



Università Federico II di Napoli

**Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e
Naturali**

Corso di laurea in Informatica

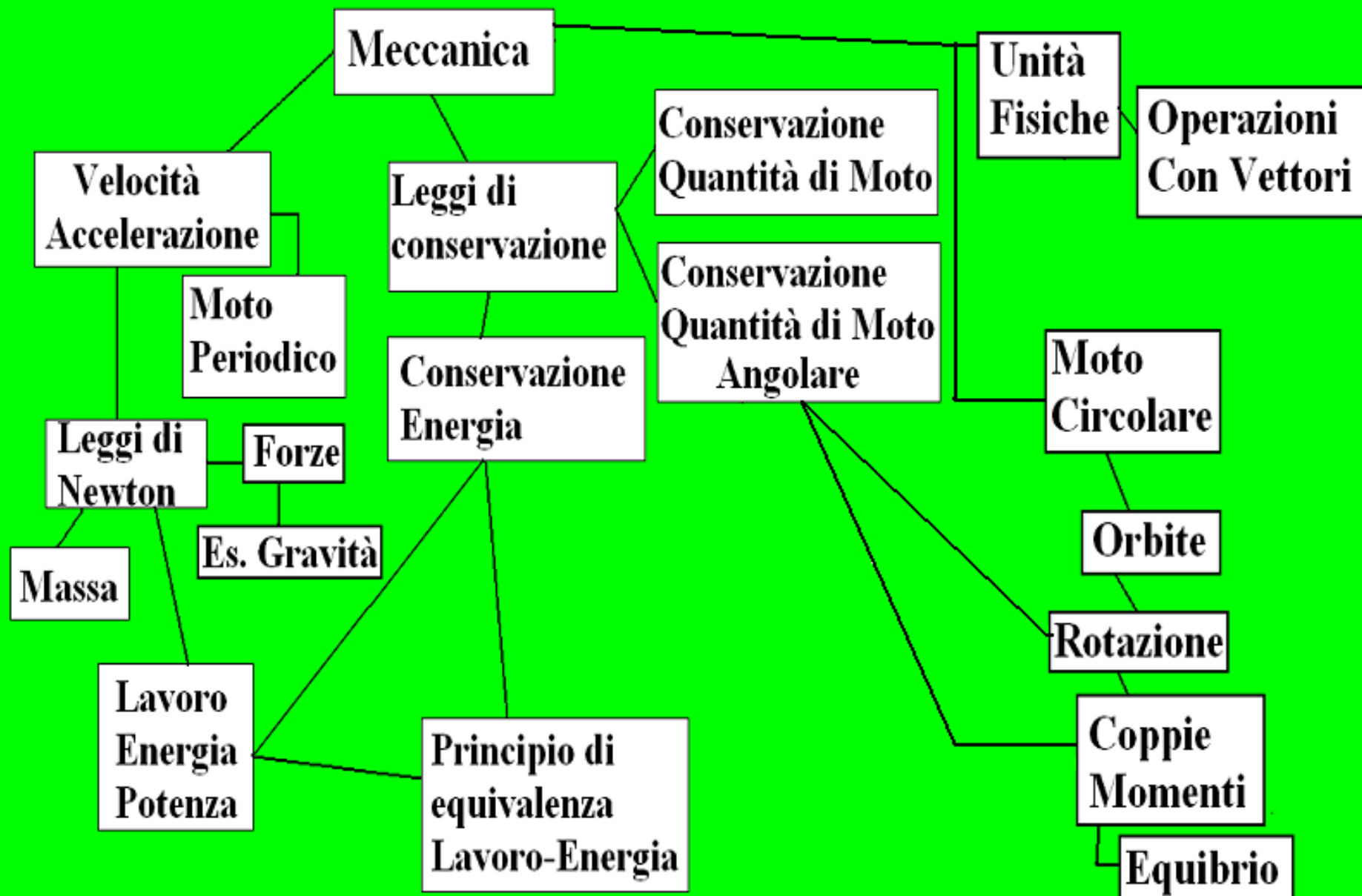
**Fisica Sperimentale I
Gruppo 1**

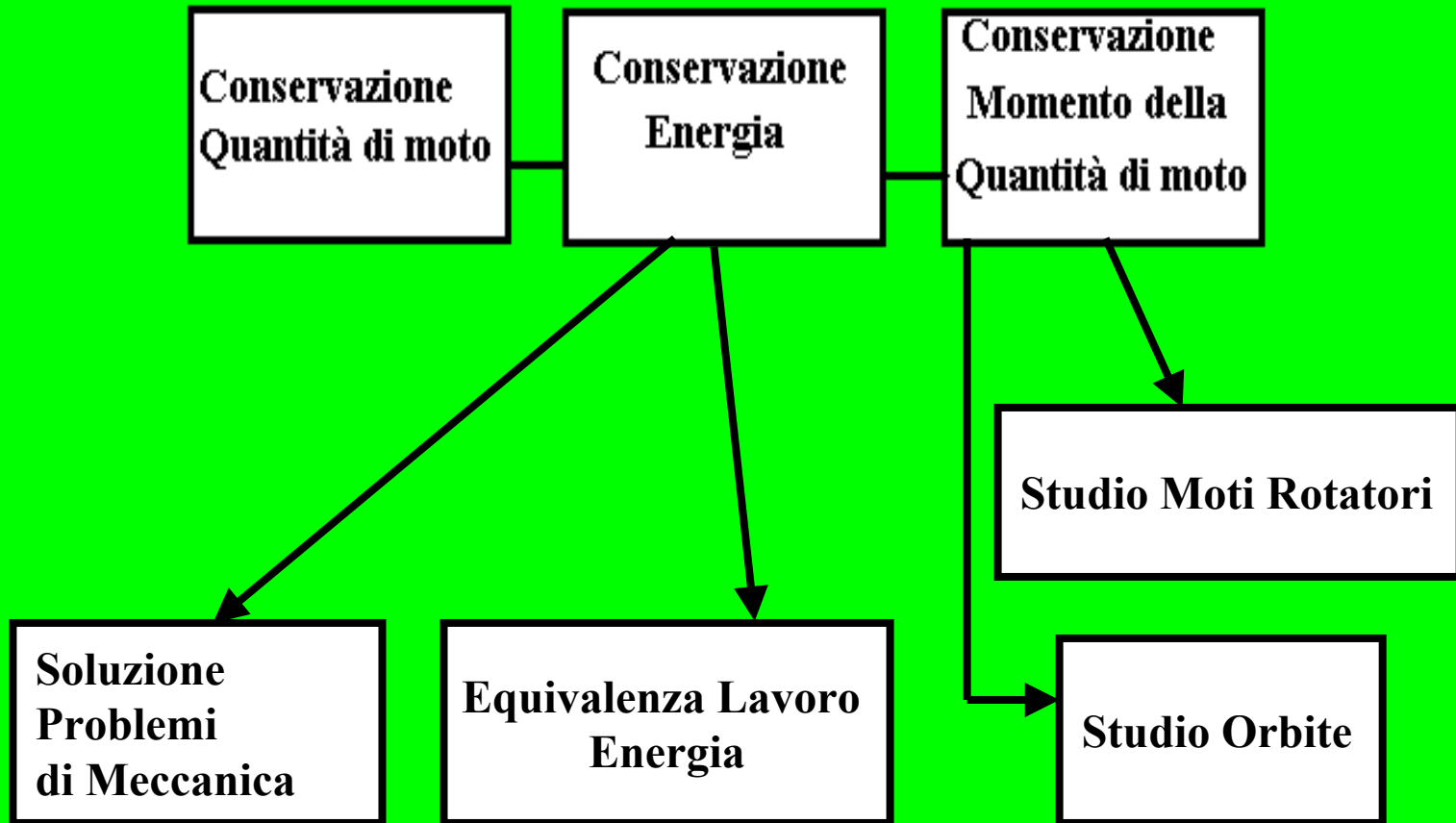
Docente Prof. Leopoldo Milano

Anno accademico 2003-2004



Diagramma di flusso della Meccanica







SISTEMA DI PUNTI MATERIALI E CORPO RIGIDO

Materia e sistema di punti materiali

La materia può essere pensata come costituita da particelle (punti materiali). A seconda del tipo di particelle e della interazione tra di esse si hanno materiali e stati di aggregazione (solido, liquido e gassoso) diversi.

Oss. La materia è costituita da atomi. Gli atomi sono costituiti da protoni, neutroni ed elettroni. I protoni ed i neutroni sono costituiti da quark. Allo stato attuale della conoscenza scientifica i quark e gli elettroni sono “particelle elementari”.



Massa totale di un sistema di N punti materiali

Dato un sistema di N particelle (punti materiali), indichiamo con \vec{r}_i il vettore posizione della i-esima particella rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano Oxyz e con m_i la massa della i-esima particella. La massa totale

del sistema è data da:
$$m = \sum_{i=1}^N m_i$$

Il baricentro o centro di massa del sistema è il seguente vettore posizione:

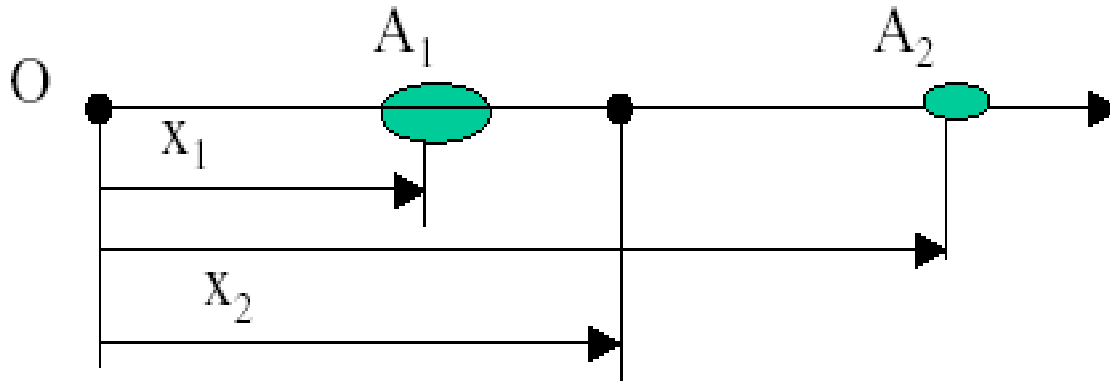
$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m}$$

Ne segue che la velocità e l'accelerazione del baricentro sono:

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{m} \quad \vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i}{m}$$



Sistema di punti materiali :Centro di massa



$$\mathbf{x}_c \equiv \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{m}_2 \mathbf{x}_2}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2} = \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{m}_2 \mathbf{x}_2}{\mathbf{m}_T} = \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{x}_1}{\mathbf{m}_T} + \frac{\mathbf{m}_2 \mathbf{x}_2}{\mathbf{m}_T}$$

Per sistemi con molti punti materiali:

$$\mathbf{x}_c \equiv \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i}$$

Per sistemi multidimensionali si ripete per ogni coordinata:

$$\mathbf{x}_c \equiv \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i} \quad \mathbf{y}_c \equiv \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i \mathbf{y}_i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i} \quad \mathbf{z}_c \equiv \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i \mathbf{z}_i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i}$$



Prima equazione cardinale della dinamica

Su ogni particella del sistema possono agire due tipi di forze:

1. i) forze interne: dovute alle altre particelle del sistema
2. ii) forze esterne: dovute a cause esterne al sistema

La II legge della dinamica di Newton per l'i-esima particella

$$\text{si pu\`o allora scrivere } \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} = m_i \vec{a}_i$$

dove $\vec{F}_i^{(E)}$ rappresenta la somma vettoriale di tutte le forze esterne agenti sulla i-esima particella, mentre $\vec{F}_i^{(I)}$ rappresenta la somma vettoriale di tutte le forze interne agenti sulla i-esima particella. Sommando sull'indice i si ottiene:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \quad \text{per il terzo principio } \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(I)} = 0$$



$$\sum_{i=1}^N F_i^{(E)} + \sum_{i=1}^N F_i^{(I)} = m \vec{a}_G$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{m} \vec{\mathbf{a}}_G$$

prima equazione cardinale della dinamica



La prima equazione cardinale della dinamica

assicura che “il baricentro di un sistema si muove con una accelerazione uguale a quella che avrebbe una particella nella quale fosse concentrata tutta la massa del sistema e sulla quale si supponga agire la risultante delle forze esterne agenti sul sistema” (**teorema del baricentro**).

Introducendo il vettore **quantità di moto totale** del sistema

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i \vec{v}_i$$

la **prima equazione cardinale** si può scrivere $\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Nel caso in cui la somma vettoriale delle forze esterne agenti sul sistema è nulla, $\vec{F}^{(E)} = \vec{0}$, ne segue che la quantità di moto totale è un vettore costante

(teorema di conservazione della quantità di moto).



Seconda equazione cardinale della dinamica

Dalla II legge della dinamica di Newton per l'i-esima particella

$$\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} + \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{a}}_i$$

Eseguendo il prodotto vettoriale dell'i-esimo vettore distanza $\vec{\mathbf{r}}_i$ rispetto al baricentro del sistema di punti masse si ottiene:

$$\vec{\mathbf{r}}_i \times (\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} + \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}) = \vec{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{a}}_i$$

$$\vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} + \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \vec{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{a}}_i$$

e sommando sull'indice i si ha : $\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} + \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{a}}_i$

Poiché per il terzo principio della dinamica il momento risultante della forze interne è zero, si ottiene :

$$\vec{\mathbf{M}}^{(E)} = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{a}}_i$$

seconda equazione cardinale
della dinamica



Ricordando che il vettore momento angolare totale del sistema si esprime come: $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

la seconda equazione cardinale può essere scritta come :


$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

La seconda equazione cardinale della dinamica assicura che “la derivata rispetto al tempo del momento angolare totale di un sistema è uguale al momento risultante delle forze esterne agenti sul sistema” (**teorema del momento angolare**).

Nel caso in cui il momento risultante delle forze esterne agenti sul sistema è zero, $\vec{M}^{(E)} = \vec{0}$, ne segue che il momento angolare totale è un vettore costante

(**teorema di conservazione del momento angolare**).

Energia di un sistema di punti materiali

 L'energia cinetica totale T di un sistema di particelle (punti materiali) è definita come la somma delle energie cinetiche T_i delle singole particelle, cioè

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^N \mathbf{T}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mathbf{m}_i \mathbf{v}_i^2$$

Il lavoro $L^{(E)}$ delle forze esterne sul sistema è definito come la somma dei lavori $L_i^{(E)}$ delle forze esterne su ogni singola particella, cioè

$$\mathbf{L}^{(E)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i^{(E)} = \sum_{i=1}^N \int_{A_i}^{B_i} \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i$$

In modo analogo si introduce il lavoro delle forze interne sul sistema:

$$\mathbf{L}^{(I)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N \int_{A_i}^{B_i} \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i$$

Il teorema lavoro-energia cinetica dimostrato per una particella può essere facilmente generalizzato per il sistema di N particelle



Teorema del lavoro-energia cinetica

La somma del lavoro delle forze esterne e del lavoro delle forze interne del sistema è uguale alla variazione di energia cinetica del sistema: $L^{(E)} + L^{(I)} = \Delta T$.

Infatti il teorema lavoro-energia cinetica per la i -esima particella si scrive:

$$L_i = L_i^{(E)} + L_i^{(I)} = \Delta T_i ;$$

sommando sull'indice i si ottiene il risultato cercato.




Sistemi conservativi

Il sistema è detto conservativo se le forze interne sono conservative, cioè ad ogni forza interna $\vec{F}_i^{(I)}$ è associata una energia potenziale U_i , tale che $\mathbf{L}_i^{(I)} = -\Delta U_i^{(I)}$.

L'energia potenziale totale U di un sistema conservativo è definita come la somma delle energie potenziali $U_i^{(I)}$ delle forze interne, cioè

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \mathbf{V}(\vec{\mathbf{r}}_i, \vec{\mathbf{r}}_j)$$

dove è detta $\mathbf{V}(\vec{\mathbf{r}}_i, \vec{\mathbf{r}}_j)$ energia potenziale di interazione tra la particella i -esima e la particella j -esima.

 L'energia meccanica totale di un sistema conservativo è definita come la somma della energia cinetica delle particelle e della energia potenziale delle forze interne .

$$\mathbf{E} = \mathbf{T} + \mathbf{U} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{T}_i + \mathbf{U}_i^{(I)}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mathbf{m}_i \mathbf{v}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{V}(\vec{\mathbf{r}}_i, \vec{\mathbf{r}}_j)$$

E' immediato verificare che il teorema lavoro-energia cinetica per un sistema conservativo diventa: $L^{(E)} = \Delta E$,
cioè: **“il lavoro delle forze esterne sul sistema è pari alla variazione dell'energia meccanica del sistema”**.

Un sistema è detto sistema isolato, se su di esso non agiscono forze esterne e dunque $L^{(E)} = 0$.

Ne segue che: “l'energia meccanica di un sistema conservativo isolato è una costante del moto”

(teorema di conservazione dell'energia meccanica).



Corpo rigido: pura rotazione

Un sistema è detto corpo rigido se la distanza relativa tra le particelle non varia nel tempo. Dunque un corpo rigido conserva la sua forma durante il moto.

Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno ad un asse che passa per il suo baricentro. Prendiamo il baricentro come origine del sistema di riferimento $Oxyz$ e l'asse z come asse di rotazione.

Ogni particella del corpo rigido si muove di moto circolare attorno all'asse z , cioè attorno al versore $\vec{k} = (0,0,1)$.

La velocità della i -esima particella è quindi data da

$$\vec{v}_i = \omega \mathbf{r}_i \vec{k}$$

dove ω è la velocità (frequenza) angolare di rotazione.

La velocità angolare di rotazione è la stessa per ogni particella e si può definire come grandezza vettoriale: $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$



Il momento angolare totale risulta dato da

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \mathbf{m}_i \mathbf{v}_i \quad \vec{\mathbf{k}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \mathbf{m}_i (\omega \mathbf{r}_i) \vec{\mathbf{k}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i \mathbf{r}_i^2 \vec{\omega}$$

ovverosia

$$\vec{\mathbf{L}} = \mathbf{I} \vec{\omega}$$

dove $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i \mathbf{r}_i^2$ è detto momento di inerzia del corpo rigido.

Il momento di inerzia del corpo rigido, che si misura in Kg m² dipende dunque dalla massa e disposizione spaziale delle particelle. Dimensionalmente $[\mathbf{I}] = [\mathbf{ML}^2]$



È possibile calcolare il momento di inerzia di alcuni solidi omogenei dotati di simmetria.

Detta m la massa totale del corpo rigido, ecco alcuni risultati nel caso in cui l'asse di rotazione passi per il baricentro:

- sfera di raggio R : $I = \frac{2}{5} mR^2$
- sbarra sottile di lunghezza L : $I = \frac{1}{12} mL^2$
- disco sottile di raggio R : $I = \frac{1}{2} mR^2$

Alla luce di queste considerazioni vediamo come si modifica la seconda equazione cardinale della dinamica



Utilizzando la relazione $\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega}$ la seconda equazione cardinale della dinamica, data da $\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

diventa
$$\vec{M}^{(E)} = \mathbf{I} \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Nel caso in cui il momento risultante delle forze esterne agenti sul sistema è zero, $\vec{M}^{(E)} = \vec{0}$, ne segue che il corpo rigido ruota con velocità angolare costante.

L'energia cinetica del corpo rigido è data da $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$

Se il corpo rigido ruota attorno ad un asse che passa per il baricentro, ricordando la relazione $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i$, si ottiene

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \omega^2 r_i^2 \longrightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} \mathbf{I} \omega^2}$$

Corpo rigido: risultati generali



La trattazione generale del moto del corpo rigido è abbastanza complessa. Enunciamo qui i risultati più significativi.

Il più generale moto di un corpo rigido è la combinazione di

- una rotazione
- una traslazione

Le equazioni cardinali della dinamica di un corpo rigido assumono la forma

$$\vec{\mathbf{F}}^{(E)} = \mathbf{m} \vec{\mathbf{a}}_G$$
$$\vec{\mathbf{M}}^{(E)} = \mathbf{I} \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}$$

e l'energia cinetica del corpo rigido risulta data da

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \mathbf{m} \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I} \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

cioè la somma dell'energia cinetica di traslazione del baricentro e dell'energia cinetica di rotazione attorno al baricentro.



Statica del corpo rigido

Abbiamo visto che le equazioni cardinali della dinamica di un corpo rigido sono date da:

$$\vec{\mathbf{F}}^{(E)} = m \vec{\mathbf{a}}_G \quad \vec{\mathbf{M}}^{(E)} = \mathbf{I} \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Da queste equazioni si ricava che affinché il corpo rigido non trasli deve essere nulla la somma vettoriale delle forze esterne agenti su di esso: $\vec{\mathbf{F}}^{(E)} = \vec{\mathbf{0}}$

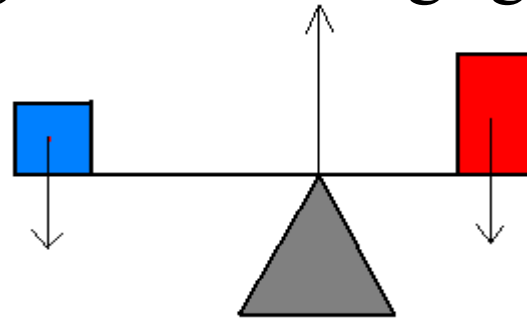
Ma per avere un corpo rigido fermo questo non basta.

Infatti, affinché il corpo rigido non ruoti deve essere nullo il momento risultante delle forze esterne: $\vec{\mathbf{M}}^{(E)} = \vec{\mathbf{0}}$

equazioni cardinali della statica:
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathbf{F}}^{(E)} = \vec{\mathbf{0}} \\ \vec{\mathbf{M}}^{(E)} = \vec{\mathbf{0}} \end{array} \right.$$



Es. In figura sono rappresentati due corpi, uno blu di massa m_B e distanza r_B dal fulcro, ed uno rosso di massa m_R e distanza r_R dal fulcro appoggiati su una asta rigida, di massa trascurabile, appoggiata al fulcro grigio.



Le frecce indicano la forza peso $m_B \vec{g}$ agente sul corpo blu, la forza peso $m_R \vec{g}$ agente sul corpo rosso e la forza di reazione vincolare \vec{N} dell'asta e dell'appoggio. Per l'equilibrio:

$$\mathbf{m}_B \vec{g} + \mathbf{m}_R \vec{g} + \vec{T} = \vec{0} \quad \vec{r}_B \times \mathbf{m}_B \vec{g} + \vec{r}_R \times \mathbf{m}_R \vec{g} + \vec{0} = \vec{0}$$

Dalla prima equazione cardinale: $T = (m_B + m_R)g$,

dalla seconda equazione cardinale: $r_B m_B = r_R m_R$.



Corrispondenza tra grandezze di traslazione e di rotazione

Traslazione

Massa m Posizione x

Velocità v

accelerazione a

II Legge Dinamica

$$F = ma$$

Energia cinetica $\frac{1}{2} mv^2$

Rotazione

Momento di Inerzia I

Posizione angolare θ

Velocità angolare ω

→ accelerazione angolare α

II Legge Dinamica

$$\tau = I \alpha$$

Energia cinetica $\frac{1}{2} I \omega^2$



Esercizi svolti sul corpo rigido

Es1. Una macchina lanciatrix di palline da tennis è posta in uno stagno ghiacciato. La macchina lancia una pallina di 0,15 Kg orizzontalmente con una velocità di 36 m/s. Qual è la velocità di rinculo della macchina se la sua massa è di 50 Kg?

Soluzione:

posto $m_p = 0,15$ Kg , $M = 50$ Kg , $v_p = 36$ m/s , e detta v la velocità di rinculo della macchina, poiché il sistema pallina e macchina lanciatrix è isolato e lo stagno ghiacciato permette di trascurare l'attrito, la quantità di moto totale del sistema, che prima del lancio è zero, si conserva. Quindi:

$$\begin{aligned} m_p v_p - M v &= 0 \quad \text{da cui} \\ v &= (m_p/M) v_p = (0,15 \text{ kg}/50 \text{ kg}) \times 36 \text{ m/s} = \\ &= 0,11 \text{ m/s} . \end{aligned}$$



Es2. Una leva è incernierata in un punto distante $1/3$ della sua lunghezza da un estremo. Indicando con F_1 e con F_2 le due forze agenti, perpendicolarmente alla leva, ai due estremi (F_1 sul braccio più corto ed F_2 sul braccio più lungo), indicare il valore del rapporto F_1/F_2 affinché la leva sia in equilibrio.

Soluzione:

detta L la lunghezza della leva, il modulo del momento della forza F_1 con punto di applicazione sul fulcro (cerniera) è dato da $M_1 = (L/3) F_1$, il modulo del momento della forza F_2 con punto di applicazione sul fulcro è dato da $M_2 = (2L/3) F_2$.

Per l'equilibrio deve essere $M_1 = M_2$ e quindi

$$(L/3) F_1 = (2L/3) F_2 \text{ da cui } F_1/F_2 = (2/3) / (1/3) = 2 .$$



Es3. Una leva è incernierata nel suo punto di mezzo. Su di un braccio sono sospesi due corpi di masse 5 kg e 3 kg a distanze dal fulcro di 75 cm e 120 cm, rispettivamente. Calcolare la massa che, sospesa sull'altro braccio ad una distanza di 100 cm, mantiene la leva in equilibri orizzontale. Soluzione:

posto $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $L_1 = 0,75 \text{ m}$, $L_2 = 1,2 \text{ m}$, $L_3 = 1 \text{ m}$, ed indicata con m_3 la massa incognita, il modulo del momento della forza peso agente sulla i -esima massa risulta $M_i = m_i g L_i$, con $i = 1,2,3$.

Per l'equilibrio deve essere $M_1 + M_2 = M_3$

da cui $m_1 g L_1 + m_2 g L_2 = m_3 g L_3$ ed infine

$$\mathbf{m_3 = (m_1 L_1 + m_2 L_2)/L_3 = 7,35 \text{ kg} .}$$