Lezione 2

– *Sistemi dinamici nel dominio del tempo*

– *Un esempio: il nastro trasportatore*

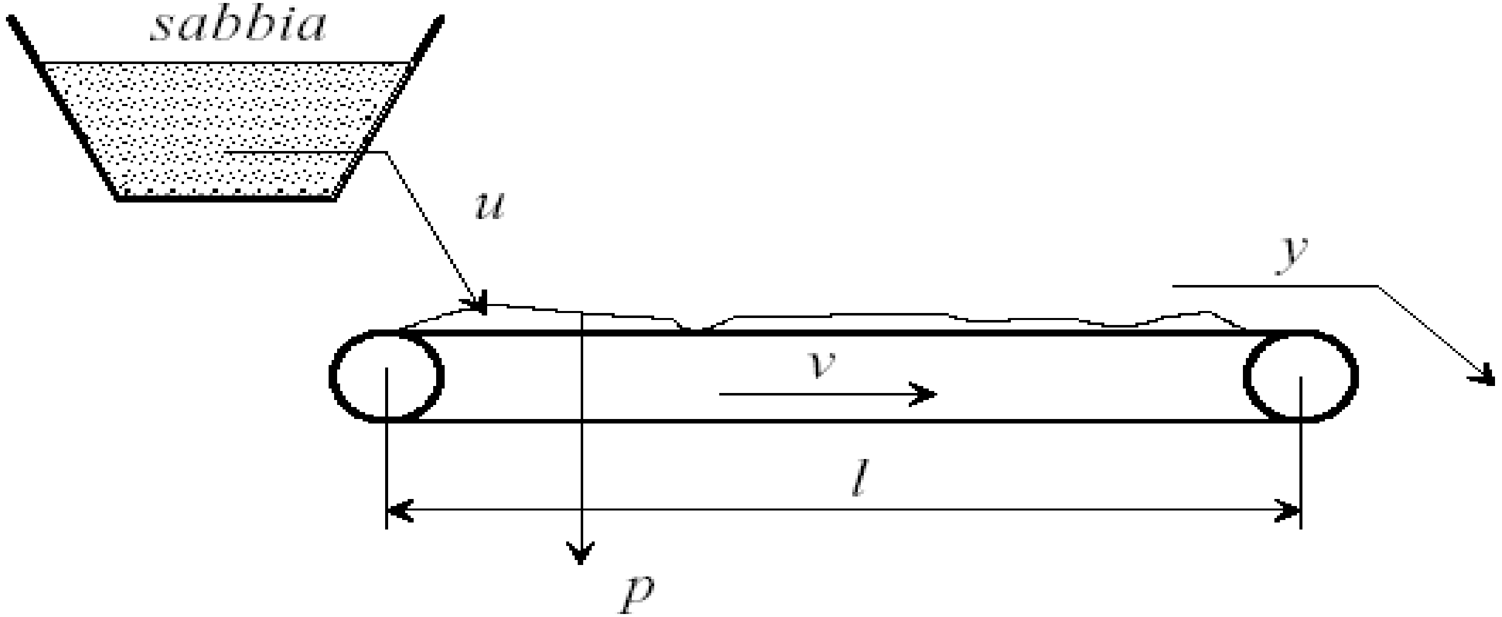


Fig. 1 : Un nastro trasportatore di sabbia

u: portata di sabbia all'inizio del nastro

y: portata di sabbia alla fine del nastro

p: perdite di sabbia lungo il nastro

v: velocità (costante) del nastro

l: lunghezza del nastro

Problema di controllo

- Fare in modo che la portata y in uscita al nastro sia quanto più possibile simile ad un valore costante prefissato y°, nonostante le perdite p, agendo sulla portata u di sabbia all'ingresso del nastro.

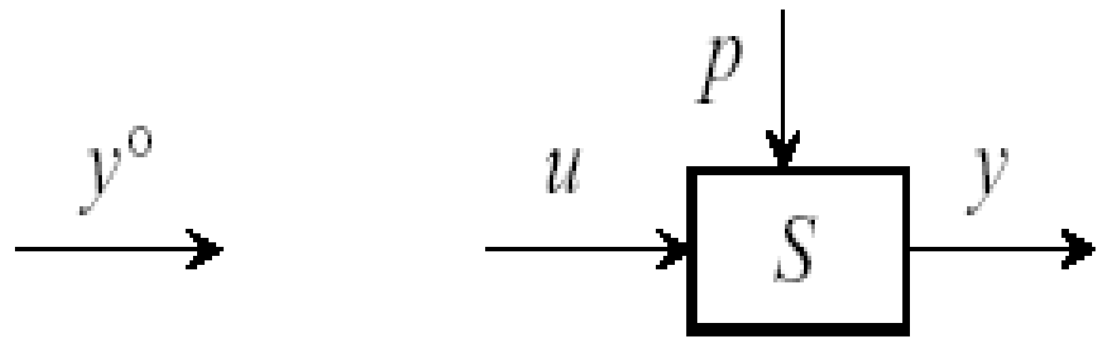


Fig. 2 : Il problema di controllo

Modello matematico

- Il modello matematico traduce in un'equazione il fatto che, ad ogni istante di tempo t, la portata in uscita uguaglia, a meno delle perdite, la portata manifestatasi in ingresso, τ istanti prima, dove τ è il tempo di percorrenza del nastro: $y(t) = u(t-\tau) - p(t)$, $\tau := l/v$;

Si suppone inoltre che le perdite siano calcolabili come la somma di un valore medio costante noto $\bar{\mathbf{p}}$ e di uno scostamento impredicibile $\Delta \boldsymbol{p(t)}$:

$$\mathbf{p(t) = \bar{p} + \Delta p(t)}$$

La più ovvia strategia di controllo in anello aperto consiste nell'imporre un valore di portata in ingresso costante, uguale alla somma del valore desiderato in uscita e del valore medio delle perdite:

$$\mathbf{u(t) = y^o + \bar{p}}$$

Risulta però : $\mathbf{y(t) = y^o + \bar{p} - (\bar{p} + \Delta p(t)) = y^o - \Delta p(t)}$

Ossia: $\mathbf{y^o - y(t) = \Delta p(t)}$

Pertanto il sistema di controllo è completamente "indifeso" rispetto al disturbo $\Delta \boldsymbol{p}$ (tutto il disturbo si traduce in errore).

Strategia di controllo in anello chiuso

Se la portata in uscita è misurabile, si somma alla precedente azione di controllo in anello aperto un termine correttivo, proporzionale all'errore tra valore desiderato ed effettivo di y:

$$\mathbf{u(t) = y^o + \bar{p} + \mu(y^o - y(t))}$$

dove μ è un parametro di progetto.

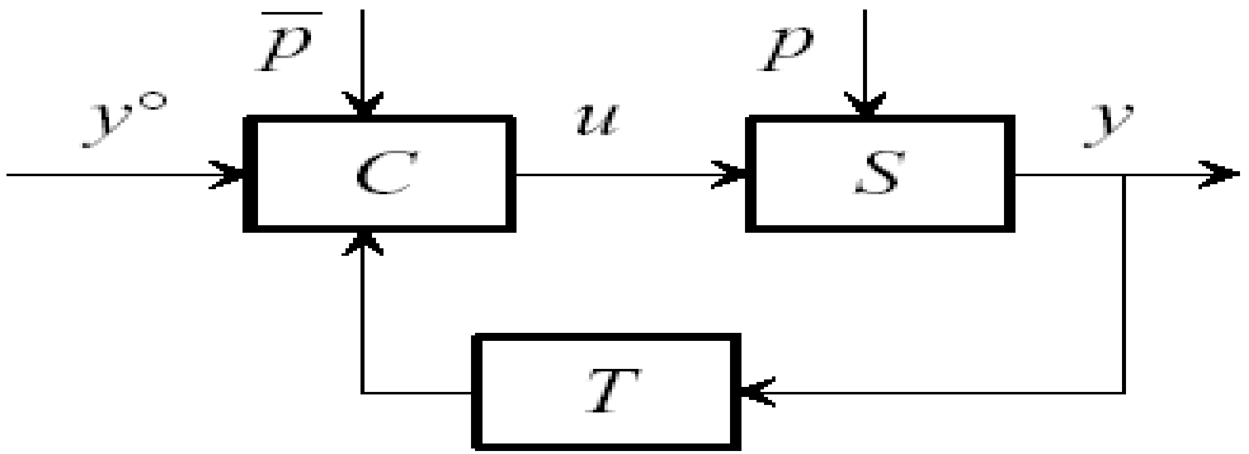


Fig. 3 : Strategia di controllo in anello chiuso

- Risulta allora:

$$\mathbf{y(t) = y^o + \bar{p} + \mu(y^o - y(t-\tau)) - (\bar{p} + \Delta p(t)) =}$$
$$\mathbf{= (1+\mu)y^o - \mu y(t-\tau) - \Delta p(t)}$$

Studiamo anzitutto il comportamento a regime (***analisi statica***), supponendo costanti le perdite ($\Delta p(t) = \Delta\bar{p}$). Tutte le variabili risulteranno allora costanti, ed in particolare si avrà: $y(t) = y(t-\tau) = \bar{y}$

Facendo i conti si ottiene:

$$\mathbf{y^o - \bar{y} = \frac{\Delta\bar{p}}{1+\mu}}$$

Sembra quindi che pur di scegliere il parametro μ positivo sufficientemente grande, si possa ridurre arbitrariamente l'errore.

Il problema è risolto? Non proprio...

Studiamo un *transitorio*, ossia il passaggio da una condizione di regime ad un’altra (***analisi dinamica***). In particolare, ipotizziamo che l’andamento nel tempo delle perdite sia rappresentato dal grafico in figura

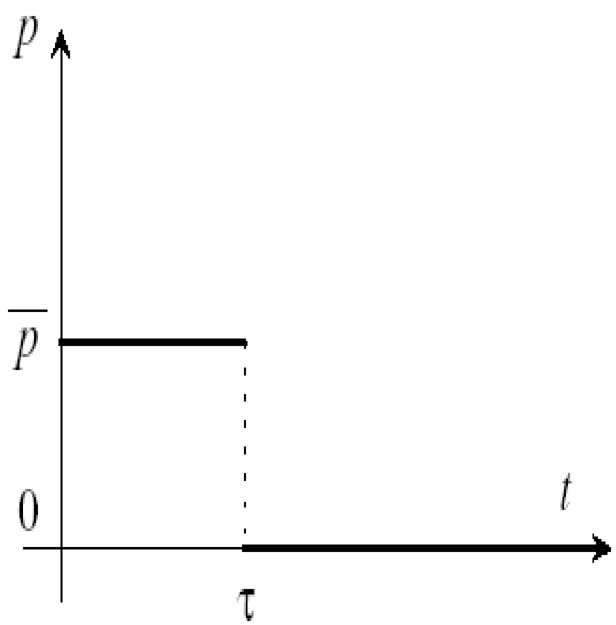


Fig. 4 : Andamento temporale delle perdite di sabbia

Facendo i conti, si trova che il parametro μ influenza pesantemente l’andamento temporale della portata in uscita *y*, come mostrano i grafici riportati nel seguito

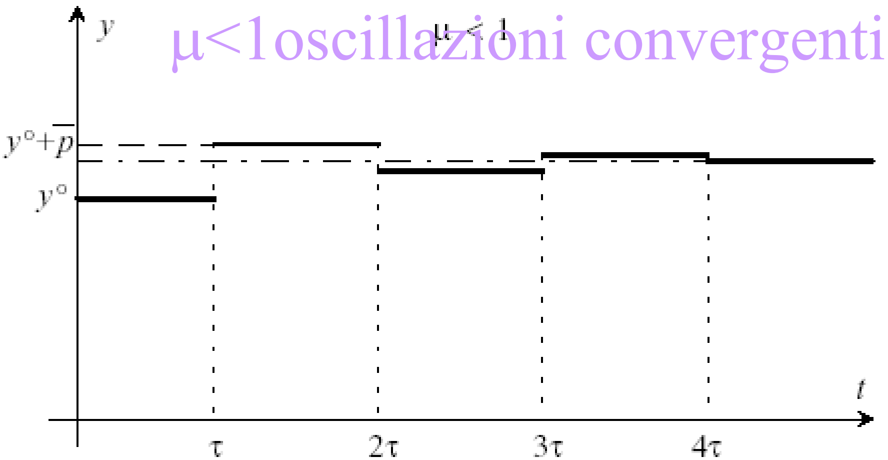


Fig. 5 : Andamento temporale della portata in uscita: μ<1

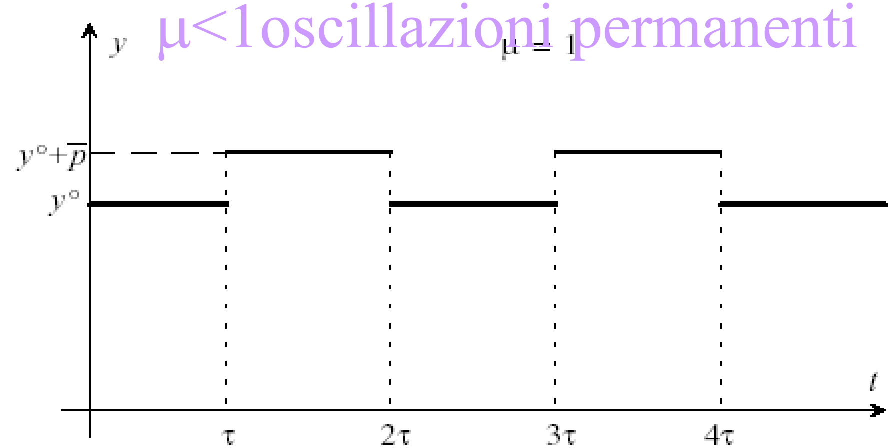


Fig. 6 : Andamento temporale della portata in uscita: μ=1

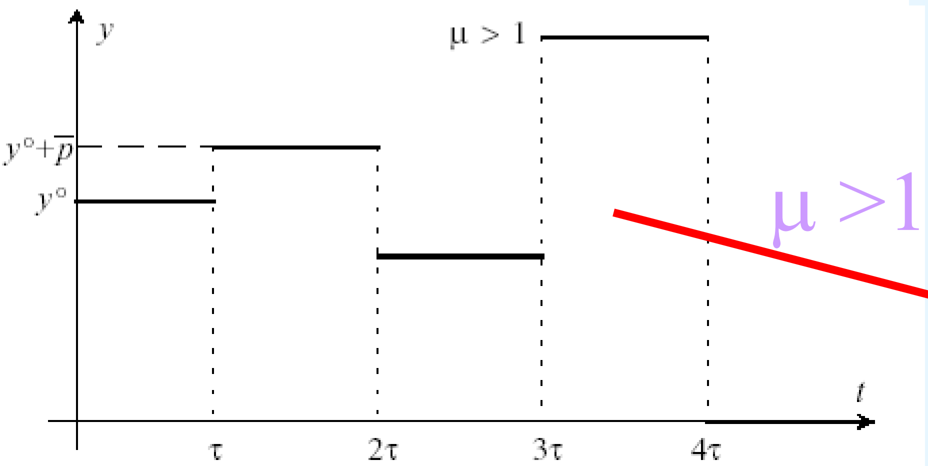


Fig. 7 :Andamento temporale della portata in uscita: μ>1

	Tipo di transitorio
μ<1	*Oscillazioni convergenti (*)*
μ=1	*Oscillazioni permanenti*
μ>1	*Oscillazioni divergenti*

(*) Si può dimostrare che le oscillazioni convergono al valore $y^o + \overline{p}/(1+\mu)$ coerente con l'analisi statica avendo nel nuovo punto di equilibrio $\Delta\overline{p} = -\overline{p}$.

Conclusioni

- L'analisi statica non è sufficiente per lo studio delle prestazioni dei sistemi di controllo. A volte (vedi i casi $\mu=1$ e $\mu>1$) può dare risultati addirittura errati.
- E' allora indispensabile un'analisi dinamica del sistema di controllo.
- Un modello matematico che descrive l'evoluzione nel tempo delle variabili del sistema prende il nome di *modello dinamico*.
- Lo strumento matematico che useremo per formulare i modelli matematici sarà quello delle *equazioni differenziali*.

Manualetto Cencelli sulle Equazioni differenziali e sui sistemi lineari

- ***Forma scalare della seconda legge di Newton:*** $F=M\cdot a$
- ***Legge di Ohm: $V=R\cdot i$***

Leggi fisiche che descrivono dei fenomeni di tipo meccanico od elettrico: e' una classe di equazioni che si conoscono bene, sono di tipo polinomiale e non presentano grandi difficoltà di uso. Dietro queste espressioni si e' fatta l'ipotesi implicita che R sia costante, M sia costante, i costante ed a costante (non dipendono direttamente dalla variabile indipendente tempo t).

Nella descrizione di leggi fisiche trovano un'ampia applicazione una particolare classe di equazioni:

Le equazioni differenziali .

Sono delle equazioni algebriche o trascendenti in cui compaiono derivate o differenziali.

Esse sono utili per stabilire relazioni tra variazioni delle variabili in studio e altri parametri.

ESEMPI

Equazione differenziale della seconda legge di Newton:

$$F=M\cdot dv/dt=M\cdot d^2x/dt^2$$

Forma differenziale: $F \cdot dt=M\cdot dv$

Legge di Ohm:

$$V=R\cdot dq/dt$$

Forma differenziale: $V \cdot dt=R\cdot dq$

Equazione della diffusione in una dimensione:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial T}{\partial t}$$

Per esempio diffusione di calore lungo una sbarra di metallo. T=T(x,t) e' una funzione di due variabili x e t :la variabile indipendente x definisce lo spazio e t il tempo. Abbiamo una equazione differenziale a derivate parziali. Un'equazione differenziale a derivate parziali e' dunque un'equazione in cui compaiono una o piu' variabili dipendenti e due o piu' variabili indipendenti insieme con le derivate parziali delle variabili dipendenti rispetto alle indipendenti.

Una equazione differenziale ordinaria (alle derivate totali) e' un'equazione in cui compaiono una o piu' variabili dipendenti, **una variabile indipendente** e una o piu' derivate delle variabili dipendenti rispetto a quella indipendente.

Quindi l'equazione della diffusione e' una ***equazione differenziale a derivate parziali***, la seconda legge di Newton e la legge di Ohm sono ***equazioni differenziali ordinarie (alle derivate totali).***

In generale possiamo scrivere che:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t)$$

o piu' concisamente:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = x(t)$$

Si tratta di un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti $\mathbf{a}_i$ costanti. Ed y(t) ed x(t) sono variabili dipendenti, mentre t e' la variabile indipendente.

Equazioni differenziali varianti ed invarianti nel tempo

Un'equazione differenziale variante nel tempo e' un'equazione differenziale in cui uno o piu' termini dipendono esplicitamente dal tempo. La forma piu' generale di una tale equazione e' del tipo:

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = b(t)x(t)$$

In sintesi:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\frac{d^i y}{dt^i} = b(t)x(t)$$

Esempio:

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + y = x$$

e' un'equazione differenziale variante nel tempo in quanto il coefficiente di $\frac{d^2 y}{dt^2}$ dipende esplicitamente dal tempo.

Ogni equazione differenziale del tipo:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x}{dt^i}$$

dove i coefficienti a_i e b_i sono costanti e' invariante nel tempo in quanto l'equazione dipende solo implicitamente da t attraverso le variabili indipendenti x ed y e le loro derivate.

Equazioni differenziali lineari e non lineari.

Un termine di un'equazione differenziale ordinaria e' costituito da prodotti e rapporti di funzioni esplicite della variabile indipendente t e di funzioni delle variabili dipendenti e delle loro derivate.

$\frac{5}{\cos t} \frac{d^2 y}{dt^2}$ e' un termine di primo grado rispetto alla variabile dipendente y mentre

$2xy^3 \frac{dy}{dt}$ e' un termine di quinto grado rispetto alle variabili x ed y.

Un termine si dice lineare se e' di primo grado rispetto alle variabili dipendenti e alle loro derivate.

Un equazione differenziale lineare e' un'equazione differenziale costituita da una somma di termini lineari. Tutte le altre sono equazioni differenziali non lineari.

Se un'equazione differenziale contiene termini costituiti da potenze con esponente maggiore di uno, prodotti o funzioni trascendenti delle variabili dipendenti, e' non lineare. Tali termini sono del tipo: $\left(\frac{dy}{dt}\right)^4$ $\quad x\frac{dy}{dt}$ $\quad \sin(x)$

L'equazione di diffusione che abbiamo visto in precedenza:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = k\frac{\partial T}{\partial t}$$

e' un'equazione differenziale lineare (alle derivate parziali). I suoi termini $\frac{\partial T}{\partial x}$ e $k\frac{\partial T}{\partial t}$ sono di primo grado.

Le equazioni differenziali ordinarie :

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y = 0$$

e

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \cos y = 0$$

sono non lineari come risulta evidente dai termini che le costituiscono.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + x\frac{dy}{dt} + y = x$$

, dove x ed y sono variabili dipendenti, e' una equazione differenziale non lineare poiché $x \frac{dy}{dt}$ e' di secondo grado rispetto alle variabili dipendenti x ed y.

Ogni equazione differenziale del tipo:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i(t) \frac{d^i x}{dt^i}$$

dove i coefficienti $a_i(t)$ e $b_i(t)$ dipendono solo dalla variabile indipendente t e' un'equazione differenziale lineare.

Linearita' e sovrapposizione degli effetti.

La linearita' e' una proprieta' che non e' propria solo di una classe di equazioni differenziali, bensi' di una vasta classe di sistemi in cui vi e' una sola variabile indipendente, nel nostro caso il tempo t.

Partendo dalla definizione di sistema i-u (ingresso - uscita) che gia' abbiamo visto si puo' definire un sistema lineare se per

- ✓ Un ingresso $x_1(t)$ producente un'uscita $y_1(t)$ e
- ✓ un ingresso $x_2(t)$ producente un'uscita $y_2(t)$

otteniamo che un ingresso

- ➢ $c_1\ x_1(t) + c_2\ x_2(t)$ produce un'uscita
- ➢ $c_1\ c_1\ y_1(t) + c_2\ y_2(t)$ per qualsiasi coppia di

ingressi x1(t) e x2(t) e per qualsiasi coppia di costanti c1 e c2 .

I sistemi lineari si possono rappresentare con equazioni differenziali lineari.

sintesi:

Un sistema e' lineare se la sua relazione tra un ingresso x(t) ed uscita y(t) puo' essere descritta da un'equazione differenziale del tipo:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i(t) \frac{d^i x}{dt^i}$$

Oppure e' lineare quando la relazione tra ingresso ed uscita si puo' descrivere mediante la seguente relazione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

dove $w(t,\tau)$ e' una funzione caratterizzante le proprietà fisiche del sistema, y(t) e' l'uscita ed x(t) e' l'ingresso.

Il concetto di linearita' puo' essere espresso anche tramite il

Principio di sovrapposizione degli effetti

La risposta y(t) di un sistema lineare dovuta ad alcuni ingressi $x_i(t)$ i=1,2,3…….,n che agiscono simultaneamente e' uguale alla somma delle risposte dovute ai singoli ingressi agenti separatamente. Quindi se e' $y_i(t)$ la risposta dovuta all'ingresso $x_i(t)$ allora :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)$$

ESEMPIO

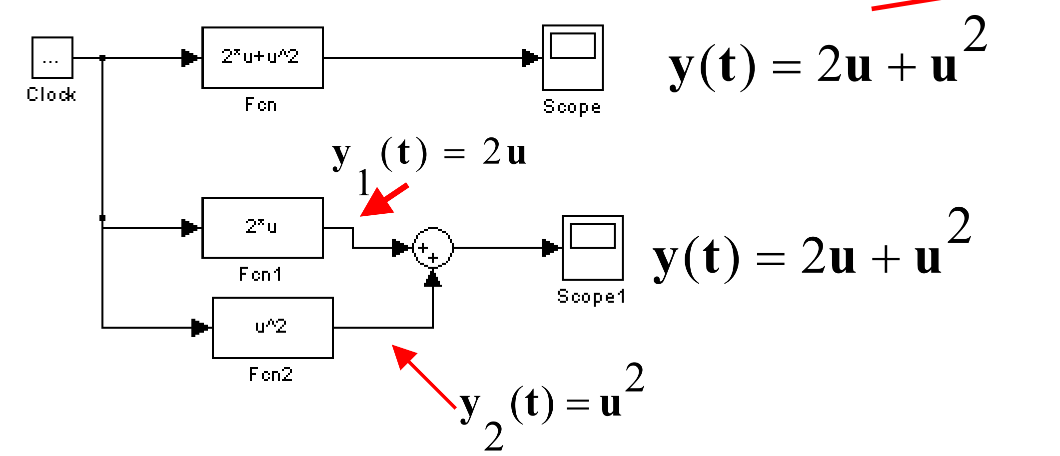
un sistema lineare descritto dall'equazione algebrica lineare: $y(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$

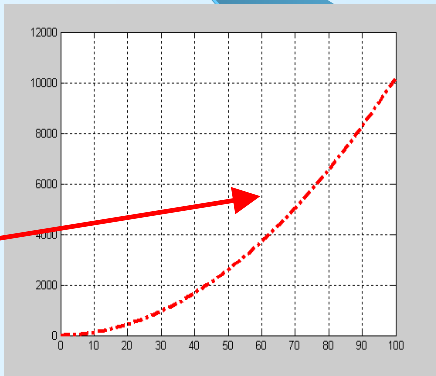
dove $x_1(t) = t$ ed $x_2(t) = t^2$ sono gli ingressi ed y(t) e' l'uscita può essere rappresentata in termini di sovrapposizione degli effetti considerando l'uscita $y_1(t)$ per gli ingressi $x_1(t) = t$ ed $x_2(t) = 0$ per cui $y(t) = y_1(t) = 2t$ e l'uscita y2(t) per gli ingressi $x_2(t) = t^2$ ed $x_1(t) = 0$ per cui $y(t) = y_2(t) = t^2$. L'uscita totale quando $x_1(t) = t$ ed $x_2(t) = t^2$ sara' data da:

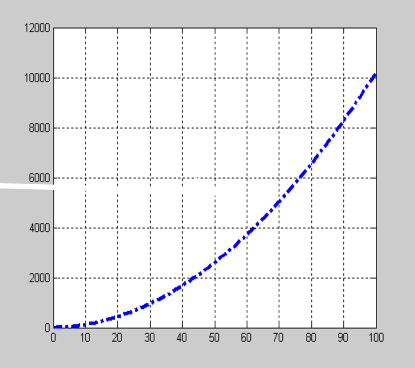
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2t + t^2$$

Esercizio con Simulink:

Proviamo a simulare il sistema dato nell'esempio precedente applicando il principio di sovrapposizione e simulando in via diretta il sistema rappresentato dall'equazione data.







Possiamo affermare che linearita' di un sistema e principio di sovrapposizione degli effetti sono proprieta' equivalenti di un sistema.

Ricordiamo che un sistema e' lineare quando la relazione tra ingresso ed uscita si può descrivere mediante la seguente relazione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

dove **w(t, τ)** e' una funzione peso caratterizzante le proprieta' fisiche del sistema, y(t) e' l'uscita ed x(t) e' l'ingresso.L'integrale e' detto integrale di convoluzione.Quindi se un sistema lineare e' descritto da un integrale di convoluzione , allora l'uscita y(t) in un certo istante t e' la somma pesat (al limite l'integrale) dei valori assunti dall'ingresso nell'intervallo ± ∞. In sintesi :**Il contributo all'uscita y(t) dell'ingresso x(τ) e' un valore pesato di x(τ) mediante il fattore peso w(t, τ).**

Causalita’ e sistemi fisicamente realizzabili

Un sistema, in cui il tempo costituisce la variabile indipendente, si dice causale (fisicamente realizzabile) se l’uscita dipende solo dai valori passati ed attuali dell’ingresso. Cioé y(t) dipende solo dai valori di x(τ) per

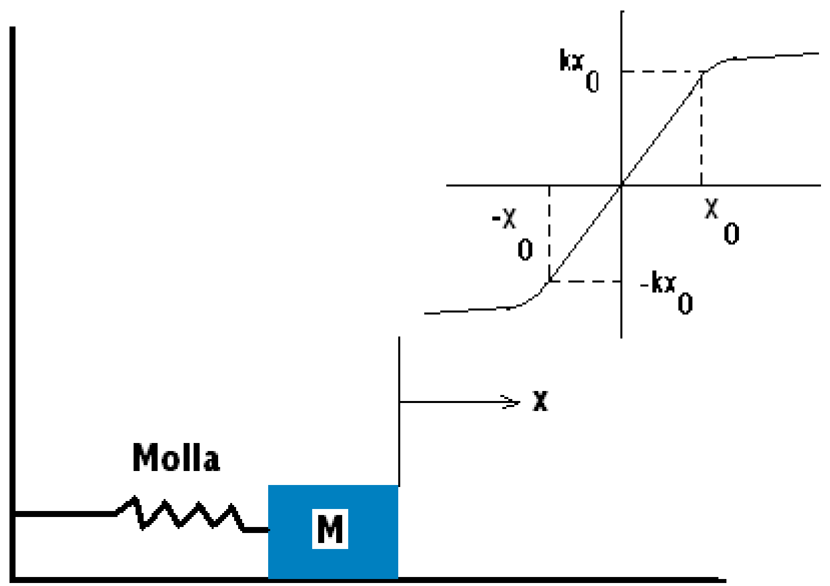
$$\boldsymbol{\tau \leq t}$$

In altre parole in un sistema causale non si puo’ prevedere quale sara’ il futuro ingresso. La conseguenza che si ha in un sistema che sia causale e’ che la funzione peso **w(t, τ)** di un sistema causale e’ identicamente nulla per t > τ, vale a dire che i valori futuri dell’ingresso hanno all’istante τ peso nullo.

Sistemi lineari a tratti e linearizzati

Nessun sistema fisico puo' essere descritto **esattamente** con un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Tuttavia un buon numero di sistemi si possono descrivere con tali equazioni in modo approssimato o per un intervallo di tempo di funzionamento limitato.

Consideriamo il sistema massa – molla riportato in figura:



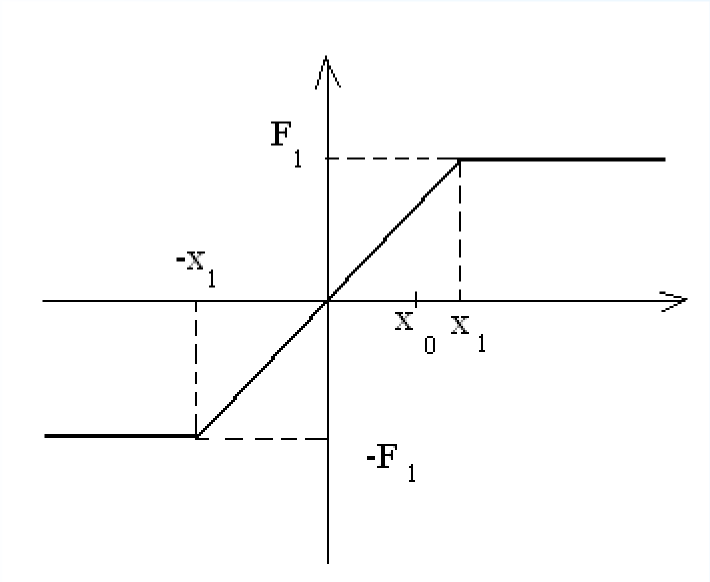
Equazione del moto della massa:

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+f_s(x)=0$$

Se l'ampiezza massima dello spostamento non supera x_0 si ha: $f(x)=kx$ dove k e' una costante. L'equazione di moto della massa diventa un'equazione lineare a coefficienti costanti: $M\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$

valida per $|x|\le x_0$

Consideriamo nuovamente il sistema massa – molla e osserviamo che possiamo fare delle approssimazioni per poter ottenere una soluzione per valori di $| x | > x_0$. Approssimiamo la legge di forza caratteristica per l'allungamento della molla con una spezzata come e' mostrato nella figura :

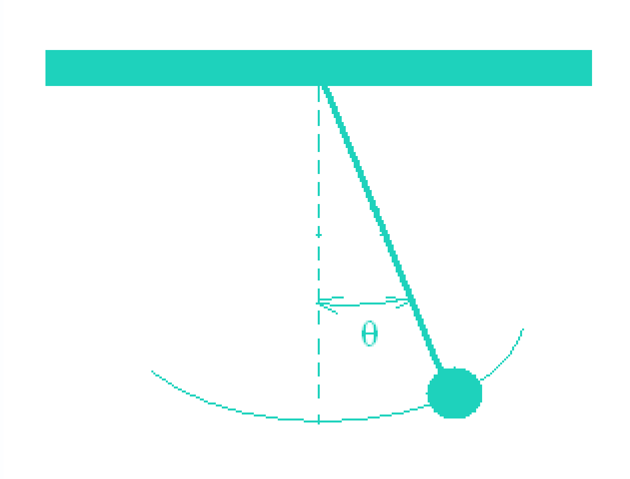


In questo caso il sistema e' approssimato come un sistema lineare a tratti mediante la equazione: $M\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$ per $|x| \leq x_1$

e l'equazione $M\frac{d^2x}{dt^2}\pm F_1=0$ per $|x| > x_1$

Il segno + e' usato per $x > x_1$ ed il segno – per $x < x_1$.

Esempio 2: il pendolo



L'equazione descrittiva del moto di un pendolo semplice e' non lineare:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

Dove l e' la lunghezza del pendolo e g l'accelerazione di gravita'. Per piccole oscillazioni attorno a $\theta = 0$ si puo' approssimare $\sin\theta \approx \theta$ espresso in radianti e cosi' l'equazione descrittiva del moto del pendolo diventa un'equazione differenziale lineare:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

valida per piccole variazioni di θ.

L’operatore derivata D e l’equazione caratteristica.

Consideriamo l’equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine n: $\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x$

e’ utile definire un operatore derivata $\equiv -$

e in generale un operatore derivata di ennesimo ordine $\equiv -$
quindi l’equazione differenziale potra’ scriversi come:

$D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + ... + a_1 D y + a_0 y = x$ cioe’: $(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0) y = x$

Il polinomio in D : $D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0$

e’ il polinomio caratteristico dell’equazione differenziale in studio mentre l’equazione $D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0 = 0$ rappresenta **<u>l’equazione caratteristica</u>** associata all’equazione differenziale.

In base al teorema fondamentale dell’algebra l’equazione caratteristica ha n soluzioni $D=D_1, D=D_2, \ldots, D=D_n$.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione differenziale :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = x$$

il polinomio caratteristico e' dato da: D^2+3D+2
l'equazione caratteristica da $D^2+3D+2=0$
con soluzioni $D_1=-1$ e $D_2=-2$.

Indipendenza Lineare e Sistemi Fondamentali

Un insieme n di funzioni del tempo $f_i(t)$ i=1,2,…,n si dice **<u>linearmente indipendente</u>** se l'unico insieme di costanti c_i i=1,2,…,n per cui :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t) = 0$$

per ogni valore di t, sono le costanti $c_i = 0$; i= i=1,2,…,n;

Per esempio le funzioni t e t^2 sono linearmente indipendenti poiche'

$$c_1 t + c_2 t^2 = t(c_1 + c_2 t) = 0$$

implica che $c_1/c_2 = -t$ e percio' non vi sono costanti che soddisfano questa relazione eccetto $c_1 = c_2 = 0$.

Un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = 0$$

ha almeno un insieme di n soluzioni linearmente indipendenti.

Ogni insieme n di soluzioni linearmente indipendenti di un'equazione differenziale lineare omogenea di ennesimo ordine prende il nome di **sistema fondamentale**.Non vi e' un sistema fondamentale unico. Determinato un sistema fondamentale se ne possono ottenere altri . Un metodo puo' essere il seguente: siano le $y_i(t)$ i=1,2,….,n un insieme costituente un sistema fondamentale per un'equazione differenziale dell'n-esimo ordine. A partire da queste si puo' ottenere un insieme di n funzioni $z_i(t)$ del tipo: $z_1(t)=\sum_{i=1}^{n} a_{1i} y_i(t)$ $z_2(t)=\sum_{i=1}^{n} a_{2i} y_i(t)$ $z_n(t)=\sum_{i=1}^{n} a_{ni} y_i(t)$

dove le a_{ji} sono un insieme di n^2 costanti. Ogni $z_i(t)$ e' una soluzione dell'equazione differenziale .

L'insieme delle n soluzioni costituisce un sistema fondamentale se il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots & \dots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Facciamo qualche esempio:
L'equazione di un moto armonico

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

ha come sistema fondamentale: y_1=sin ωt ed y_2 = cos ωt ; un secondo sistema fondamentale e' costituito da :

$z_1 = y_2 + j\, y_1 = \cos \omega t + j \sin \omega t = e^{j\omega t}$ e $z_2 = y_2 - j\, y_1 = \cos \omega t - j \sin \omega t = e^{-j\omega t}$

Infatti $(z_1 + z_2)/2 = y_2 = \cos \omega t$ e $(z_1 - z_2)/2j = y_2 = \sin \omega t$

Stiamo convergendo verso l'esposizione del metodo di soluzione di equazioni differenziali a lineari e a coefficienti costanti (tempo invarianti).

In generale la equazione caratteristica di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i = 0$$

puo' avere :

- Radici Distinte
- Radici Multiple

Radici Distinte

Se le radici sono distinte si ha un sistema fondamentale per l'equazione omogenea $\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = 0$ del tipo : $y_1 = e^{D_1 t}, y_2 = e^{D_2 t}, \ldots\ldots, y_n = e^{D_n t}$

Ad esempio, l'equazione differenziale $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$

ha come equazione caratteristica $D^2 + 3D + 2 = 0$
le cui radici sono $D_1=-1$ e $D_2=-2$ e quindi un sistema fondamentale per la equazione differenziale e' dato da: $y_1=e^{-t}$ ed $y_2=e^{-2t}$

Radici Multiple

Se l'equazione caratteristica ha radici multiple , allora per ogni radice D_i di molteplicita' n_i vi sono n_i elementi del sistema fondamentale costituiti dai termini : $e^{D_i t}, te^{D_i t}, \ldots\ldots, t^{n_i - 1} e^{D_i t}$

Per esempio l'equazione : $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0$

di equazione caratteristica $D^2 + 2D + 1 = 0$

le cui radici sono $D_1 = D_2 = -1$ (radice doppia) ha un sistema fondamentale per la equazione differenziale dato da: e^{-t} e te^{-t}.

Soluzione di equazioni Differenziali Ordinarie a Coefficienti Costanti

Consideriamo la classe di equazioni differenziali del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x}{dt^i}$$

dove t e' il tempo, i coefficienti a e b sono costanti, x=x(t) (l'ingresso) e' una funzione nota del tempo e y=y(t) (uscita) e' la soluzione che vogliamo determinare. Per un sistema fisico descritto da un'equazione di questo tipo , in generale m ≤ n, essendo n l'ordine dell'equazione differenziale. Condizioni per poter ottenere una y(t) unica:

Deve essere fissato l'intervallo di tempo in cui si desidera una soluzione.

§ Occorre avere un insieme di n condizioni iniziali per y(t) e le sue prim n-1 derivate.

Continua

Per la classe di problemi che tratteremo l'intervallo di tempo resta fissato per $0 \le t < \infty$.

L'insieme delle condizioni iniziali e' dato da: $\boxed{y(0), \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}, \ldots\ldots, \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}}$

Un problema definito in questo intervallo e con queste condizioni iniziali prende il nome di problema del valore iniziale.

La soluzione di un'equazione differenziale di questo tipo si puo' dividere in due parti:

<u>Una risposta libera</u>

<u>Una risposta forzata</u>

Risposta libera

La risposta libera di un'equazione differenziale e' la soluzione dell'equazione differenziale quando l'ingresso x(t) e' identicamente nullo. Cioe'

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = 0$$

La soluzione y(t) dipende solo dalle n condizioni iniziali.

Esempio:dy/dt + y=0 con y(0) = c soluzione $y(t)=ce^{-t}$ e si puo' immediatamente verificare per sostituzione. ce^{-t} e' la risposta libera di ogni equazione differenziale del tipo dy/dt+y=x, con condizione iniziale y(0)=c.

La risposta libera di un'equazione differenziale puo' sempre essere scritta come combinazione lineare degli elementi di un sistema fondamentale. Cioe' se $y_1(t)$, $y_2(t)$,….. $y_n(t)$ e' un sistema fondamentale, ogni risposta libera si puo' scrivere come:

$$y_a = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t)$$

Dove le costanti c_i si determinano utilizzando le condizioni iniziali :

$$y(0), \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}, \ldots\ldots, \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$$

Dal sistema di n equazioni algebriche:

$$y(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(0), \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} c_i \left.\frac{dy_i}{dt}\right|_{t=0}, \ldots\ldots, \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} c_i \left.\frac{d^{n-1}y_i}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$$

L'indipendenza lineare delle $y_i(t)$ ci garantisce che si puo' ottenere una soluzione per queste equazioni per c_i $i=1,2,\ldots,n$.

Rivisitiamo l'esempio gia' fatto considerando l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=x$$

e determiniamone la risposta libera $y_a(t)$ imponendo le condizioni iniziali $y(0)=0$, $(dy/dt)|_{t=0}=1$

$y_a(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$ essendo c_1 e c_2 coefficienti da determinare ed e^{-t} e e^{-2t} costituiscono un sistema fondamentale dell'equazione $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$

Poiche' $y_a(t)$ deve soddisfare le condizioni iniziali:

$$y_a(0)=y(0)=0=\sum_{i=1}^{2}c_iy_i(0)=c_1+c_2$$

e

$$\left.\frac{dy_a}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=1=\sum_{i=1}^{2}c_i\left.\frac{dy_i}{dt}\right|_{t=0}=-c_1-c_2$$

quindi $c_1=1$ e $c_2=-1$. La risposta libera e' data pertanto da:

$$\mathbf{y_a(t)=e^{-t}-e^{-2t}}$$

Risposta Forzata

La risposta forzata $y_b(t)$ di un'equazione differenziale e' la soluzione dell'equazione differenziale quando tutte le condizioni iniziali $y(0), \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}, \ldots\ldots, \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$ sono identicamente nulle.

Questo significa che la risposta y(t) dipende unicamente dall'ingresso x(t). La risposta forzata per un'equazione differenziale lineare ordinaria a coefficienti costanti si puo' scrivere in termini di integrale di convoluzione:

$$y_b(t) = \int_0^t w(t-\tau)\left[\sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x(\tau)}{d\tau^i}\right] d\tau$$

dove w(t-τ) e' la funzione peso dell'equazione differenziale. In questa forma l'integrale di convoluzione descrive un sistema causale.

Continua

$$w(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) \; per \quad t \geq 0$$

W(t) = 0 per t <0

essendo le c_i costanti e l'insieme di funzioni $y_i(t)$ costituisce un sistema fondamentale dell'equazione differenziale. Osserviamo che w(t) e' una risposta libera dell'equazione differenziale; per la sua completa definizione sono percio' necessarie n condizioni iniziali. Queste condizioni stabiliscono i valori delle costanti c_i.

Le condizioni iniziali che **<u>tutte le funzioni peso</u>** di un'equazione differenziale devono soddisfare sono

$$w(0) = 0, \left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = 0, \ldots\ldots, \left.\frac{d^{n-2}w}{dt^{n-2}}\right|_{t=0} = 0, \left.\frac{d^{n-1}w}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} = 1$$

Esempio

L'equazione differenziale $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = x$

ha come funzione peso una combinazione lineare di un suo sistema fondamentale: $w(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$ c_1 e c_2 si determinano dalle due equazioni algebriche: $w(0)=0= c_1 + c_2$, e $(dw/dt)|_{t=0} =1= - c_1 -2\, c_2$
La soluzione e' quindi $c_1=1$ e $c_2=-1$ e la funzione peso e' $w(t)= e^{-t}-e^{-2t}$
In definitiva avendo determinato la funzione peso possiamo ora determinare la risposta forzata, se $x(t)= 1$ La risposta forzata $y_b(t)$ sara' data da:

$$y_b(t) = \int_0^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^t \left[e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \right] d\tau$$

$$= e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau - e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau} = \frac{1}{2}(1-2e^{-t}+e^{-2t})$$

Risposta Totale

La risposta totale di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti e' costituita dalla somma della risposta libera e della risposta forzata.

La risposta totale della equazione differenziale di esempio

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=1$$

con condizioni iniziali $y(0)=0$ e $(dy/dt)_{t=0}=1$sara' data da:

$y(t)= y_a(t) +y_b(t)= (e^{-t}-e^{-2t})+1/2(1-2\ e^{-t}-e^{-2t})=$

$=1/2(1\ -e^{-2t})$

Risposte Transitorie e a Regime

Le risposte transitorie e a regime (a transitorio esaurito) costituiscono una differente coppia di funzioni la cui somma da' la risposta totale di un sistema fisico modellato mediante un'equazione differenziale.

Queste funzioni sono importanti perchè spesso vengono usate per definire le caratteristiche di un sistema di controllo.

La risposta a regime e' quella parte della risposta totale che non tende a zero al tendere del tempo all'infinito.

La risposta transitoria e' quella parte della risposta totale che tende a zero al tendere del tempo all'infinito.

Per la nostra equazione di esempio

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1$$

con condizioni iniziali $y(0)=0$ e $(dy/dt)_{t=0}=1$ si ha che essendo la risposta totale $y(t)=1/2-1/2e^{-2t}$.
La risposta a regime (a transitorio esaurito) $y_{SS}=1/2$ mentre quella transitoria e' data da $y_T=-1/2e^{-2t}$.

Funzioni di Ingresso canoniche

Impulso Scalino Rampa Unitaria