{dine}$
- MKS  $\rightarrow kg \cdot m \cdot s^{-2} = \text{Newton (N)}$

$$1 \text{Newton} = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2} = 1 \frac{10^3 g \cdot 10^2 cm}{s^2} = 10^5 \frac{g \cdot cm}{s^2}$$

Cioè:

$$1N = 10^5 \text{dine}$$



## Corpo soggetto a forza costante

- Supponiamo di avere un corpo di massa  $m$  soggetto unicamente ad una forza costante  $F$ .
- Per il secondo principio della dinamica, accelerazione subita dal corpo è:

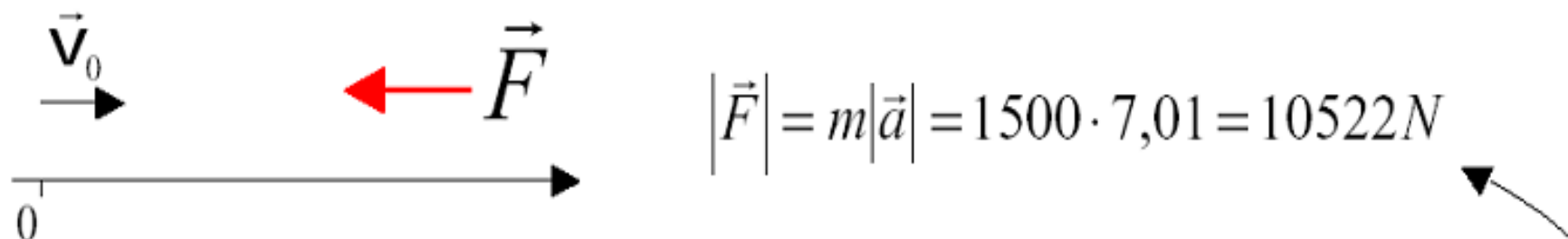
$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- Siccome  $F$  è costante (così anche  $m$ ), il moto avviene con accelerazione  $a$  costante, quindi nella direzione di  $F$  il moto è:

Moto rettilineo uniformemente vario

# Esempio: decelerazione di un'automobile

- Supponiamo di avere un'auto di massa  $m=1500\text{kg}$  viaggiante a velocità iniziale  $\mathbf{v}_0=100\text{km/h}$  nella direzione e verso del semiasse positivo delle  $x$ .
- Quale forza costante  $\mathbf{F}$  occorre applicare per fermare l'auto in uno spazio di  $55\text{m}$ ?



- Dovendo rallentare l'automobile, ovviamente, la forza da applicare avrà la medesima direzione (asse delle  $x$ ), ma verso opposto, cioè lungo  $-x$ .
- Essendo, per ipotesi, la forza costante, il moto risulterà uniformemente decelerato:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + \mathbf{v}_0t + x_0 \quad \begin{array}{l} x_0 = 0\text{m} \\ \mathbf{v}_0 = 100\text{km/h} = 100 \frac{10^3\text{m}}{3600\text{s}} = 100 \frac{1}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{array}$$

- Adoperiamo la formula che lega la velocità alla posizione per il moto unif. vario:

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_0^2 + 2a(x - x_0) \Rightarrow \mathbf{v}_f^2 = \mathbf{v}_0^2 + 2ax_f \Rightarrow a = \frac{0 - \mathbf{v}_0^2}{2x_f} \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_0 = 27,8\text{m/s} \\ x_f = 55\text{m} \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{-(27,8\text{m/s})^2}{55\text{m}} = -7,01\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$



# Quantità di moto

- Si definisce **quantità di moto** la seguente grandezza vettoriale:

$$\vec{p} = m\vec{V}$$

- Se supponiamo  $m$  costante, la seconda legge della dinamica diventa:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

- Questa forma è equivalente a quella usuale  $F=ma$ , se  $m=cost$ , ma è valida anche quando  $m$  varia (relatività di Einstein)
- Se  $F=0 \Rightarrow p=cost \Rightarrow v=cost$  e quindi il corpo persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme!



## Terza legge della dinamica

Detto anche Principio di azione e reazione:

- Dati due punti materiali, A e B, se A esercita una forza  $F_A$  su B, questi “reagisce” applicando su A una forza  $F_B$  avente la medesima intensità e direzione, ma verso opposto.

Le forze sono dirette lungo la congiungente i due punti

A volte il III° principio della dinamica si enuncia anche come:

- “ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria, diretta lungo la congiungente i due punti materiali”