

3. Funzioni continue.

Un **isomorfismo** tra due spazi topologici (S, A) ed (S', A') è una applicazione

$$f: S \rightarrow S'$$

biettiva tra i sostegni S ed S' che con la sua inversa trasforma gli aperti dell'uno negli aperti dell'altro e cioè abbia le seguenti due proprietà :

- j) $f(A) \in A'$ per ogni aperto A di S
- jj) $f^{-1}(A') \in A$ per ogni aperto A' di S' .

Un isomorfismo tra due spazi topologici viene anche chiamato **omeomorfismo**.

Se (S, A) è uno spazio topologico. Indichiamo con $\Omega(S)$ l'insieme di tutti i suoi omeomorfismi. Rispetto alla composizione di applicazioni l'insieme $\Omega(S)$ è un gruppo detto *gruppo strutturale* dello spazio topologico (S, A) .

Una proprietà "p" di una parte Y di S si dice **topologica** se per ogni omeomorfismo f di S anche $f(Y)$ ha la proprietà "p".

Se ciò accade si dice che la proprietà "p" è **invariante** per omeomorfismi.

Lo studio dello spazio topologico (S, A) consiste nella ricerca delle *proprietà topologiche* delle figure di S .

Una applicazione

$$f: S \rightarrow S'$$

tra due spazi topologici (S, A) ed (S', A') è detta **continua** se

le controimmagini degli aperti di S' sono aperti di S .

In simboli se per ogni aperto A' di S' risulta aperto il sottoinsieme di S

$$f^{-1}(A') = \{ x \in S : f(x) \in A' \}$$

Un omeomorfismo tra due spazi topologici (S, A) ed (S', A') è quindi una funzione biettiva tra i sostegni che risulti continua insieme alla sua inversa.

C'è una nozione di *continuità in un punto* (continuità locale) che è connessa alla nozione di continuità globale ora data. Vediamo.

Siano (S, A) ed (S', A') due spazi topologici e sia

$$f: S \rightarrow S'$$

una funzione di S in S' .

Sia x_0 un punto di S e sia $y_0 = f(x_0)$ il suo trasformato. La funzione f si dice *continua nel punto* x_0 se

C1) *per ogni intorno I' di y_0 esiste un intorno I di x_0 tale che risulti :*

$$f(I) \subseteq I'$$

E' come dire :

“punti vicini ad y_0 provengono da punti vicini ad x_0 .”

La proprietà C1) è ovviamente equivalente alla seguente proprietà :

C2) *Per ogni aperto A' contenente y_0 esiste un aperto A contenente x_0 per cui si abbia :*

$$f(A) \subseteq A'$$

o ancora

C3) *la controimmagine di un intorno di y_0 è un intorno di x_0 .*

C4) *la controimmagine di ogni aperto A' contenente y_0 è un intorno di x_0 .*

Le due nozioni date, di continuità locale e globale, sono connesse tra loro come mostra la seguente :

Proposizione 3.1. Siano (S, A) ed (S', A') due spazi topologici. Una funzione

$$f: S \rightarrow S'$$

di S in S' è continua se e solo se essa è continua in ogni punto di S .

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua e proviamo che è continua in ogni punto di S . Sia x_0 un punto qualsiasi di S e sia $y_0 = f(x_0)$ il suo trasformato. Poiché f è continua la controimmagine di un aperto A' contenente y_0 è un aperto e tale aperto contiene x_0 e quindi è un intorno di x_0 . Vale quindi la proprietà c_4) e così la funzione f è continua in x_0 .

Viceversa supponiamo che f sia continua in ogni punto di S e proviamo che è continua. Sia A' un qualsiasi aperto di S' e sia $A = f^{-1}(A')$ la sua controimmagine. Supposto A non vuoto, per provare che A è aperto è sufficiente provare che ogni suo punto è interno. Sia quindi x_0 un punto di A e sia $y_0 = f(x_0)$ il suo trasformato.

Poiché $A = f^{-1}(A')$ allora $y_0 \in A'$ e poiché f è continua in x_0 per la proprietà c_4) la sua controimmagine che è A è intorno di x_0 .

Le proposizioni che seguono forniscono delle condizioni necessarie e sufficienti affinché una assegnata funzione tra due spazi topologici sia continua.

Proposizione 3.2 Una funzione $f: S \rightarrow S'$ tra due spazi topologici (S, A) ed (S', A') è continua se e solo se la controimmagine di un chiuso di S' è un chiuso di S .

Dimostrazione. Sia f continua e sia C' un chiuso di S' . Sia A' l'aperto di S' per cui è $C' = S' - A'$. Si ha $f^{-1}(C') = f^{-1}(S' - A') = S - f^{-1}(A')$.

Poiché f è continua si ha che $f^{-1}(A')$ è un aperto di S e così $f^{-1}(C')$ è un chiuso come si voleva provare.

Viceversa supponiamo che la controimmagine di un chiuso sia un chiuso e proviamo che f è continua. Occorre quindi provare che se A' è un aperto di S' allora $f^{-1}(A')$ è un aperto di S . Infatti da

$$S - f^{-1}(A') = f^{-1}(S' - A')$$

e dall'ipotesi fatta segue che $S - f^{-1}(A')$ è un chiuso e conseguentemente $f^{-1}(A')$ è un aperto.

Proposizione 3.3 Una funzione $f: S \rightarrow S'$ tra due spazi topologici (S, A) ed (S', A') è continua se e solo se trasforma punti aderenti ad un sottoinsieme X in punti aderenti al sottoinsieme $f(X)$.

Dimostrazione. Supponiamo f sia continua e sia x_0 un punto aderente al sottoinsieme X . Sia $y_0 = f(x_0)$ il trasformato di x_0 e proviamo che y_0 è aderente ad $f(X)$. Occorre quindi provare che in ogni aperto A' contenente y_0 c'è almeno un elemento di $f(X)$. Poiché f è continua nel punto x_0 , in corrispondenza dell'aperto A' intorno di y_0 , c'è un aperto A contenente x_0 tale che $f(A) \subseteq A'$. Poiché x_0 è aderente ad X nell'intorno A di x_0 c'è almeno un punto x di X . Si ha allora che $f(x)$ appartiene ad A' e ad $f(X)$.

Viceversa supponiamo che risulti $f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$ per ogni sottoinsieme X .

Sia C' un chiuso di S' e sia $C = f^{-1}(C')$. Si ha $f(C) \subseteq C'$ da cui, essendo C' chiuso, $\overline{f(C)} \subseteq C'$. Si ha allora $f(\overline{C}) \subseteq \overline{f(C)} \subseteq C'$ e così è $\overline{C} \subseteq f^{-1}(C') = C$. Pertanto è $C = \overline{C}$ il che prova che C è un chiuso. Avendo provato che la controimmagine di un chiuso è un chiuso la funzione è continua.

(Funzioni aperte e caratterizzazione degli omeomorfismi.

Altri esempi di topologia : “tiro al bersaglio” in \mathbb{R}^n , topologia cofinita in \mathbb{R} . Ogni varietà algebrica - in particolare, curve e superfici, come coniche e quadriche - è un chiuso in \mathbb{R}^n dotato della topologia naturale, infatti è la controimmagine mediante una funzione polinomiale - e quindi continua - di $\{0\}$, che è un chiuso in \mathbb{R} dotato della topologia naturale).

Al fine di individuare un'altra importante proprietà delle funzioni continue ci è utile richiamare la nozione di *successione convergente*.

Sia (S, A) uno spazio topologico e sia l un punto di S . Una successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ di elementi di S è convergente ad l se

per ogni intorno I di l esiste un intero m tale risulti $x_n \in I$ per ogni $n \geq m$.

o equivalentemente

per ogni aperto A contenente l esiste un intero m tale risulti $x_n \in A$ per ogni $n \geq m$.

L'elemento l cui la successione converge è anche detto *limite della successione*. Non sempre una successione è convergente e non sempre il limite quando esiste è unico. Si ha unicità del limite se lo spazio topologico è *separato* o di Hausdorff (o T_2) cioè gode della seguente proprietà :

H : Per ogni coppia di punti distinti x ed y esistono due intorni I ed I' di x ed y tra loro disgiunti.

o equivalentemente

H : Per ogni coppia di punti distinti x ed y esistono due aperti A ed A' contenenti il primo x ed il secondo y tra loro disgiunti.

Possiamo infatti ora provare la seguente

Proposizione 3.4 Sia (S, A) uno spazio topologico di Hausdorff. Una successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ di elementi di S che sia convergente ammette un unico limite.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ammetta due limiti l ed l' distinti tra loro. Siano I ed I' due intorni di l ed l' disgiunti tra loro. Poiché l è limite della successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

esiste un intero m tale che risulti $x_n \in I$ per ogni $n \geq m$.

Poiché anche l' è limite della successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

esiste un intero m' tale che risulti $x_n \in I'$ per ogni $n \geq m'$.

Si ha allora che $x_n \in I \cap I'$ per ogni $n \geq \max \{ m, m' \}$, il che contraddice il fatto che I ed I' siano disgiunti.

Un'altra importante proprietà delle funzioni continue è espressa dalla seguente

Proposizione 3.5 Una funzione continua $f: S \rightarrow S'$ tra due spazi topologici (S, A) ed (S', A') trasforma una successione convergente in una successione convergente.

Dimostrazione. Sia $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ una successione di elementi di S convergente ad x_0 . Proviamo che la successione corrispondente

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

converge al punto $f(x_0)$. Sia A' un aperto contenente $f(x_0)$. Poiché f è continua in x_0 esiste un aperto A contenente x_0 tale che risulti $f(A) \subseteq A'$. Ma poiché la successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ha per limite x_0 ed A è un intorno di tale punto si ha che

esiste un intero m tale che risulti $x_n \in A$ per ogni $n \geq m$.

Ma allora per ogni $n \geq m$ risulta $f(x_n) \in f(A) \subseteq A'$ e ciò prova che la successione $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ ha per limite $f(x_0)$.

(Di questa proprietà in uno spazio metrico vale anche il viceversa, come vedremo).

Concludiamo questo numero provando alcune semplici proprietà valide in uno spazio topologico di Hausdorff.

Proposizione 3.4 Ogni punto di uno spazio topologico (S, A) di Hausdorff è chiuso.

Dimostrazione. Sia y un punto di S e sia z un punto distinto da y e cioè un punto del complementare di y . Poiché lo spazio è di Hausdorff esiste un aperto A contenente z e non y . L'aperto A è contenuto in $S - y$ e ciò prova che z è interno ad $S - y$.

Ogni punto di $S - y$ è interno e quindi $S - y$ è un aperto il che prova che y è un chiuso.

Proposizione 3.5 Sia (S, A) uno spazio topologico di Hausdorff e sia X un sottoinsieme dotato di punti di accumulazione. Se y è un punto di accumulazione per X , allora in ogni intorno del punto y ci sono infiniti punti di X diversi da y .

Dimostrazione. Possiamo ovviamente limitarci a verificare la proprietà in un aperto A che contenga y . Poiché y è d'accumulazione per X nell'aperto A c'è un punto x_1 di X diverso da y . Poiché x_1 è un chiuso l'insieme

$$A_1 = A - x_1 = A \cap (S - x_1)$$

è un aperto che contiene y . Poiché y è d'accumulazione per X nell'aperto A_1 c'è un

punto x_2 di X diverso da y e però esso è distinto anche da x_1 .

Posto

$$A_2 = A - \{x_1, x_2\} = A \cap (S - \{x_1, x_2\})$$

Essendo $\{x_1, x_2\}$ un chiuso l'insieme A_2 è un aperto e contiene il punto y . Pertanto poiché y è d'accumulazione per X nell'aperto A_2 c'è un punto x_3 di X diverso da y e che risulterà però distinto anche da x_1 e x_2 .

Procedendo induttivamente si costruisce nell'aperto A una successione $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ di punti di X distinti tra loro e distinti da y e l'asserto è così provato.

(Assiomi T_0 e T_1 . Esempi e controesempi. Caratterizzazione e proprietà degli spazi T_1 . Gli assiomi T_0, T_1 e T_2 sono proprietà topologiche, cioè è conservate dagli omeomorfismi : ... Inoltre $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$, ma non è vero il viceversa).

4. *Basi ed assiomi di numerabilità. Spazi separabili.*

In questo numero daremo alcune nozioni topologiche utili per il seguito.

Sia (S, A) uno spazio topologico. Una famiglia \mathbf{B} di aperti di S è detta *base* per la topologia A se ogni aperto non vuoto di S è unione di elementi di \mathbf{B} .

Essendo S aperto la famiglia \mathbf{B} è un ricoprimento di S . Inoltre l'intersezione di due elementi di \mathbf{B} , essendo tale intersezione un aperto, è unione di elementi di \mathbf{B} .

Lo spazio topologico è detto *a base numerabile* se ammette una base che sia *finita* o *numerabile*.

Uno spazio topologico è detto *localmente a base numerabile* se ogni suo punto ha un sistema fondamentale di intorni che sia finito o numerabile.

Infine uno spazio topologico si dice *separabile* se possiede un sottoinsieme D finito o numerabile che sia *denso in S* cioè tale che risulti

$$\overline{D} = S.$$

(Esempi e controesempi).

La proposizione che segue mostra che le nozioni ora date sono connesse tra loro.

Proposizione 4.1 *Uno spazio topologico (S, \mathcal{A}) che sia a base numerabile è anche localmente a base numerabile e separabile.*

Dimostrazione. Denotiamo con $\mathbf{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la base numerabile che lo spazio possiede.

Cominciamo a provare che lo spazio è localmente a base numerabile. Sia quindi y un suo punto e proviamo che per tale punto esiste un sistema fondamentale di intorni finito o numerabile. Poiché \mathbf{B} è un ricoprimento di S ci sono elementi di \mathbf{B} che contengono y . Indichiamo tale famiglia con

$$\mathbf{B}_y = \{B \in \mathbf{B} : y \in B\}.$$

Tale famiglia di aperti è una famiglia di intorni di y ed è fondamentale oltre ad essere ovviamente finita o numerabile. Infatti sia A un aperto che contenga y . Poiché \mathbf{B} è una base esiste una sua sottofamiglia F di \mathbf{B} tale che risulti

$$A = \bigcup_{B \in F} B$$

Poiché y appartiene ad A allora esso appartiene ad un elemento B_0 della famiglia F . Poiché $B_0 \in \mathbf{B}_y$ e B_0 è contenuto in A si ha l'asserto.

Proviamo ora che lo spazio è separabile. Facendo uso dell'assioma della scelta scegliamo un elemento x_n in ogni aperto non vuoto B_n della base \mathbf{B} .

Indichiamo con D l'insieme degli elementi x_n selezionati. L'insieme D è ovviamente finito o numerabile ed è denso in S come ora proveremo. Sia y un punto di S e sia A un aperto contenente y . Poiché A è aperto e \mathbf{B} è una base l'aperto A è unione di elementi di \mathbf{B} . In ognuno di tali elementi è stato selezionato un elemento di D quindi nell'aperto A ci sono elementi di D . Pertanto y è aderente a D e si ha quindi l'asserto.

5. Proprietà della topologia indotta da una metrica .

Sia (S, d) uno spazio metrico con metrica d . Abbiamo già visto che la metrica d consente di introdurre in S una topologia \mathcal{A}_d che viene detta *indotta dalla metrica* ed i cui aperti sono le unioni di cerchi aperti. Vogliamo ora illustrare alcune importanti proprietà di tale topologia \mathcal{A}_d .

Proposizione 5.1 Lo spazio topologico (S, A_d) è di Hausdorff.

Dimostrazione. Siano x ed y due punti distinti e sia r un numero reale positivo minore di $\frac{d(x,y)}{2}$. I cerchi aperti $C(x, r)$ e $C(y, r)$ sono disgiunti. Se infatti per assurdo esistesse un punto z comune ai due cerchi avremmo, per la proprietà triangolare, :

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r < \frac{d(x,y)}{2} + \frac{d(x,y)}{2} = d(x, y)$$

e ciò è assurdo.

Proposizione 5.2 Lo spazio topologico (S, A_d) è localmente a base numerabile.

Dimostrazione. Denotiamo per ogni punto y di S con $C_y = \{ C(y, \frac{1}{n}) \}$ la famiglia numerabile di intorno del punto y costituita dai cerchi aperti di centro y e raggio $\frac{1}{n}$. Mostrando che tale famiglia è fondamentale si ha l'asserto. Sia A un aperto contenente y e sia $C(y, r)$ un cerchio aperto di centro y e raggio r contenuto in A . Fissato un intero m tale che risulti $\frac{1}{m} < r$ si ha

$$C(y, \frac{1}{m}) \subseteq C(y, r) \subseteq A$$

e l'asserto è provato.

Proposizione 5.3 Lo spazio topologico (S, A_d) è a base numerabile se e solo se è separabile.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che se lo spazio è a base numerabile esso è separabile. Occorre quindi provare che se (S, A_d) è separabile esso è a base numerabile. Sia quindi D un sottoinsieme finito o numerabile denso in S cioè tale che risulti ad esso aderente ogni punto di S . Denotiamo con

$$B = \{ C(y, q) \mid y \in D, q \in Q^+ \}$$

la famiglia dei cerchi aperti aventi centro in un punto y di D e raggio razionale positivo. Tale famiglia di aperti è ovviamente numerabile ed è come ora proveremo una base per la topologia A_d . Per provare ciò è sufficiente mostrare che ogni cerchio

aperto è unione di elementi di \mathbf{B} . Sia quindi $C(x, r)$ un cerchio aperto e z un suo punto. Se mostreremo che z appartiene ad un aperto di \mathbf{B} tutto contenuto nel cerchio $C(x, r)$ si avrà l'asserto.

Abbiamo già visto nella proposizione del n. che è possibile determinare un cerchio aperto $C(z, \rho)$ contenuto nel cerchio $C(x, r)$. Consideriamo il cerchio $C(z, \frac{\rho}{2})$

In tale cerchio aperto c'è un punto y di D in quanto z è aderente al sottoinsieme D .

Poiché $y \in C(z, \frac{\rho}{2})$ si ha :

$$d(y, z) < \frac{\rho}{2}$$

Sia ora q un numero razionale tale che

$$d(y, z) < q < \frac{\rho}{2}$$

Il cerchio $C(y, q)$ appartiene alla famiglia \mathbf{B} contiene z e come ora proveremo è contenuto nel cerchio $C(z, \rho)$. Sia quindi t un elemento del cerchio $C(y, q)$ e proviamo che t appartiene al cerchio $C(z, \rho)$.

Si ha infatti, usando la proprietà triangolare,

$$d(t, z) \leq d(t, y) + d(y, z) < q + q < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$$

L'asserto è così provato.

Poiché uno spazio metrico è di Hausdorff allora come già visto una successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ di punti di S , se è convergente, ammette un unico limite.

(In uno spazio localmente a base numerabile e quindi, in particolare, in uno spazio metrico, sia la continuità di una funzione, sia la chiusura di un sottoinsieme possono essere caratterizzati in termini di successioni convergenti. Si ha infatti :

Proposizione 1. *Siano (S, A_d) ed (S', A'_d) due spazi metrici ed $f: S \rightarrow S'$ un'applicazione tra essi. Allora f è continua $\Leftrightarrow f$ "conserva" i limiti delle successioni convergenti.*

Proposizione 2. *Sia $X \subseteq S$ un sottoinsieme di (S, A_d) . Un punto y di S è aderente a $X \Leftrightarrow$ esiste una successione di punti di X che converge a y . Per le*

dimostrazioni, cfr. ad esempio, Tallini, Strutture geometriche.)

In uno spazio metrico ha significato per una successione anche la seguente definizione.

Una successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ di punti dello spazio metrico (S, d) è detta di *Cauchy* se è soddisfatta la seguente proprietà :

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero m tale per ogni $p, q \geq m$, si ha

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

La proposizione che segue lega tra loro le due nozioni di convergenza e di essere di Cauchy per una successione.

Proposizione 5.2 *Una successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ di punti dello spazio metrico (S, d) che sia convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia ℓ il limite della successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Sia ε un numero positivo e sia $C(\ell, \frac{\varepsilon}{2})$ il cerchio aperto di centro ℓ e raggio $\frac{\varepsilon}{2}$. Per definizione di limite esiste un intero m tale che per ogni $n \geq m$ risulta

$$x_n \in C(\ell, \frac{\varepsilon}{2})$$

Pertanto per ogni $p, q \geq m$ si ha, utilizzando la proprietà triangolare,

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e ciò prova l'asserto.

Osserviamo esplicitamente che esistono spazi metrici dotati di successioni di Cauchy ma non convergenti come mostra il seguente esempio. Sia \mathbb{R}^+ l'insieme dei numeri reali positivi dotato della metrica euclidea $d(a, b) = |a - b|$. In tale spazio la successione $x_n = \frac{1}{n}$ è di Cauchy in quanto come successione di \mathbb{R} è convergente, ma non è convergente in \mathbb{R}^+ risultando convergente a zero in \mathbb{R} .

Uno spazio metrico in cui ogni successione di Cauchy risulta convergente è detto *completo*.

È ben noto che l'insieme dei numeri reali dotato della metrica euclidea è uno spazio metrico completo.

Pertanto per una successione di numeri reali $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ vale la seguente equivalenza .

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ convergente se e solo se $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ è di Cauchy.

(Si ha : **Proposizione.** Sia (S, d) uno spazio metrico. Se un sottoinsieme X di S è completo, allora X è chiuso.

Il viceversa vale solo negli spazi completi, come mostra la seguente proposizione, che caratterizza i sottospazi completi di uno spazio metrico completo).

Proposizione 5.3 Sia (S, d) uno spazio metrico completo. Un suo sottoinsieme X è anch'esso completo se e solo se X è chiuso.

Dimostrazione. Supponiamo che lo spazio metrico (X, d) sia completo e proviamo che esso è chiuso. Sia y un punto di aderenza per X . Per ogni n , sia x_n un punto di X scelto nel cerchio aperto $C(y, \frac{1}{n})$. La successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ converge manifestamente al punto y e quindi è di Cauchy. Ma poiché è di Cauchy ed X è completo essa converge ad un punto di X . Per l'unicità del limite y è un punto di X . Pertanto contenendo tutti i punti aderenti l'insieme X è un chiuso.

Viceversa supponiamo che X sia chiuso e mostriamo che esso è completo. Occorre quindi che provare che ogni sua successione di Cauchy è convergente ad un punto di X . Sia quindi $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ una successione di punti di X e supponiamo sia di Cauchy. Poiché lo spazio S è completo la successione di Cauchy $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ converge ad un punto y . Per definizione di limite in ogni intorno di y ci sono punti della successione e quindi di X . Pertanto y è aderente ad X . Ma poiché X è chiuso il punto y appartiene ad X . Avendo provato che la successione di Cauchy $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ converge ad un punto di X resta provato che lo spazio metrico X è completo.

(Cenni al **COMPLETAMENTO** di uno spazio metrico)

Uno spazio topologico (S, \mathcal{A}) si dice *metrizzabile* se esiste una metrica d in S tale che risulti $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}$ cioè che induce su S la topologia \mathcal{A} .

(Inoltre, due metriche sullo stesso insieme S si dicono “equivalenti” se inducono in S la stessa topologia. Esempi e controesempi di spazi metrizzabili).

6. Esempi di spazi topologici.

Al fine di controllare la comprensione delle nozioni finora date è opportuno fornire un pò di esempi. Sia \mathbb{R} l'insieme dei numeri reali.

Esempio 1.

Come già visto, assumendo come aperti di \mathbb{R} , il vuoto, \mathbb{R} e tutti gli intervalli del tipo

$$]a, b[\text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

e tutte le loro unioni si ottiene una topologia (indotta dalla metrica) che denoteremo con \mathcal{N} per l'insieme \mathbb{R} (essa è detta *topologia naturale di \mathbb{R}*).

Esempio 2.

Assumendo come aperti di \mathbb{R} , il vuoto, \mathbb{R} e tutti gli intervalli del tipo

$$]-\infty, a[\text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

si ottiene una topologia che denoteremo con \mathcal{S} per l'insieme \mathbb{R} (detta *delle semirette sinistre aperte*).

Essendo evidente che l'intersezione di due aperti è un aperto basta controllare che l'unione di aperti è un aperto. Sia quindi

$$A_i =]-\infty, a_i[\text{ con } a_i \in \mathbb{R}, i \in I$$

una famiglia di aperti. Detto $a = \sup a_i$ è facile verificare che risulta:

$$\bigcup_i]-\infty, a_i[=]-\infty, a[\text{ e ciò prova che l'unione di aperti}$$

è un aperto. Pertanto la famiglia S è una topologia per l'insieme \mathbb{R} .

Esempio 3.

Assumendo come aperti di \mathbb{R} , il vuoto, \mathbb{R} e tutti gli intervalli del tipo

$$]a, +\infty[\quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

si ottiene una topologia che denoteremo con D per l'insieme \mathbb{R} (*detta delle semirette destre aperte*).

Essendo evidente che l'intersezione di due aperti è un aperto basta controllare che l'unione di aperti è un aperto. Sia quindi

$$A_i =]a_i, +\infty[\quad \text{con } a_i \in \mathbb{R}, \quad i \in I$$

una famiglia di aperti. Detto $a = \inf a_i$ è facile verificare che risulta :

$$\bigcup_i]a_i, +\infty[=]a, +\infty[$$

e ciò prova che l'unione di aperti è un aperto. Pertanto la famiglia D è una topologia per l'insieme \mathbb{R} .

Esempio 4.

Assumendo come aperti di \mathbb{R} , il vuoto, \mathbb{R} e tutti gli intervalli del tipo

$$]-a, a[\quad \text{con } a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

si ottiene, come è facile verificare, una topologia per l'insieme \mathbb{R} che denoteremo con Ω_0 .

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme $X = [2, 7[$. Si calcoli la sua chiusura ed il suo interno in ognuno degli spazi topologici

(\mathbb{R}, N) , (\mathbb{R}, S) , (\mathbb{R}, D) , (\mathbb{R}, Ω_0) sopra descritti.

Esercizio 2. Si consideri ora la seguente successione di punti di \mathbb{R}

$$x_n = 3 + \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$$

Si determinino per essa i punti di convergenza negli spazi topologici

$(\mathbb{R}, \mathcal{N})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ sopra descritti.

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che associa al numero x il numero $x^2 + 4$.

Si assuma che il codominio sia munito della topologia \mathcal{D} . Si stabilisca con quale topologia delle quattro topologie \mathcal{N} , \mathcal{S} , \mathcal{D} , \mathcal{O} sopra descritte, deve essere munito il dominio \mathbb{R} per rendere continua la nostra funzione.

Si faccia poi lo stesso controllo per la funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che associa al numero x il numero $x + 4$. Si dica se in qualche caso g è un omeomorfismo.

Esercizio 4. Si stabilisca quale spazio topologico tra questi

$(\mathbb{R}, \mathcal{N})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$

da noi descritti è di Hausdorff.