Università Federico II di Napoli

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di laurea in Informatica

Fisica Sperimentale I
Gruppo 1

Docente Prof. Leopoldo Milano

Anno accademico 2002-2003

Procedura per la soluzione di problemi

TESTO DEL PROBLEMA

↓

ANALISI TESTO DEL PROBLEMA

↓

FORMULE UTILI ALLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA

Primo Esempio

Testo

Un sasso lanciato lungo la verticale verso l'alto, ritorna al punto di partenza dopo 6 secondi.
Trovare:
a) La massima altezza raggiunta h
b) La velocità iniziale $\vec{v}_0$ impressa al sasso
c) La velocità finale $\vec{v}_f$ con cui il sasso ritorna al punto di partenza

Analisi del Testo

1. Cinematica unidimensionale del punto materiale
2. Unica accelerazione presente $\vec{g}$: quindi moto rettilineo uniformemente accelerato

Scelte

Sistema di riferimento unidimensionale:
1. asse z ≡ verticale
2. Grandezze scalari con segno

Tabella Leggi Cinematiche per i Moti Unidimensionali

Legge	Si	No
1) $\vec{s} = \vec{v}\,t + \vec{s}_0$		X
2) $\vec{s} = \frac{1}{2}\,\vec{a}\,t^2 + \vec{v}_0\,t + \vec{s}_0$	X	
3) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t$	X	
4) $\vec{z} = A\sin(\omega t + \varphi)\vec{k}$		X
5) $\vec{v} = A\,\omega\,\cos(\omega t + \varphi)\vec{k}$		X
6) $\vec{a} = -\omega^2\,\vec{z}$		X

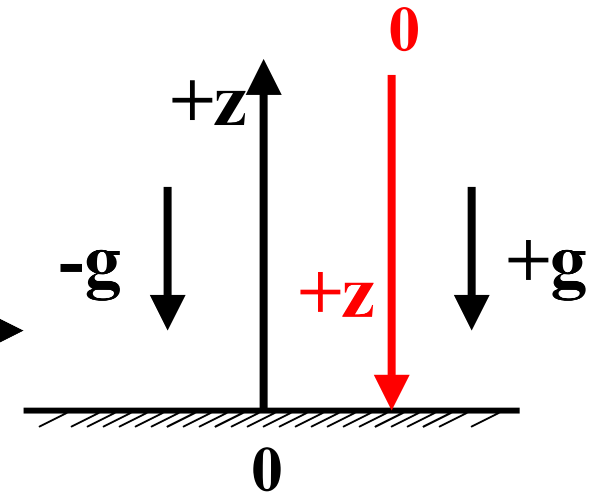
Al Nostro Problema Si applicano

Spiegare perchè

Soluzione

Asse z due possibili Scelte per il verso:

1. + verso l'alto
2. + verso il basso



Caso 1.

a) $\begin{cases} z = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0\, t \text{ (salita)} \\ v_z = v_0 - g\, t \text{ (salita)} \end{cases}$

b) $\begin{cases} z = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + h \text{ (discesa)} \\ v_z = -\, g\, t \text{ (discesa)} \end{cases}$

Per $v_z = 0 \rightarrow h$ (quota massima)

$$\underbrace{h = -\frac{1}{2}\, g\, t_1^{\,2} + v_0\, t_1 \qquad 0 = v_0 - g\, t_1}$$

Tempo discesa $\equiv t = (6 - t_1)$

$$\text{Discesa: } \underbrace{0 = -\frac{1}{2}\, g\, 6 - t_1)^2 + h \qquad v_{f\,z} = -\, g\,(6 - t_1)}$$

Combiniamo assieme le 4 equazioni ottenute dall'analisi del moto effettuata: le incognite sono proprio le quantità che cerchiamo.

$$\begin{cases} h = -\tfrac{1}{2}\, g\, t_1^{\,2} + v_0\, t_1 \\ 0 = v_0 - g\, t_1 \\ 0 = -\tfrac{1}{2}\, g\, 6 - t_1)^2 + h \\ v_{f\,z} = -\, g\,(6 - t_1) \end{cases}$$

$$v_0 = g\, t_1$$

$$h = -\tfrac{1}{2}\, g\, t_1^{\,2} + g\, t_1^{\,2}$$

$$h = \tfrac{1}{2}\, g\, t_1^{\,2}$$

$$\tfrac{1}{2}\, g\,(6 - t_1)^2 = \tfrac{1}{2}\, g\, t_1^{\,2}$$

$$t_1 = 3\ \text{s}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v_0 = g\, t_1 = 29.4\,\text{m/s} \\ v_{f\,z} = -\, g\,(6 - t_1) = -29.4\ \text{m/s} \\ h = \tfrac{1}{2}\, g\, t_1^{\,2} = 44.1\,\text{m/s} \end{array}}$$

Secondo Esempio

Testo

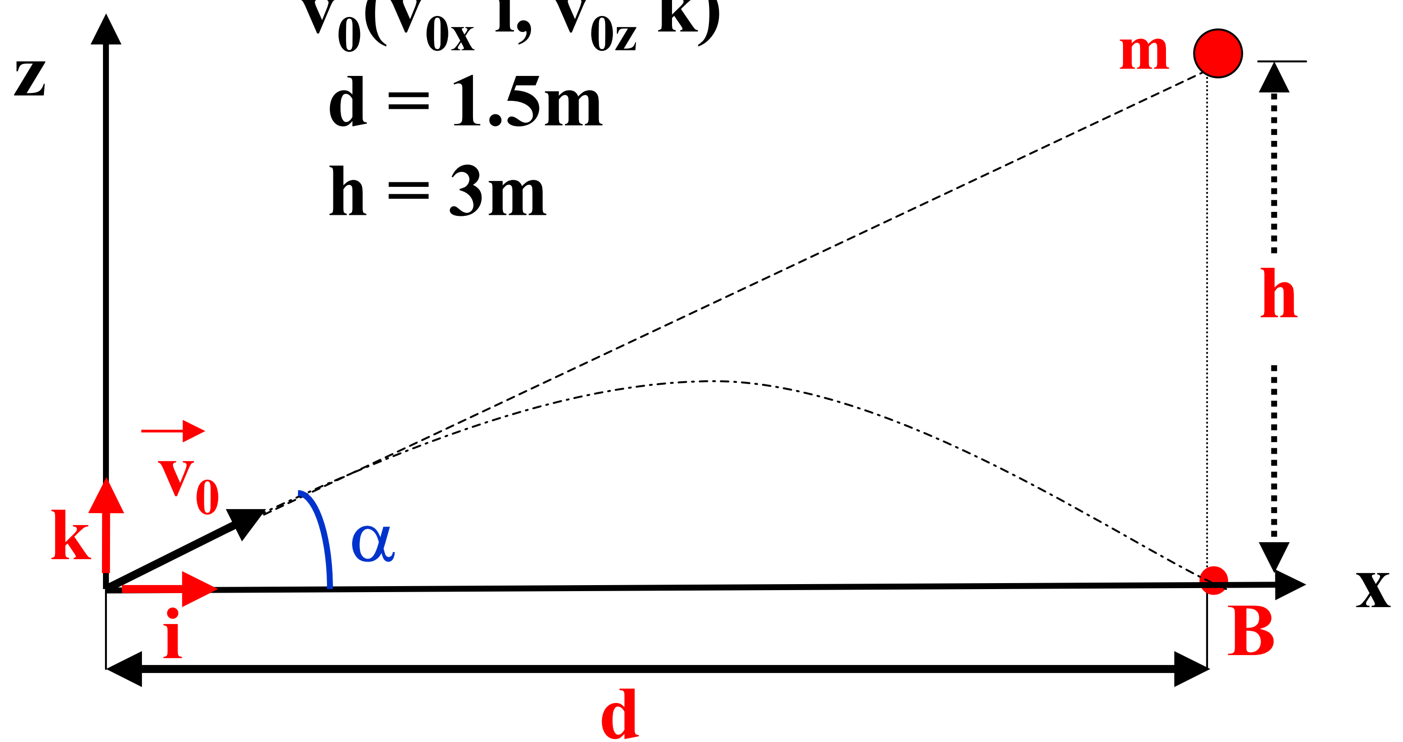
Un cannone C è puntato sulla sfera di massa m posta all'altezza h dal suolo, inizialmente in quiete. A t=0 Il cannone spara e la sfera viene lasciata cadere.

1. Determinare la velocità iniziale $\vec{v}_0$ del proiettile affinchè esso colpisca m al livello del suolo.

$\vec{v}_0(v_{0x}\, i,\ v_{0z}\, k)$

$d = 1.5m$

$h = 3m$



Analisi del Testo

1. Cinematica bidimensionale del punto materiale
2. Unica accelerazione presente $\vec{g}$ lungo z :moto uniformemente accelerato con velocità iniziale $v_{0z}k$
3. Moto uniforme lungo x con velocità v_{0x} i
4. Conclusione: composizione di due moti

Scelte

Sistema di riferimento bidimensionale:

1. Asse x ≡ orizzontale ;asse z ≡ verticale
2. Componenti della velocità $\vec{v}_0 \rightarrow v_{0x} = |\vec{v}_0| \cos\alpha$ e $v_{0z} = |\vec{v}_0| \sin\alpha$

essendo tg $\alpha = h/d = 2 \rightarrow \alpha \approx 63° 30'$

Tabella Leggi Cinematiche per i Moti Unidimensionali

Legge	Si	No
1) $s = v\,t + s_0$	X	
2) $s = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + s_0$	X	
3) $v = v_0 + a\,t$	X	
4) $z = A\sin(\omega t + \varphi)k$		X
5) $v = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi)k$		X
6) $a = -\omega^2 z$		X

Lungo x

Lungo z

Soluzione

Indichiamo con pedice ‘p’ le grandezze riferite al proiettile
Indichiamo con pedice ‘s’ le grandezze riferite alla sfera

Proiettile

$x_p = v_{0x}\, t = v_0 \cos\alpha\, t$
$z_p = v_{0z}\, t - 1/2 g\, t^2 = v_0 \sin\alpha\, t - 1/2 g\, t^2$

Sfera

$x_s = d$
$z_s = h - 1/2 g\, t^2$

Se t^* è l’istante dell’urto tra sfera e proiettile nel punto (richiesto B si deve verificare che:

$$\begin{cases} x_p(t^*) = x_s(t^*) = d \\ z_p(t^*) = z_s(t^*) = 0 \end{cases}$$

$$x_p(t^*) = x_s(t^*) = d = v_{0x}\, t^* = v_0 \cos\alpha\, t^*$$

$$\downarrow$$

$$t^* = d/(v_0 \cos\alpha)$$

$$z_p(t^*) = z_s(t^*) = h - 1/2 g\, t^{*2} = 0$$

$$\downarrow$$

$$-1/2 g\, t^{*2} = -1/2 g\, d^2 / (v_0 \cos\alpha)^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\, d^2}{2h \cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{9.8 \bullet 2.25}{2 \bullet 3 \bullet 0.2}} = 4.3 \text{ m/s}$$

Il problema risolto rappresenta un caso limite: la velocità iniziale del proiettile v_{0L} è la minima possibile affinchè l'urto avvenga al suolo e non nel sottosuolo!

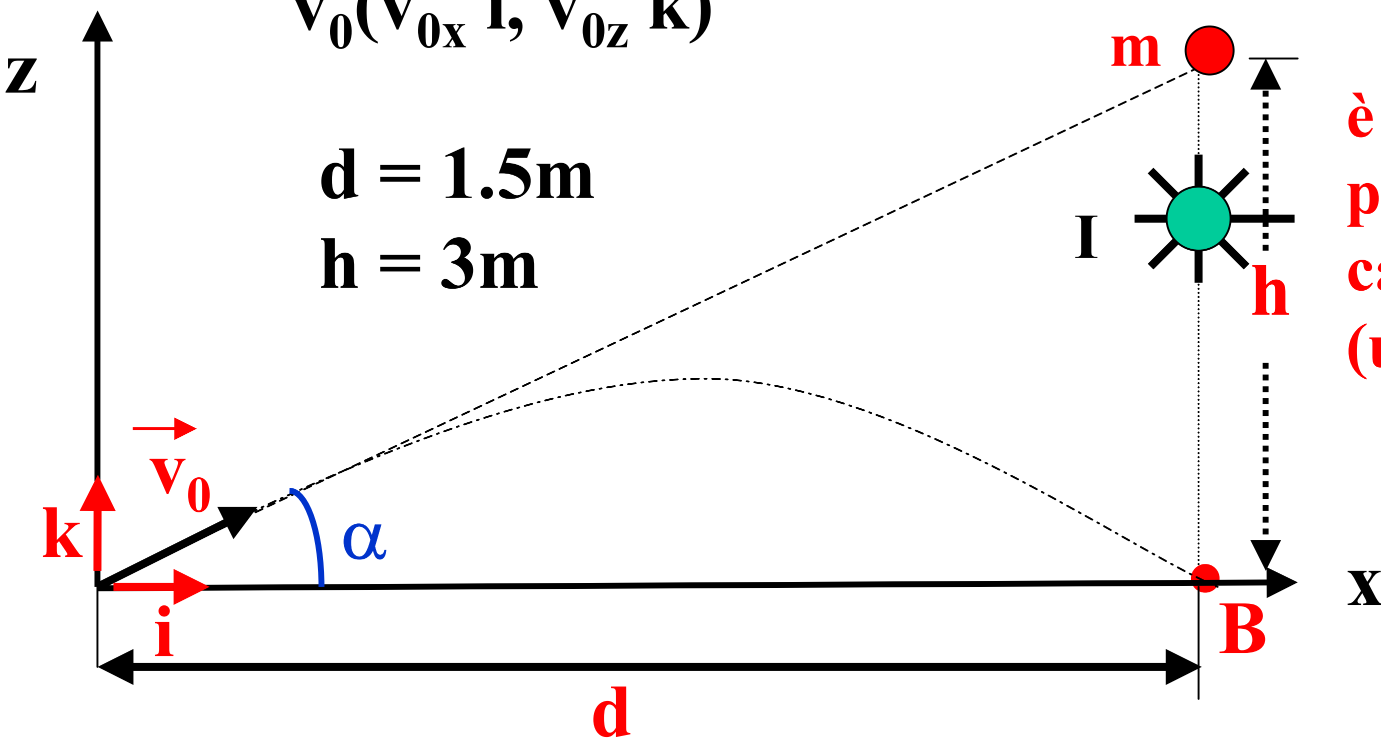
Varianti del problema limite considerato

Testo

Un cannone C è puntato sulla sfera di massa m posta all'altezza h dal suolo, inizialmente in quiete. A t=0 Il cannone spara e la sfera viene lasciata cadere.

1. Determinare la velocità iniziale $\vec{v}_0$ del proiettile affinchè esso colpisca m in un punto intermedio I tra la posizione iniziale ed il suolo.

$\vec{v}_0(v_{0x}\, \mathbf{i},\, v_{0z}\, \mathbf{k})$



è la stessa procedura del caso limite (urto al suolo).

Soluzione

Indichiamo con pedice ‘p’ le grandezze riferite al proiettile
Indichiamo con pedice ‘s’ le grandezze riferite alla sfera

Proiettile

$x_p = v_{0x}\, t = v_0 \cos\alpha\, t$

$z_p = v_{0z}\, t - 1/2 g\, t^2 = v_0 \sin\alpha\, t - 1/2 g\, t^2$

Sfera

$x_s = d$

$z_s = h - 1/2 g\, t^2$

Se t^* è l’istante dell’urto tra sfera e proiettile nel punto richiesto I si deve verificare che:

$$x_p(t^*) = x_s(t^*) = d$$
$$z_p(t^*) = z_s(t^*)$$

$$x_p(t^*) = x_s(t^*) = d = v_{0x}\, t^* = v_0 \cos\alpha\, t^*$$

$$\downarrow$$

$$t^* = d/(v_0 \cos\alpha)$$

$$z_p(t^*) = v_0 \sin\alpha\, t^* - 1/2 g\, t^{*2} = z_s(t^*) = h - 1/2 g\, t^{*2}$$

$$\downarrow$$

$$v_0 \sin\alpha \bullet d/(v_0 \cos\alpha) = h$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = h/d}$$

La relazione trovata ci dice che se il cannone punta sulla sfera essa verrà colpita in I indipendentemente da v_0 ed m. Ovviamente al variare di v_0 cambierà I e $v_0 \geq v_{0L}$

Terzo Esempio

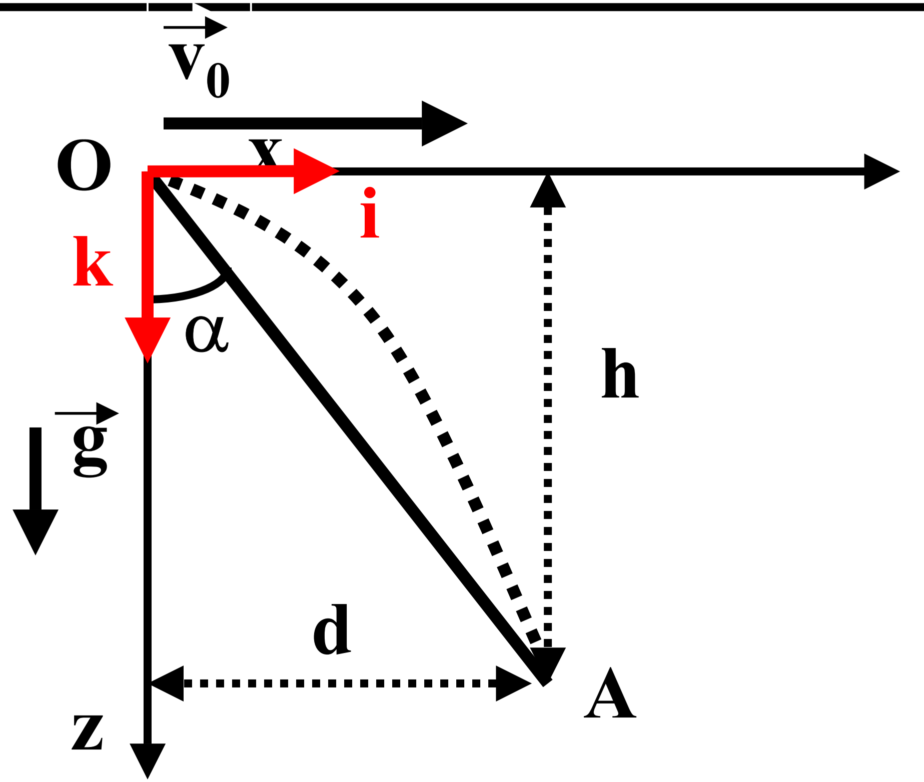
Testo

Un bombardiere vola ad una quota h=6000 m con velocità $\vec{v}_0 = 600Km/h\ \mathbf{i}$.

1. Determinare l'angolo rispetto alla verticale sotto cui si deve vedere l'oggetto A da colpire All'istante dello sgancio della bomba

$$tg\ \alpha = h/d$$

d≡incognita



Analisi del Testo

1. **Cinematica bidimensionale del punto materiale**
2. **Unica accelerazione presente $\vec{g}$ lungo z :moto uniformemente accelerato con velocità iniziale 0**
3. **Moto uniforme lungo x con velocità v_0 i**
4. **Conclusione: composizione di due moti**

Scelte

Sistema di riferimento bidimensionale:

1. **Asse x ≡ orizzontale ;asse z ≡ verticale → basso**
2. **Componenti della velocità $\vec{v}_0$ → v_{0x} i; v_{0z} = 0 k**

essendo tg α = h/d → d da determinare

Tabella Leggi Cinematiche per i Moti Unidimensionali

Legge	Si	No
1) $s = v\,t + s_0$	X	
2) $s = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + s_0$	X	
3) $v = v_0 + a\,t$		X
4) $z = A\sin(\omega t + \varphi)k$		X
5) $v = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi)k$		X
6) $a = -\omega^2 z$		X

Lungo x

Lungo z

Soluzione

Equazioni parametriche del moto

$$x = v_0 \cdot t \rightarrow t = x/v_0$$

$$\downarrow$$

$$z = 1/2g \cdot t^2$$

$$\downarrow$$

$$z = 1/2g \cdot (x/v_0)^2$$

Equazione traiettoria

$$\downarrow$$

$$x = v_0 \sqrt{2z/g}$$

Per $z=h=6000\text{m}$; $v_0 = 600\text{km/h} = 166\text{m/s}$ si ha:

$x=d=166 \cdot \sqrt{2 \cdot 6000/9.8} \approx 5800\ \text{m}$

$\text{tg}\ \alpha = 5800/6000 = 0.915 \rightarrow \alpha = 42° 30'$

Quarto Esempio

Testo

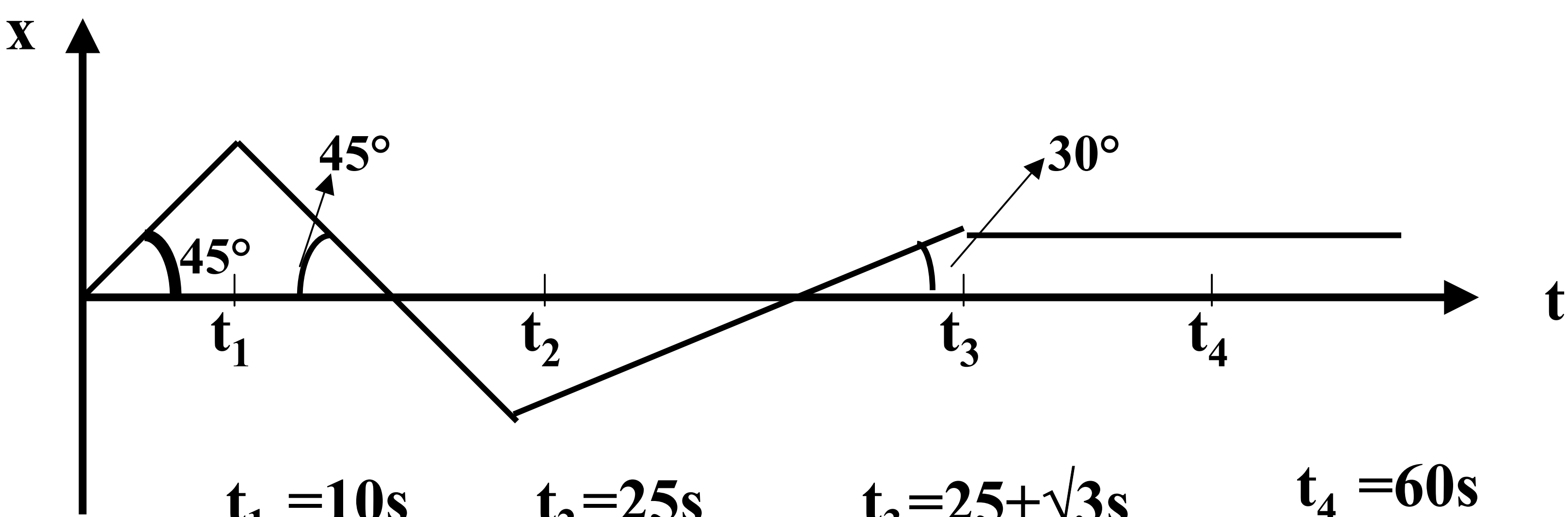
Un punto materiale si muove su una retta(asse x) Di moto vario.La legge oraria del moto è rappresentata in figura : l'ascissa x è misurata da una origine C.

Valutare

a) L'ascissa del punto negli istanti indicati in figura

b) La velocità del punto negli intervalli di tempo

$$0 - t_1,\ t_2 - t_1,\ t_3 - t_2\ ,\ t_3 - \infty$$



t_1 =10s t_2=25s t_3=25+√3s t_4 =60s

Analisi del Testo

1. Cinematica unidimensionale del punto materiale
2. Si può considerare moto uniforme a tratti
3. Si può applicare il metodo generale di soluzione

Scelte

Scegliamo di risolvere il problema avvalendoci del metodo generale di soluzione:

Sappiamo che $v_x = dx/dt$. Sappiamo che la derivata dx/dt ci fornisce la pendenza della curva in figura → tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente geometrica fa con la direzione positiva dell'asse t.

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} v_x \, dt + x(t_0)$$

Soluzione → **Metodo generale**

$0 - t_1 \rightarrow v_{01}=dx/dt=tg(45°) = 1 m/s$

$t_1 - t_2 \rightarrow v_{12}=dx/dt=tg(135°)= -1 m/s$

$t_2 - t_3 \rightarrow v_{23}=dx/dt=tg(30°) = 0.577\ m/s$

$t_3 - \infty \rightarrow v_{3\infty}=dx/dt=tg(0°) = 0$

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} v_{01} dt + x(0) = v_{01}(t_1 - 0) + x(0) = 1 \bullet 10 + 0 = 10m$$

$$x(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v_{12} dt + x(t_1) = v_{12}(t_2 - t_1) + x(t_1) = -1 \bullet 15 + 10 = -5m$$

$$x(t_3) = \int_{t2}^{t_3} v_{23} dt + x(t_2) = v_{23}(t_3 - t_2) + x(t_2) = 0.577 \bullet 10\sqrt{3} - 5 = 5m$$

$$x(t_4) = \int_{t_3}^{t_4} v_{34} dt + x(t_3) = v_{34}(t_4 - t_3) + x(t_3) = 0 + 5 = 5m$$

Esercizi proposti

1) La velocità media di un atleta che corre i 100 metri in 10 s è uguale a 10m/s.

- Quanto vale la velocità in Km/h?

2) Un corpo si muove lungo l'asse x e la sua distanza dall'origine dipende dal tempo t secondo la legge: $x(t)=at^3+bt^2+ct+d$.

- Quali sono le dimensioni di x e delle costanti a,b,c,d?

3) Due treni che viaggiano con velocità costanti uno verso l'altro su binari paralleli distano, ad un certo istante, 500 km uno dall'altro. Il primo treno viaggia alla velocità di 120 Km/h, mentre il secondo viaggia alla velocità di 160 km/h.

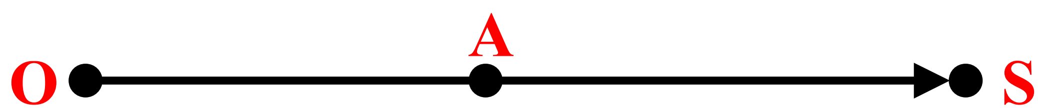
- a) Dopo quanto tempo si incrociano?
- b) Prendendo come origine dell'asse x la posizione iniziale del primo treno, in quale punto si incrociano?

4) Un corpo viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza di 20 m. Dopo quanto tempo tocca il suolo? Con quale velocità lo raggiunge?
5) Un corpo viene lanciato con velocità v_0 verso l'alto, lungo la verticale. Che altezza raggiunge? Dopo quanto tempo tocca il suolo?

Esercizi svolti

1. Una macchina viaggia a velocità costante v = 40 m/s quando il guidatore riceve il segnale di stop. Se, prima che i riflessi gli consentano di frenare, trascorre un tempo t_R = 0.75 s, qual è la decelerazione necessaria perché l'auto si fermi dopo altri 4 s? Quanto spazio ha percorso la macchina dall'istante in cui è apparso il segnale di stop?

SOLUZIONE



Durante il tempo t_R il moto è rettilineo uniforme e la macchina percorre uno spazio $s_1 = vt_R$.Trascorso t_R il moto è uniformemente decelerato (con decelerazione a) e la macchina percorre uno spazio AS; la velocità iniziale di questo moto è v, mentre la velocità finale è uguale a zero: $0 = v - at \Rightarrow a = v/t = 40/4\ m/s^2 = 10 m/s^2$

Spazio percorso: Primo tratto $\Rightarrow s_1 = 40 m/s \bullet 0.75 s = 30 m$

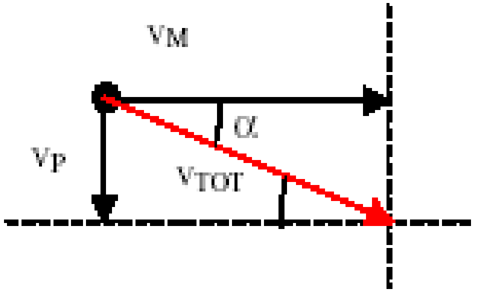
Secondo tratto $\Rightarrow s_2 = ? \Rightarrow 0 = v^2 - 2as_2 \Rightarrow s_2 = v^2/(2a) = 80 m$

Spazio totale $= s_1 + s_2 = 110$ m

Mentre un'auto viaggia a velocità costante $v_M = 12$ m/s, una palla è lanciata orizzontalmente dal finestrino in direzione perpendicolare a quella del moto della macchina, con velocità $v_P = 5$ m/s. Calcolare la velocità della palla rispetto al suolo in modulo, direzione e verso. In quale istante la palla toccherà terra, se il finestrino della macchina dista h = 80 cm dal suolo?

NB. La velocità impressa alla palla da chi la lancia non ha componente verticale!

SOLUZIONE



$$|v_{TOT}| = \sqrt{|v_M|^2 + |v_P|^2} = 13 m/s$$

$v_P = v_{TOT} \sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = v_P / v_{TOT} = 0.385 \rightarrow \alpha \approx 22.64°$

Moto di caduta uniformemente accelerato con accelerazione g dall'altezza h:

$$z = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2z}{g}} \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.40\, s$$

Quanto impiega a ritornare al suolo un corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0 =12 m/s?

SOLUZIONE

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

NB Il fatto di aver attribuito un segno meno alla velocità dipende dal fatto che velocità iniziale e accelerazione di gravità hanno versi opposti; sarebbe stato altrettanto corretto considerare la velocità con segno positivo e g con segno negativo. La scelta dipende unicamente dal sistema di riferimento adottato.

Poniamo s =0

$$0 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = t\left(v_0 + \frac{1}{2} g t \right)$$

Le due soluzioni sono t=0 (istante iniziale) e

$$t = -2\frac{v_0}{g} = -2 \cdot (-12)/9.8 = 2.4s$$

Due navi procedono lungo la stessa rotta; la nave A passa alle ore 12.00 dalla boa B con velocità pari a 30 km/h; la nave C passa alle ore 12.30 dalla boa B con velocità pari a 40 km/h. Quando la nave C colliderà con la nave A? Disegnare il diagramma orario.

SOLUZIONE

$s_A = s_B + v_A(t - t_A)$

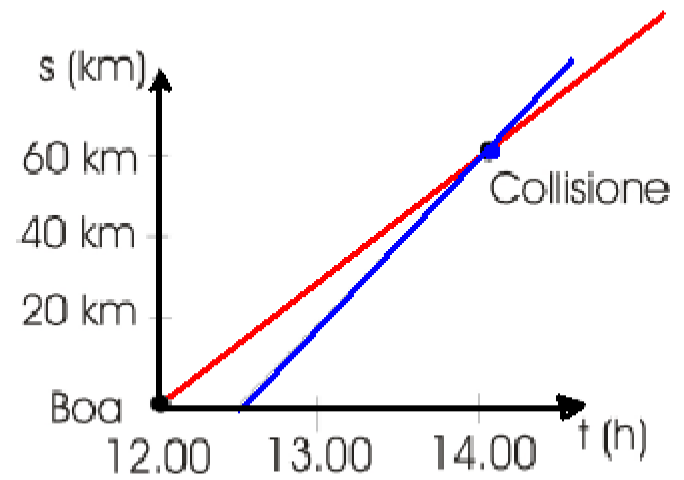
$s_C = s_B + v_C(t - t_C)$

La collisione si ha per $s_A = s_C$:

$s_B + v_A(t - t_A) = s_B + v_C(t - t_C)$

$t(v_A - v_C) = v_A t_A - v_C t_C \Rightarrow$

$t = (v_A t_A - v_C t_C)/(v_A - v_C) = 14.00$



Questo tipo di problema presenta diverse varianti : il fatto concettuale, è comunque connesso a imporre che siano uguali le posizioni ad un certo istante dei due punti materiali.

Una palla viene lanciata verso l'alto con una velocità di 10 m/s da un'altezza di 10m.
Determinare il tempo che impiega per toccare il suolo e la sua velocità. Disegnare il relativo diagramma orario.

SOLUZIONE

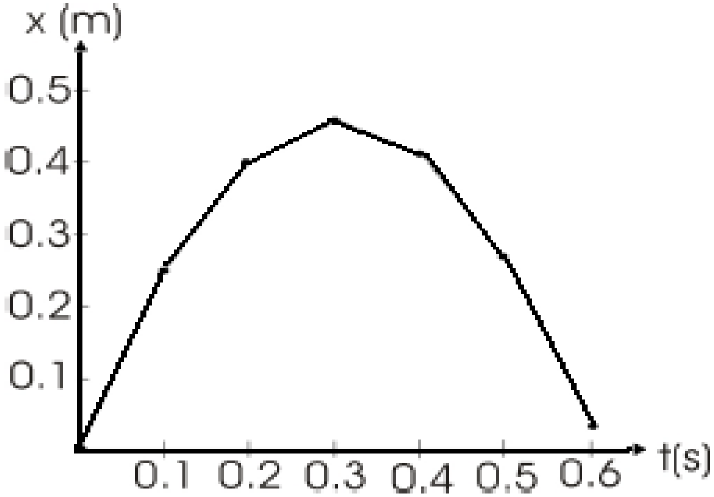
Questo problema è analogo a quello già sviluppato:
È una versione semplificata.Si provi a risolverlo Autonomamente.

Calcolare tabella oraria e grafico orario di un moto che ha la seguente equazione oraria:

$x = 3t - 4.9t^2$ (t è espresso in secondi, x in metri).

Determinare inoltre velocità iniziale ed accelerazione

t(s)	x(m)
0.0	0.00
0.1	0.25
0.2	0.40
0.3	0.46
0.4	0.41
0.5	0.27
0.6	0.04



$v_0 = 3$ m/s

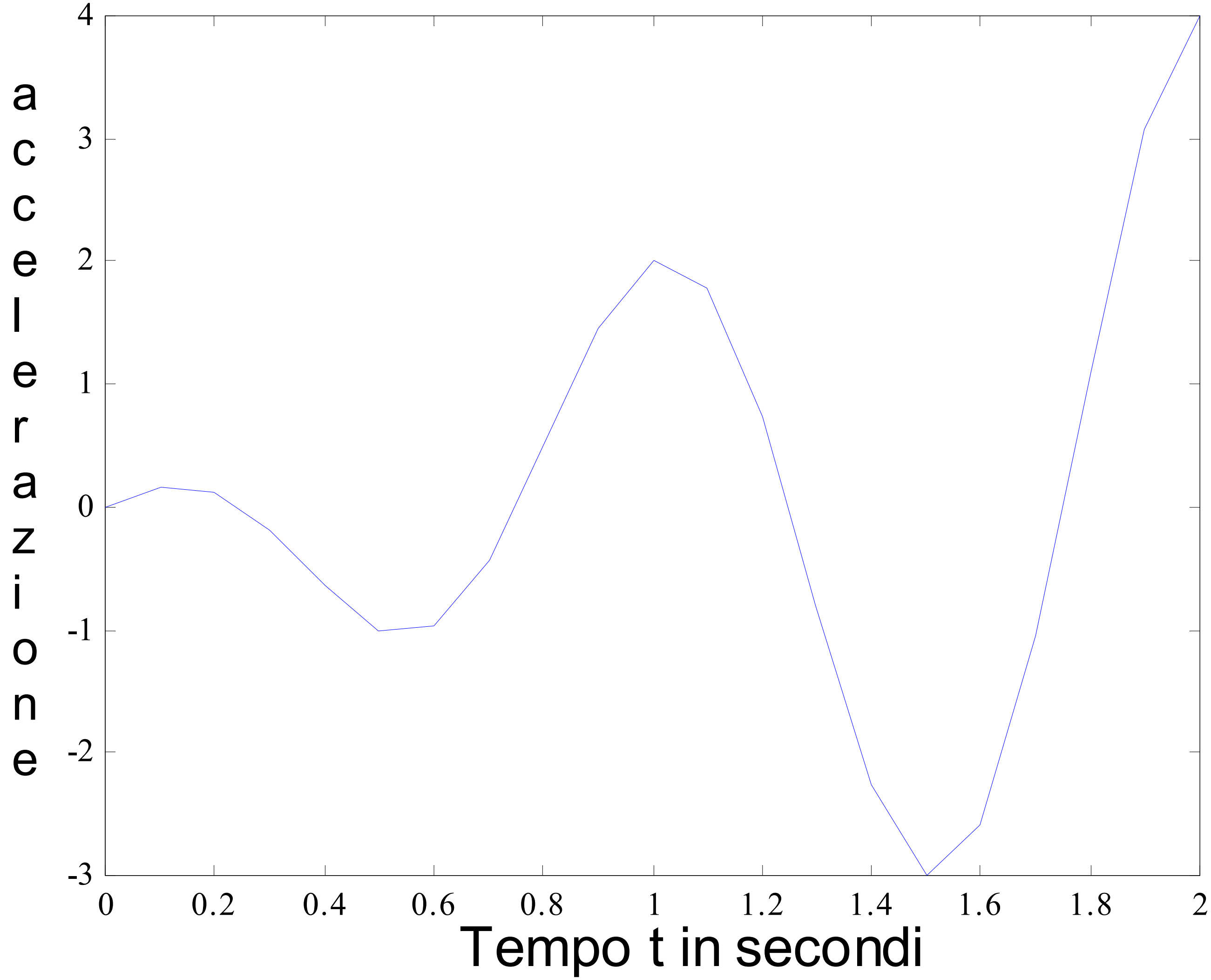
$a = 9.8 m/s^2$

Data la legge oraria della accelerazione di un punto mobile determinare le leggi orarie di velocità e spostamento. $a = 2t \cdot \cos(2\pi t)$

0	0
0.1000	0.1618
0.2000	0.1236
0.3000	-0.1854
0.4000	-0.6472
0.5000	-1.0000
0.6000	-0.9708
0.7000	-0.4326
0.8000	0.4944
0.9000	1.4562
1.0000	2.0000

1.1000	1.7798
1.2000	0.7416
1.3000	-0.8034
1.4000	-2.2652
1.5000	-3.0000
1.6000	-2.5889
1.7000	-1.0507
1.8000	1.1125
1.9000	3.0743
2.0000	4.0000

DA SVOLGERE



accelerazione
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
Tempo t in secondi