Capitolo VII

Note di topologia generale

1. Spazi topologici.

Sia S un insieme non vuoto. Una famiglia **A** di parti di S i cui elementi sono chiamati ***aperti*** è una ***topologia*** per S se essa verifica le seguenti proprietà:

1. $\Phi \in \mathbf{A}$ **,** $S \in \mathbf{A}$

2. $A \in \mathbf{A}$ **ed** $A' \in \mathbf{A}$ **allora** $A \cap A' \in \mathbf{A}$

3. Per ogni famiglia $\{ A_i \}_{i \in I}$ **di aperti si ha** $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathbf{A}$

Si richiede quindi che :

il vuoto ed S siano aperti , che l'intersezione di un numero finito di aperti sia ancora un aperto e che l'unione di un numero qualsiasi di aperti sia ancora un aperto.

La famiglia **A** i cui unici aperti siano il vuoto ed S è una topologia detta *topologia banale.*

La famiglia **A** i cui aperti siano tutti i sottoinsiemi di S è una topologia detta *topologia discreta*.

(Altri esempi di topologia : la topologia naturale di R; la topologia dei "chiusi-aperti" di R, topologia di R delle semirette sinistre aperte.
Definizione di BASE di una topologia. Proprietà delle basi. Esempi; basi di R con la topologia naturale.
Costruzione di una topologia a partire da quella che sarà una sua base.)

A parte questi casi estremi , non sempre è facile la realizzazione di una famiglia **A** di parti di S con le proprietà ora richieste per cui è utile la seguente:

Proposizione 1.1 *Sia S un insieme e sia **B** una famiglia di parti di S che abbia le seguenti proprietà :*

a) *B è un ricoprimento di S*

b) *l'intersezione non vuota di due elementi di B è unione di elementi di B.*

*La famiglia **A** di parti di S contenente il vuoto ed i sottoinsiemi che si possono ottenere attraverso tutte le possibili unioni degli elementi di **B** è allora una topologia per S.*

Dimostrazione. Per semplicità di esposizione precorrendo il risultato chiamiamo aperti gli elementi di **A** .

Poiché **B** è un ricoprimento allora è $S = \bigcup_{X \in B} X$ e quindi S è un aperto .

Siano A ed A' due aperti , elementi di **A** . Per definizione esistono due sottofamiglie F ed F' di elementi di **B** per cui risulta :

$$A = \bigcup_{X \in F} X \qquad\qquad A' = \bigcup_{Y \in F'} Y$$

Si ha allora .

$$A \cap A' = (\bigcup_{X \in F} X) \cap (\bigcup_{Y \in F'} Y) = \bigcup_{X,Y} (X \cap Y)$$

Per la proprietà b) anche $X \cap Y$ è unione di elementi di **B** e così $A \cap A'$ risultando unione di elementi di **B** appartiene ad **A** e quindi è un aperto.

E' evidente infine che per ogni famiglia $\{ A_i \}_{i \in I}$ di aperti si ha $\bigcup_{i \in I} A_i \in A$ in quanto essendo ogni A_i una unione di elementi di **B** anche $\bigcup_{i \in I} A_i$ risulta unione di elementi di **B** . Poiché anche il vuoto fa parte della famiglia **A** allora tale famiglia è , come si voleva provare , una topologia per S.

(Relazione di finezza tra topologie di uno stesso insieme. Esempi.)

La situazione favorevole descritta dalla proposizione ora provata si ha quando l'insieme S è munito di una ***metrica***, nozione di cui ora ci occupiamo.

Sia S un insieme non vuoto . Una ***metrica*** in S è una funzione

$$d : S \times S \to R$$

verificante le seguenti proprietà :

1_D. d (x, y) = 0 se e solo se è x = y (*proprietà di coincidenza*)

2_D. d (x, y) = d (y, x) (*proprietà di simmetria*)

3_D. d (x, y) + d (y, z) ≥ d (x, z) (*proprietà triangolare*)

(Si prova subito, applicando la 3_D con z = x, che : **∀ x, y ∈ S, d(x, y) ≥ 0**)

Chiameremo il numero reale non negativo d (x, y) ***distanza di x da y***. Se d è una metrica in S la coppia (S , d) è chiamato ***spazio metrico***, ed S è detto il ***sostegno*** dello spazio metrico.

(Esempi di spazi metrici : metrica discreta, metrica "del taxi" in R^2, **metrica euclidea in uno spazio vettoriale euclideo**, ...)

Se (S , d) è uno spazio metrico allora utilizzando la metrica d possiamo costruire per S una topologia A e tale topologia si dice *indotta dalla metrica d* .

Vediamo come si procede.

Sia quindi (S , d) uno spazio metrico. Siano y un elemento di S ed r un numero reale positivo. Si chiama *cerchio aperto di centro y e raggio r* il seguente sottoinsieme
C(y , r) di S :

$$C(y , r) = \{ x \in S : d (x, y) < r \}$$

Poiché d(y , y) = 0 allora l'insieme C(y , r) non è vuoto in quanto y ∈ C(y , r). Sia ora **B** la famiglia di tutti i cerchi aperti C(y , r) al variare di y in S ed r tra i numeri reali positivi. Proveremo ora che la famiglia **B** verifica le proprietà a) e b) della proposizione 1.1 ed è quindi in grado di generare una topologia. Per fare ciò è utile la seguente

Proposizione 1.2. *Sia* $C = C(y , r)$ *un cerchio aperto e sia* z *un suo punto. Esiste un cerchio aperto* $C' = C(z , r')$ *di centro* z *contenuto nel cerchio* C.

Dimostrazione. Poiché z è un punto del cerchio $C= C(y , r)$ si ha

$$d (z , y) < r.$$

Sia r' un numero positivo tale che risulti

$$(*) \qquad r' < r - d (z , y)$$

Proviamo che il cerchio aperto C' con centro in z e raggio r' è contenuto nel cerchio C. Sia quindi x un punto di C' e proviamo che è x appartiene a C. Si ha infatti **,** tenendo conto di (*) e della proprietà triangolare ,

$$d (x, y) \leq d (x, z) + d (z , y) < r' + d (z , y) < r$$

Dalla proposizione ora provata segue che :

Proposizione 1.3 *L'intersezione di due cerchi aperti se è non vuota è unione di cerchi aperti.*

Dimostrazione. Siano C e C' due cerchi aperti ad intersezione non vuota. Sia x un punto di $C \cap C'$. Per la proposizione 1.2 esiste un cerchio aperto I di centro x e raggio r contenuto in C ed un cerchio aperto I' di centro x e raggio r' contenuto in C'. Supposto ad esempio $r \leq r'$ si ha $I \subseteq I'$ e quindi I contiene x ed è contenuto in $C \cap C'$. L' asserto è così provato.

Abbiamo cosi provato che la famiglia **B** di tutti i cerchi aperti dello spazio metrico (S , d) verifica le proprietà a) e b) della proposizione 1.1.

Pertanto la famiglia A_d di parti di S costituita dal vuoto e da tutti i sottoinsiemi di S che siano ciascuno una unione di cerchi aperti costituisce una topologia per S.

Tale topologia "generata" dai cerchi aperti è detta *topologia indotta dalla* *metrica***.** Tenendo conto della proposizione 1.2 si ha facilmente la seguente caratterizzazione degli aperti di tale topologia A_d .

Un sottoinsieme A di S è un aperto di tale topologia se e solo se esso ha la seguente proprietà :

(**) *Per ogni y di A esiste un cerchio aperto di centro y contenuto in A.*

Analizzeremo in seguito molte proprietà importanti di tale topologia $\mathbf{A_d}$.

E' evidente che se (S , d) è uno spazio metrico allora ogni suo sottoinsieme X è a sua volta uno spazio metrico quando lo si munisca della stessa metrica d pensata ristretta ad esso .

Un esempio importante di spazio metrico è il seguente (metrica euclidea nello sapzio vettoriale euclideo R^n con il prodotto scalare standard).

Sia n un intero positivo e sia R^n lo spazio vettoriale delle n-ple ordinate di numeri reali. Come abbiamo gia provato al n.8 cap.VII (*fondamenti di geometria piana*) si può definire nello spazio R^n una distanza al seguente modo .

Siano $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ed $\underline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ due elementi di R^n . Si definisce distanza *euclidea* di $\underline{\mathbf{x}}$ da $\underline{\mathbf{y}}$ il seguente numero reale

$$(+) \qquad d(\underline{\mathbf{x}} , \underline{\mathbf{y}}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + .. + (x_n - y_n)^2}$$

Quando si pensa R^n munito di tale distanza euclidea, R^n è uno spazio metrico e la topologia indotta da tale metrica euclidea è chiamata la ***topologia naturale di*** $\boldsymbol{R^n}$

Quando è $n = 1$ siamo nel campo R dei numeri reali e la (+) diviene

$$d (x, y) = |x - y|$$

e così il cerchio aperto di centro y e raggio r è :

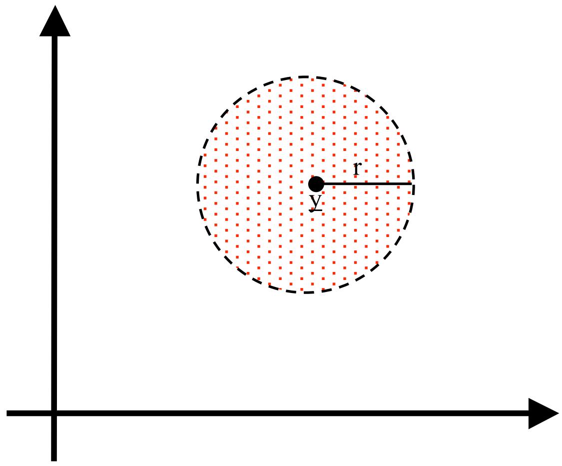
$$C (y , r) = \{ x \in R : d (x, y) < r \} = \{ x \in R : |x - y| < r \} =$$

$= \{ x \in R \ : \ -r < x - y < r \} = \{ x \in R \ : \ y - r < x < y + r \}$

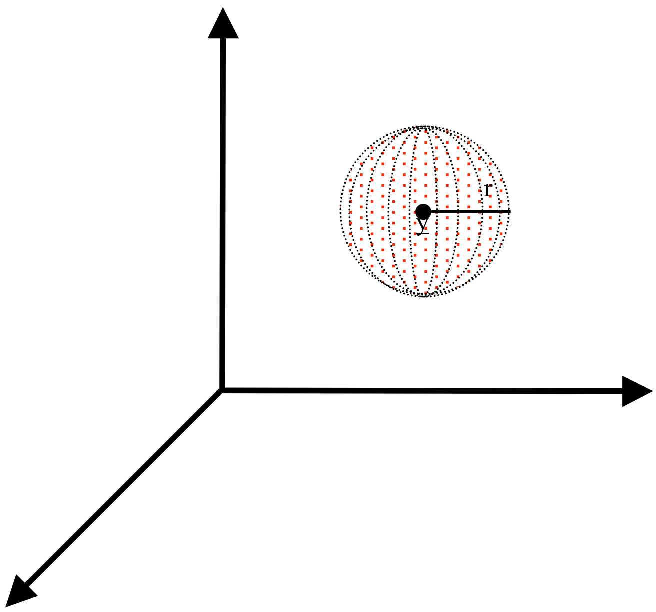
l'intervallo aperto

$$] \, y\text{-}r \ , \ y\text{+}r \, [.$$

Se $n = 2$ ed è $\underline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ ed r è il raggio allora il cerchio aperto di centro $\underline{\mathbf{y}}$ e raggio r è , usando una rappresentazione piana di R^2 attraverso l'uso di un riferimento monometrico cartesiano, è davvero il cerchio racchiuso dalla circonferenza di centro $\underline{\mathbf{y}}$ e raggio r .



Se n=3 ed è $\underline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ ed r è il raggio allora il cerchio aperto di centro $\underline{\mathbf{y}}$ e raggio r è , usando una rappresentazione di R^3 attraverso l'uso di un riferimento monometrico cartesiano, è la sfera aperta con centro in $\underline{\mathbf{y}}$ e raggio r.



2. Chiusi di uno spazio topologico.

Sia (S ,A) uno spazio topologico . Come detto gli aperti elementi di A verificano le seguenti proprietà :

1. **$\Phi \in$ A , S $\in$ A**
2. **A $\in$ A ed A’ $\in$ A allora A $\cap$ A’ $\in$ A**
3. **Per ogni famiglia $\{ A_i \}_{i \in I}$ di aperti si ha $\bigcup_{i \in I} A_i \in$ A**

I complementari degli aperti vengono chiamati ***chiusi*** . Denotata con **C** la famiglia dei chiusi di S si ha subito che la famiglia **C** ha le seguenti proprietà :

I. **$\Phi \in$ C, S $\in$ C**

II. **C $\in$ C ed C’ $\in$ C allora C $\cup$ C’ $\in$ C**

III. **Per ogni famiglia $\{ C_i \}_{i \in I}$ di chiusi si ha $\bigcap_{i \in I} C_i \in$ C**

Esprimendo tali proprietà a parole : *il vuoto ed S sono chiusi , l’unione di un* *numero finito di chiusi è un chiuso e l'intersezione di un qualsiasi numero di chiusi è un chiuso.*

E' evidente che se **C** è una famiglia di parti di S con le proprietà I, II, III allora la famiglia **A** dei complementari degli elementi di **C** verifica le proprietà 1, 2, 3 e quindi costituisce una topologia per S. Inoltre per lo spazio topologico (S , **A**) la famiglia **C** diventa la famiglia dei chiusi.
(Esempi di chiusi nei vari spazi noti).

Sia S uno spazio topologico e siano **A** e **C** le famiglie degli aperti e dei chiusi di S. Utilizzando tali famiglie si possono definire le nozioni di ***interiore*** e di ***chiusura*** di un sottoinsieme. Vediamo di che si tratta.

Sia X un sottoinsieme di S si definisce ***interno*** *o* ***interiore*** di X il più *grande aperto contenuto in X*. Tale interiore si ottiene attraverso **l'unione di tutti gli aperti contenuti** in X e viene indicato col simbolo $\mathring{X}$. Si ha quindi per definizione :

$$\mathring{X} = \bigcup_{A \subseteq X} A \qquad A \text{ aperto}$$

E' facile controllare la seguente proprietà che caratterizza i sottoinsiemi aperti di S.

Proposizione 2.1 *Un sottoinsieme A di S è aperto se e solo se coincide col suo interiore.*

Tenendo conto che da $X \subseteq Y$ segue $\mathring{X} \subseteq \mathring{Y}$ si ha facilmente la seguente proprietà :

$$(X \cap Y)^{\circ} = \mathring{X} \cap \mathring{Y}$$

Sia X un sottoinsieme di S si definisce ***chiusura*** di X il più *piccolo chiuso contenente X*. Tale chiusura si ottiene attraverso **l'intersezione di tutti**

gli chiusi contenenti X e viene indicato col simbolo $\bar{X}$. Si ha quindi per definizione :

$$\bar{X} = \bigcap_{C \supseteq X} C \qquad C \text{ chiuso}$$

E' facile controllare la seguente proprietà che caratterizza i sottoinsiemi chiusi di S.

Proposizione 2.2 *Un sottoinsieme C di S è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura.*

Tenendo conto che da $X \subseteq Y$ segue $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$ si ha facilmente la seguente proprietà :

$$\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$$

(Esempi ed esercizi su interiore e chiusura nei vari spazi topologici noti).

Utilizzando la definizione non sempre è facile il calcolo della chiusura e dell'interiore di un sottoinsieme assegnato. Un modo alternativo e a volte più agevole si ottiene attraverso l'uso dei punti *interni* ad X o dei punti *aderenti* ad X. Vediamo di che si tratta.

Per fare ciò ci serve però un concetto semplice ma fondamentale in topologia : il concetto di ***intorno di un punto***. Vediamo.

Sia quindi (S ,A) uno spazio topologico . Sia y un punto di S . Si definisce ***intorno di y*** *un qualunque sottoinsieme I contenente un aperto contenente y.*

In simboli

$I \subseteq S$ intorno di y *se e solo se* esiste $A \in \mathcal{A}$: $y \in A \subseteq I$.

Denoteremo col simbolo **I**(y) la *famiglia di tutti gli intorni* del punto y.

Per la definizione data è chiaro che un aperto che contenga y è un intorno di y.

Poiché l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto allora evidentemente l'intersezione di un numero finito di intorni del punto y è anch'essa un intorno del punto y.

Nel seguito denoteremo con **A**(y) la famiglia di tutti gli aperti contenenti y.

Molto importante per il seguito è la seguente osservazione :

Una proprietà "p" è verificata in ogni intorno di y se e solo se essa è verificata in ogni aperto che contiene y .

Per questa ragione quando dovremo verificare la validità di un certa proprietà utilizzeremo anziché la famiglia **I**(y) la famiglia **A**(y) .

Più in generale una famiglia **H**(y) di intorni di y è detta ***sistema fondamentale d' intorni per il punto y*** *se in ogni intorno di y c' è un intorno di y che faccia parte della famiglia* ***H(y)*** .

Evidentemente la famiglia **A**(y) costituisce per il punto y un sistema fondamentale di intorni .

(Esempi – e controesempi – di intorni e di sistemi fondamentali di intorni)

Utilizzando tale concetto anche l'osservazione fatta sopra può essere generalizzata al seguente modo:

Una proprietà "p" è verificata in ogni intorno di y se e solo se essa è verificata in ogni intorno di un sistema fondamentale di intorni di y .

Siamo ora in grado di introdurre la nozione di punto *interno* ad un sottoinsieme e di punto *aderente* ad un sottoinsieme.

Un punto y di un sottoinsieme X si dice ***interno ad X*** *se esiste un intorno di y contenuto in X o equivalentemente se esiste un aperto contenente y e contenuto in X.*

Poiché l'interiore di X è un aperto contenuto in X allora ogni punto che appartenga all' interiore è punto interno ad X . Viceversa un punto che sia interno ad X appartiene ad un aperto contenuto in X e quindi appartiene all'interiore di X. Pertanto l'interiore di X è costituito da tutti e soli i punti interni ad X.

(Un metodo – molto usato - per verificare se un sottoinsieme è un aperto è fornito dalla seguente osservazione : "*Un sottoinsieme A di S è aperto se, e solo se, ogni suo punto è interno*").

Un punto y di S si dice ***aderente al sottoinsieme X*** *se ogni intorno di y contiene almeno un punto di X o equivalentemente se ogni aperto contenente y contiene almeno un punto di X.*

(**Punti isolati** e I(X). **Punti di accumulazione e D(X)**)

Utilizzando tale concetto possiamo caratterizzare la chiusura di un sottoinsieme provando la seguente :

Proposizione. 2.3 *La chiusura di un sottoinsieme X coincide con l'insieme dei punti aderenti ad X.*

Dimostrazione. Proveremo l'asserto mostrando che sono equivalenti le seguenti affermazioni :

i) *y non appartiene alla chiusura di X*

ii) *y non è aderente ad X.*

Proviamo che i) implica ii).

Se $y \notin \bar{X} = \bigcap_{C \supseteq X} C$ allora esiste un chiuso C_o contenente X cui y non appartiene . Detto A_o l'aperto $S - C_o$ si ha $y \in A_o$ ed inoltre è $A_o \cap X = \Phi$ e questo prova che y non è aderente ad X.

Proviamo che   ii) implica i).

Se y non è aderente ad X esiste un aperto A_o contenente y e disgiunto da X. Il chiuso $C_o = S - A_o$ contiene X e non contiene y . Pertanto y non appartiene alla chiusura di X.

(Si ha : $\overline{X} = I(X) \cup D(X)$. Esempi; **insiemi densi**).

Un'altra caratterizzazione della chiusura di un sottoinsieme X si ottiene attraverso l'uso della nozione di ***punto di accumulazione***. Vediamo.

Un punto y di S si dice ***d'accumulazione per il sottoinsieme X*** *se in ogni intorno di y c'è almeno un punto di X diverso da y* o *equivalentemente se in ogni aperto contenente y c'è almeno un punto di X diverso da y.*

L'insieme di tutti i punti di accumulazione per il sottoinsieme X è chiamato il ***derivato di X*** ed è indicato con il simbolo D(X).

E' evidente che i punti di accumulazione per X sono aderenti ad X ed è altresì evidente che un punto aderente ad X e che non faccia parte di X è d'accumulazione per X. Pertanto si ha la seguente eguaglianza :

$$\overline{X} = \mathbf{X} \cup D(X)$$

la quale fornisce un'altra caratterizzazione della chiusura di X.

Un punto aderente ad X ed al complementare di X è detto di *frontiera* per X.

L' insieme dei punti di frontiera viene denotato con $F_r(X)$ e viene chiamato la ***frontiera di X***. Si ha facilmente la seguente eguaglianza :

$$\overline{X} = \mathbf{X} \cup F_r(X)$$

la quale fornisce un'altra caratterizzazione della chiusura di X.