Funzione di trasferimento II

Sistemi del secondo ordine

Nello studio dei sistemi di controllo, abbiamo gia' detto che le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del secondo ordine del tipo:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 x$$

sono molto importanti perche' molti sistemi di ordine superiore si possono approssimare con sistemi del secondo ordine.

La costante ζ prende il nome di **smorzamento** e la costante $\boldsymbol{\omega_n}$ e' **la pulsazione naturale del sistema**.

Di notevole importanza e' la determinazione della risposta forzata di questa equazione agli ingressi canonici definiti in precedenza. Infatti la risposta forzata ad un impulso, o a uno scalino unitario o a una rampa unitaria corrispondono alla risposta impulsiva, alla risposta ***indiciale*** o alla risposta alla rampa unitaria di un sistema rappresentato da questa equazione.

La trasformata di Laplace di y(t), quando le condizioni iniziali sono nulle si ottiene eseguendo le trasformate del primo e secondo membro e ricavando Y(s):

$$Y(s) = \left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \right] X(s)$$ dove X(s)=$\mathscr{L}$[x(t)].

I poli della funzione $$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

sono dati da: $$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

osserviamo che:

1. Se $\zeta>1$, i poli sono reali e positivi
2. Se $\zeta=1$, i poli sono coincidenti, reali e negativi ($s=-\omega_n$)
3. Se $0< \zeta<1$, i poli sono complessi coniugati con parte reale negativa
4. Se $\zeta=0$, i poli sono complessi coniugati e immaginari ($s=\pm j\omega_n$)
5. Se $\zeta< 0$, i poli sono nel semipiano destro del piano s.

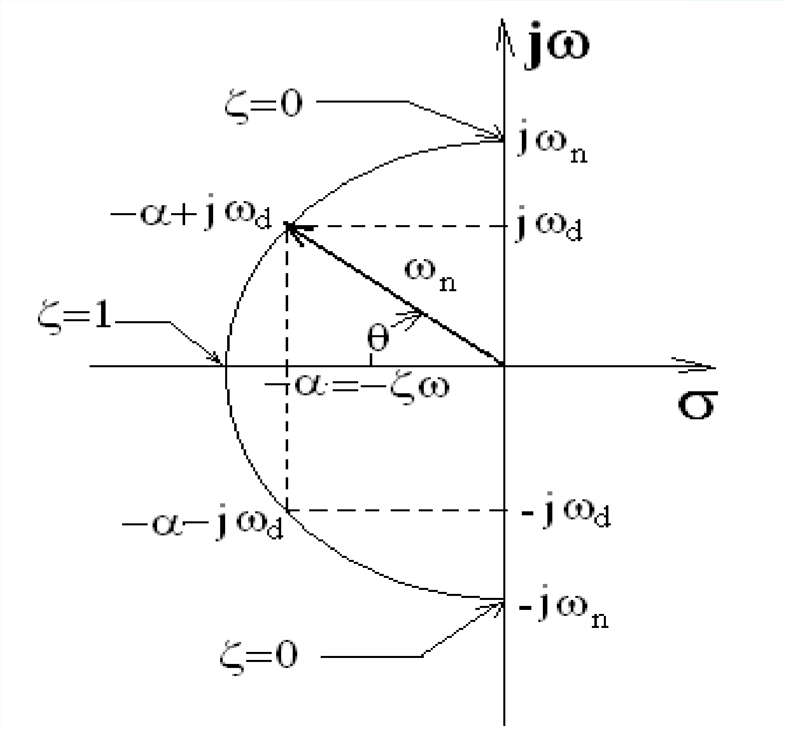
Di particolare interesse per noi risulta il caso 3. I poli sono complessi coniugati con parte reale negativa e sono situati in:

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

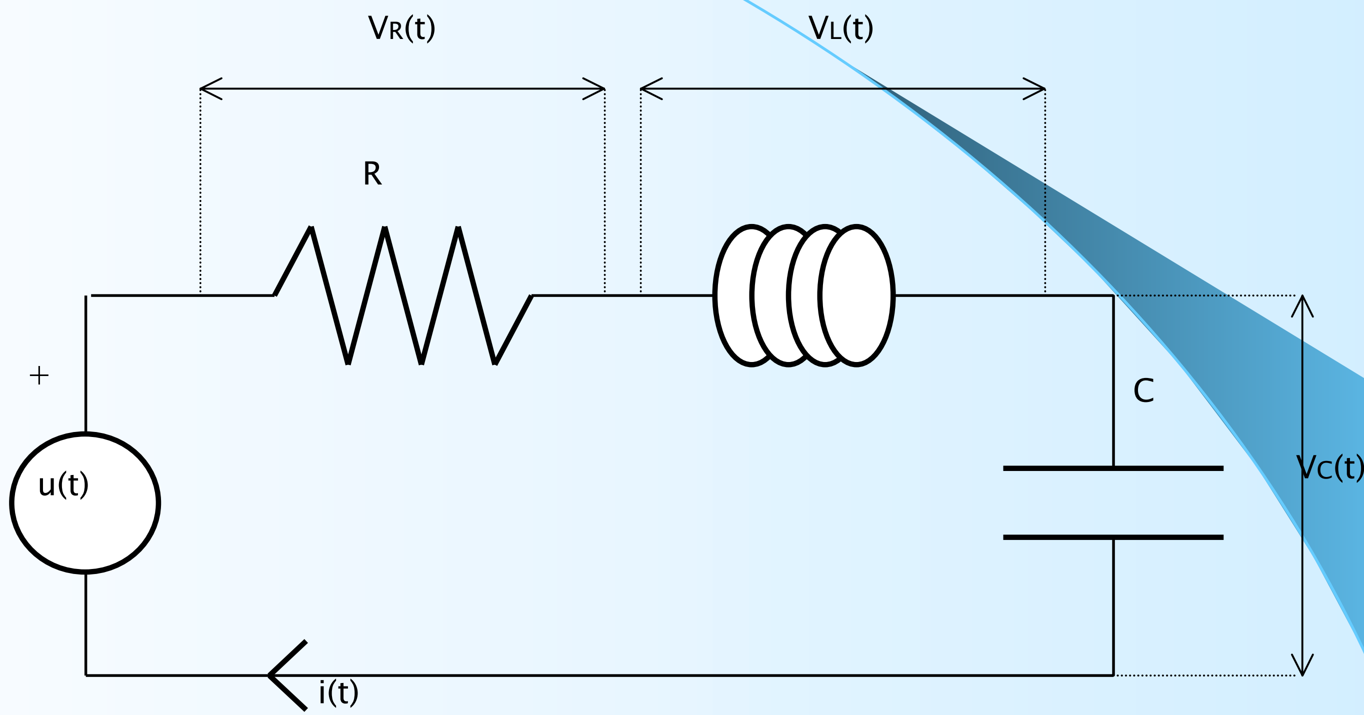
ovvero $s = -\alpha \pm j\omega_d$ dove $\frac{1}{\alpha} \equiv \frac{1}{\zeta\omega_n} \equiv \tau$

prende il nome di costante di tempo del sistema e $\omega_d \equiv \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

e' la pulsazione naturale smorzata del sistema.



Studio di un sistema del secondo ordine:Circuito RLC



Il circuito descritto in figura può essere visto come un sistema in cui l'ingresso è dato da u(t) e l'uscita può essere la tensione ai capi della resistenza, dell'induttanza o del condensatore.

La legge di Ohm applicata al circuito consente di scrivere:

$$u(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

L'equazione integro-differenziale del circuito non esprime in modo esplicito il legame uscita-ingresso; occorre, con alcuni passaggi, trasformarla in un'equazione differenziale del secondo ordine.

Poniamo, per comodità: $\begin{cases} u = u(t) \\ y = V_C(t) \end{cases}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \mathbf{y} = \frac{1}{\mathbf{C}}\int_0^t \mathbf{i}(\tau)\mathbf{d}\tau \quad \dot{\mathbf{y}} = \frac{1}{\mathbf{C}}\mathbf{i}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{i}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} \quad \frac{\mathbf{di}(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}} = \mathbf{C}\ddot{\mathbf{y}} \end{cases}$

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{y}} + \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{y}} + \frac{1}{\mathbf{LC}}\mathbf{y} = \frac{1}{\mathbf{LC}}\mathbf{u} \\ \ddot{\mathbf{y}} + 2\zeta\omega_{\mathbf{n}}\dot{\mathbf{y}} + \omega_{\mathbf{n}}^2\mathbf{y} = \omega_{\mathbf{n}}^2\mathbf{u} \end{cases}$$

$$\omega_{\mathbf{n}}^2 = \frac{1}{\mathbf{LC}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{\mathbf{n}} = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{LC}}}$$

[pulsazione naturale]

$$2\zeta\omega_{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \quad \Rightarrow \quad 2\zeta\sqrt{\frac{1}{\mathbf{LC}}} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{LC}}}{2\mathbf{L}}$$

[coefficiente di smorzamento]

Introduciamo le variabili di stato x1 e x2 ponendo:

$$\begin{cases} x_1 = \dot{y} \\ x_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \ddot{y} \\ \dot{x}_2 = \dot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{1}{LC} x_2 + \frac{1}{LC} u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

Le equazioni per le 3 uscite del sistema V_R, V_L, V_C sono:

$$\begin{cases} y_R = RCx_1 \\ y_L = -RCx_1 - x_2 + u \\ y_C = y = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/LC \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/LC \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_R \\ y_L \\ y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RC & 0 \\ -RC & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}$$

Poniamo $A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/LC \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e troviamo gli autovalori della matrice A.

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{R}/\mathbf{L} & -1/\mathbf{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \lambda + \mathbf{R}/\mathbf{L} & 1/\mathbf{LC} \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 + \lambda\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} + \frac{1}{\mathbf{LC}} = \lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2$$

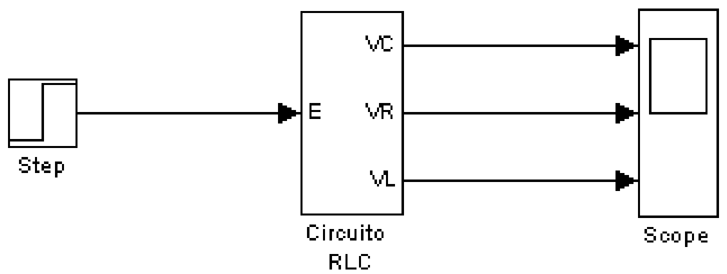
$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Gli autovalori hanno sempre parte reale negativa per $\zeta>0$
Per $\zeta=0$ si hanno 2 autovalori puramente immaginari.
Se ζ fosse minore di 0 il sistema sarebbe instabile ma ciò non può accadere in quanto, essendo $\zeta = \frac{\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{LC}}}{2\,\mathbf{L}}$

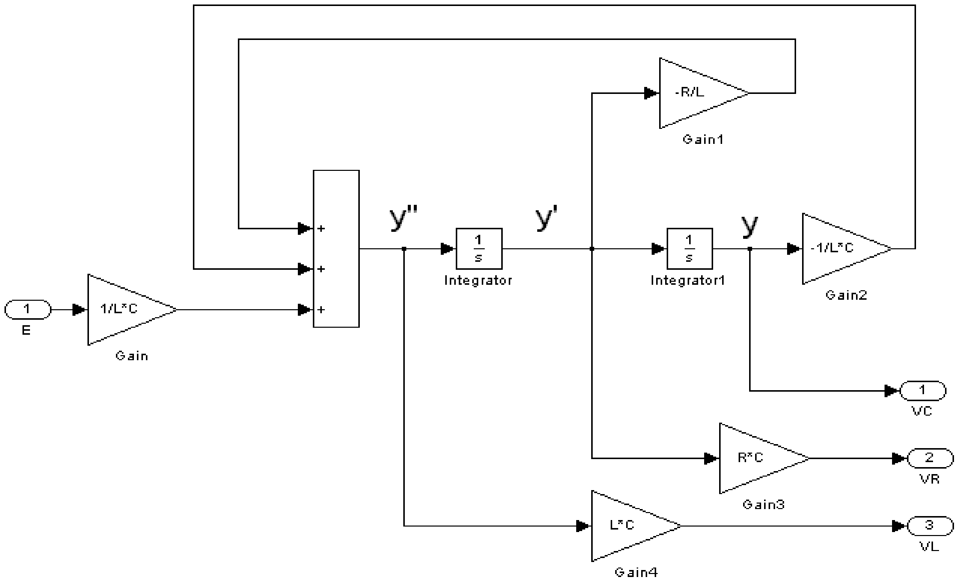
un valore di ζ negativo può solo essere ottenuto con una resistenza negativa.

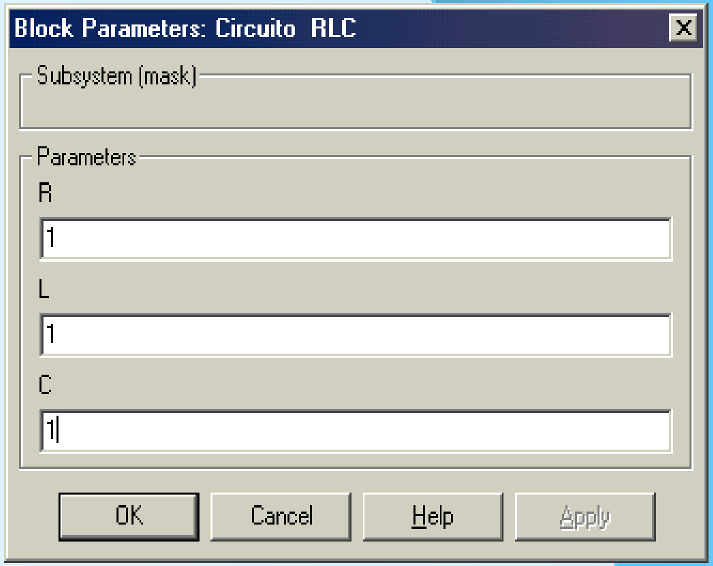
Utilizzando le equazioni precedentemente descritte possiamo costruire un modello del circuito RLC in Simulink, per visualizzare, ad esempio, la risposta del sistema ai segnali canonici (ad esempio lo scalino unitario):

(Per esercizio ripetere lo schema con le matrici A,B,C,D trovate)

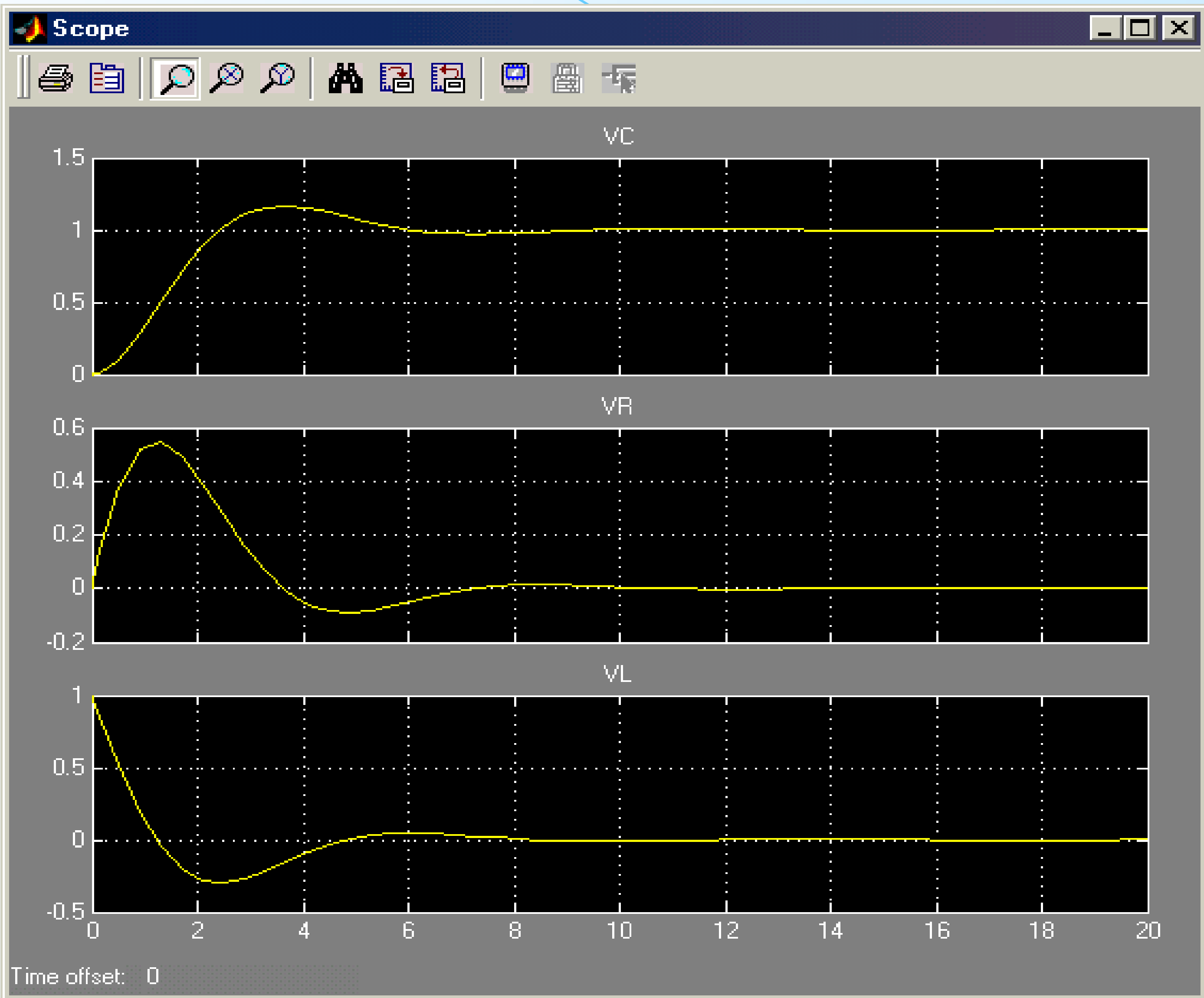


Il blocco "Circuito RLC" ha una maschera per l'immissione dei parametri R, L e C:





Il seguente grafico, ottenuto dal modello Simulink usando i parametri R=1, L=1 e C=1, mostra la risposta del sistema allo scalino unitario:



Calcoliamo le funzioni di trasferimento. Avendo 3 uscite (V_R,V_L,V_C) dobbiamo calcolare 3 funzioni di trasferimento. Partendo dalla legge di Ohm e applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri dell'equazione si ottiene:

$$U(s) = RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{sC} I(s) \qquad I(s) = \frac{U(s)}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

Le 3 possibili uscite del sistema saranno:

$$V_R(s) = RI(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1} U(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} U(s)$$

$$V_L(s) = LsI(s) = \frac{LCs^2}{LCs^2 + RCs + 1} U(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} U(s)$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} U(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} U(s)$$

Per cui le rispettive funzioni di trasferimento saranno:

$$\mathbf{G_R(s)} = \frac{\mathbf{V_R(s)}}{\mathbf{U(s)}} = \frac{\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}}\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}}\mathbf{s} + \frac{1}{\mathbf{LC}}}$$

$$\mathbf{G_L(s)} = \frac{\mathbf{V_L(s)}}{\mathbf{U(s)}} = \frac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^2 + \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}}\mathbf{s} + \frac{1}{\mathbf{LC}}}$$

$$\mathbf{G_C(s)} = \frac{\mathbf{V_C(s)}}{\mathbf{U(s)}} = \frac{\frac{1}{\mathbf{LC}}}{\mathbf{s}^2 + \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}}\mathbf{s} + \frac{1}{\mathbf{LC}}}$$

Il denominatore di GR(s), GL(s) e GC(s) è lo stesso e può essere scritto come:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{LC}}} \qquad \zeta = \frac{\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{LC}}}{\mathbf{2L}}$$

Per cui le tre funzioni di trasferimento hanno gli stessi poli, dati da:

$$\mathbf{p}_{1-2} = -\zeta\omega_n \pm \mathbf{j}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

A questo punto possiamo ripetere l’analisi delle radici già fatta

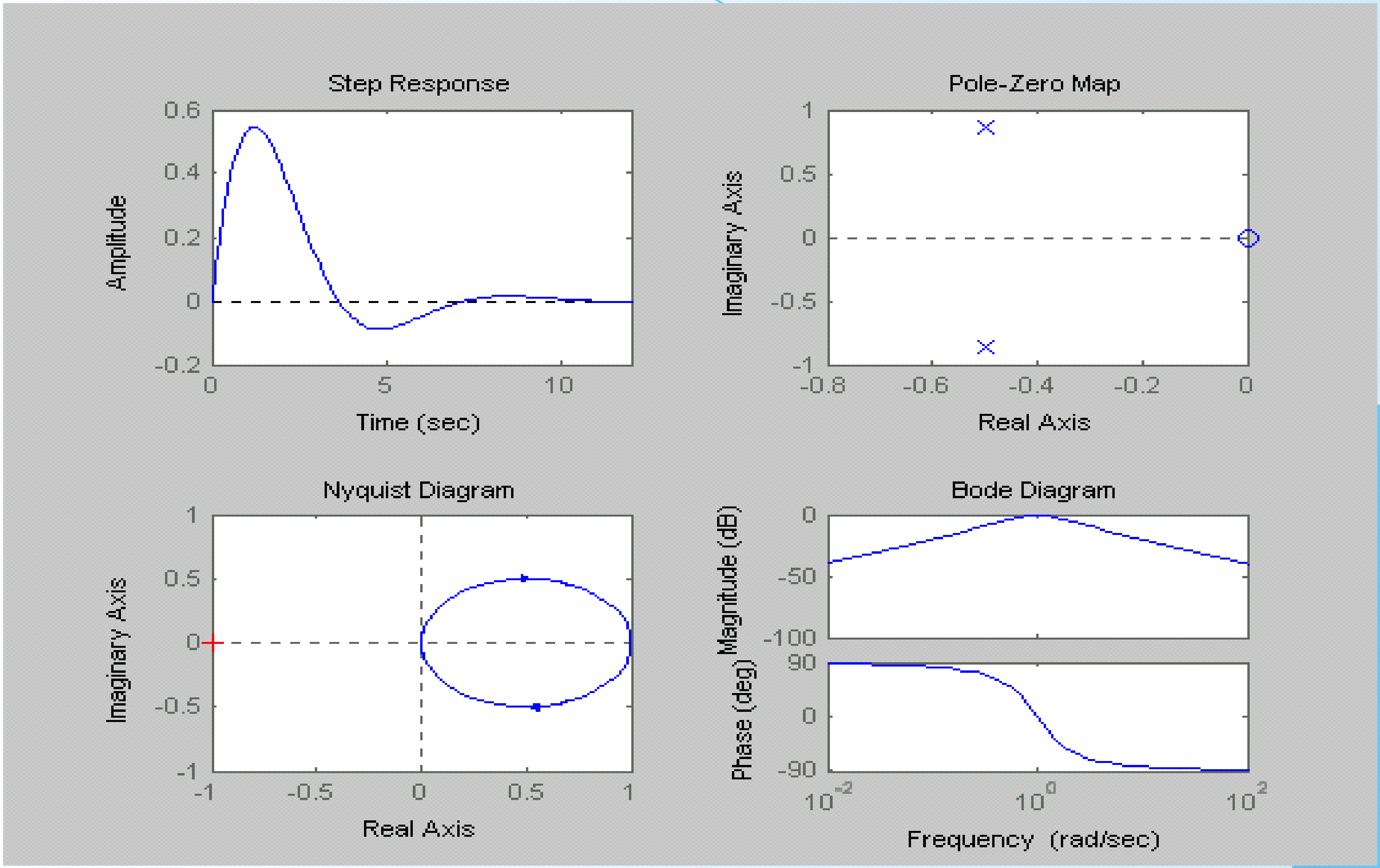
Nel seguente codice Matlab si utilizzano le funzioni di trasferimento ricavate precedentemente per trovare la risposta del sistema ai segnali canonici (ad esempio lo scalino unitario), visualizzare il diagramma dei poli e degli zeri, la risposta in frequenza (diagrammi di Bode) e verificare, graficamente, la stabilità del sistema con i diagrammi di Nyquist:

```
%Assegnazione dei parametri
R=1; L=1; C=1;
%Denominatore delle funzioni di trasferimento
den = [1 R/L 1/L*C]
%Uscita sulla resistenza
TF(1) = tf([R/L 0], den)
%Uscita sull'induttanza
TF(2) = tf([1 0 0], den)
%Uscita sul condensatore
TF(3) = tf(1/L*C, den)
```

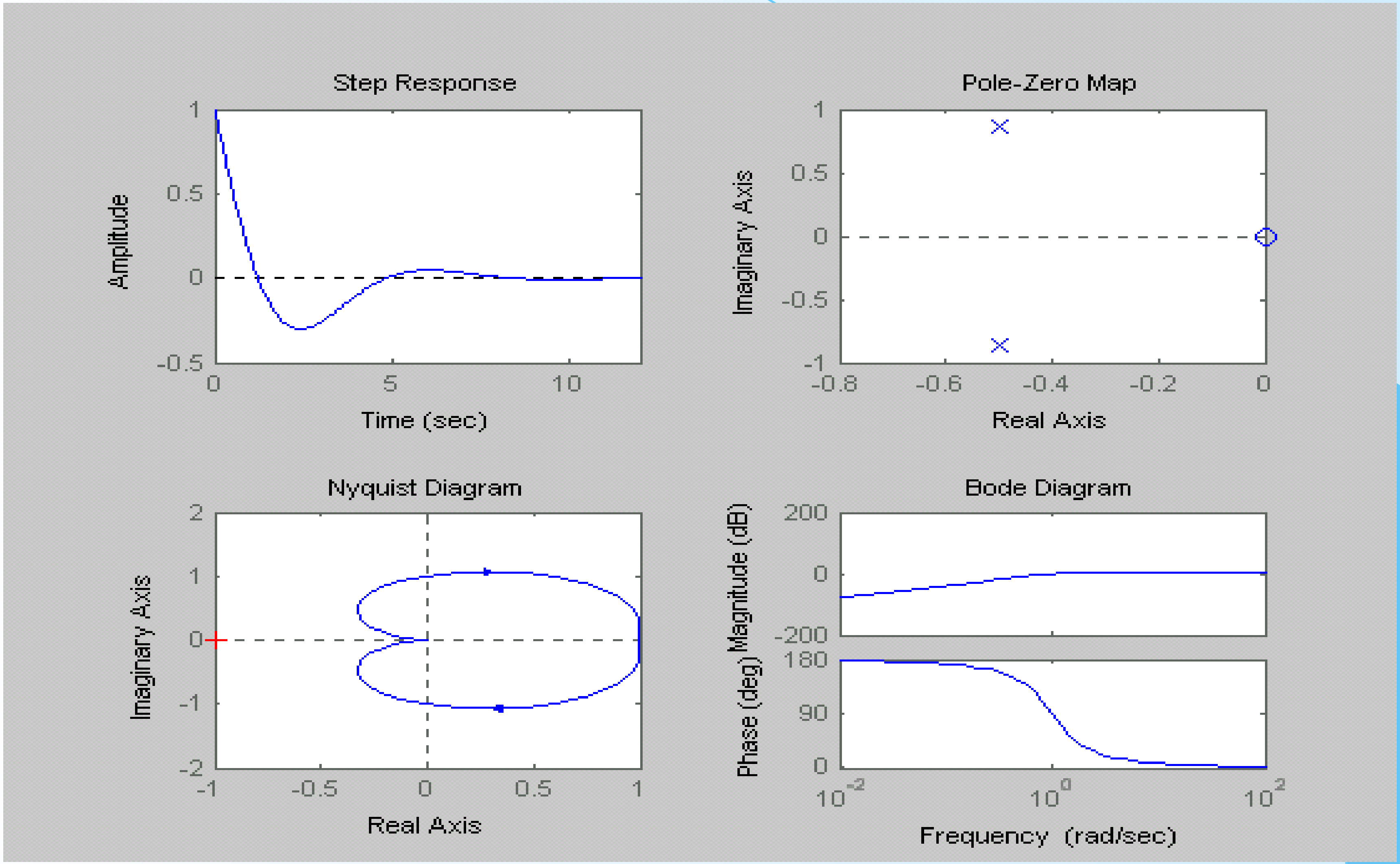
```
for i=1:3
 figure
 subplot(2,2,1)
 %Risposta allo scalino unitario
 step(TF(i))
 subplot(2,2,2)
 %Diagramma di poli e zeri
 pzmap(TF(i))
 subplot(2,2,3)
 %Diagramma di Nyquist
 nyquist(TF(i))
 subplot(2,2,4)
 %Diagrammi di Bode
 bode(TF(i))
end
```

Il programma produce il seguente output:

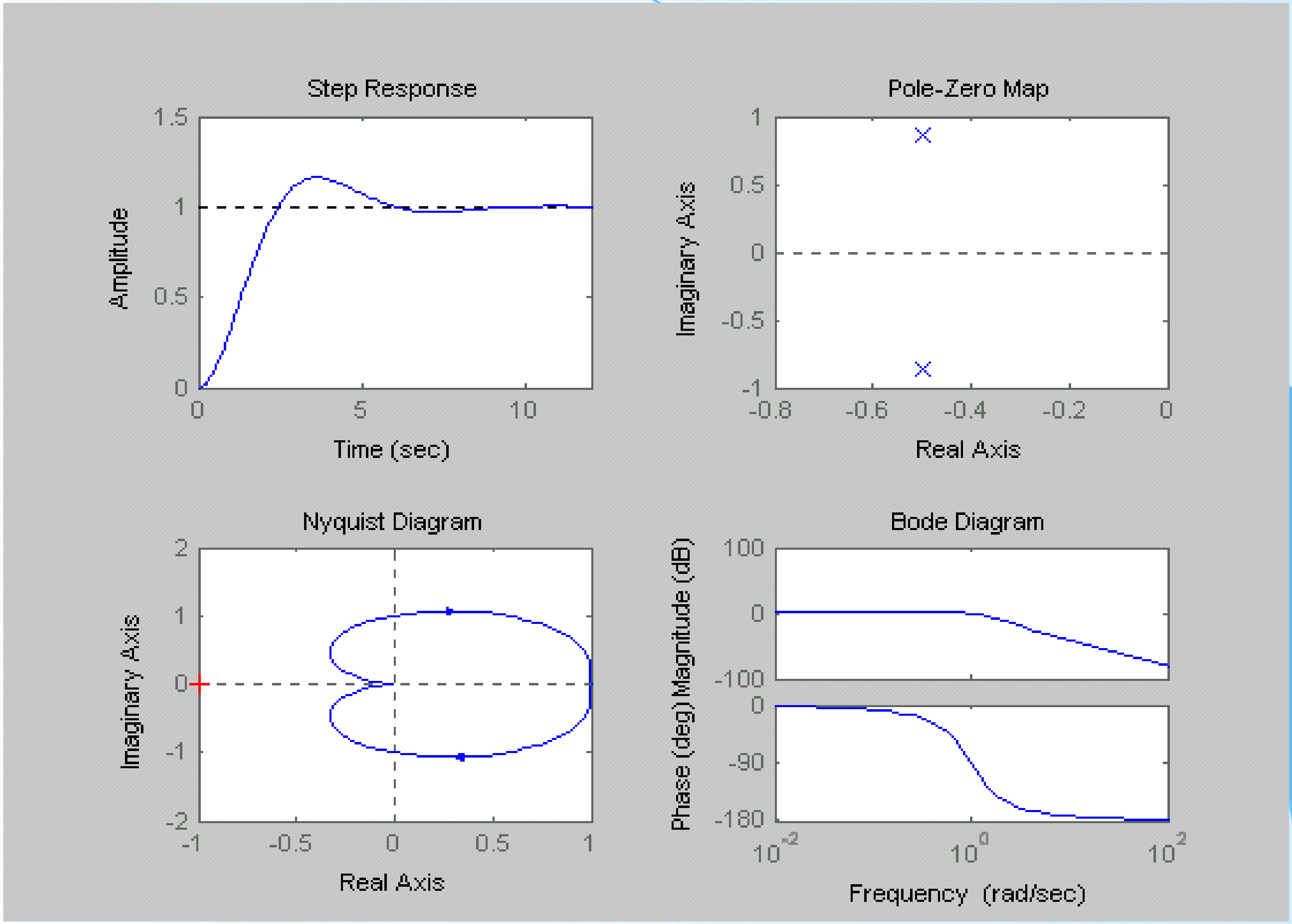
Uscita sulla resistenza



Uscita sull’induttanza

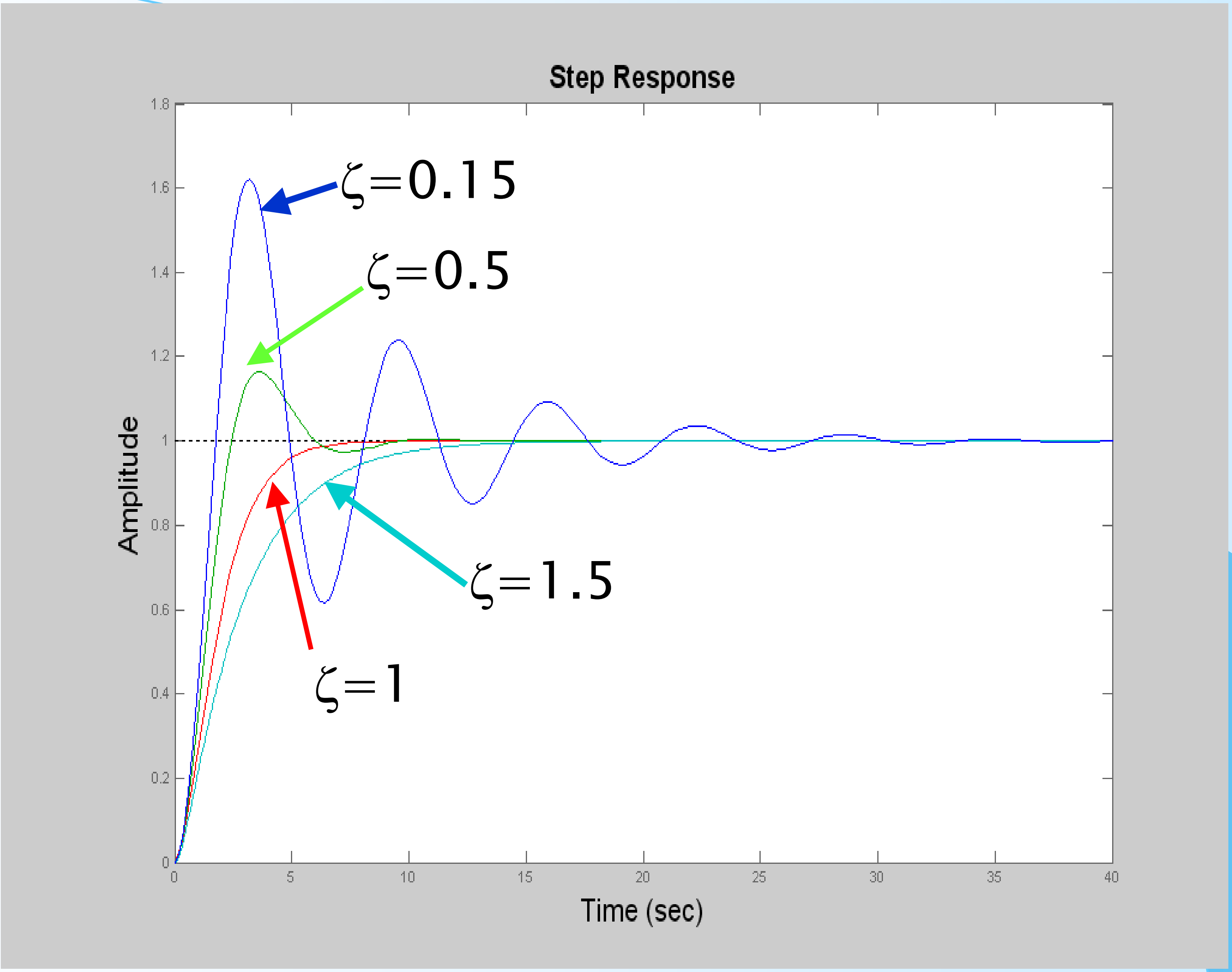


Uscita sul condensatore



Consideriamo quest'ultimo caso (uscita sul condensatore) e studiamo la risposta allo scalino unitario e la risposta in frequenza del sistema al variare di ζ. Per fare questo possiamo tenere fissi i valori di L e C (L=1, C=1)
e far variare R. A tale scopo utilizziamo il seguente codice Matlab:

```
L=1; C=1;
F1 = figure
hold on
F2 = figure
hold on
for R = [0.3 1 2 30]
    den = [1 R/L 1/L*C]
    TRF = tf(1/L*C, den)
    figure(F1);step(TRF)
    figure(F2);bode(TRF)
end
```



Step Response
Amplitude
Time (sec)
$\zeta=0.15$
$\zeta=0.5$
$\zeta=1.5$
$\zeta=1$
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
0
5
10
15
20
25
30
35
40

Funzione di trasferimento

In precedenza abbiamo visto che la risposta di un sistema lineare invariante nel tempo si puo' dividere in due parti: la risposta libera e la risposta forzata.La funzione di trasferimento di un sistema dinamico è una funzione razionale della variabile complessa *s*, ossia è il rapporto di due polinomi costituiti dal rapporto tra la trasformata di Laplace dell'uscita e quella dell'ingresso. Un caso particolare e' quello che abbiamo appena visto per un sistema del secondo ordine:

$$\mathbf{G(s)} = \frac{\mathbf{Y(s)}}{\mathbf{X(s)}} = \frac{\omega_{\mathbf{n}}^2}{\mathbf{s}^2 + 2\zeta\omega_{\mathbf{n}} + \omega_{\mathbf{n}}^2}$$

G(s) rappresenta la funzione che occorre moltiplicare per la trasformata dell'ingresso X(s) per ottenere la trasformata dell'uscita essendo nulle tutte le condizioni iniziali.

In generale: $$\mathbf{G(s)} = \frac{\mathbf{Y(s)}}{\mathbf{X(s)}} = \frac{\beta_0 \mathbf{s}^n + \beta_1 \mathbf{s}^{n-1} + \ldots\ldots + \beta_n}{\mathbf{s}^n + \gamma_1 \mathbf{s}^{n-1} + \ldots\ldots + \gamma_n}$$

+ termini termini dovuti a tutte le condizioni iniziali $\mathbf{x}_0^k, \mathbf{y}_0^k$

Riprendiamo alla luce di quanto detto gli esempi di sistemi dinamici elementari trattati in precedenza, limitandoci naturalmente a quelli lineari e ipotizzando nulle tutte le condizioni iniziali:

Resistore

$$y(t) = \frac{1}{R} u(t) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{R}$$

Induttore

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ls}$$

Condensatore

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Cs}$$

Massa

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{M} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2}$$

Oscillatore meccanico

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{M}\left(-Kx_1(t) - Dx_2(t) + u(t)\right)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K}$$

Serbatoio cilindrico

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{A_S}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{A_S s}$$

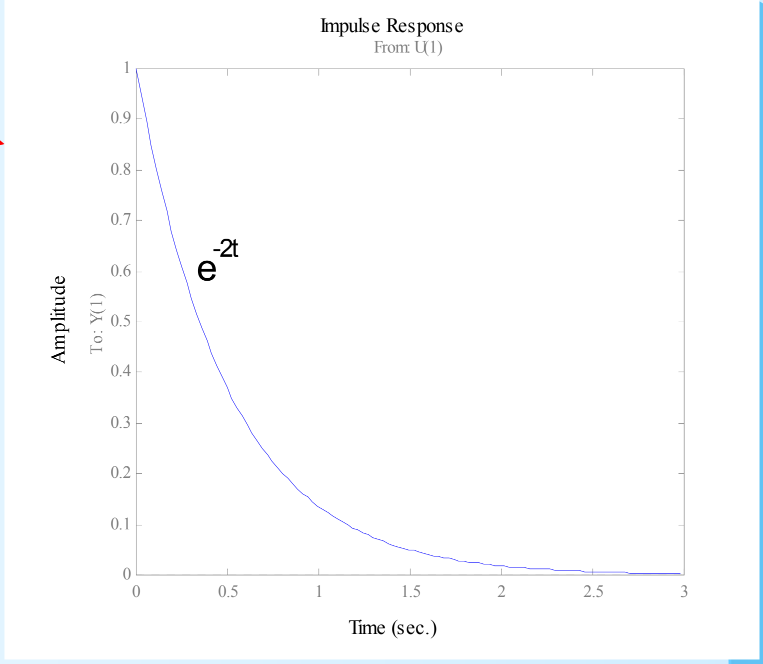
Ricordiamoci che gli **zeri** della funzione di trasferimento sono le m radici del numeratore $N(s)$ (e quindi sono in numero minore o uguale a n).
I **poli** della funzione di trasferimento sono le radici del denominatore $D(s)$ (e quindi sono in numero uguale a n).
Nel piano complesso, i poli vengono di norma rappresentati con una crocetta, gli zeri con un pallino.

Proprieta' della funzione di trasferimento

- La funzione di trasferimento G(s) di un sistema e' la trasformata di Laplace della sua risposta all'impulso quando tutte le condizioni iniziali sono nulle.

Esempio: Applichiamo un impulso all'ingresso di un sistema verificando che, ad esempio, la risposta nel tempo e' del tipo e^{-2t} , poiche' sappiamo che X(s)=1, per x(t)=δ(t)

$$\mathbf{G(s)} = \frac{\mathbf{Y(s)}}{\mathbf{X(s)}} = \frac{1}{\mathbf{s} + 2}$$



syms s t ; laplace(exp(-2*t))

ans =1/(s+2)

» num=1; den=[1 2]

» sys=tf(num,den)

Transfer function:1/(s+2)

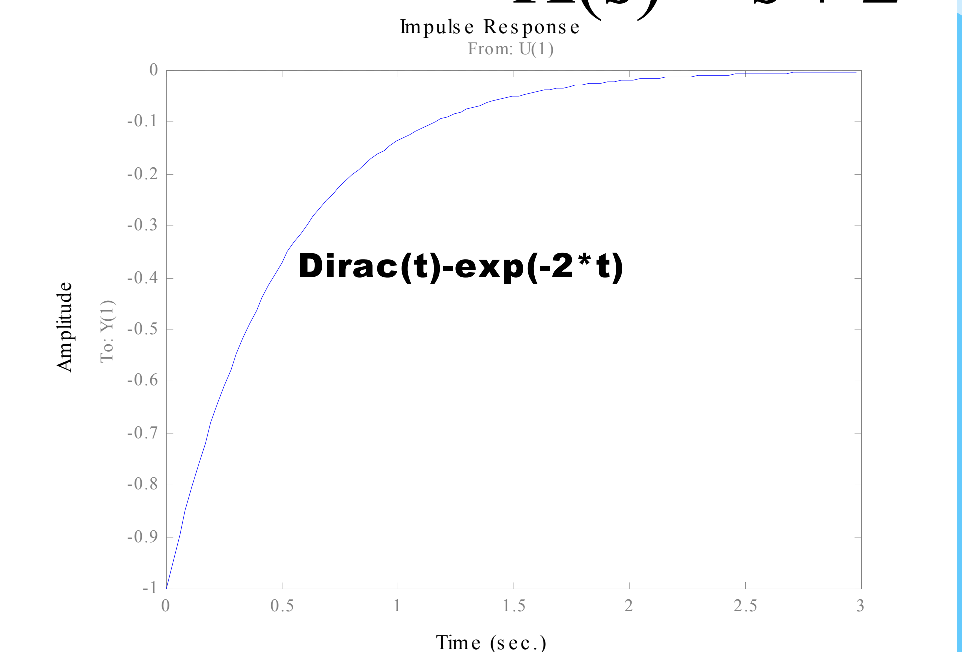
impulse(sys)

- La funzione di trasferimento di un sistema si puo' ottenere trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale descrivente l'evoluzione dinamica del sistema e trascurando tutti i termini dovuti alle condizioni iniziali. Quindi: $\mathbf{G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}}$

Esempio: $\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{dx}{dt} + x \rightarrow sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + X(s)$

(s+2)Y(s)=(s+1)X(s) da cui si ricava G(s): $\mathbf{G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s+2}}$

» syms t s; num=[1 1];
» den=[1 2];
» sys=tf(num,den)
Transfer function:(s + 1)/(s+2)
» ilaplace((s+1)/(s+2))
ans =Dirac(t)-exp(-2*t)



1. L'equazione differenziale di un sistema si puo' ottenere dalla funzione di trasferimento sostituendo ad s l'operatore derivata D≡d/dt.

Esempio: $G(s) = \frac{2s+1}{s^2+s+1}$ → $\frac{y}{x} = \frac{2D+1}{D^2+D+1}$

$$D^2 y + Dy + y = 2Dx + x$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 2\frac{dx}{dt} + x$$

Le radici del denominatore di G(s) sono i poli del sistema e le radici del numeratore sono gli zeri del sistema. La funzione di trasferimento di un sistema puo’ essere definita a meno di una costante, assegnando i poli e gli zeri. La costante, indicata di solito con K viene chiamata fattore guadagno o costante della funzione di trasferimento.

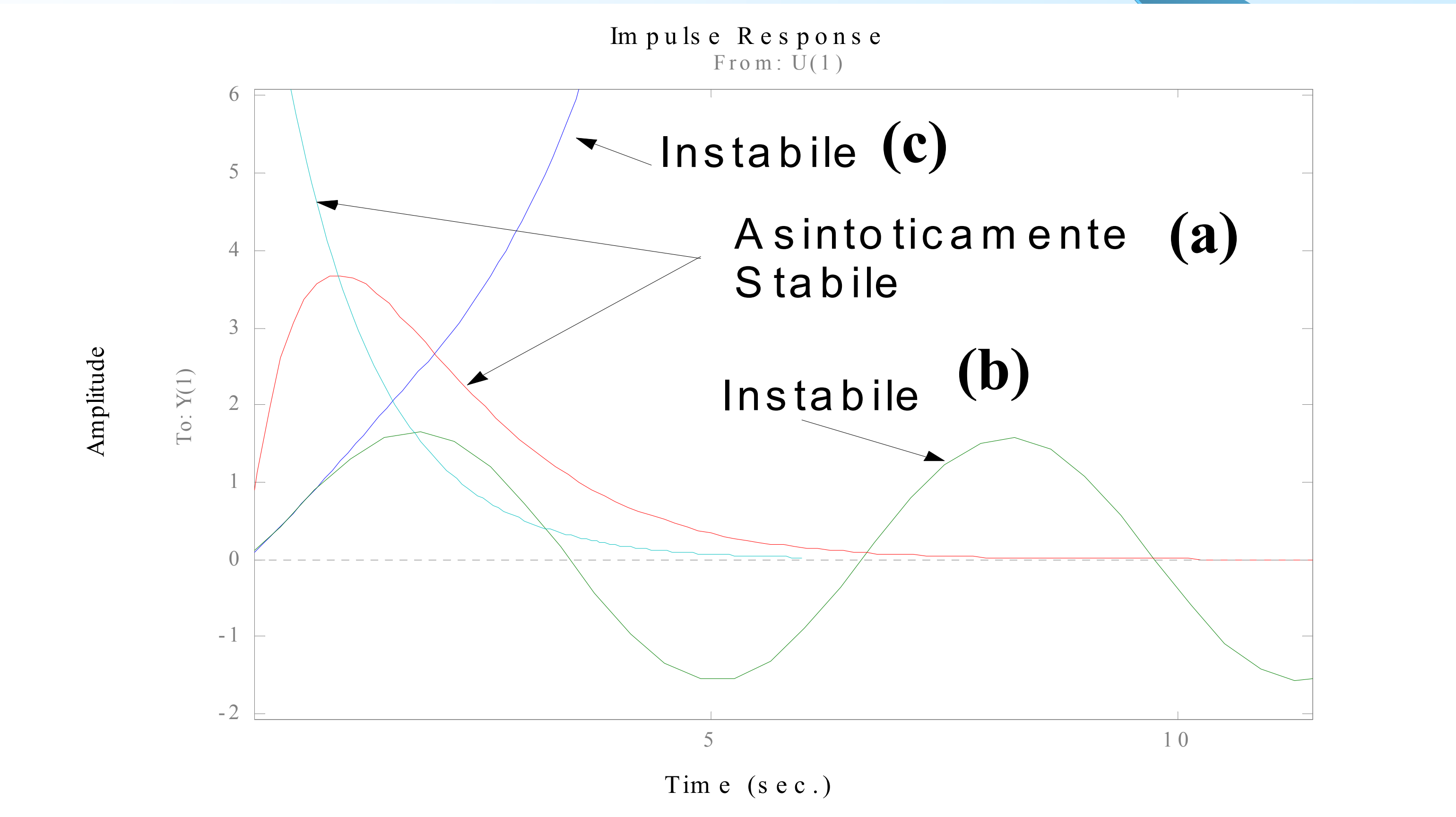
Esempio: la funzione di trasferimento

$$\mathbf{G(s) = \frac{K(s+a)}{(s+b)(s+c)}}$$

Si puo’ definire assegnando lo zero –a ed i poli –b e –c ed infine il fattore guadagno K.

Stabilita' .

Sia dato un sistema **lineare**, all'equilibrio all'istante t=0.Si applichi quindi, all'istante t=0, un **impulso** all'ingresso del sistema (ossia una perturbazione di ampiezza molto elevata e di durata brevissima). Si possono presentare essenzialmente tre tipologie di comportamenti per l'andamento temporale dell'uscita y, riportate nelle figure:



- (a) l’uscita converge al valore iniziale (supposto nullo);
- (b) l’uscita non converge al valore iniziale, ma non diverge;
- (c) l’uscita diverge.

Questi comportamenti corrispondono, rispettivamente, a un sistema:

(a) **asintoticamente stabile**;
(b) **semplicemente stabile** (o stabile, ma non asintoticamente);
(c) **instabile**.

Per i sistemi dinamici lineari, di cui ci stiamo occupando, la stabilità non è legata al particolare punto di equilibrio in cui si trova il sistema nel momento in cui si dà l’impulso in ingresso (tutti i punti di equilibrio sono equivalenti tra di loro). Ciò non è evidentemente vero per un sistema non lineare (si pensi ad un pendolo e ai suoi differenti punti di equilibrio).

Ne consegue che per un sistema lineare la proprietà di stabilità deve essere deducibile dall’espressione matematica del sistema dinamico, ed in particolare dalla **sua funzione di Trasferimento**:

Condizione necessaria affinche’ un sistema sia stabile e’ che le radici dell’equazione caratteristica abbiano parte reale negativa.

Questa condizione assicura che la risposta impulsiva tende esponenzialmente a zero.

Se il sistema ha qualche radice a parte reale zero, ma nessuna con parte reale positiva si dice che il sistema e’ al limite di stabilita’.

Poiche’ in questi casi certi ingressi possono produrre uscite non limitate tali sistemi sono instabili.

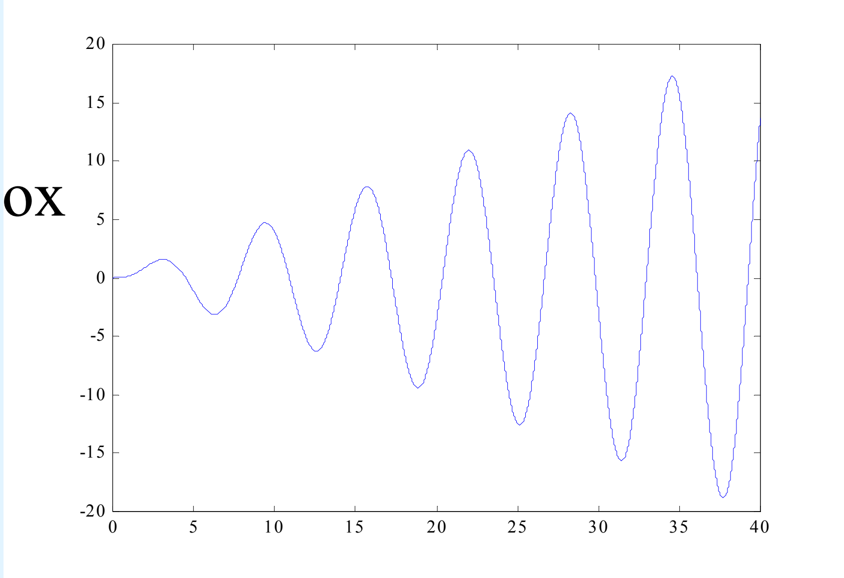
Da questo si trae che un sistema e’ stabile se ogni ingresso limitato produce un’uscita limitata→**Sistemi BIBO (Bound Input-Bound Output)**

Esempio:

Il sistema descritto dall'equazione differenziale la cui trasformata di Laplace e' data da: $(s^2+1)Y(s)=X(s)$

ha equazione caratteristica $\mathbf{s^2+1=0}$ con radici pari a $\pm\mathbf{j}$. Poiche' le radici hanno parte reale 0 , il sistema e' al limite di stabilita', tuttavia non risulta stabile. Infatti, pur presentando per la gran parte degli ingressi oscillazioni limitate in uscita, per un ingresso x = sin t ha un'uscita non limitata **y = (sin t- t cos t)/2** che possiamo calcolare facilmente. $\mathbf{X(s)=\mathscr{L}(\sin t)=1/(s^2+1)}$ e quindi $\mathbf{(s^2+1)Y(s)= 1/(s^2+1)}$ da cui ricaviamo che :

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{1}{(\mathbf{s}^2+1)^2}$$



Mediante l'uso della Symbolic Toolbox di Matlab si ottiene:

ilaplace(1/(s^2+1)^2)

ans =**1/2*sin(t)-1/2*t*cos(t)**

Per eseguire una verifica a priori della stabilita' di un sistema occorre dunque analizzare il comportamento delle radici dell'equazione caratteristica della funzione di trasferimento.
Un possibile criterio che si puo' usare e' dovuto a Routh-Hurwitz.

Criterio di stabilita' di Routh -Hurwitz.

Questo criterio si puo' applicare ad un'equazione caratteristica di ennesimo ordine del tipo: $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 = 0$

Il criterio viene applicato costruendo la tabella di Routh nel modo seguente:

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
. & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
. & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
. & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

dove $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ sono i coefficienti dell'equazione caratteristica e i coefficienti b_i si ricavano in funzione delle a_i.

$$
\begin{array}{l|llll}
s^{n} & a_{n} & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
. & b_{1} & b_{2} & b_{3} & \cdots \\
. & c_{1} & c_{2} & c_{3} & \cdots \\
. & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

$$b_1 \equiv \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 \equiv \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 \equiv \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 \equiv \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

La tavola viene completata in senso orizzontale e verticale finché non si ottengono solo zeri.

Tutte le radici dell’equazione caratteristica,hanno parte reale negativa, se, **e solo se**, gli elementi della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno.

Il numero di radici a parte reale positiva e’ dato dal numero di cambiamenti di segno nella prima colonna di Routh

ESEMPIO.

$$\begin{array}{l|lll} s^3 & a_3 & a_1 & a_{-1} \\ s^2 & a_2 & a_0 & a_{-1} \\ s^1 & b_1 & b_2 & \\ s^0 & c_1 & & \end{array}$$

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$$

$$\begin{array}{l|lll} s^3 & 1 & 12 & 0 \\ s^2 & 6 & 8 & 0 \\ s^1 & \frac{64}{6} & 0 & \\ s^0 & 8 & & \end{array}$$

$$b_2 \equiv \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} = \frac{6 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{6} = 0 \qquad b_1 \equiv \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{6 \cdot 12 - 1 \cdot 8}{6} = \frac{64}{8}$$

$$c_1 \equiv \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} = \frac{(64/6) \cdot 8 - 6 \cdot 0}{6} = 8$$

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$$

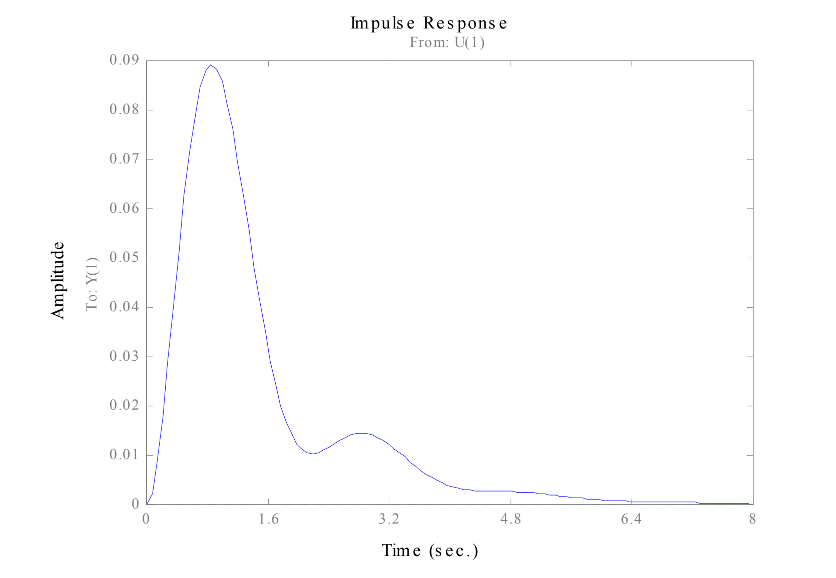
$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 12 & 0 \\ s^2 & 6 & 8 & 0 \\ s^1 & \frac{64}{6} & 0 & \\ s^0 & 8 & & \end{array}$$

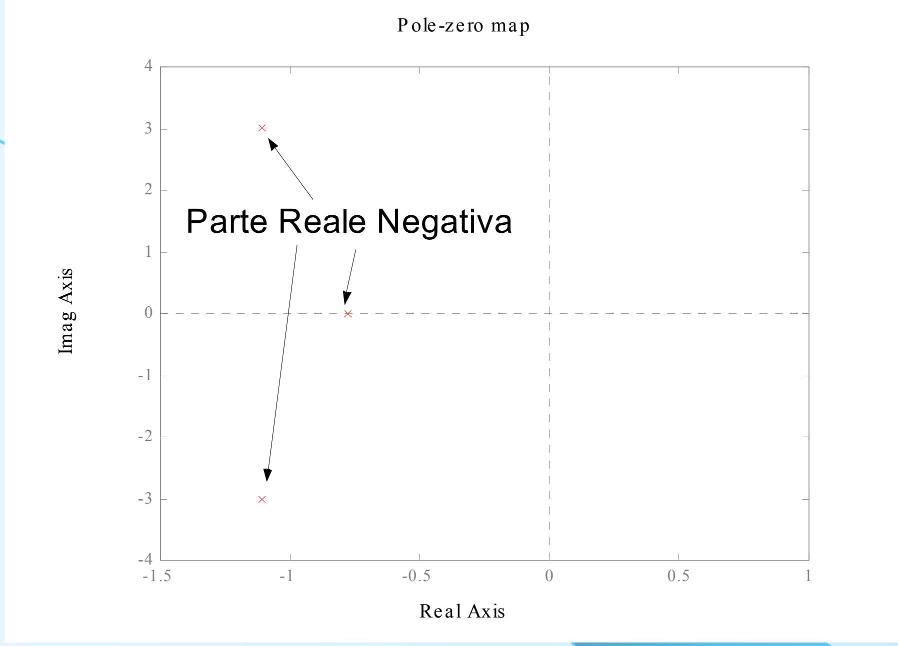
Non essendoci cambiamenti di segno nella prima colonna della tabella di Routh, tutte le radici sono a parte reale negativa.

Usando Matlab si possono trarre le seguenti informazioni:

```
» num=1;
» den=[1 3 12 8];
» sys=tf(num,den)
Transfer function:
         1
---------------------------
s^3 + 3 s^2 + 12 s + 8
» [p,z]=pzmap(sys)
 p = -1.1105 ± 3.0061J ; -0.7790
z = Empty matrix: 0-by-1
```

» pzmap(sys)
» impulse(sys)





Come si puo' osservare dall'esempio fatto utilizzando Matlab l'analisi delle radici della equazione caratteristica di un sistema si semplifica notevolmente, tuttavia a volte e' necessaria perche' per soddisfare a delle specifiche cui deve soddisfare un sistema si vuole determinare un intervallo di valori di un certo parametro, per cui il sistema risulta stabile.

Questo problema si puo' risolvere scrivendo delle disuguaglianze che assicurano che non vi sia cambiamento di segno nella prima colonna della tabella di Routh relativa al sistema considerato. Queste disuguaglianze permettono di determinare il campo di variazioni ammissibili per il parametro considerato. Facciamo un esempio:

$$\mathbf{s}^3 + 3\mathbf{s}^2 + 3\mathbf{s} + 1 + \mathbf{K} = 0$$

$$\begin{array}{l|lll} \mathbf{s}^3 & 1 & 3 & 0 \\ \mathbf{s}^2 & 3 & 1+\mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{s}^1 & \frac{8-\mathbf{K}}{3} & 0 & \\ \mathbf{s}^0 & 1+\mathbf{K} & & \end{array}$$

Per non esserci cambiamenti di segno deve essere :**8-K>0** e **K+1> 0**. Percio' deve essere **–1< K<8** per ottenere radici a parte reale negativa. Vedremo che con l'ausilio di Matlab questo tipo di analisi e' molto semplice. Ci avvarremo delle istruzioni **rlocus** ed **rlocfind** .

$$b_1 \equiv \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad c_1 \equiv \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$b_2 \equiv \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \qquad c_2 \equiv \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$