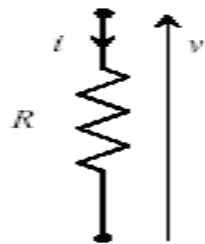


## Modelli dinamici di sistemi elementari

### Resistore



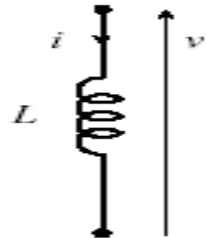
$R$ : resistenza

$i$ : corrente

$v$ : tensione

$$v(t) = Ri(t)$$

### Induttore



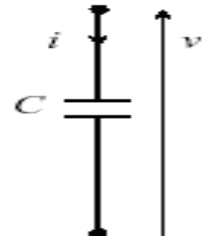
$L$ : induttanza

$i$ : corrente

$v$ : tensione

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

### Condensatore



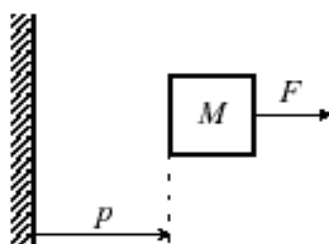
$C$ : capacità

$i$ : corrente

$v$ : tensione

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

### Massa



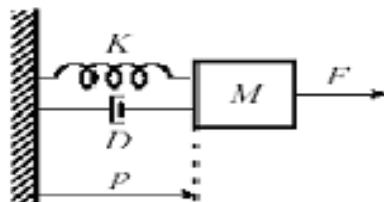
$M$ : massa  
 $p$ : posizione  
 $v$ : velocità  
 $a$ : accelerazione  
 $F$ : forza

$$v(t) = \frac{dp(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$F(t) = Ma(t)$$

### Oscillatore meccanico



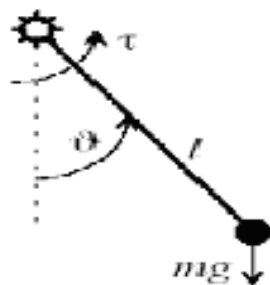
$M$ : massa  
 $K$ : costante elastica  
 $D$ : coefficiente di attrito  
 $p$ : posizione  
 $v$ : velocità  
 $a$ : accelerazione  
 $F$ : forza

$$v(t) = \frac{dp(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$F(t) = Kp(t) + Dv(t) + Ma(t)$$

### Pendolo



$\tau$ : coppia

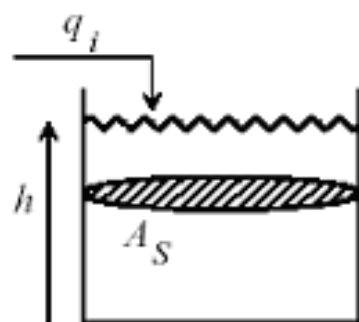
$l$ : lunghezza dell'asta (priva di massa)  
 $m$ : massa concentrata  
 $g$ : accelerazione di gravità  
 $\theta$ : posizione angolare  
 $\omega$ : velocità angolare  
 $\alpha$ : accelerazione angolare

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$\tau(t) = m l^2 \alpha(t) + m g l \sin(\theta(t))$$

### Serbatoio cilindrico



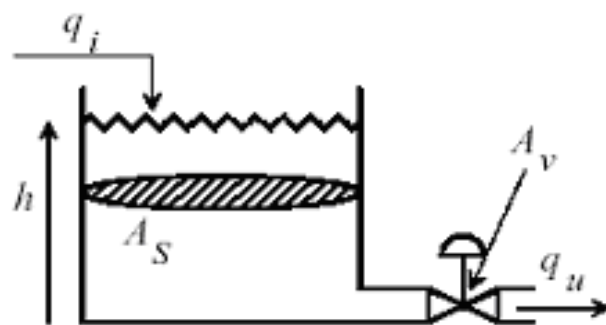
$A_S$ : area sezione serbatoio

$h$ : livello liquido

$q_i$ : portata di liquido entrante

$$q_i(t) = A_S \frac{dh(t)}{dt}$$

### Serbatoio cilindrico con valvola d'efflusso



$A_S$ : area sezione serbatoio

$A_v$ : area di efflusso della valvola

$k$ : coefficiente caratteristico della valvola

$h$ : livello liquido

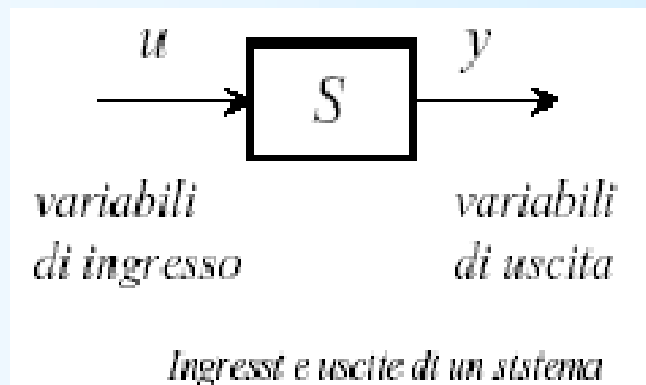
$q_i$ : portata di liquido entrante

$$q_i(t) = A_S \frac{dh(t)}{dt} + kA_v \sqrt{h(t)}$$

# Sistemi dinamici

- Un sistema dinamico si interfaccia con il “resto del mondo” per mezzo di una serie di variabili, che definiremo di ingresso, ed altre che definiremo di uscita.

Definiamo di ingresso le variabili che influenzano il comportamento del sistema, di uscita quelle che caratterizzano il sistema e sulle quali soffermiamo il nostro interesse (tipicamente perché costituiscono l'obiettivo del controllo).



- La relazione che sussiste tra variabili di ingresso e di uscita è di causa-effetto e non ha nulla a che vedere con relazioni di afflusso ed efflusso di materia o energia (la portata di uscita in un serbatoio può essere variabile di ingresso per il sistema, se per esempio è comandata da una pompa).

E' sufficiente descrivere il comportamento dinamico di un sistema mediante relazioni algebriche tra i suoi ingressi e le sue uscite?

Quasi sempre no (nei nostri esempi, solo per il resistore), per due motivi:

- **occorre conoscere i valori assunti dalle variabili di ingresso a partire dall'istante iniziale**
- **occorre conoscere una o più condizioni iniziali.**

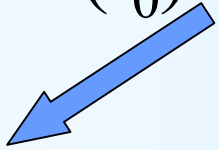
# Esempi per capire il significato di Variabile di Stato

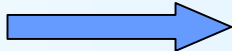
- Sistema vasca da bagno: se immettiamo 10 litri d'acqua nella vasca in un certo tempo, siamo in grado di determinare a quale altezza si porta il livello d'acqua nella vasca? Certamente no se non è noto il livello iniziale a cui si trovava l'acqua prima dell'immissione. Quindi per determinare la situazione finale della vasca occorre conoscere, non solo l'ingresso ma anche la situazione iniziale ovvero lo **stato iniziale** a partire dal quale il sistema evolve. In questo caso l'altezza del pelo libero dell'acqua che cambia in funzione della quantità di massa immessa nel sistema:
- E' una variabile che descrive lo stato del sistema cioè una **variabile di stato**

- Esaminiamo il sistema aula in cui ci troviamo: ipotizziamo di immettere nella stanza una quantità di calore pari a 1000 joule. Siamo in grado di determinare la temperatura della stanza? No se non conosciamo la temperatura iniziale: anche in questo caso possiamo affermare che la temperatura è una variabile di stato che varia in funzione della quantità di energia immessa o sottratta al sistema.

# Equazione di Stato

- La evoluzione di una variabile di stato  $x(t)$  si determina se:
- E' noto il suo valore  $x(t_0)$  ad un istante precedente  $t_0$
- E' nota la variazione della variabile di stato determinata dagli ingressi nell'intervallo tra il tempo attuale  $t_1$  e  $t_0$
- Perciò  $x(t_1) = x(t_0) + f(x(t_0), u(t_0)) \cdot (t_1 - t_0)$


$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t))$$

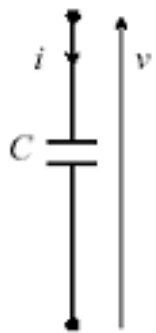


**Equazione di stato** del sistema

# Esempio

- Consideriamo a titolo di esempio il condensatore, in cui l'ingresso è costituito dalla corrente ( $u(t) = i(t)$ ), l'uscita dalla tensione ( $y(t) = v(t)$ ).

Condensatore



C: capacità

i: corrente

v: tensione

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Sapendo che  $C = q(t)/v(t)$ , ovvero  $q(t) = Cv(t)$  quindi  $i(t) = dq/dt = Cdv/dt$ , avendo posto  $y(t) = v(t)$  e  $u(t) = i(t)$ , si ha che essendo  $y(t) = y(t_0)$  per  $t = t_0$ :

$$C \dot{y}(t) = u(t) \Rightarrow y(t) = y(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

Occorre quindi conoscere il valore iniziale della tensione e l'andamento della corrente dall'istante iniziale.

- Il numero minimo di condizioni iniziali che occorre assegnare per determinare tutte le uscite del sistema, noti gli andamenti degli ingressi a partire dall'istante iniziale, prende il nome di *ordine* del sistema: lo indicheremo con  $n$ .

Per descrivere l'evoluzione dinamica del sistema è quindi sufficiente assegnare, istante per

istante,  $n$  valori, ovvero dare l'andamento nel tempo di  $n$  variabili: indicheremo con  $x_1, x_2, \dots,$

$x_n$  queste variabili e le definiremo **variabili di stato**.

Sia  $m$  il numero delle variabili di ingresso e  $n$  il numero di variabili di stato, avremo:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \\ x_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \bullet \\ x_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \dots\dots\dots \\ \bullet \\ x_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{array} \right\} \text{Equazioni di Stato}$$

# Trasformazioni di uscita

- Negli esempi fatti in precedenza la variabile di stato (altezza, temperatura, corrente) coincideva con la variabile di uscita del sistema. Nei primi due casi, vasca e stanza, se avessimo voluto determinare la posizione di un galleggiante, o la quantità di calore dispersa dalla stanza verso l'esterno, si sarebbe dovuta cercare una relazione tra ingressi, stati e uscita del sistema del tipo:

$$y(t)=g(x(t),u(t)) \quad \text{Trasformazione di uscita}$$

La relazione precedente indica che l'uscita  $y(t)$  all'istante  $t$  è funzione dello stato e dell'ingresso in quell'istante.

# Continua

- Sia  $m$  il numero delle variabili di ingresso e  $p$  il numero di variabili di uscita, potremo scrivere che:

[illegible]

Che accoppiate alle equazioni di stato caratterizzano completamente la evoluzione dinamica di un sistema

$$\left. \begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ &\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ &\dots\dots\dots \\ &\dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{aligned} \right\} Equazioni di Stato$$

# Rivisitazione di alcune definizioni

- Un sistema si dice **dinamico** se è descritto dalle equazioni:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \\ \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \bullet \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \dots\dots\dots \\ \bullet \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{array} \right\} \text{Equazioni di Stato}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1(t) = g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ y_2(t) = g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \dots\dots\dots \\ y_p(t) = g_p(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{array} \right\} \text{Trasformazioni di Uscita}$$

Il vettore  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  Si definisce **stato del sistema** all'istante  $t$

Il numero  $n$  delle variabili di stato si definisce **ordine del sistema**

# Continua

Introduciamo i vettori:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_p(t) \end{bmatrix}.$$

e le funzioni  
vettoriali:

$$f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \dots \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix},$$

$$g(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \dots \\ g_p(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix}$$

Possiamo riscrivere le equazioni  
del sistema dinamico in forma  
compatta vettoriale tempo  
invariante:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

## Continua

Definiremo poi come sistemi *SISO* (Single Input Single Output) i sistemi per cui  $m=p=1$ ,

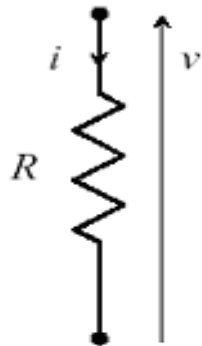
*MIMO* (Multiple Input Multiple Output) gli altri.

Infine si dirà **strettamente proprio** un sistema in cui la funzione  $g$  non dipende dall'ingresso  $u$ ,

**genericamente proprio** un sistema in cui ciò non accade.

Rianalizziamo  
i sistemi  
dinamici  
considerati in  
termini di  
Ingresso  
Stato Uscita:

### Resistore



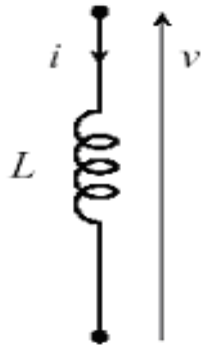
ingresso:  $u = v$

uscita:  $y = i$

variabili di stato: nessuna

$$y(t) = \frac{1}{R} u(t)$$

### Induttore



ingresso:  $u = v$

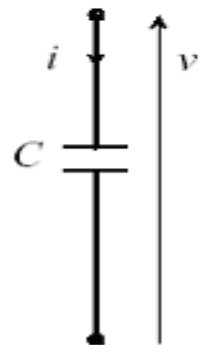
uscita:  $y = i$

variabili di stato:  $x_1 = i$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Condensatore



ingresso:  $u = i$

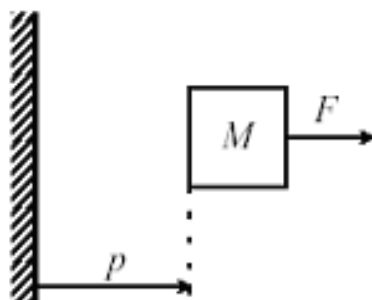
uscita:  $y = v$

variabili di stato:  $x_1 = v$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Massa



ingresso:  $u = F$

uscita:  $y = p$

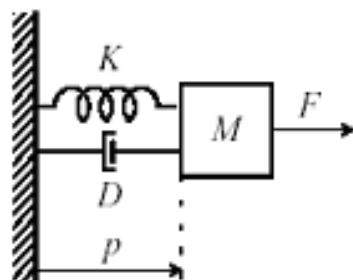
variabili di stato:  $x_1 = p, x_2 = v$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Oscillatore meccanico



ingresso:  $u = F$

uscita:  $y = p$

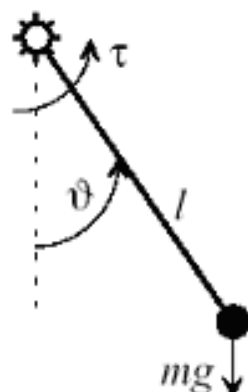
variabili di stato:  $x_1 = p, x_2 = v$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{M}(-Kx_1(t) - Dx_2(t) + u(t))$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Pendolo



ingresso:  $u = \tau$

uscita:  $y = \vartheta$

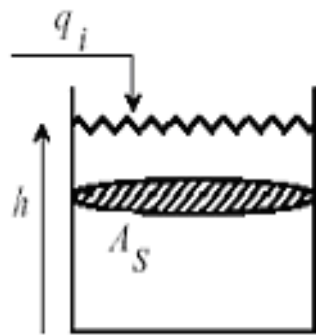
variabili di stato:  $x_1 = \vartheta, x_2 = \omega$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) + \frac{1}{ml^2}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Serbatoio cilindrico



ingresso:  $u = q_i$

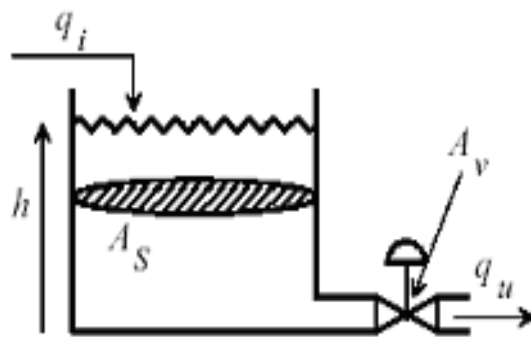
uscita:  $y = h$

variabili di stato:  $x_1 = h$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{A_S} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Serbatoio cilindrico con valvola d'efflusso



ingresso:  $u = q_i$

uscita:  $y = h$

variabili di stato:  $x_1 = h$

$$\dot{x}_1(t) = -k \frac{A_v}{A_S} \sqrt{x_1(t)} + \frac{1}{A_S} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Gli esempi fatti mostrano che, di norma, le variabili di stato sono associate a fenomeni di accumulo (di energia elettrica, di massa, di energia potenziale, di energia cinetica, termica, etc..)

# Sistemi dinamici lineari

Nei sistemi dinamici lineari le equazioni di stato e le trasformazioni di uscita sono lineari nelle variabili di stato e nelle variabili di ingresso:

$$\left. \begin{aligned} &\bullet \quad x_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t) + \dots + b_{1m}u_m(t) \\ &\bullet \quad x_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t) + \dots + b_{2m}u_m(t) \\ &\quad \dots\dots\dots \\ &\bullet \quad x_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + b_{n2}u_2(t) + \dots + b_{nm}u_m(t) \end{aligned} \right\} \text{Equazioni di Stato}$$

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \dots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + d_{12}u_2(t) + \dots + d_{1m}u_m(t) \\ y_2(t) &= c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + \dots + c_{2n}x_n(t) + d_{21}u_1(t) + d_{22}u_2(t) + \dots + d_{2m}u_m(t) \\ &\quad \dots\dots\dots \\ y_p(t) &= c_{p1}x_1(t) + c_{p2}x_2(t) + \dots + c_{pn}x_n(t) + d_{p1}u_1(t) + d_{p2}u_2(t) + \dots + d_{pm}u_m(t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Trasformazioni} \\ \text{Uscita} \end{array}$$

Introduciamo le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{p1} & d_{p2} & \dots & d_{pm} \end{bmatrix}$$

Il sistema dinamico lineare potrà allora essere riscritto in forma compatta vettoriale come:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Tutti i precedenti esempi sono descritti da sistemi dinamici lineari, tranne il pendolo (a causa della funzione trigonometrica) ed il serbatoio con valvola di efflusso (per via della radice quadrata).

# ESEMPI DI UTILIZZO DELLA RAPPRESENTAZIONE SS TRAMITE LE MATRICI A B C D

- Cominciamo con esempi semplici del tipo di quelli già elencati e scriviamo le equazioni che ne modellano il comportamento dinamico in termini di matrici A,B,C,D.

1) Esempio Induttore

Ordine equazione:

$n=1$ ;

Matrici:

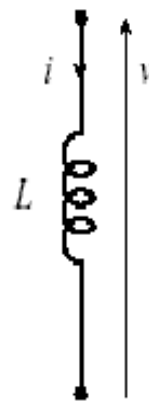
$A=0$ ;

$B=1/L$ ;

$C=1$ ;

$D=0$

Induttore



ingresso:  $u = v$

uscita:  $y = i$

variabili di stato:  $x_1 = i$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

## Esempio Condensatore

$n=1$ ;

Matrici:

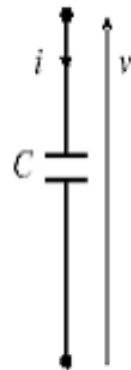
$A=0$ ;

$B=1/C$ ;

$C=1$ ;

$D=0$ ;

Condensatore



ingresso:  $u = i$

uscita:  $y = v$

variabili di stato:  $x_1 = v$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

**Ordine  $n=2$ ;**

**Matrici:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ M \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$D=0$

Massa



ingresso:  $u = F$

uscita:  $y = p$

variabili di stato:  $x_1 = p, x_2 = v$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

# Esercizio con Simulink

## 1 Esempio Condensatore

$n=1$ ;

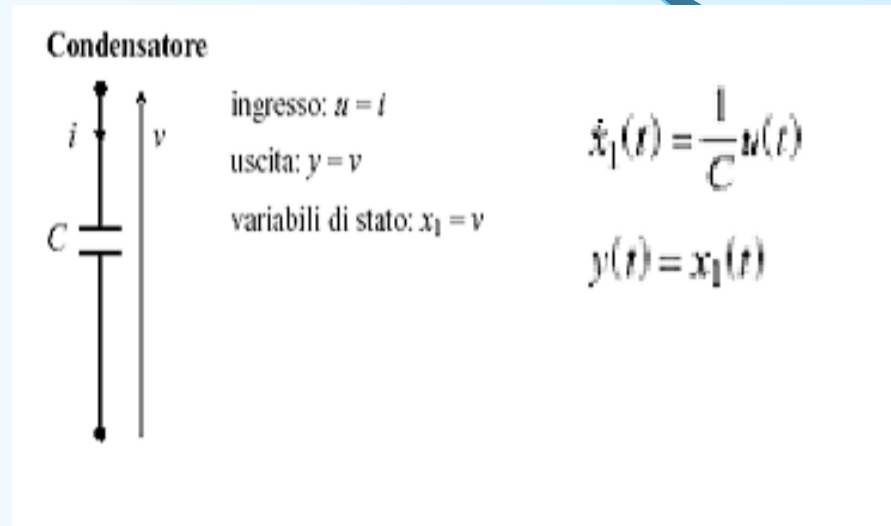
Matrici:

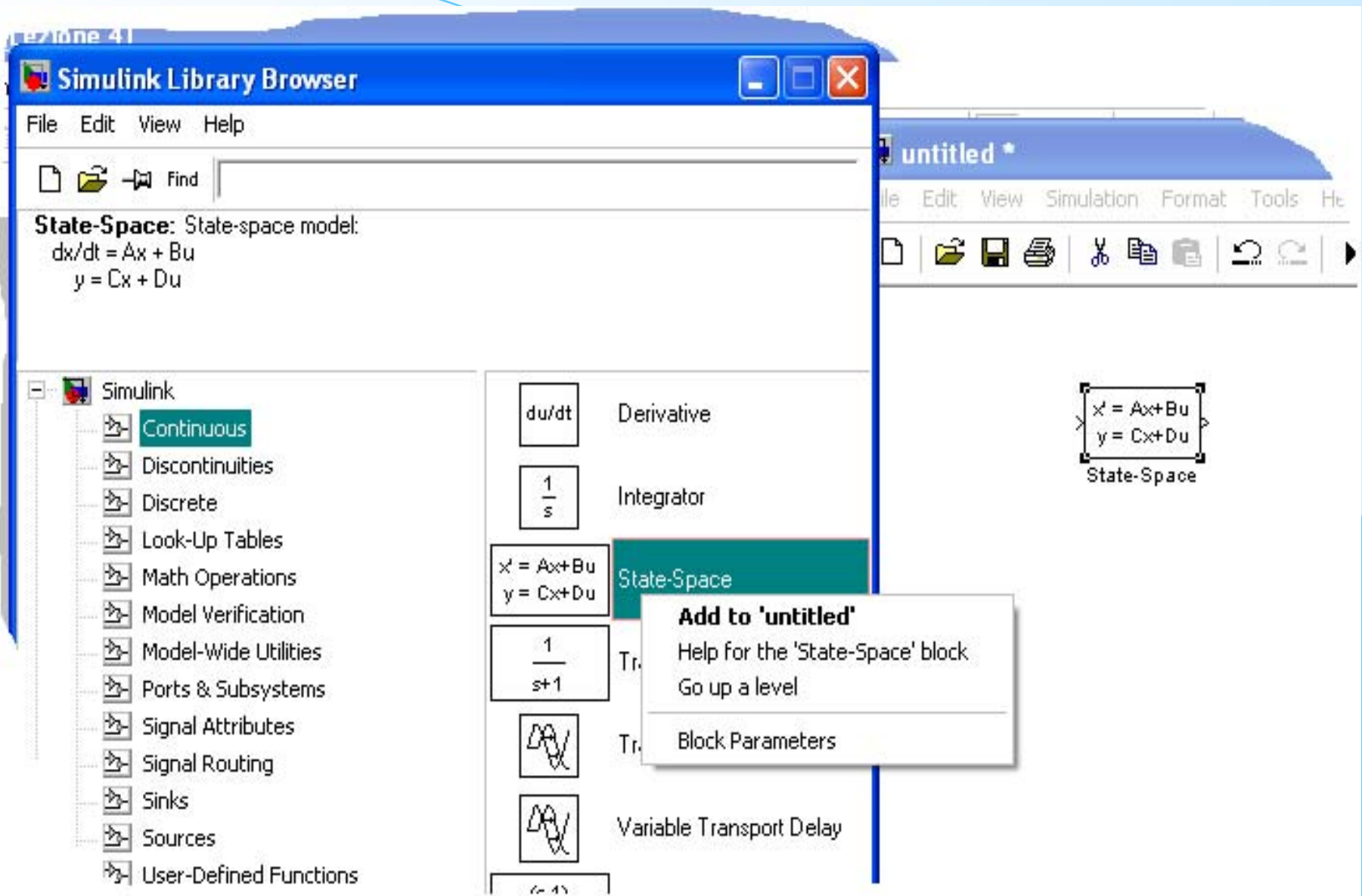
$A=0$ ;

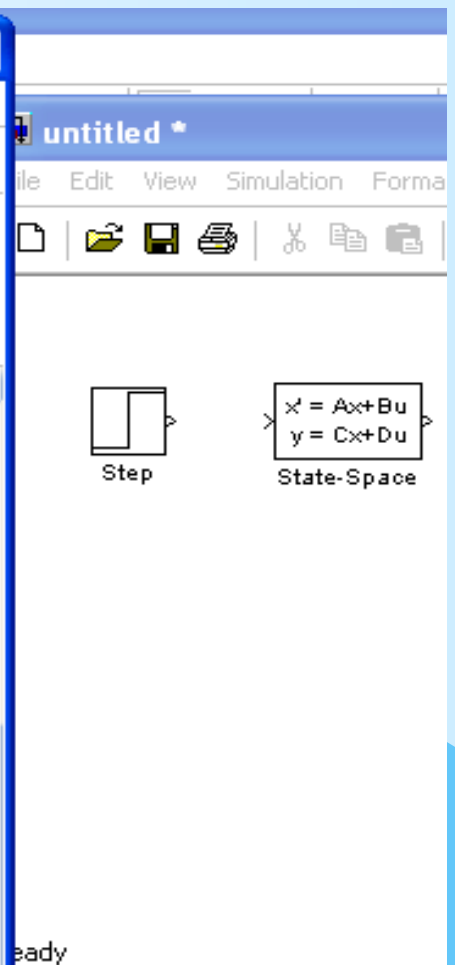
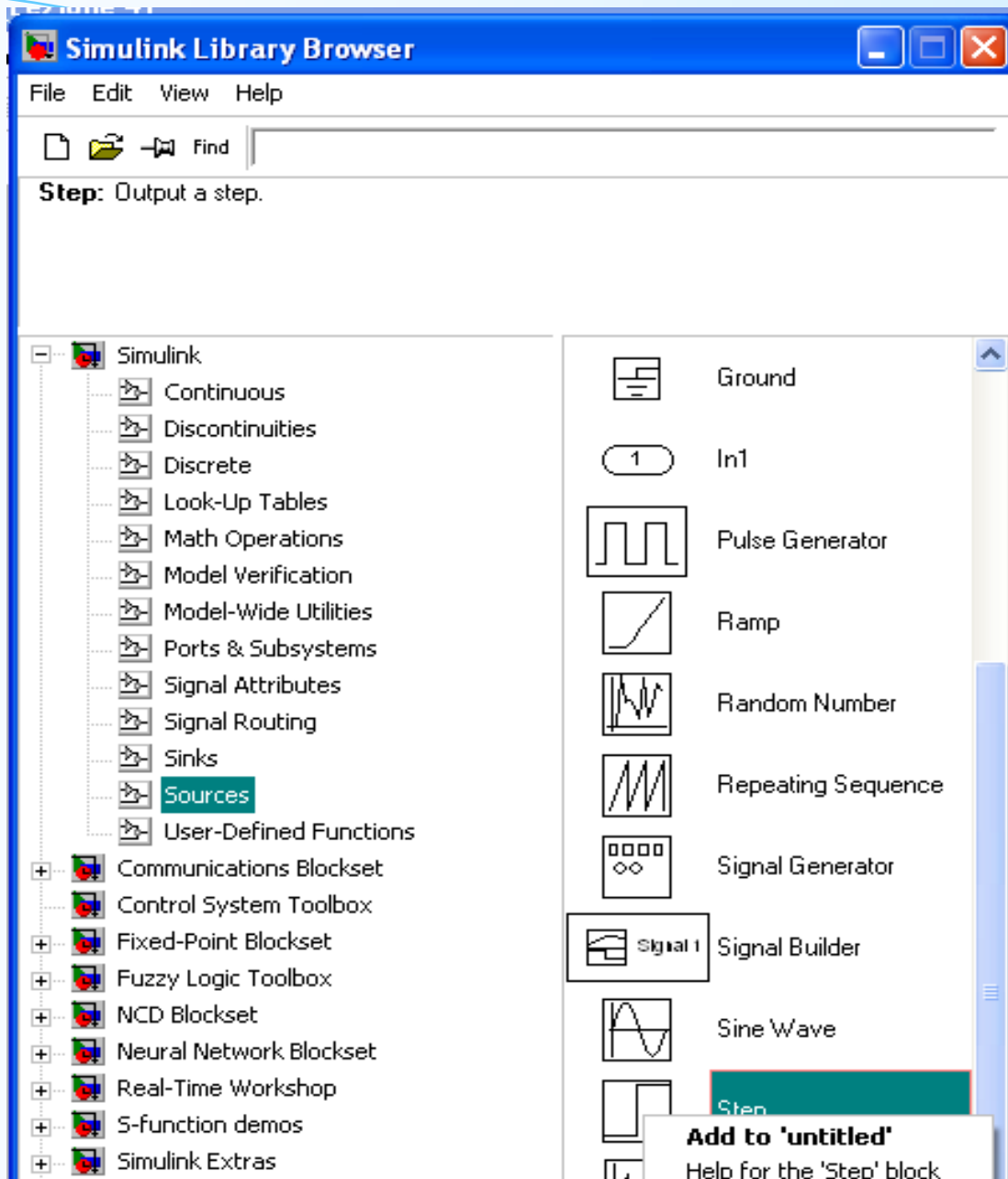
$B=1/C$ ;

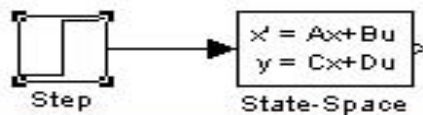
$C=1$ ;

$D=0$ ;









### Block Parameters: Step

Step  
Output a step.

Parameters

Step time:  
1

Initial value:  
0

Final value:  
1

Sample time:  
0

☒ Interpret vector parameters as 1-D

☒ Enable zero crossing detection

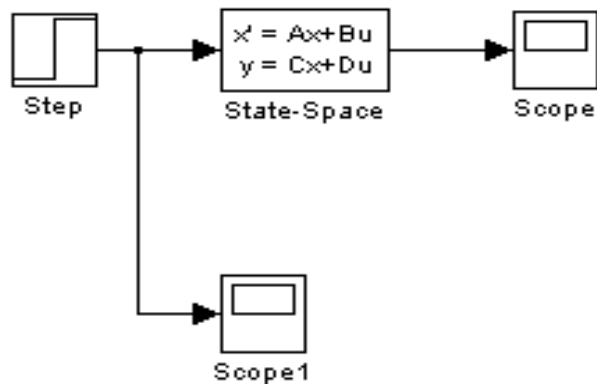
OK

Cancel

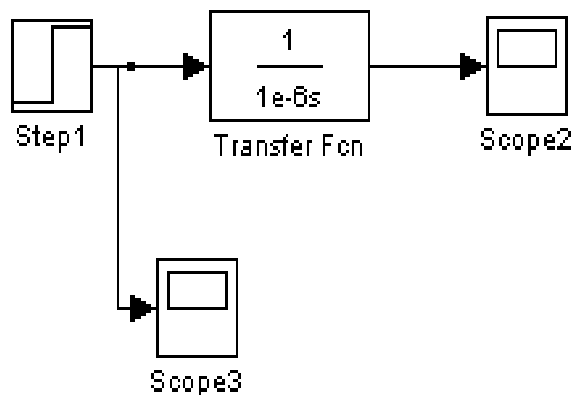
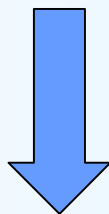
Help

Apply

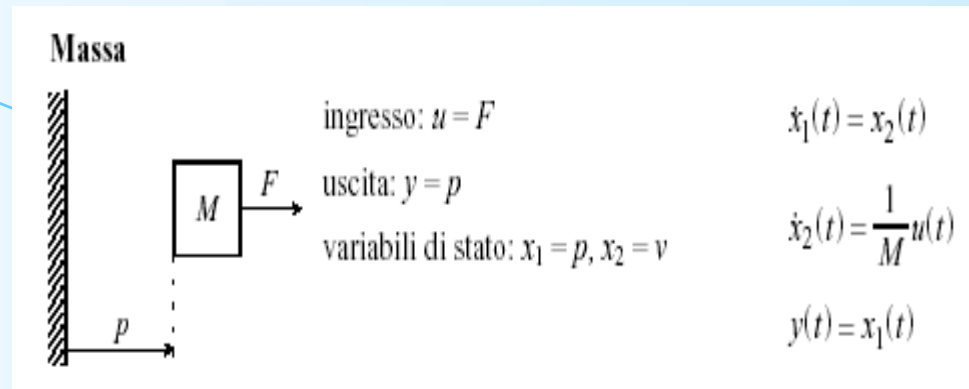
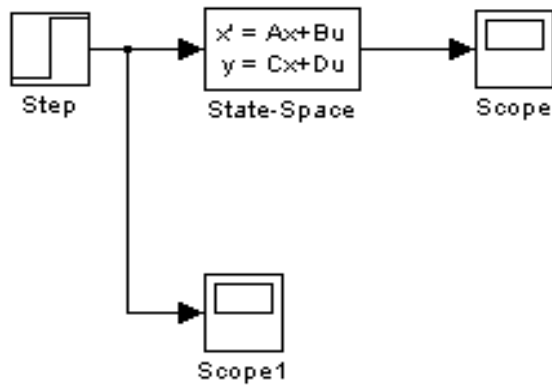




**Schemi  
Equivalenti**



**Vediamo il modello  
simulink in Matlab  
A fianco è riportato lo  
Schema realizzato,  
Vediamo la risposta  
Al gradino unitario  
Per un sistema costituito  
Da un condensatore di  
Capacità  $C=1\mu\text{F}$  e  
Sottoposto ad un gradino  
Di tensione unitario di  
1 Volt**



**Ordine  $n=2$ ; Matrici:**  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$   $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ M \end{bmatrix}$   $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$   $\mathbf{D} = \mathbf{0}$

In generale una rappresentazione i-s-u si può ottenere dalla equazione differenziale di ordine  $n$  descrivente il comportamento dinamico del sistema in studio in quanto dall'analisi sappiamo che è sempre possibile trasformare un'equazione differenziale di ordine  $n$  in un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.

# Movimento

In un sistema dinamico il movimento (o moto) dello stato è definito come **l'evoluzione nel tempo del vettore delle variabili di stato**, a partire da un istante iniziale in cui sia dato il valore dello stato stesso, e noti gli andamenti degli ingressi da quell'istante in poi. Analoga definizione si dà per il movimento dell'uscita.

Di fatto quindi il movimento dello stato costituisce la soluzione del sistema di equazioni differenziali che forma il sistema dinamico.

Per un sistema dinamico lineare, il movimento dello stato e quello d'uscita sono scomponibili in due termini:  
**moto libero e moto forzato.**

Il moto libero dipende solo dalla condizione iniziale sullo stato del sistema (e non dagli ingressi),  
il moto forzato dipende solo dagli ingressi  
(e non dalla condizione iniziale):

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

Considerando per semplicità un sistema del primo ordine ( $n = 1$ ),  
con un ingresso ed un'uscita ( $m = p = 1$ ):

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

(in cui tutte le variabili sono quindi scalari) è facile verificare che il moto libero ed il moto forzato assumono le espressioni riportate nel seguito

## Moto libero

$$x_l(t) = e^{at} x_0$$

$$y_l(t) = e^{at} y_0$$

infatti l'equazione caratteristica per  $x(t)$  e' data da  $D-a=0$  e quindi un sistema fondamentale e' dato da  $D=ca$ .

Quindi  $x(t)=ce^{at}$  ma per  $t=0$   $x_0=c$  ed  $y(t)=y_0$  quindi  $x_l(t) = x_0 e^{at}$  e  $y_l(t) = y_0 e^{at}$ .

## Moto forzato

$$x_f(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

$$y_f(t) = \int_0^t c e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau + d u(t)$$

Le formule possono essere generalizzate  
("formula di Lagrange")  
a sistemi di ordine superiore  
e con più ingressi e/o uscite,  
introducendo il concetto di  
esponenziale di matrice.

# Sovrapposizione degli effetti

Si consideri un sistema dinamico lineare.

Si eseguano sul sistema tre esperimenti:

Il principio di sovrapposizione degli effetti, valido solo per sistemi lineari, afferma che:

**Lo stato iniziale valga  $x'_0$  e si assegni l'ingresso  $u'(t)$ , per  $t \geq 0$**

Siano  $x'(t)$  ed  $y'(t)$  i corrispondenti movimenti di stato ed uscita.

**Lo stato iniziale valga  $x''_0$  e si assegni l'ingresso  $u''(t)$ , per  $t \geq 0$ .**

Siano  $x''(t)$  ed  $y''(t)$  i corrispondenti movimenti di stato ed uscita.

**Lo stato iniziale valga  $x'''_0 = \alpha x'_0 + \beta x''_0$  e si assegni l'ingresso  $u'''_0 = \alpha u'(t) + \beta u''(t)$ , per  $t \geq 0$ , essendo  $\alpha$  e  $\beta$  due numeri reali.**

Siano  $x'''(t)$  ed  $y'''(t)$  i corrispondenti movimenti di stato ed uscita.

Il principio di sovrapposizione degli effetti, valido solo per sistemi lineari, ci da che:  **$x'''(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t)$ ;  $y'''(t) = \alpha y'(t) + \beta y''(t)$**

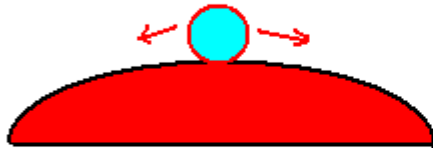
E' quindi possibile studiare separatamente l'effetto sul moto delle cause (stato iniziale e differenti ingressi) che lo generano, e quindi sovrapporre (combinare linearmente) gli effetti.

# EQUILIBRIO STABILITA' E LINEARIZZAZIONE DI UN SISTEMA DINAMICO

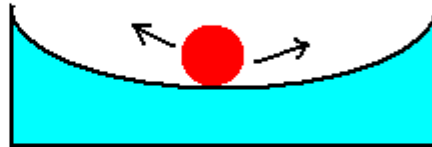
Per capire:

ENERGIA POTENZIALE

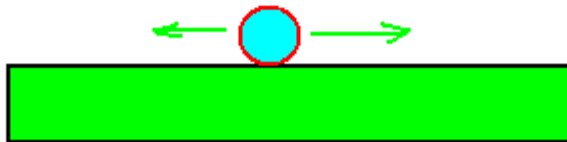
**Massima  
Instabile**



**Minima  
Stabile**



**Costante  
Indifferente**



Supponiamo che in un sistema dinamico lineare l'ingresso (o gli ingressi) del sistema dinamico (lineare o no) siano costanti. Un punto di equilibrio è caratterizzato dal fatto che tutte le variabili di stato (e quindi anche la variabile di uscita) del sistema rimangono costanti nel tempo.

# Consideriamo l'equazione di stato (vettoriale):

•  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  ed assumiamo l'ingresso costante:  $u(t) = \bar{u}$

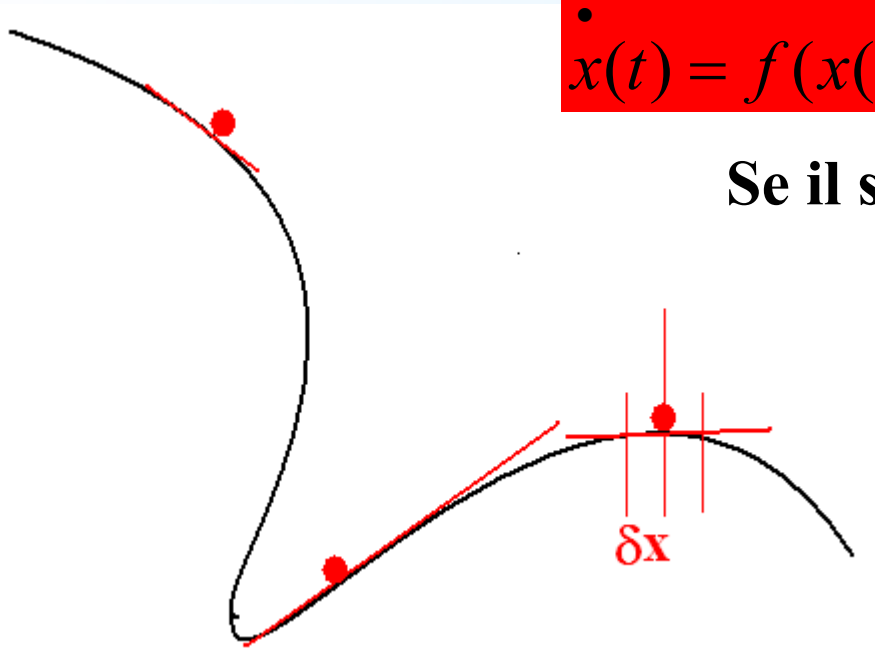
Se il sistema si trova all'equilibrio,  $x(t) = \bar{x}$  e la derivata di  $x(t)$  è nulla. Quindi:

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

Questa equazione, nell'incognita  $x$  consente di trovare il punto di equilibrio del sistema. La corrispondente *uscita di equilibrio* sarà data da:

$$\bar{y} = f(\bar{x}, \bar{u})$$

**Non è detto che lo stato di equilibrio esista e, se esiste, non è detto che sia unico.**



# Esempio

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^2 \\ y &= x_1 x_2 + \sqrt{u}\end{aligned}$$

Si vogliono individuare eventuali punti di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso Costante  $u(t) = u = 1$

Annullando le derivate si ottiene:

$$\begin{aligned}x_1^3 + 1 &= 0 \\ x_1 + x_2^2 &= 0\end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ricava, come unica soluzione reale,  $\bar{x}_1 = -1$  che, sostituita nella seconda, dà le due soluzioni:  $\bar{x}_1 = -1$  e  $\bar{x}_2 = 1$

Pertanto il sistema soggetto all'ingresso costante assegnato ammette due punti di equilibrio:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -1 \text{ e } \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{x}_1 = -1 \text{ e } \bar{x}_2 = -1 \end{cases}$$

Primo punto di equilibrio  
l'uscita di equilibrio

vale:

$$\bar{y} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \sqrt{\bar{u}} = 2$$

secondo:

$$\bar{y} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \sqrt{\bar{u}} = 0$$

# Linearizzazione

Considerando *piccoli scostamenti* delle variabili attorno a valori di equilibrio, è possibile approssimare il comportamento di un sistema dinamico non lineare con quello di un sistema dinamico lineare.

Consideriamo un generico sistema non lineare in forma vettoriale:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

soggetto all'ingresso costante  $u(t) = \bar{u}$

Supponiamo che esista il punto di equilibrio (eventualmente non unico) caratterizzato dal valore  $\bar{x}$  delle variabili di stato e dal Valore  $\bar{y}$  dell'uscita di equilibrio.

**Per definizione di equilibrio sarà quindi:**

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{u}) &= 0 \\ \bar{y} &= g(\bar{x}, \bar{u}) \end{aligned}$$

**Si supponga ora che lo stato iniziale (all'istante  $t=0$ ) sia costituito dal valore di equilibrio cui si somma un piccolo scostamento:  $x_0 = \bar{x} + \delta x_0$**

**e che, a partire dall'istante iniziale, l'ingresso si possa esprimere come la somma del valore all'equilibrio e di un piccolo scostamento:**

$$u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$$

**E' senz'altro lecito esprimere anche i movimenti di stato e uscita che ne conseguono come somma dei valori di equilibrio e di scostamenti:**

$$x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$$

$$y(t) = \bar{y} + \delta y(t)$$

**Essendo le espressioni precedenti movimenti del sistema devono soddisfarne le equazioni. Si ottiene quindi:**

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &= f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) \\ \delta x(0) &= \delta x_0 \\ \bar{y} + \delta y(t) &= g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t))\end{aligned}$$

**Il sistema linearizzato si ottiene sviluppando in serie di Taylor intorno al punto di equilibrio le equazioni di stato e le trasformazioni di uscita del sistema originario ed arrestando lo sviluppo ai termini di primo grado.**

**Nello sviluppo compariranno le derivate parziali delle funzioni vettoriali  $f$  e  $g$  rispetto agli argomenti vettoriali  $x$  e  $u$  (matrici Jacobiane), valutate nel punto di equilibrio:**

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &= f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u(t) \\ \delta x(0) &= \delta x_0 \\ \bar{y} + \delta y(t) &= g(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}, B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}, \\ C &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}, D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &= A \delta x(t) + B \delta u(t) \\ \delta x(0) &= \delta x_0 \\ \delta y(t) &= C \delta x(t) + D \delta u(t)\end{aligned}$$

**sistema linearizzato attorno ad un punto di equilibrio.**

Per il sistema linearizzato valgono quindi le proprietà dei sistemi lineari (non valide per il sistema non lineare di partenza), limitatamente a piccole variazioni intorno alla condizione di equilibrio.

## Matlab Symbolic Toolbox

### JACOBIAN Jacobian matrix.

**JACOBIAN(f,v)** computes the Jacobian of the scalar or vector **f** with respect to the vector **v**. The (i,j)-th entry of the result is  $df(i)/dv(j)$ . Note that when **f** is scalar, the Jacobian of **f** is the gradient of **f**. Also, note that scalar **v** is allowed, although this is just **DIFF(f,v)**.

**Example:** `>> syms x y z u v`  
`jacobian([x*y*z; y; x+z],[x y z])`  
$$\begin{bmatrix} y*z, & x*z, & x*y \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$
  
`jacobian(u*exp(v),[u;v])`  
$$\begin{bmatrix} \exp(v), & u*\exp(v) \end{bmatrix}$$

# Esempio

Si consideri nuovamente il sistema del secondo ordine:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_2^2 \\ y &= x_1 x_2 + \sqrt{u} \end{aligned}$$

Si vogliono determinare le espressioni dei sistemi linearizzati intorno ai due punti di equilibrio corrispondenti all'ingresso costante

$$u(t) = \bar{u} = 1$$

Abbiamo già calcolato i due punti di equilibrio:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -1 & \text{e} & \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{x}_1 = -1 & \text{e} & \bar{x}_2 = -1 \end{cases}$$

Le equazioni del sistema linearizzato sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1 &= 3\bar{x}_1^2 \delta x_1 + \delta u \\ \delta \dot{x}_2 &= \delta x_1 + 2\bar{x}_2 \delta x_2 \end{aligned}$$

$$\delta y = \bar{x}_2 \delta x_1 + \bar{x}_1 \delta x_2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\bar{u}}} \delta u$$

$$\delta \dot{x}_1 = 3\delta x_1 + \delta u$$

$$\delta \dot{x}_2 = \delta x_1 - 2\delta x_2$$

$$\delta y = -\delta x_1 - \delta x_2 + \frac{1}{2} \delta u$$

$$\delta \dot{x}_1 = 3\delta x_1 + \delta u$$

$$, \quad \delta \dot{x}_2 = \delta x_1 + 2\delta x_2$$

$$\delta y = \delta x_1 - \delta x_2 + \frac{1}{2} \delta u$$

# San Matlab sia sempre lodato!

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + x_2^2$$

$$y = x_1 x_2 + \sqrt{u}$$

```
>> syms x1 x2 y u
```

```
>> solve(x1^3+1)
```

```
ans = [ -1]
```

```
[ 1/2-1/2*i*3^(1/2)]
```

```
[ 1/2+1/2*i*3^(1/2)]
```

```
>> solve(-1+x2^2)
```

```
ans = [ 1] ;[ -1]
```

```
jacobian([x1^3+u; x2+x2^2; x1*x2+sqrt(u)],[x1 x2 u])
```

```
ans =
```

```
[ 3*x1^2, 0, 1]
```

```
[ 0, 1+2*x2, 0]
```

```
[ x2, x1, 1/2/u^(1/2)]
```

$$\delta \dot{x}_1 = 3\bar{x}_1^2 \delta x_1 + \delta u$$

$$\delta \dot{x}_2 = \delta x_1 + 2\bar{x}_2 \delta x_2$$

$$\delta y = \bar{x}_2 \delta x_1 + \bar{x}_1 \delta x_2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u}} \delta u$$