Funzione di trasferimento I

Calcolo della risposta di un sistema dinamico lineare

Per il calcolo della risposta (uscita) di un sistema dinamico **lineare** soggetto ad ingressi assegnati, si possono seguire due strade.

Calcolo nel "dominio del tempo"

Con i metodi dell'analisi matematica, si integra il sistema di equazioni differenziali (equazioni di stato) forzato dalle funzioni del tempo assegnate (gli ingressi). Dalla trasformazione di uscita si ricava quindi l'espressione dell'uscita.

Calcolo nel "*dominio delle trasformate*"

Calcolo nel “*dominio delle trasformate*”

Alla funzione del tempo $u(t)$ si associa, con i metodi matematici che vedremo, una funzione U che prende il nome di **trasformata** del segnale di ingresso (“segnale” : una variabile, scalare, funzione del tempo). Dalle equazioni del sistema dinamico è poi possibile ricavare facilmente il legame tra la trasformata U e la trasformata Y del segnale di uscita. Ricavata quindi la trasformata Y, le si associa la funzione del tempo $y(t)$, che ne costituisce l’**antitrasformata**, e che rappresenta la risposta del sistema cercata.

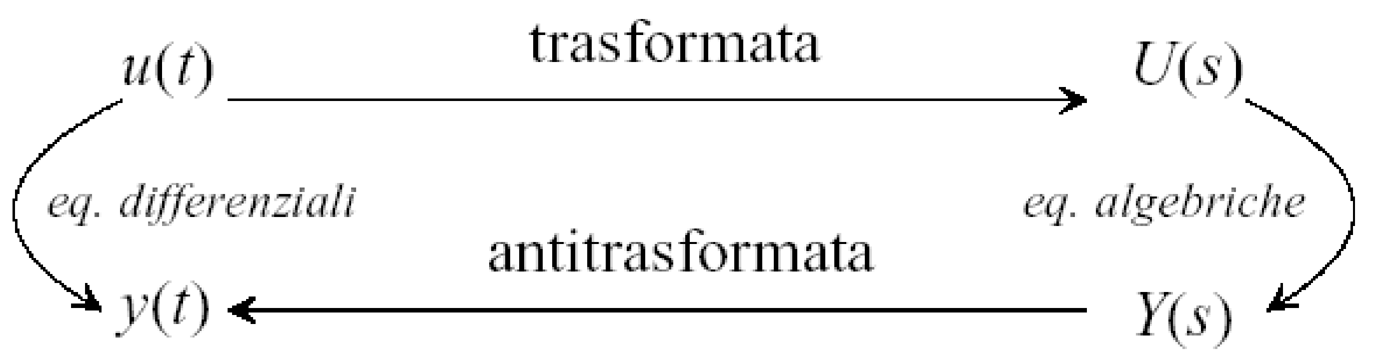


Fig. 1 : Calcolo della risposta di un sistema dinamico lineare

Trasformata di Laplace

- Si consideri una funzione reale $f(t)$ della variabile reale t, definita per $t \geq 0$.
- La funzione della **variabile complessa** s:

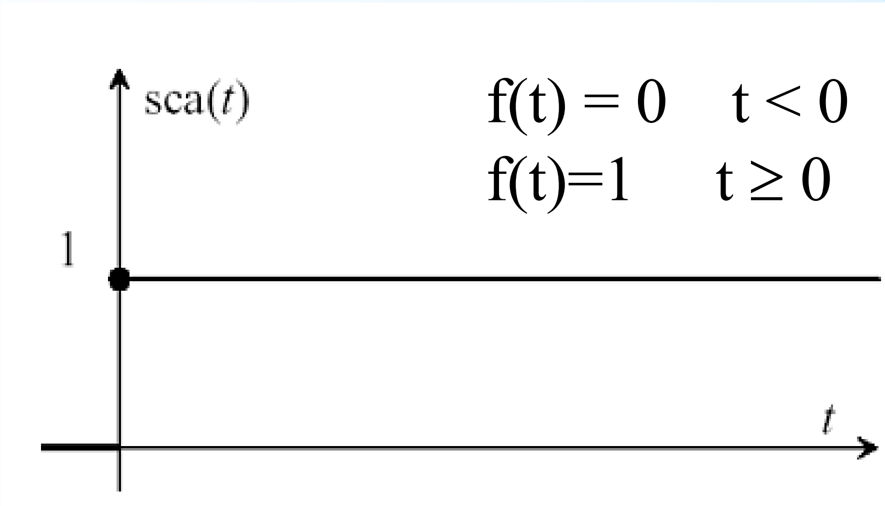
$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

si dice **trasformata di Laplace** di $f(t)$ e si indica con $\mathcal{L}[f(t)]$.

La trasformata esiste, in generale, solo per un insieme di valori di s.
Ricordiamoci che s e' una variabile complessa s = $\alpha \pm j\omega$.

Esempio

- Si consideri la funzione **scalino**:



PROCEDURA SENZA PENSARE:
Aprire Matlab e dare i seguenti comandi:
» syms t
» laplace(t^0)
ans =1/s
Il problema e' risolto!

A mano si dovrebbe fare cosi':

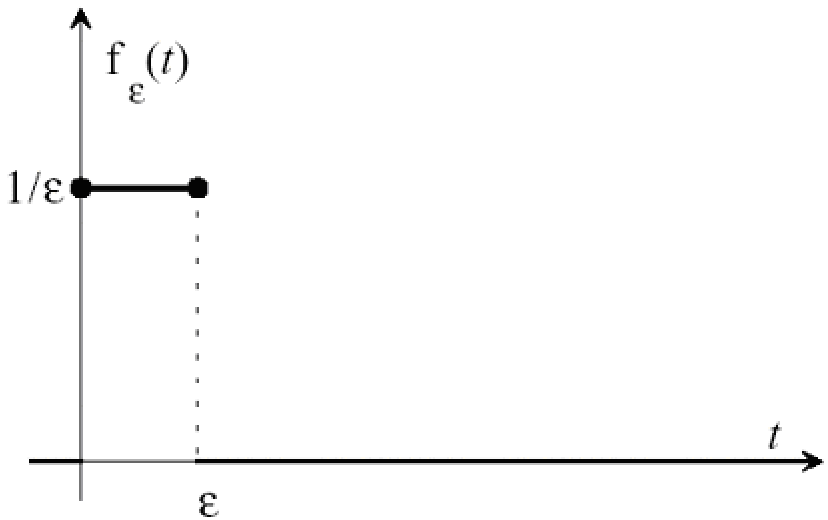
$$\mathcal{L}[\mathrm{sca}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Esempio

- Si consideri la funzione **impulso**:

$$f(t) = \mathrm{imp}(t) = 0, \quad \forall t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$$



Tale funzione può essere vista come il limite, per $\varepsilon \to 0$, della seguente funzione:

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$

F(s) = 1

Procedura Matlab

```
>> syms s t
>> f = 'Dirac(t)'
f =Dirac(t)
>> F=laplace(f,t,s)
 F =1
```

$$\mathfrak{L}[\mathrm{imp}(t)] = \int_0^\infty \mathrm{imp}(t) e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\infty f_\varepsilon(t) e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{s e^{-s\varepsilon}}{s} = 1$$

Symbolic Toolbox di Matlab
INT Integrate.
INT(S) is the indefinite integral of S with respect to its symbolic variable as defined by FINDSYM. S is a SYM (matrix or scalar). If S is a constant, the integral is with respect to 'x'.INT(S,v) is the indefinite integral of S with respect to v. v is a scalar SYM. INT(S,a,b) is the definite integral of S with respect to its symbolic variable from a to b. a and b are each double or symbolic scalars.INT(S,v,a,b) is the definite integral of S with respect to v from a to b.

Esempi:

```
syms x x1 alpha u t;
A = [cos(x*t),sin(x*t);-sin(x*t),cos(x*t)];
int(1/(1+x^2))            returns    atan(x)
int(sin(alpha*u),alpha)  returns    -cos(alpha*u)/u
int(besselj(1,x),x)      returns    -besselj(0,x)
int(x1*log(1+x1),0,1)    returns     1/4
int(4*x*t,x,2,sin(t))    returns     2*sin(t)^2*t-8*t
int([exp(t),exp(alpha*t)])  returns  [exp(t), 1/alpha*exp(alpha*t)]
int(A,t)                 returns     [sin(x*t)/x, -cos(x*t)/x]
                                     [cos(x*t)/x,  sin(x*t)/x]
```

```
LIMIT    Limit of an expression.
 LIMIT(F,x,a) takes the limit of the symbolic expression F as x -> a.
 LIMIT(F,a) uses findsym(F) as the independent variable.
 LIMIT(F) uses a = 0 as the limit point.
 LIMIT(F,x,a,'right') or LIMIT(F,x,a,'left') specify the direction
 of a one-sided limit.
 Examples: syms x a t h;        limit(sin(x)/x)              returns   1
   limit((x-2)/(x^2-4),2)         returns   1/4
   limit((1+2*t/x)^(3*x),x,inf)    returns   exp(6*t)
   limit(1/x,x,0,'right')  returns   inf limit(1/x,x,0,'left')    returns   -inf
   limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)  returns   cos(x)
   v = [(1 + a/x)^x, exp(-x)]; limit(v,x,inf,'left')  returns   [exp(a),  0]
```

Trasformate notevoli

$f(t),\ t \geq 0$	$F(s)$
$\mathrm{imp}(t)$	1
$\mathrm{sca}(t)$	$1/s$
$\mathrm{ram}(t)$	$1/s^2$
$\mathrm{par}(t)$	$1/s^3$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$s/(s^2+\omega^2)$

Essendo

$$\mathrm{ram}(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \mathrm{par}(t) = \begin{cases} t^2/2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Symbolic Toolbox

» syms a t w <CR>
» laplace(t^2/2) <CR> ans =1/s^3
» laplace(sin(w*t)) <CR> ans =w/(s^2+w^2)
» laplace(cos(w*t)) <CR> ans =s/(s^2+w^2)
» laplace(cos(w*t)) <CR> ans =s/(s^2+w^2)
» laplace(exp(a*t)) <CR> ans =1/(s-a)

Proprietà notevoli della trasformata

- Linearità

$$\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[f_2(t)].$$

Esempio

$$L(3e^{-t} - e^{-2t}) \Rightarrow \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1} \qquad \mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$$

Essendo α_1=3 ed α_2=-1 per la linearita' della trasformata otteniamo che

$$\mathrm{L}(3e^{-t} - e^{-2t}) = 3\mathrm{L}(e^{-t}) - \mathrm{L}(e^{-2t}) = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

in definitiva:

$$\mathcal{L}(3e^{-t} - e^{-2t}) = \frac{2s+5}{s^2+3s+2}$$

Procedura con Matlab

» syms t ; laplace(exp(-t))   ans =1/(1+s)

» laplace(exp(-2*t))   ans =1/(s+2)

» laplace(3*exp(-t)-exp(-2*t)) ans =3/(1+s)-1/(s+2)

da cui il risultato mostrato in precedenza.

- Traslazione nel dominio della variabile complessa

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,

allora $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$.

Esempio:

La trasformata di Laplace di $\mathcal{L}(e^{-2t}\cos t)$

si puo' determinare sapendo che $\mathcal{L}(\cos t) = \dfrac{s}{s^2+1}$ e ponendo a= - 2

$$\mathcal{L}(e^{-2t}\cos t) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2}{s^2+4s+1}$$

Procedura con Matlab:

» syms t

» laplace(exp(-2*t)*cos(t))

ans = (s+2)/((s+2)^2+1)

- Traslazione nel dominio del tempo

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,

allora $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s)$, per $\tau \geq 0$.

Esempio:

La trasformata di Laplace di e^{-t} e' data da 1/(s+1). La trasformata della funzione f(t) definita da:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-(t-2)} & \tau > 2 \\ 0 & \tau \leq 2 \end{cases}$$

si otterra' applicando la proprieta' di traslazione nel tempo con $\tau=2$:

$$\mathcal{L}[f(t)] = e^{-2s} \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{e^{-2s}}{s+1}$$

Procedura con Matlab

```
>> f = 'Heaviside(t-2)'
f =Heaviside(t-2)
>> F = laplace(f,t,s)
 F =exp(-2*s)/s
```

Heaviside →Funzione a gradino

- Derivazione nel dominio del tempo

Se $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$,

allora $\mathscr{L}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f\left(0^+\right)$.

Dove f(0^+) e' il valore iniziale di f(t), valutato come limite di f(t) per t che tende a zero da valori positivi t > 0

Teorema del valore iniziale $\quad f(0^+) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

Esempio: La trasformata $\mathscr{L}\left[\dfrac{d(e^{-t})}{dt}\right]$ sapendo che $\mathscr{L}\left[e^{-t}\right] = \dfrac{1}{s+1}$

e che

$f(0^+) = \lim_{t\to 0} e^{-t} = \lim_{s\to\infty} \dfrac{s}{s+1} = 1$ si ottiene che $\mathscr{L}\left[\dfrac{d(e^{-t})}{dt}\right] = s\dfrac{1}{s+1} - 1 = -\dfrac{1}{s+1}$

Procedura con Matlab:

» syms t ; laplace(diff(exp(-t))) ans = -1/(1+s)

Teorema del valore finale

- Il valore finale f(∞) di una funzione f(t), la cui trasformata di Laplace e' F(s) e' dato da:

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Se questo limite esiste.

- Derivazione nel dominio della variabile complessa

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,

allora $\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$.

Sia $f(t)=e^{-t}$ F(s)=1/(s+1)

```
» syms t
» laplace(exp(-t))        ans = 1/(1+s)
» laplace(t*exp(-t))      ans =1/(1+s)^2
```

- La trasformata di Laplace dell'integrale: $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}$

Esempio: $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{-\tau}d\tau\right]=\frac{1}{s(s+1)}$ Essendo f(t)=e^{-t} ed F(s)=1/(s+1)

```
syms y tau s t
 laplace(int('y(tau)',‘tau=0 .. t'),t,s)
ans = laplace(y(t),t,s)/s
```

Cioè Y(s)/s ora y(t) = e^{-t} quindi

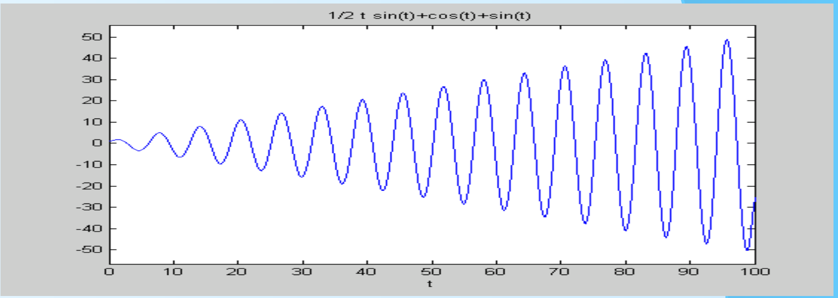
```
laplace(exp(-t))
 ans =1/(1+s)
```

e da qui il risultato 1/(s(s+1))

Esercizio da eseguire in Matlab

```
echo on
% y" + y=cos(t) Equazione differenziale da risolvere
% Procediamo prima nel dominio del tempo e poi vedremo come si opera
% mediante trasformata di Laplace
syms deq gensoln y
% deq = 'diff(y(t),t,t)+ y(t) - cos(t)' % costituisce la sintassi di Maple
 deq = 'D2y  + y - cos(t)' % è lo stile usuale di Matlab
 gensoln = dsolve(deq,'t')
 %deq =D2y  + y - cos(t)
%gensoln =(1/2*sin(t)*cos(t)+1/2*t)*sin(t)-
    1/2*sin(t)^2*cos(t)+C1*sin(t)+C2*cos(t)
 %La Symbolic Toolbox di Matlab ritorna una soluzione con una coppia di
 %incognite corrispondenti alle condizioni iniziali y(0) e y'(0) non
 %specificate. Ponendo y(0)=1 e y'(0)=1, possiamo ottenere la soluzione:
 initsoln = dsolve(deq,'y(0)=1,Dy(0)=1', 't')
%initsoln =(1/2*sin(t)*cos(t)+1/2*t)*sin(t)-1/2*sin(t)^2*cos(t)+sin(t)+cos(t)
```

```
%Procediamo alla soluzione con la trasformata di Laplace
 deqdiff = 'diff(y(t),t,t)  + y(t) - cos(t)'
 ldeqdiff = laplace(deqdiff,t,s)
 sldeqdiff = subs(ldeqdiff,{'D(y)(0)','y(0)'},{1,1})
 %Subs è un comando per sostituire valori numerici nell'equazione data
 syms Ys
 ldeqinit = subs(sldeqdiff,'laplace(y(t),t,s)',Ys)
 ly = solve(ldeqinit,Ys)
 sol=ilaplace(ly,s,t)
%sol =1/2*t*sin(t)+cos(t)+sin(t)
 %La soluzione ottenuta non sembra uguale a quella precedente nel dominio
 %del tempo: occorre un pò di algebra ed il comando Simplify ci soccorre!
Simplify((1/2*sin(t)*cos(t)+1/2*t)*sin(t)-1/2*sin(t)^2*cos(t)+sin(t)+cos(t))
%ans =1/2*t*sin(t)+cos(t)+sin(t)
%possiamo vedere come si comporta la soluzione in un intervallo temporale a
%nostra scelta con il comando ezplot
ezplot(sol,[0 100])
```



Poli e zeri

I poli di una trasformata $F(s)$ sono i valori di s per cui $|F(s)| = \infty$.

Gli zeri di una trasformata $F(s)$ sono i valori di s per cui $F(s) = 0$.

Se $F(s)$ è *razionale*, ossia esprimibile come rapporto di due polinomi in s,

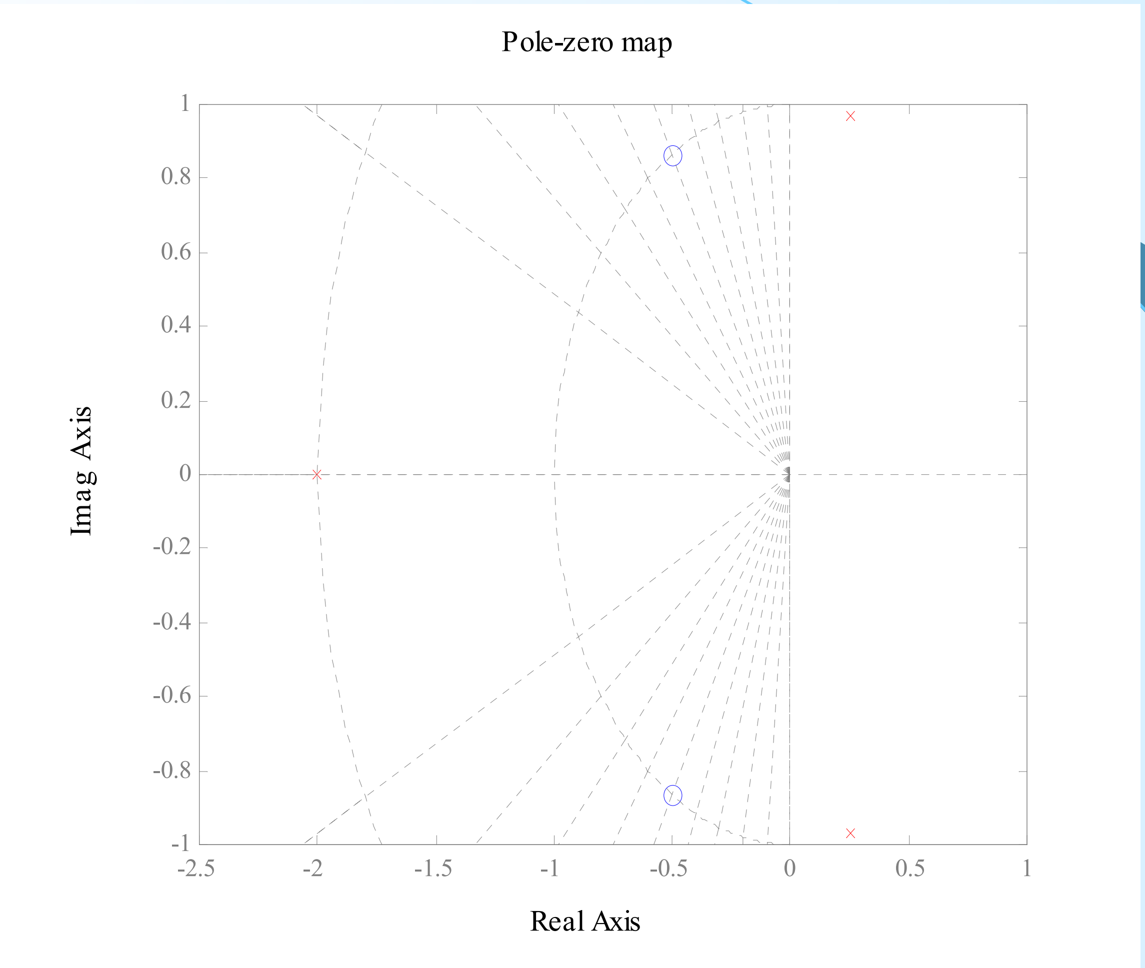
$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

i poli sono le radici del denominatore $D(s)$, gli zeri le radici del numeratore $N(s)$.

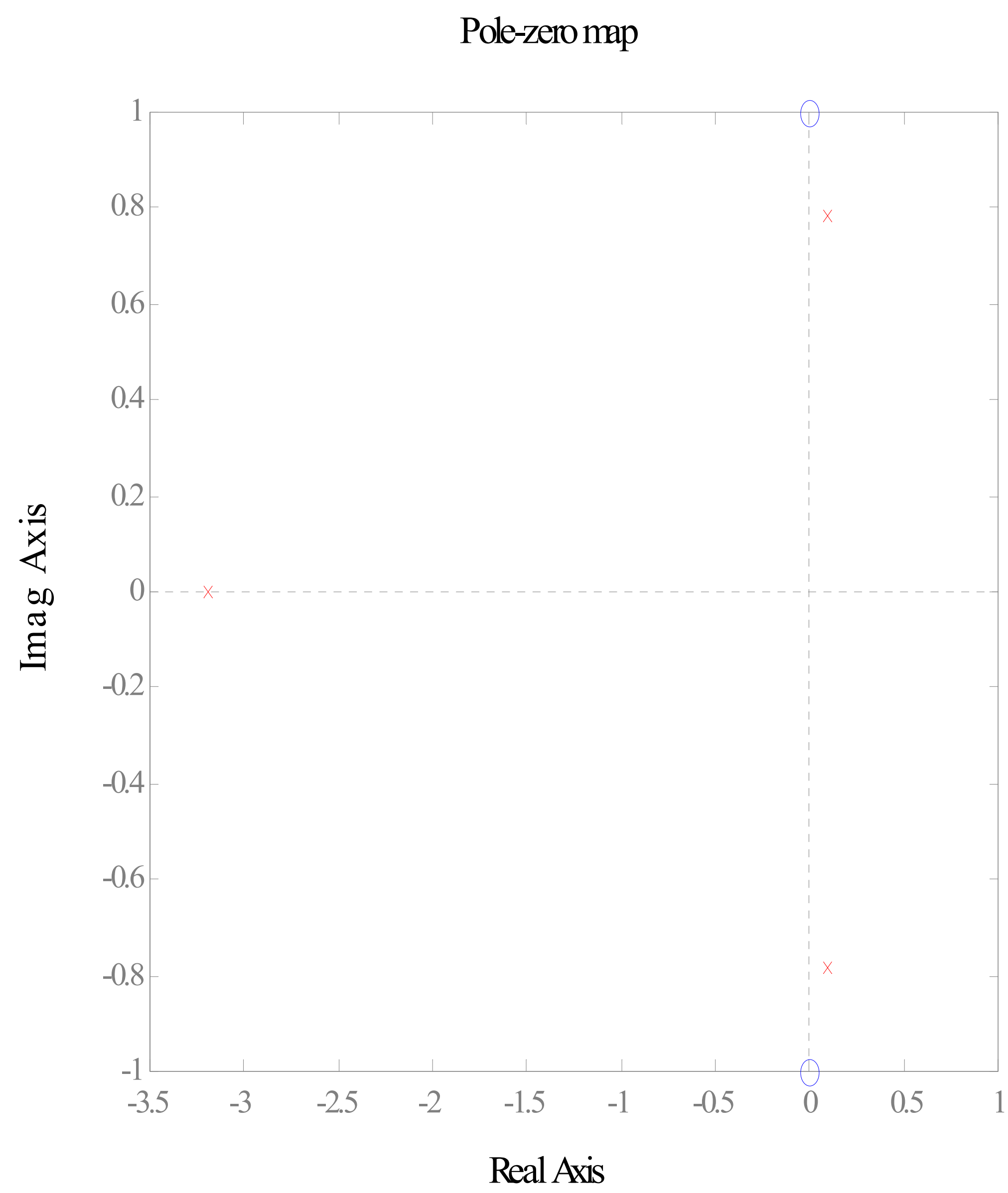
Procedura con Matlab per la ricerca di poli e zeri di una trasformata di Laplace:» num=[1 1 1]; den=[2 3 0 4];

```
» sys=tf(num,den)
Transfer function:
   s^2 + s + 1
-----------------
2 s^3 + 3 s^2 + 4

» [p,z]=pzmap(sys)
p =
  -2.0000
   0.2500 + 0.9682i
   0.2500 - 0.9682i

z =
  -0.5000 + 0.8660i
  -0.5000 - 0.8660i
```

» pzmap(sys)
» sgrid



```
» num=[1 0 1];
» den=[1 3 0 2];
» sys=tf(num,den) <CR>
Transfer function:
    s^2 + 1
---------------
s^3 + 3 s^2 + 2
» [p,z]=pzmap(sys) <CR>
p =
  -3.1958
   0.0979 + 0.7850i
   0.0979 - 0.7850i
z =
        0 + 1.0000i
        0 - 1.0000i
» pzmap(sys) <CR>
```



» help pzmap

PZMAP Pole-zero map of LTI models.

PZMAP(SYS) computes the poles and (transmission) zero of the LTI model SYS and plots them in the complex plane. The poles are plotted as x's and the zeros are plotted as o's.

When invoked with left-hand arguments,

[P,Z] = PZMAP(SYS)

returns the poles and zeros of the system in the column vectors P and Z. No plot is drawn on the screen.

The functions SGRID or ZGRID can be used to plot lines of constant damping ratio and natural frequency in the s or z plane. For arrays SYS of LTI models, PZMAP plots the poles and zeros of each model in the array on the same diagram.See also POLE, ZERO, RLOCUS, SGRID, ZGRID, LTIMODELS.

Antitrasformata di Laplace

Data una funzione $F(s)$ di variabile complessa, si vuole determinare la funzione $f(t)$ di cui $F(s)$ costituisce la trasformata. I seguenti due teoremi forniscono informazioni parziali su $f(t)$.

Teorema del valore iniziale

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,

allora $f(0^+) = \lim_{s\to\infty}[sF(s)]$.

Se, ad esempio,

$$F(s) = \frac{s^2+s+1}{2s^3+3s^2+4},$$

allora $f(0^+) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3+s^2+s}{2s^3+3s^2+4} = \frac{1}{2}$.

Teorema del valore finale

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, e $F(s)$ è razionale e ha poli tutti a parte reale negativa oppure nell'origine del piano complesso, allora

$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[sF(s)]$.

Se, ad esempio,

$$F(s) = \frac{s^2+s+1}{2s^3+3s^2+s},$$

$F(s)$ ha poli in 0, $-1/2$ e -1, per cui il teorema è applicabile, e risulta:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2+s+1}{2s^2+3s+1} = 1 .$$

help ilaplace

ILAPLACE Inverse Laplace transform.

F = ILAPLACE(L) is the inverse Laplace transform of the scalar sym L with default independent variable s. The default return is a function of t. If L = L(t), then ILAPLACE returns a function of x:

*F = F(x).By definition, F(t) = int(L(s)*exp(s*t),s,c-i*inf,c+i*inf) where c is a real number selected so that all singularities of L(s) are to the left of the line s = c, i = sqrt(-1), and the integration is taken with respect to s. F = ILAPLACE(L,y) makes F a function of y instead of the default t: ILAPLACE(L,y) <=> F(y) = int(L(y)*exp(s*y),s,c-i*inf,c+i*inf).*

Here y is a scalar sym.F = ILAPLACE(L,y,x) makes F a function of x instead of the default t:

*ILAPLACE(L,y,x) <=> F(y) = int(L(y)*exp(x*y),y,c-i*inf,c+i*inf), integration is taken with respect to y.*

Examples: syms s t w x y ; ilaplace(1/(s-1)) returns exp(t)

ilaplace(1/(t^2+1)) returns sin(x)

*ilaplace(t^(-sym(5/2)),x) returns 4/3/pi^(1/2)*x^(3/2)*

*ilaplace(y/(y^2 + w^2),y,x) returns cos(w*x)*

ilaplace(sym('laplace(F(x),x,s)'),s,x) returns F(x)

See also LAPLACE, IFOURIER, IZTRANS.

Esempio sulla linearita' della trasformata di Laplace:

$$L(3e^{-t}-e^{-t})$$

» syms t
» laplace(exp(-t))
ans =1/(1+s)
» laplace(exp(-2*t))
ans =1/(s+2)
» laplace(3*exp(-t)-exp(-2*t))
ans =3/(1+s)-1/(s+2)

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1}\right]=e^{-t} \\ \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+3}\right]=e^{-3t} \end{cases}$$

Per la linearita' della trasformata si avra' che:

$$\left[\frac{2}{s+1}-\frac{4}{s+3}\right]=2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]=2e^{-t}-4e^{-3t}$$

In Matlab:

» syms t s ; ilaplace(2/(s+1)-4/(s+3))
ans =2*exp(-t)-4*exp(-3*t)

The Laplace and Inverse Laplace Transforms

The Laplace transform of a function $f(t)$ is defined as

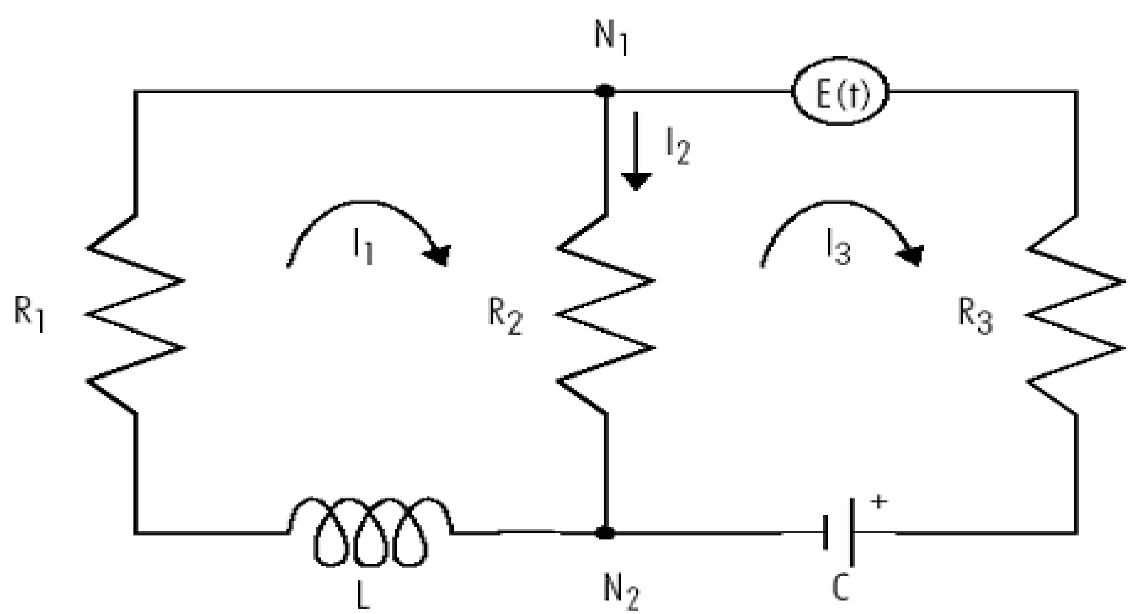
$$L[f](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-ts}dt$$

while the inverse Laplace transform (ILT) of $f(s)$ is

$$L^{-1}[f](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)e^{st}ds$$

where c is a real number selected so that all singularities of $f(s)$ are to the left of the line $s = c$. The notation $L[f]$ denotes the Laplace transform of f at s. Similarly, $L^{-1}[f]$ is the ILT of f at t.

The Laplace transform has many applications including the solution of ordinary differential equations/initial value problems. Consider the resistance-inductor-capacitor (RLC) circuit below..



Let Rj and Ij, $j = 1, 2, 3$ be resistances (measured in ohms) and currents (amps), respectively; L be inductance (henrys), and C be capacitance (farads); $E(t)$ be the electromotive force, and $Q(t)$ be the charge

By applying Kirchhoff's voltage and current laws, Ohm's Law, Faraday's Law, and Henry's Law, you can arrive at the following system of simultaneous ordinary differential equations.

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{R_2}{L}\frac{dQ}{dt} = \frac{R_1 - R_2}{L} I_1,\ I_1(0) = I_{10}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R_3 + R_2}\left(E(t) - \frac{1}{C}Q(t)\right) + \frac{R_2}{R_3 + R_2} I_1,\ Q(0) = Q_0$$

Let's solve this system of differential equations using `laplace`. We will first treat the R_j, L, and C as (unknown) real constants and then supply values later on in the computation.

```
syms R1 R2 R3 L C real
dI1 = sym('diff(I1(t),t)'); dQ = sym('diff(Q(t),t)');
I1 = sym('I1(t)'); Q = sym('Q(t)');
syms t s
E = sin(t);  % Voltage
eq1 = dI1 + R2*dQ/L - (R2 - R1)*I1/L;
eq2 = dQ - (E - Q/C)/(R2 + R3) - R2*I1/(R2 + R3);
```

At this point, we have constructed the equations in the MATLAB workspace. An approach to solving the differential equations is to apply the Laplace transform, which we will apply to `eq1` and `eq2`. Transforming `eq1` and `eq2`

```
L1 = laplace(eq1,t,s)
L2 = laplace(eq2,t,s)
```

returns

```
L1 =
[s*laplace(I1(t),t,s) - I1(0) + R2/L*(s*laplace(Q(t),t,s) - Q(0))
-  (R2 - R1)/L*laplace(I1(t),t,s)]

L2 =
[s*laplace(Q(t),t,s) - Q(0) - 1/(R2 + R3)/C*(C/(s^2 + 1) -
laplace(Q(t),t,s)) - R2/(R2 + R3)*laplace(I1(t),t,s)]
```

Now we need to solve the system of equations `L1 = 0`, `L2 = 0` for `laplace(I1(t),t,s)` and `laplace(Q(t),t,s)`, the Laplace transforms of I_1 and Q, respectively. To do this, we need to make a series of substitutions. For the purposes of this example, use the quantities $R_1 = 4\ \Omega$ (ohms), $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $C = 1/4$ farads, $L = 1.6$ H (henrys), $I_1(0) = 15$ amps, and $Q(0) = 2$ amps/sec. Substituting these values in `L1`

```
syms LI1 LQ
NI1 = subs(L1,{R1,R2,R3,L,C,'I1(0)','Q(0)'}, ...
      {4,2,3,1.6,1/4,15,2})
```

returns

```
NI1 =
s*laplace(I1(t),t,s) - 35/2 + 5/4*s*laplace(Q(t),t,s)
+ 5/4*laplace(I1(t),t,s)
```

The substitution

```
NQ = subs(L2,{R1,R2,R3,L,C,'I1(0)','Q(0)'},{4,2,3,1.6,1/4,15,2})
```

returns

```
NQ =
s*laplace(Q(t),t,s) - 2 - 1/5/(s^2+1) + 4/5*laplace(Q(t),t,s)
- 2/5*laplace(I1(t),t,s)
```

To solve for `laplace(I1(t),t,s)` and `laplace(Q(t),t,s)`, we make a final pair of substitutions. First, replace the strings `'laplace(I1(t),t,s)'` and `'laplace(Q(t),t,s)'` by the syms `LI1` and `LQ`, using

```
NI1 =
subs(NI1,{'laplace(I1(t),t,s)','laplace(Q(t),t,s)'},{LI1,LQ})
```

to obtain

```
NI1 =
s*LI1 - 35/2 + 5/4*s*LQ + 5/4*LI1
```

Collecting terms

```
NI1 = collect(NI1,LI1)
```

gives

```
NI1 =
(s + 5/4)*LI1 - 35/2 + 5/4*s*LQ
```

A similar string substitution

```
NQ =
subs(NQ,{'laplace(I1(t),t,s)','laplace(Q(t),t,s)'},{LI1,LQ})
```

yields

```
NQ =
s*LQ - 2 - 1/5/(s^2+1) + 4/5*LQ - 2/5*LI1
```

which, after collecting terms,

```
NQ = collect(NQ,LQ)
```

gives

```
NQ =
(4/5 + s)*LQ - 2/5*LI1 - 2 - 1/5/(s^2+1)
```

Now, solving for LI1 and LQ

```
[LI1,LQ] = solve(NI1,NQ,LI1,LQ)
```

we obtain

```
LI1 =
[5*(59*s + 56 + 56*s^2 + 60*s^3)/(51*s^3 + 40*s^2 + 51*s + 20
+ 20*s^4)]

LQ =
[(44*s + 195 + 190*s^2 + 40*s^3)/(51*s^3 + 40*s^2 + 51*s + 20
+ 20*s^4)]
```

To recover I1 and Q we need to compute the inverse Laplace transform of LI1 and LQ. Inverting LI1

```
I1 = ilaplace(LI1,s,t)
```

produces

```
I1 =
-5/51*sin(t)+15*exp(-51/40*t)*cosh(1/40*1001^(1/2)*t)
- 1465/7293*exp(-51/40*t)*1001^(1/2)*sinh(1/40*1001^(1/2)*t)
- 5/51*sin(t)
```

Inverting LQ

```
Q = ilaplace(LQ,s,t)
```

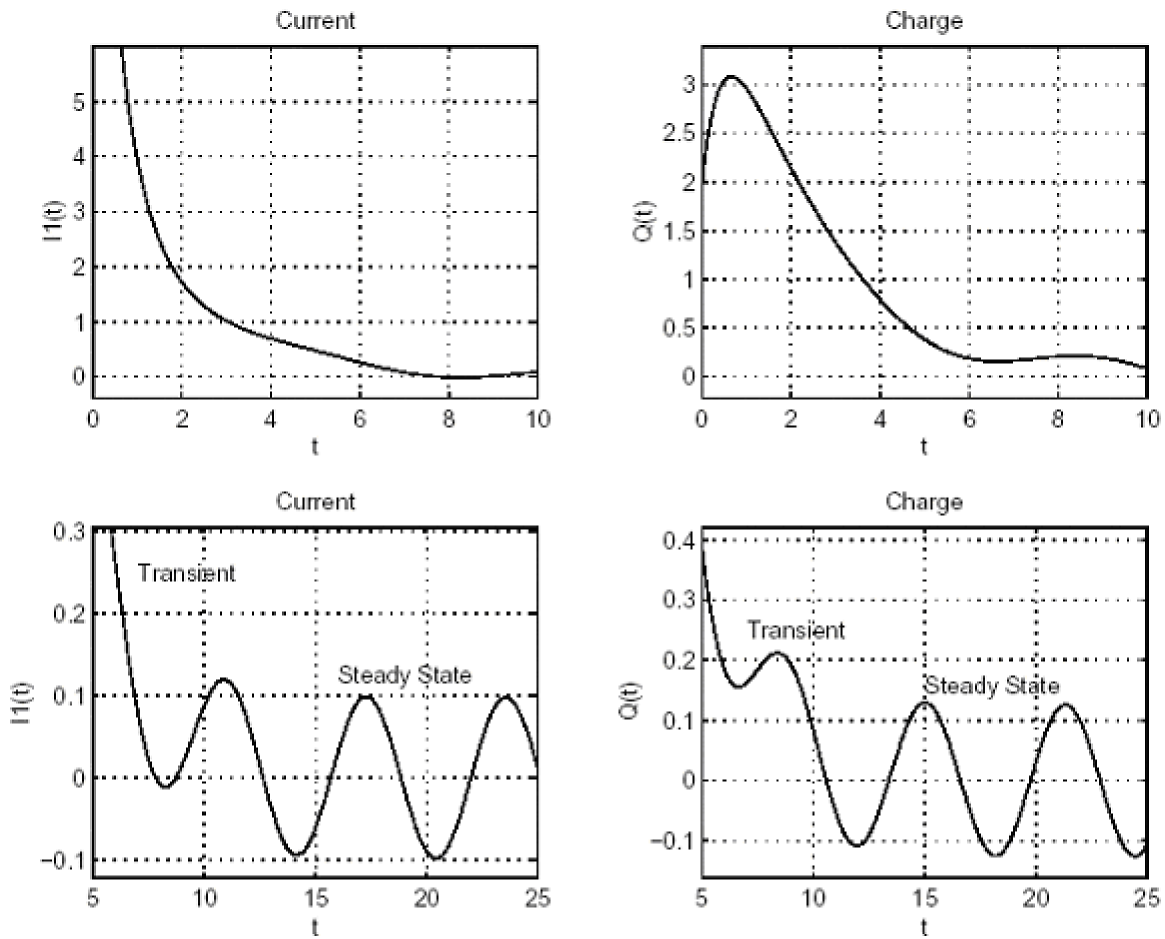
yields

```
Q =
-5/51*cos(t) + 4/51*sin(t)
+ 107/51*exp(-51/40*t)*cosh(1/40*1001^(1/2)*t)
+ 2039/7293*exp(-51/40*t)*1001^(1/2)*sinh(1/40*1001^(1/2)*t)
```

Now let's plot the current I1(t) and charge Q(t) in two different time domains, $0 \le t \le 10$ and $5 \le t \le 25$. The statements

```
subplot(2,2,1); ezplot(I1,[0,10]);
title('Current'); ylabel('I1(t)'); grid
subplot(2,2,2); ezplot(Q,[0,10]);
title('Charge'); ylabel('Q(t)'); grid
subplot(2,2,3); ezplot(I1,[5,25]);
title('Current'); ylabel('I1(t)'); grid
text(7,0.25,'Transient'); text(16,0.125,'Steady State');
subplot(2,2,4); ezplot(Q,[5,25]);
title('Charge'); ylabel('Q(t)'); grid
text(7,0.25,'Transient'); text(15,0.16,'Steady State');
```

generate the desired plots

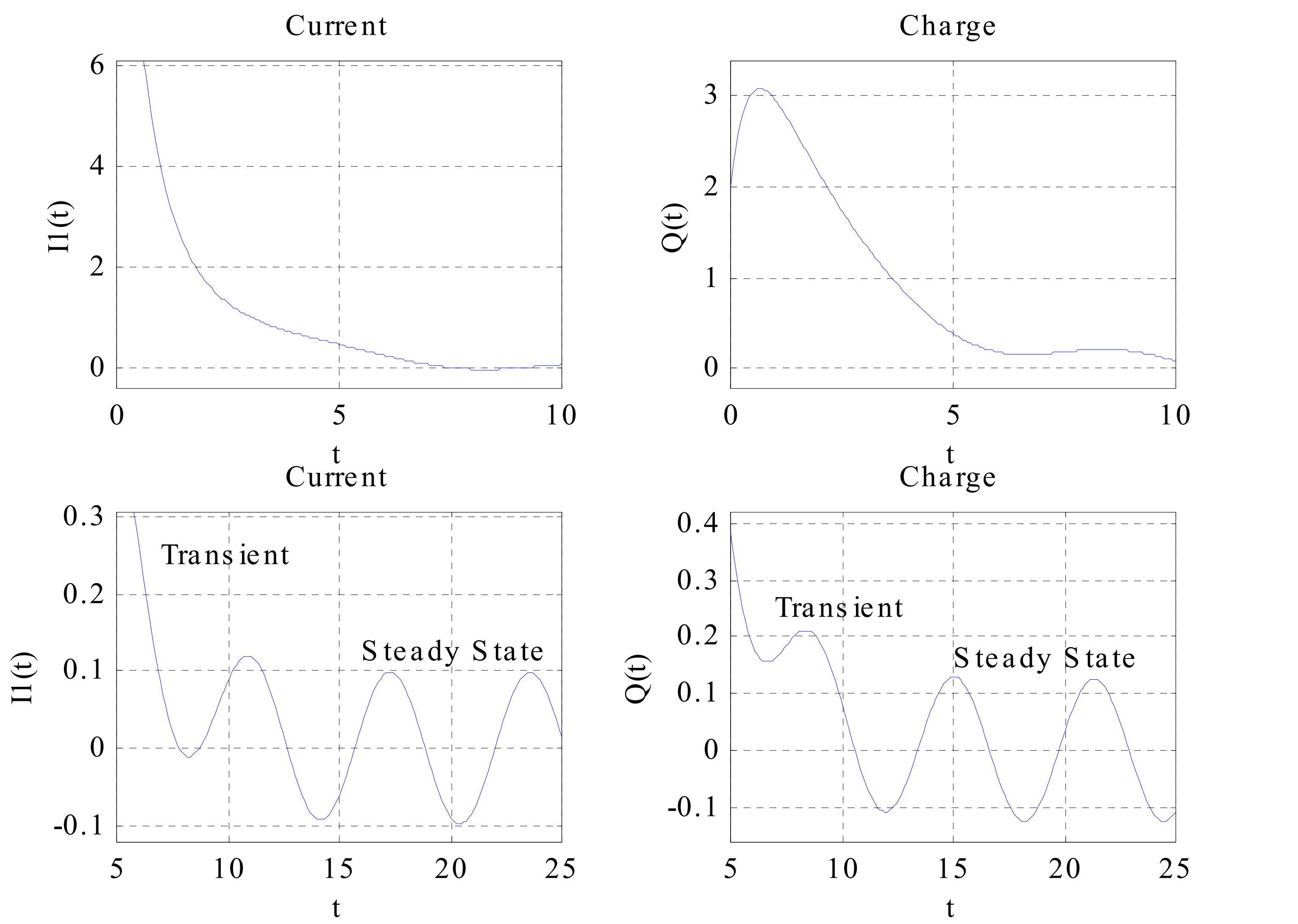


Note that the circuit's behavior, which appears to be exponential decay in the short term, turns out to be oscillatory in the long term. The apparent discrepancy arises because the circuit's behavior actually has two components: an exponential part that decays rapidly (the "transient" component) and an oscillatory part that persists (the "steady-state" component).

Lo script estratto e' il seguente:

```
clear
syms R1 R2 R3 L C real
dI1 = sym('diff(I1(t),t)'); dQ =
   sym('diff(Q(t),t)');
I1 = sym('I1(t)'); Q = sym('Q(t)');
syms t s
E = sin(t); % Voltage
eq1 = dI1 + R2*dQ/L - (R2 - R1)*I1/L;
eq2 = dQ - (E - Q/C)/(R2 + R3) - R2*I1/(R2 + R3);
L1 = laplace(eq1,t,s)
L2 = laplace(eq2,t,s)
syms LI1 LQ
NI1 = subs(L1,{R1,R2,R3,L,C,'I1(0)','Q(0)'}, ...
    {4,2,3,1.6,1/4,15,2})
NQ =
   subs(L2,{R1,R2,R3,L,C,'I1(0)','Q(0)'},{4,2,3,1.
   6,1/4,15,2})
```

```
NI1 =subs(NI1,{'laplace(I1(t),t,s)',…
'laplace(Q(t),t,s)'},{LI1,LQ})
NI1 = collect(NI1,LI1)
NQ =subs(NQ,{'laplace(I1(t),t,s)','laplace(Q(t),t,s)'},…
{LI1,LQ})
NQ = collect(NQ,LQ)
[LI1,LQ] = solve(NI1,NQ,LI1,LQ)
I1 = ilaplace(LI1,s,t)
Q = ilaplace(LQ,s,t)
subplot(2,2,1); ezplot(I1,[0,10]);
title('Current'); ylabel('I1(t)'); grid
subplot(2,2,2); ezplot(Q,[0,10]);
title('Charge'); ylabel('Q(t)'); grid
subplot(2,2,3); ezplot(I1,[5,25]);
title('Current'); ylabel('I1(t)'); grid
text(7,0.25,'Transient'); text(16,0.125,'Steady State');
subplot(2,2,4); ezplot(Q,[5,25]);
title('Charge'); ylabel('Q(t)'); grid
text(7,0.25,'Transient'); text(15,0.16,'Steady State');
```



Current
Charge
I1(t)
Q(t)
t
Transient
Steady State

Applicazione delle trasformate di Laplace per la soluzione di equazioni differenziali a coefficienti costanti.

L'applicazione delle trasformate di Laplace alla soluzione di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti e' di grande importanza nella soluzione di problemi relativi ai sistemi di controllo lineari. Consideriamo una classe di equazioni differenziali di interesse generale.

$$\textbf{1.} \quad \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = x$$

dove y e' l'uscita ed x e' l'ingresso, i coefficienti a_i ,i=0,1,2….,n-1 sono costanti ed a_n=1.

Le condizioni iniziali per questo tipo di equazione si possono scrivere come: $\left.\frac{d^k y}{dt^k}\right|_{t=0^+} \equiv y_0^k$, k=0,1,2,……,n-1 dove le y_0^k sono costanti.

La trasformata di Laplace dell'equazione **1.** sara' data da:

$$\sum_{i=0}^{n}\left[a_i\left(s^iY(s)-\sum_{k=0}^{i-1}s^{i-1-k}y_0^k\right)\right]=X(s) \qquad \mathbf{a_0)}$$

Da questa equazione ricaviamo la trasformata dell'uscita Y(s).

$$\sum_{i=0}^{n}a_is^iY(s)-\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1}a_is^{i-1-k}y_0^k=X(s) \rightarrow \sum_{i=0}^{n}a_is^iY(s)=X(s)+\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1}a_is^{i-1-k}y_0^k$$

da cui ricaviamo Y(s).

$$Y(s)=\frac{X(s)}{\sum_{i=0}^{n}a_is^i}+\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1}a_is^{i-1-k}y_0^k}{\sum_{i=0}^{n}a_is^i}$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

Osserviamo che la parte destra dell'equazione trovata e' costituita da due termini: un termine dipendente dalla trasformata dell'ingresso ed un termine dipendente dalle condizioni iniziali.
Inoltre il denominatore di entrambi i termini e' costituito dal polinomio caratteristico dell'equazione differenziale **1.**

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

La soluzione nel dominio del tempo y(t) della nostra equazione e' l'antitrasformata di Laplace di Y(s):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{X(s)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] \quad \textbf{b)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{X(s)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] \Rightarrow RISPOSTA \quad FORZATA$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] RISPOSTA \quad LIBERA$$

ESEMPIO:

La trasformata di Laplace dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=u(t)\Rightarrow Scalino \quad Unitario$$

con condizioni iniziali y(0+)=-1 e $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+}=2$

Per la applicazione diretta della formula $\sum_{i=0}^{n}\left[a_i\left(s^iY(s)-\sum_{k=0}^{i-1}s^{i-1-k}y_0^k\right)\right]=X(s)$ **a$_0$)**

occorre fissare n e individuare le a_i e y_0^k

Nel caso in esame n=2; k=0 , 1; $y_0^0=-1 \quad y_0^1=2$ $a_0=2$, $a_1=3$, $a_2=1$.

Sostituendo questi valori nella **a$_0$)** si ottiene:

$$a_0Y(s)-a_0\sum_{k=0}^{-1}s^{-1-k}y_0^k+a_1sY(s)-a_1\sum_{k=0}^{1-1}s^{1-1-k}y_0^k+a_2s^2Y(s)-a_2\sum_{k=0}^{2-1}s^{2-1-k}y_0^k=X(s)$$

Osserviamo che per i=0: $a_0\sum_{k=0}^{-1}s^{-1-k}y_0^k=0$

quindi possiamo scrivere:

$2Y+3(sY+1)+1(s^2Y+s-2)=1/s \rightarrow (s^2+3s+2)Y=-(s^2+s-1)/s$

$\rightarrow Y=-(s^2+s-1)/[s(s^2+3s+2)]$

Nel caso di equazioni differenziali di grado non elevato la procedura in realta' puo' essere molto piu' semplice avvalendosi della proprieta' di linearita' della trasformata e del teorema del valore iniziale. Trattiamo l'esempio svolto avvalendoci di queste proprietà

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=u(t)\Rightarrow Scalino \quad Unitario$$

con condizioni iniziali $y(0^+)=-1$ e $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+}=2$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=u(t)\Rightarrow Scalino \quad Unitario$$

con condizioni iniziali $y(0^+)=-1$ e $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+}=2$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right]=s^2Y(s)-sy(0^+)-\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+}=s^2+s+2$$

$$\mathcal{L}\left[3\frac{dy}{dt}\right]=3sY(s)$$

$$\mathcal{L}[2y]=2Y(s)$$

$$\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$$

$(s^2+3s+2)Y(s)+s+1=1/s$ e risistemando le cose si ha che:

$$Y(s)=-\frac{s^2+s-1}{s(s^2+3s+2)}$$

Sviluppo in termini di frazioni parziali

Consente di ricavare, in modo semplice, l'espressione analitica dell'antitrasformata quando la trasformata è una funzione razionale, ossia un rapporto di polinomi in *s*:

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$ dove $a_n=1$ e $n \geq m$.

Per il teorema fondamentale dell'algebra l'equazione relativa al polinomio al denominatore $\sum_{i=0}^{n} a_i s^i$ ha n radici.

Alcune di queste radici possono avere molteplicita' maggiore di uno.

Esempio: Il polinomio $s^3+5\,s^2+8s+4$ ha tre radici che troviamo con la solve di Matlab: » syms s ; solve('s^3+5*s^2+8*s+4 ')
ans =[-1][-2][-2]
-2 e' una radice doppia.

Nel caso in cui l'equazione caratteristica del polinomio a denominatore abbia n_1 radici uguali a $-p_1$ n_2 radici uguali a $-p_2$ …. n_r radici uguali a $-p_r$ dove $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ allora

$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i = \prod_{i=1}^{r} (s+p_i)^{n_i}$ e la funzione razionale fratta si puo' scrivere come:

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\prod_{i=1}^{r} (s+p_i)^{n_i}}$$

Lo sviluppo in termini di frazioni parziali della funzione razionale fratta F(s) e' dato da:

$$F(s) = b_n + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(s+p_i)^k}$$

Dove $b_n=0$ eccetto che nel caso in cui m=n.

$$c_{ik} = \frac{1}{(n_i-k)!} \frac{d^{n_i-k}}{ds^{n_i-k}} \left[(s+p_i)^{n_i} F(s) \right]_{s=-p_i}$$

I coefficienti c_{ik} sono dati da:

$$c_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \frac{d^{n_i - k}}{ds^{n_i - k}} \left[(s + p_i)^{n_i} F(s) \right]_{s=-p_i}$$

I coefficienti con indice k=1 e cioe' c_{i1}, i=1,2,….,r, si chiamano RESIDUI di F(s) relativi alla radice $-p_i$, i=1,2,….,r.

Se tutte le radici sono di molteplicita' unitaria, allora si ha che:

$$F(s) = b_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{i1}}{(s + p_i)} \qquad \text{e} \qquad c_{i1} = (s + p_i) F(s) \big|_{s=-p_i}$$

A questo punto è giunto il momento di fare esempi e usare Matlab

ESEMPI:

Consideriamo la seguente funzione razionale fratta e sviluppiamola in termini di frazioni parziali:

1) $$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 3s + 2}$$

prima di tutto osserviamo che m=n=2. Troviamo i poli con Matlab:

```
» syms s ; solve('s^2+3*s+2 ')
ans =[ -2][ -1]
```

$$\longrightarrow \quad F(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+2)(s+1)} = b_2 + \frac{c_{11}}{s+1} + \frac{c_{21}}{s+2}$$

Il coefficiente al numeratore di s^2 e' $b_2=1$. I coefficienti c_{11} e c_{21} sono dati da:

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= (s+1)F(s)\big|_{s=-1} = (s+1)\left.\frac{s^2+2s+2}{(s+2)(s+1)}\right|_{s=-1} = 1 \\ c_{21} &= (s+2)F(s)\big|_{s=-2} = (s+2)\left.\frac{s^2+2s+2}{(s+2)(s+1)}\right|_{s=-2} = -2 \end{aligned}\right\}$$

$$F(s) = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

$$\downarrow$$

$$\delta(t) + e^{-t} - 2e^{-2t}$$

2. $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2(s+2)}$ In questo caso abbiamo una radice doppia ed F(s) si esprimera' cosi':

$$c_{11}=\frac{d}{ds}(s+1)^2F(s)\Big|_{s=-1}=\frac{d}{ds}(s+1)^2\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\Big|_{s=-1}=\frac{d}{ds}\frac{1}{(s+2)}\Big|_{s=-1}=-1$$

$$c_{12}=(s+1)^2F(s)\Big|_{s=-1}=(s+1)^2\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\Big|_{s=-1}=\frac{1}{(s+2)}\Big|_{s=-1}=1$$

$$c_{21}=(s+2)F(s)\Big|_{s=-2}=(s+2)\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\Big|_{s=-2}=\frac{1}{(s+1)^2}\Big|_{s=-2}=1$$

$$F(s)=-\frac{1}{(s+1)}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+2)} \Rightarrow \mathbf{-e^{-t}+te^{-t}+e^{-2t}}$$

$$\mathbf{(t-1)e^{-t}+e^{-2t}}$$

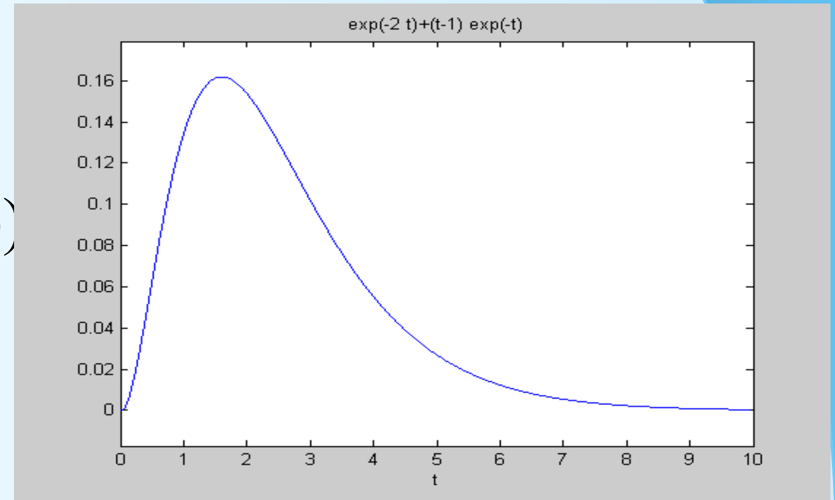
Procedura con Symbolic toolbox di Matlab

1. $F(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 3s + 2}$

» syms s t
» f1=ilaplace((s^2+2*s+2)/(s^2+3*s+2))
f1 =Dirac(t)-2*exp(-2*t)+exp(-t)

2. $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2(s+2)}$

>> syms t s
>> f2=ilaplace(1/((s+1)^2*(s+2))
f 2= exp(-2*t)+(t-1)*exp(-t)
>> ezplot(f2,[0 10])



Antitrasformate usando lo sviluppo in termini di frazioni parziali

Da quanto abbiamo visto in precedenza possiamo concludere che la soluzione di una equazione differenziale lineare ordinaria a coefficienti costanti si puo' determinare antitrasformando secondo Laplace una funzione razionale fratta espressa in termini di frazioni parziali.

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[b_n + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{c_{ik}}{(s+p_i)^k}\right] =$$

$$= b_n\delta(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{c_{ik}}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-p_i t}$$

dove $\delta(t)$ e' la funzione impulso unitario e b_n =0 tranne che per m=n.