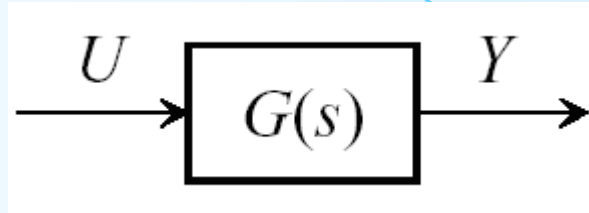


# Risposta in frequenza

## *Risposta sinusoidale*

Consideriamo un generico sistema dinamico lineare, di funzione di trasferimento  $G(s)$ :



e imponiamo il seguente andamento sinusoidale all'ingresso  $u$  :

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

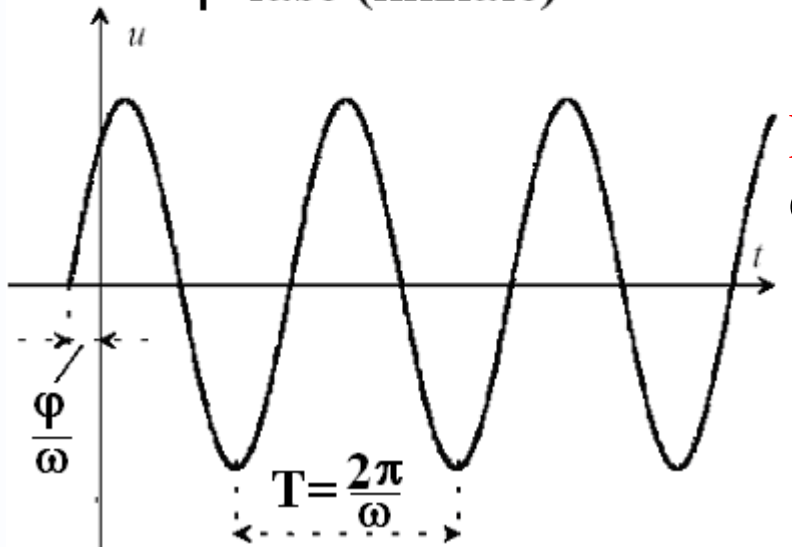
$A$ : ampiezza

$\omega$ : pulsazione

$\varphi$ : fase (iniziale)

$$\longrightarrow \omega t + \varphi = 0 \longrightarrow t = -\varphi/\omega$$

Se il sistema è **asintoticamente stabile**, esaurito un transitorio iniziale, **anche l'uscita è sinusoidale, con la stessa pulsazione della sinusoide in ingresso**, e risulta in particolare:



$$y(t) = B \sin(\omega t + \Psi)$$

$$\begin{cases} B = A |G(j\omega)| \\ \Psi = \varphi + \angle G(j\omega) \end{cases}$$

dove  $j$  è l'unità immaginaria.

## Risposta in frequenza

Si definisce risposta in frequenza( o risposta armonica) la seguente funzione complessa della variabile reale  $\omega$ :  $G(j\omega)$ ,  $0 < \omega < \infty$ . In altri termini la risposta in frequenza di un sistema si ottiene **sostituendo** al posto di  **$s \Rightarrow j\omega$  con  $\omega > 0$**  . Per l'applicazione del teorema della risposta in frequenza, per i sistemi asintoticamente stabili, occorre poi valutare il numero complesso  **$G(j\omega)$**  (e quindi il suo modulo e la sua fase) in corrispondenza ad un particolare valore di  $\omega$  . (ossia in corrispondenza alla pulsazione della sinusoide in ingresso).

Coerentemente con il significato assunto nel teorema, la variabile  $\omega$  prende il nome di **pulsazione**. Si osservi che la definizione di risposta in frequenza si dà per tutti i sistemi lineari, prescindendo dalla stabilità.

## Esempio

Sia  $\mathbf{G}(s) = \frac{10}{1+s}$

la nostra f.d.t. sottoposta ad un segnale sinusoidale:  $\mathbf{u}(t) = 2 \sin(5t + 0.3)$

Il sistema è asintoticamente stabile (polo in  $s=-1$ ), per cui il teorema è applicabile. L'espressione della risposta in frequenza è la seguente:

$$\mathbf{G}(j\omega) = \frac{10}{1+j\omega}$$

Siamo interessati a valutare la risposta in frequenza in per una pulsazione  $\omega=5$ , ed in particolare il modulo e la fase del numero complesso risultante:

$$|\mathbf{G}(j\omega)| = \left| \frac{10}{1+j5} \right| = \frac{10}{|1+j5|} = \frac{10}{\sqrt{1+25}} = \frac{10}{\sqrt{26}} = 1.961$$

$$\angle \mathbf{G}(j5) = \angle \frac{10}{1+j5} = \angle 10 - \angle(1+j5) = 0 - \arctan(5) = -1.373$$

» help abs

ABS Absolute value.

ABS(X) is the absolute value of the elements of X. When X is complex, ABS(X) is the complex modulus (magnitude) of the elements of X.

»  $x=10/(1+i*5) \Rightarrow x=0.3846 - 1.9231i$

»  $\text{abs}(x) \Rightarrow 1.9612$

» help angle

ANGLE Phase angle.

ANGLE(H) returns the phase angles, in radians, of a matrix with complex elements.

»  $\text{angle}(x) \Rightarrow -1.3734$

In base al teorema della risposta in frequenza, risulterà quindi, a transitorio esaurito (a regime)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B} \sin(\omega t + \Psi)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mathbf{A} |\mathbf{G}(j\omega)| \\ \Psi = \varphi + \angle \mathbf{G}(j\omega) \end{cases}$$

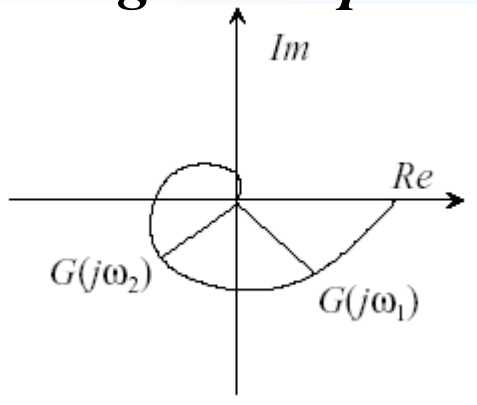
Essendo  $A=2$ ;  $\omega=5$ ;  $\varphi=0.3$  :

$$\mathbf{y}(t) = 2 |\mathbf{G}(j5)| \sin(5t + 0.3 + \angle \mathbf{G}(j5)) = 3.922 \sin(5t - 1.073)$$

# Rappresentazione grafica della risposta in frequenza

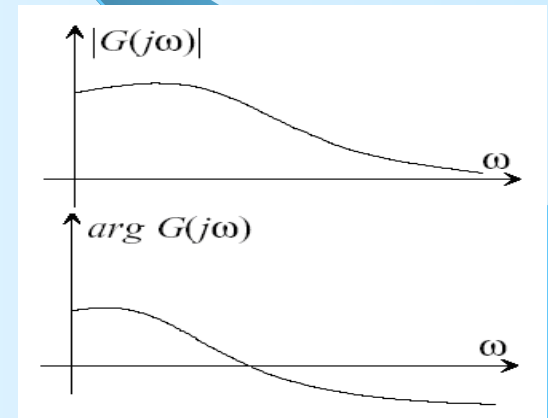
Come tutte le funzioni, la risposta in frequenza è suscettibile di rappresentazione grafica. Occorre tuttavia considerare che la risposta in frequenza è una funzione complessa della variabile reale  $\omega$ . Sono allora utilizzabili varie forme di rappresentazione grafica, tra le quali assumono rilevanza le seguenti due:

## *Diagrammi polari*



Per ogni valore di  $\omega$  si riporta il punto nel piano complesso  $G(j\omega)$ . Congiungendo i punti si ottiene una linea che prende il nome di diagramma polare.

## *Diagrammi Cartesiani*



Si tratta di una coppia di diagrammi, del modulo e della fase della risposta in frequenza rispetto alla pulsazione  $\omega$ .

## Esempio di costruzione di un diagramma polare e di un diagramma cartesiano di modulo e fase

Per mostrare come si generano i vari diagrammi, cartesiani e polari di  $G(j\omega)$ , generiamo il nostro diagramma di  $G(j\omega)$ , nei vari casi e lo confronteremo con i diagrammi di Bode e di Nyquist. Il seguente m-file risolve il problema proposto. In particolare evidenzieremo il punto corrispondente a  $G(j*3)$ .

```
%Definizione della funzione di trasferimento
num = conv([1,4],[1 6]);den = conv([1,-3],[1 -5]);
%creiamo un vettore di frequenze
clfw = logspace(-1,2,100);hold on
%plot un '+' per ciascun punto corrispondente a G(jw)
for i = 1:100
plot(polyval(num,j*w(1,i))/polyval(den, j*w (1,i)), '+')
End
```

```
%plot una 'X' verde per la frequenza di 3rad/s
```

```
plot(polyval(num,j*3)/polyval(den, j*3), 'xg')
```

```
%plot un vettore dall'origine a questo punto
```

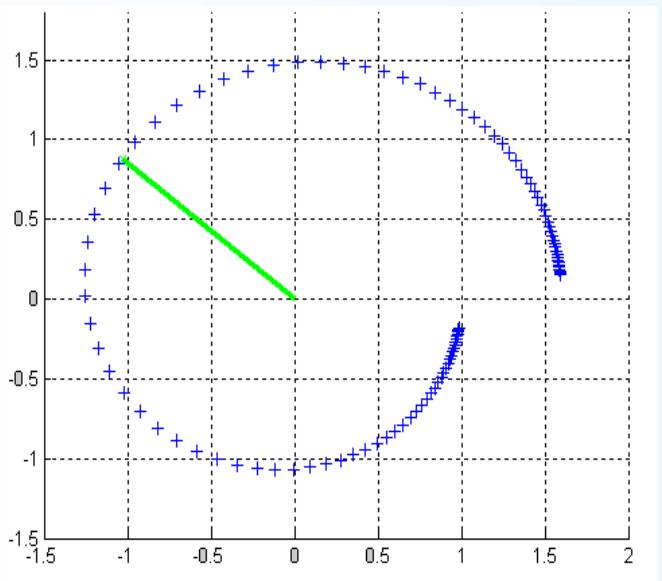
```
n= polyval(num,j*3)/polyval(den, j*3);
```

```
x = [0,real(n)];      y = [0,imag(n)];
```

```
plot(x,y, '-g')      %trova magnitudine e fase
```

```
Mag = abs(n);
```

```
Phase = 180 +360*atan(imag(n)/real(n))/(2*pi);
```



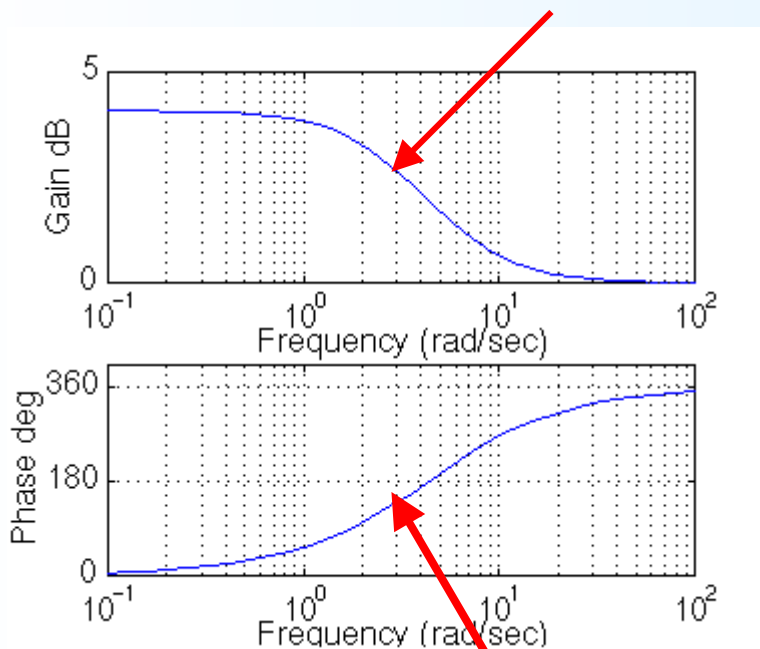
Osserviamo che ciascuna crocetta blu rappresenta la funzione di trasferimento calcolata ad una specifica frequenza a frequenze positive. In verde e' mostrato il vettore associato alla frequenza di 3 rad/s. Nella finestra dei comandi di Matlab sono stampati la magnitudine ,la fase ed il guadagno associati con questo vettore:

***Mag =1.3558 Phase = 139.3987 Gain = 2.6440***

## Rappresentazione di Bode

IL diagramma di Bode **viene costruito usando i dati già' calcolati**. Il modulo della funzione di trasferimento viene espresso in dB e riportato in un diagramma semilogaritmico che ha come variabile indipendente il logaritmo della frequenza  $\omega$  in rad/sec. La fase in gradi viene riportata sempre in funzione del logaritmo della frequenza.

**bode(num,den)**



Osservando il grafico in corrispondenza di 3rad/s si trova che la magnitudine e' poco sopra 2.6 dB e la fase e' circa  $140^\circ$ . Sono i risultati ottenuti in precedenza

Fase=

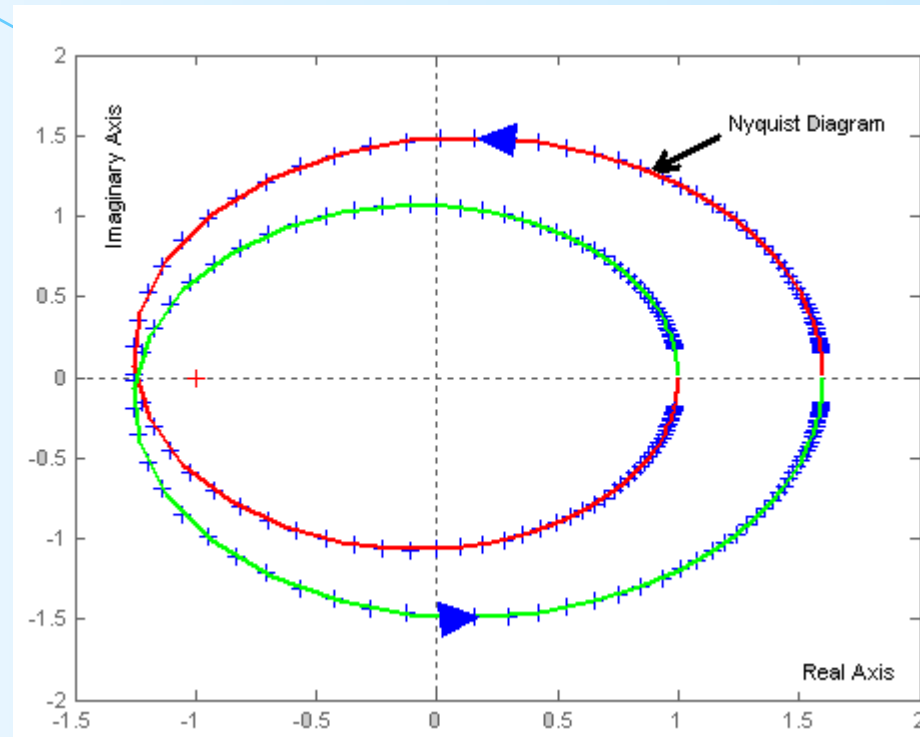
## Diagrammi polari e rappresentazione di Nyquist

In modo analogo possiamo vedere come si costruisce un diagramma di Nyquist, in cui però prendiamo in considerazione anche frequenze negative.

```
>>num = conv([1,4],[1 6]);  
den = conv([1,-3],[1 -5]);  
%create a frequency vector  
w = logspace(-1,2,100);  
negw = -1*w;  
clf  
hold on  
%plot a '+' for each point G(jw)  
for i = 1:100
```

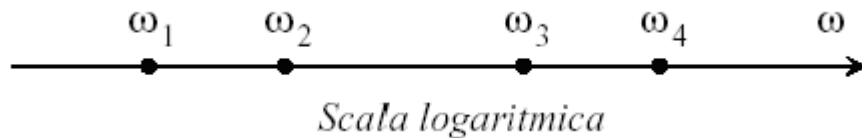
```
    plot(polyval(num,j*w(1,i))/polyval(den, j*w (1,i)), '+')  
    plot(polyval(num,j*negw(1,i))/polyval(den, j*negw (1,i)), '+')  
end
```

```
%draw Nyquist diagram on top to compare  
nyquist(num,den)  
hold off
```

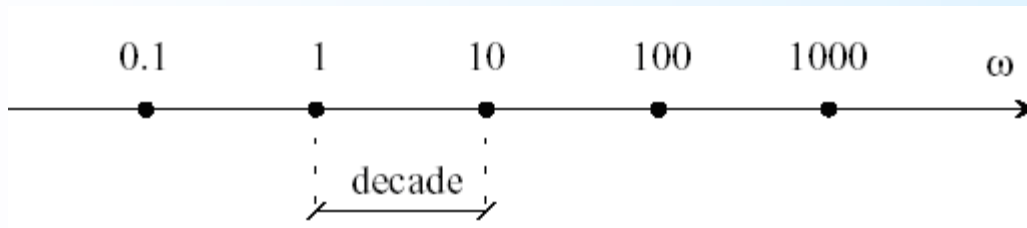


# Diagrammi di Bode

I **diagrammi di Bode** sono una coppia di diagrammi Cartesiani della risposta in frequenza, in cui le scale degli assi dell'ascissa e dell'ordinata sono scelte secondo un opportuno criterio che facilita il tracciamento dei diagrammi. Sia nel diagramma del modulo che nel diagramma della fase l'asse delle ascisse (ossia l'asse delle pulsazioni) è in **scala logaritmica**. La distanza tra due generici punti che rappresentano le pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  è proporzionale alla differenza tra i logaritmi di  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . In altre parole, date quattro pulsazioni  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  e  $\omega_4$  tali che:  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_4}{\omega_3}$  la distanza sulla scala logaritmica tra  $\omega_1$  e  $\omega_2$  è uguale alla distanza tra  $\omega_3$  e  $\omega_4$ :



In particolare la distanza tra due pulsazioni aventi rapporto pari a dieci prende il nome di **decade**:

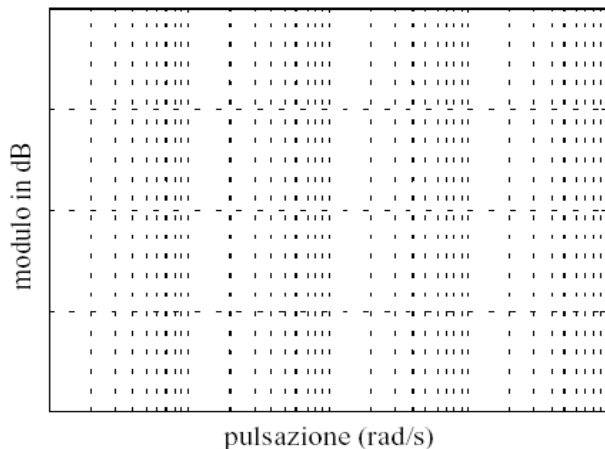


Nel **diagramma del modulo** si rappresenta sull'asse delle ordinate il modulo in **decibel**, ossia il logaritmo in base 10 del modulo, moltiplicato per il fattore 20:  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$

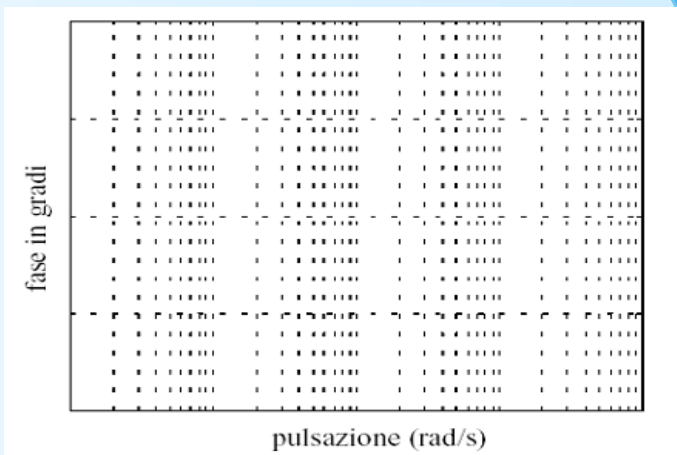
I valori del modulo in decibel vengono poi rappresentati su una scala lineare. Pertanto il diagramma del modulo viene tracciato su una **carta semilogaritmica**.

Nel **diagramma della fase** si rappresenta sull'asse delle ordinate la fase della risposta in frequenza in gradi, su scala lineare. Anche questo diagramma va quindi tracciato su carta semilogaritmica:

### Diagramma del Modulo (dB)



### Diagramma della fase (in gradi)



## Diagramma di Bode del modulo

Per una generica funzione di trasferimento:  $\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{K} \prod_i (1 + s\tau_i)}{s^g \prod_k (1 + s\tau_k)}$

il modulo della risposta in frequenza assume l'espressione:

$$|\mathbf{G}(j\omega)| = \frac{|\mathbf{K}| \left| \prod_i (1 + j\omega\tau_i) \right|}{|j\omega|^g \left| \prod_k (1 + j\omega\tau_k) \right|}$$

Il modulo in decibel si scriverà quindi come:

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10} |\mathbf{G}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |\mathbf{K}| + 20 \log_{10} \frac{1}{|j\omega|^g} + \\ &+ \sum_i 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_i| + \sum_k 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_k| \end{aligned}$$

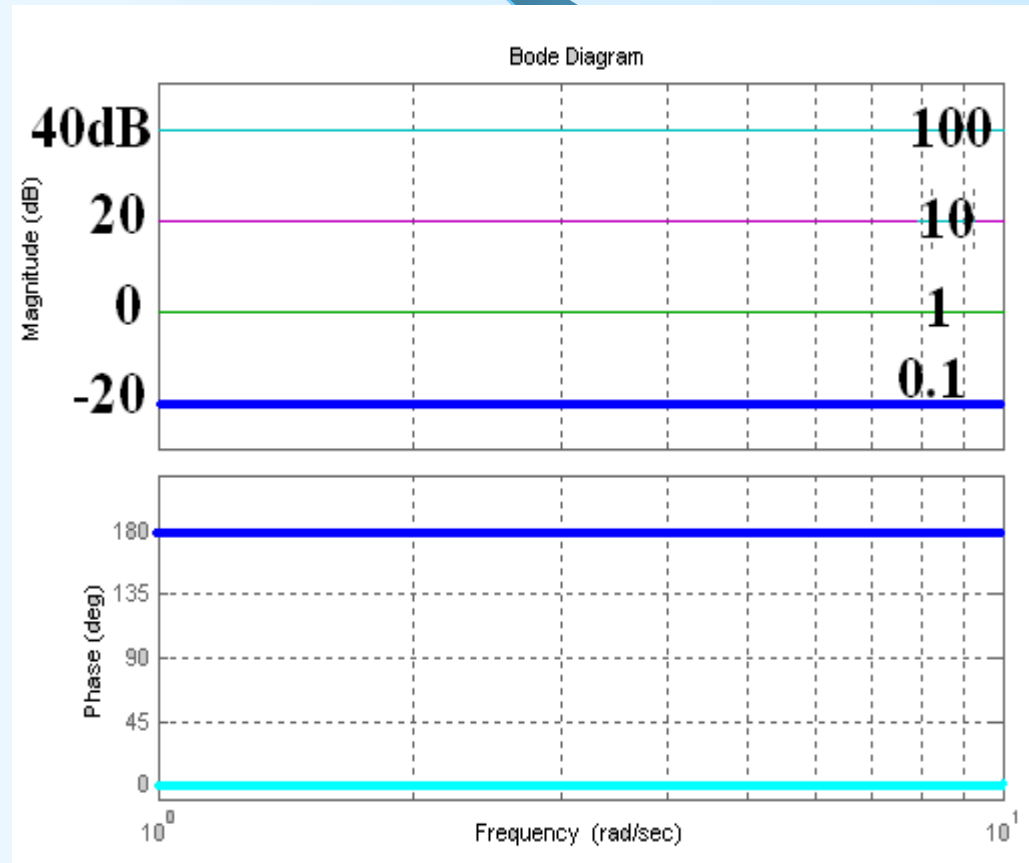
Vediamo come si tracciano i diagrammi dei singoli addendi di questa somma.

<u>1. Fattore Guadagno</u>	Modulo	Fase
<b>K</b>	<b><math>20 \log_{10}  K </math></b>	<b>K&gt;0: 0° ; K&lt;0: -180°</b>

Esempi:  $K=100 \Rightarrow |K|_{dB}=40$  ;  $K=10 \Rightarrow |K|_{dB}=20$  ;  $K=0.1 \Rightarrow |K|_{dB}=-20$

Con Matlab si ottiene:

```
grid
sys=tf(.1,1) %K=0.1
bode(sys)
hold on
sys=tf(1,1) %K=1
bode(sys)
sys=tf(10,1) %K=10
bode(sys)
sys=tf(100,1) %K=100
bode(sys)
sys=tf(-10,1)
%K=-10 il segno meno
%ha effetto sulla fase
bode(sys)
```



## Zeri e poli nell'origine

<b>2. <u>Fattore Integrabile</u></b>	<b>Modulo</b>	<b>Fase</b>
<b>1/s</b>	<b>-20dB/dec, attraversa 0 dB <math>\omega=1</math></b>	<b>-90°</b>
<b><u>Fattore derivativo</u> s</b>	<b>Da' immagine speculare di 1/s rispetto a 0 dB e 0° <math>\omega=1</math></b>	<b>+90°</b>

$$\mathbf{G(s)} = \frac{1}{\mathbf{s^g}} \Rightarrow |\mathbf{G(j\omega)}|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{1}{|\mathbf{j\omega}|^g} = -20g \log_{10} \omega$$

Si tratta di una retta di pendenza **-20 g dB/decade**, che taglia l'asse a 0 dB per  $\omega=1$ .

Si dice anche che la retta ha pendenza **-g**.

Script di Matlab usato:

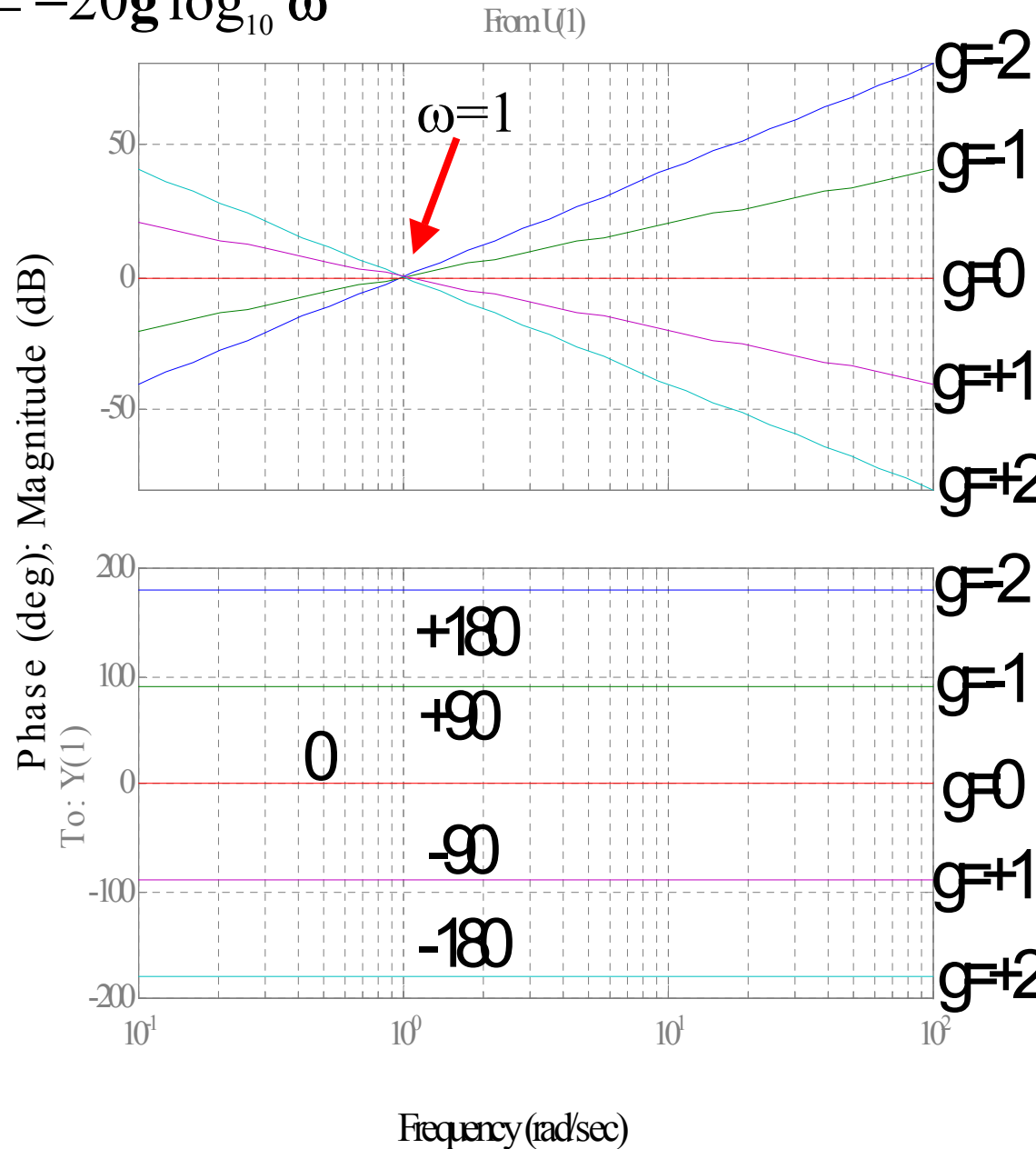
```

grid
hold on
num=[1 0 0];den=1;
sys=tf(num,den)
bode(sys)
num=[1 0];den=1;
sys=tf(num,den)
bode(sys)
num=1;den=1;
sys=tf(num,den)
bode(sys)
num=1;den=[1 0 0];
sys=tf(num,den)
bode(sys)
num=1;den=[1 0];
sys=tf(num,den)
bode(sys)

```

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20g \log_{10} \omega$$

Bode Diagrams



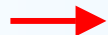
### 3. Fattore del primo ordine (zeri e poli reali)

#### Modulo

$$1/(\tau s + 1)$$

1. Disegnare l'asintoto a bassa frequenza a 0 dB
2. Disegna gli asintoti ad alta frequenza  $-20\text{dB/dec}$  passando da 0dB in corrispondenza del punto di rottura  $\omega = 1/\tau$
3. Connetti a  $-3\text{dB}$  al punto di rottura

$$(\tau s + 1)$$



E' l'immagine speculare del fattore  $1/(\tau s + 1)$

#### Fase

1.  $0^\circ$  a bassa frequenza
2.  $-90^\circ$  in alta frequenza
3. Connetti con una retta da  $0.1/\tau$  a  $10/\tau$

E' l'immagine speculare del fattore  $1/(\tau s + 1)$

## Zeri e poli reali

$$\mathbf{G}(s) = (1 + s\tau)^{\pm 1} \Rightarrow |\mathbf{G}(j\omega)|_{\text{dB}} = \pm 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau| = \pm 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Per facilitare il tracciamento a mano si introducono i diagrammi asintotici.

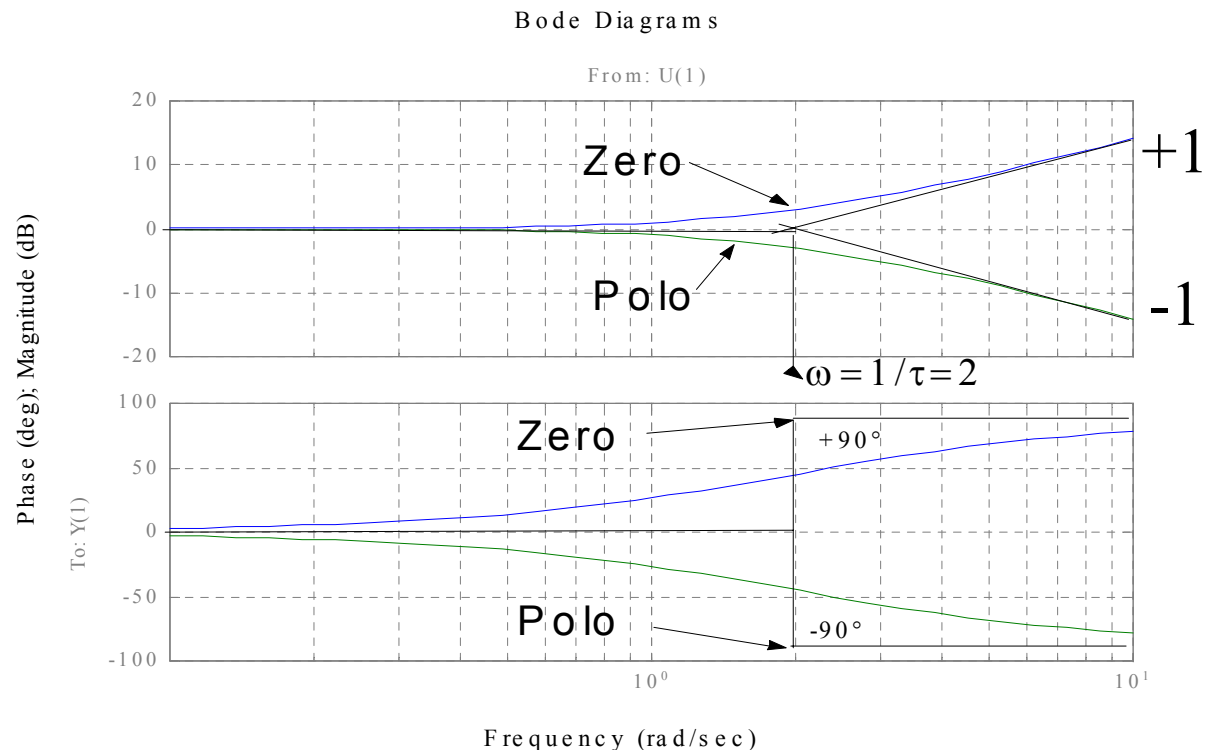
$$|\mathbf{G}(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 20 \log_{10} 1 = 0 & \omega \leq 1/|\tau| \\ \pm 20 \log_{10} |\omega\tau| & \omega > 1/|\tau| \end{cases}$$

L'errore massimo tra diagramma vero ed asintotico si ha per  $\omega = 1/|\tau|$ , e vale  $20 \log_{10} \sqrt{2} \text{dB}$ . Il diagramma è del tutto indipendente dal segno di  $\tau$ . Se vi sono più zeri (poli) reali coincidenti, i diagrammi si

sommano.

Script Matlab:

```
grid
hold on
num=[0.5 1];
den=1;
sys=tf(num,den)
bode(sys)
num=1;
den=[0.5 1];
sys=tf(num,den)
bode(sys)
```



## 4. Fattore del Secondo ordine

$$1/((s/\omega_n)^2 + 2 \zeta s/\omega_n + 1)$$

Modulo

Fase

1. Disegnare l'asintoto a bassa frequenza a 0 dB
2. Disegna gli asintoti ad alta frequenza  $-40\text{dB/dec}$  passando da 0dB in corrispondenza del punto di rottura  $\omega_n$
3. Se  $\zeta < 0.5$  disegna un picco approssimato di  $-20 \log 2\zeta$  ad  $\omega_n$
4. Connetti i vari punti

1.  $0^\circ$  a bassa frequenza
2.  $-180^\circ$  in alta frequenza
3.  $-90$  a  $\omega_n$
4. Connetti a seconda dello smorzamento.

E' l'immagine speculare del fattore  $1/((s/\omega_n)^2 + 2 \zeta s/\omega_n + 1)$

$$(s/\omega_n)^2 + 2 \zeta s/\omega_n + 1$$

## *Zeri e poli complessi e coniugati*

$$\mathbf{G}(s) = \left[ (1 + s\tau)(1 + s\bar{\tau}) \right]^{\pm 1} = \left[ 1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right]^{\pm 1} \Rightarrow$$

$$\mathbf{G}(j\omega) = \left[ (1 + j\omega\tau)(1 - j\omega\bar{\tau}) \right]^{\pm 1} = \left[ 1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{\pm 1} \Rightarrow$$

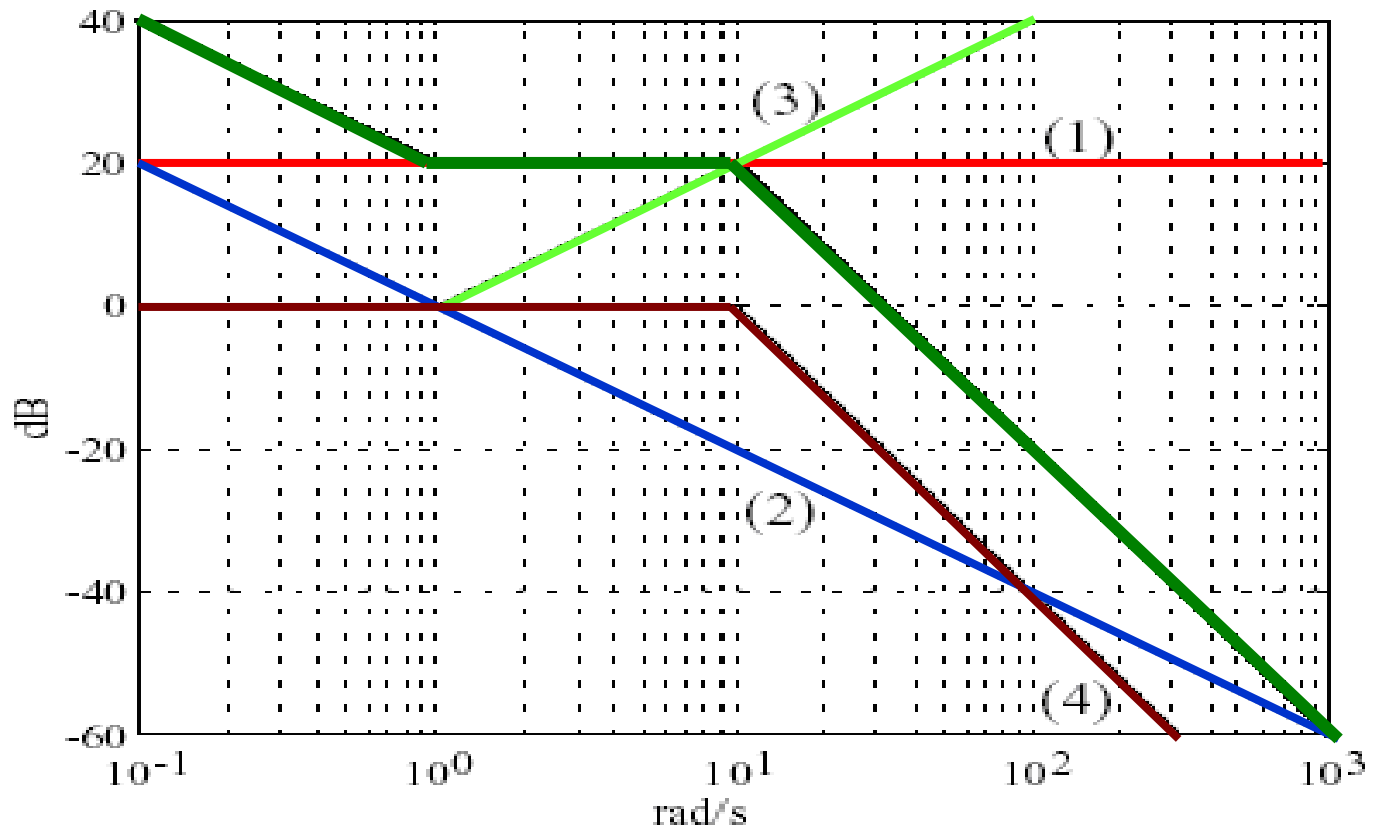
$$|\mathbf{G}(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \left\{ \pm 20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right.$$

I diagrammi asintotici si tracciano sostituendo ai due zeri (**poli**) due zeri (**poli**) reali coincidenti alla pulsazione  $\omega_n$ . L'approssimazione è buona solo per valori di  $|\zeta|$  elevati ( $|\zeta| > 0.5$ ). Il diagramma non dipende dal segno di  $\zeta$ .

## *Esempio di tracciamento*

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1-s}{(1+0.1s)^2}$$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = \overset{(1)}{20\log_{10}|10|} + \overset{(2)}{20\log_{10}\frac{1}{|j\omega|}} + \overset{(3)}{20\log_{10}|1-j\omega|} + \overset{(4)}{20\log_{10}\frac{1}{|1+j0.1\omega|^2}}$$



Per il **tracciamento veloce** del diagramma asintotico del modulo, ci si può servire delle seguenti **regole pratiche**:

1. A bassa frequenza ( $\omega \rightarrow 0$ ) il diagramma giace sulla retta di pendenza  $-g$ , passante per il punto  $[\omega = 1; |G|_{dB} = |K|_{dB}]$
2. Ad ogni pulsazione corrispondente a  $p$  poli (zeri) reali, la pendenza diminuisce (aumenta) di  $p$  unità.
3. Ad ogni pulsazione corrispondente alla pulsazione naturale di  $p$  coppie di poli (zeri) complessi e coniugati, la pendenza diminuisce (aumenta) di  $2p$  unità.
4. La pendenza finale è pari al numero degli zeri meno il numero dei poli (regola di verifica).

## Diagramma di Bode della fase

Per una generica funzione di trasferimento:  $G(s) = \frac{K \prod_i (1 + s\tau_i)}{s^g \prod_k (1 + s\tau_k)}$

la fase della risposta in frequenza assume l'espressione:

$$\angle G(j\omega) = \angle K + \angle \frac{1}{(j\omega)^g} + \sum_i \angle(1 + j\omega\tau_i) + \sum_k \angle \frac{1}{1 + j\omega\tau_k}$$

Vediamo come si tracciano i diagrammi dei singoli addendi di questa somma.

$$\text{Guadagno} \rightarrow G(s) = K \quad \angle G(j\omega) = \angle K = \begin{cases} 0 & K \geq 0 \\ -180 & K < 0 \end{cases}$$

Si tratta di una retta orizzontale.

### *Zeri e poli nell'origine*

$$G(s) = \frac{1}{(s)^g} \quad \angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{(j\omega)^g} = -\angle(j\omega)^g = -g \angle(j\omega) = -g \cdot 90$$

Si tratta di una retta orizzontale. Ad esempio un polo nell'origine ( $g=1$ ), ossia un integratore, dà un contributo di fase costante pari a  $-90^\circ$ .

# Zeri e poli reali

$$G(s) = (1 + s\tau)^{\pm 1} \Rightarrow$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega\tau)^{\pm 1} = \pm \angle(1 + j\omega\tau) = \pm \arctan(\omega\tau)$$

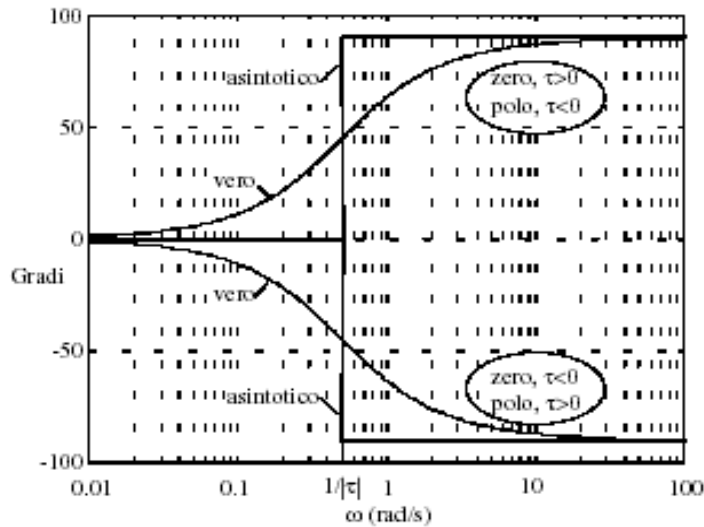


Fig. 16 : Diagr. della fase di zeri/poli reali

Per facilitare il tracciamento a mano si introducono i diagrammi asintotici.

$$\angle G(j\omega) \approx \begin{cases} \angle 1 = 0 & \omega \leq 1/|\tau| \\ \pm \angle(j\omega\tau) & \omega > 1/|\tau| \end{cases}$$

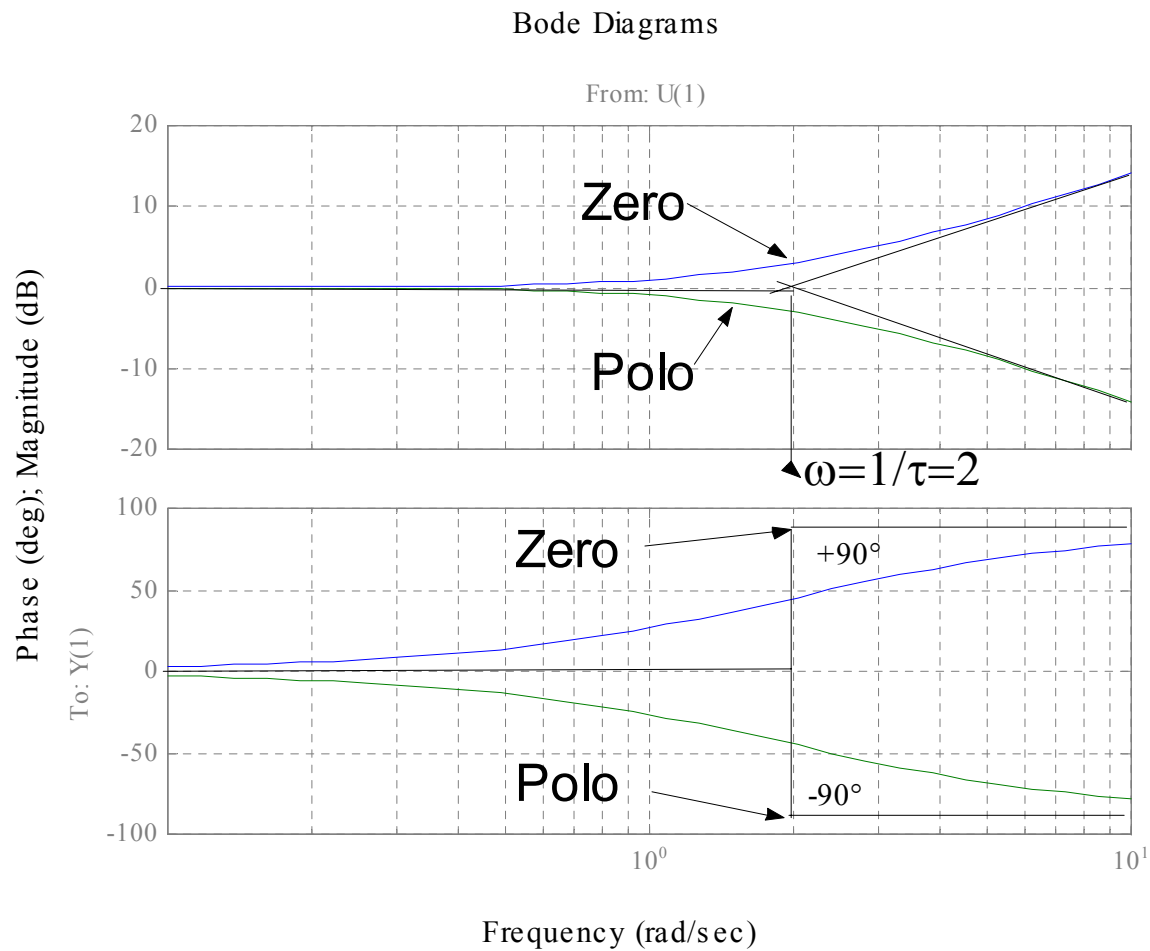
Il diagramma dipende dal segno di  $\tau$ . Infatti:

$$\angle(j\omega\tau) = \begin{cases} 90^\circ & \tau > 0 \\ -90^\circ & \tau < 0 \end{cases}$$

Se vi sono più zeri (poli) reali coincidenti, i diagrammi si sommano.

# Script Matlab:

```
grid
hold on
num=[0.5 1];
    den=1;
sys=tf(num,den)
bode(sys)
num=1;
    den=[0.5 1];
sys=tf(num,den)
bode(sys)
```



# Zeri e poli complessi e coniugati

$$G(s) = [(1+s\tau)(1+s\bar{\tau})]^{\pm 1} = \left[ 1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right]^{\pm 1} \Rightarrow \angle G(j\omega) = \pm \arctan \left( \frac{\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

I diagrammi asintotici si tracciano sostituendo ai due zeri (poli) due zeri (poli) reali coincidenti alla pulsazione  $\omega_n$ . L'approssimazione è tanto migliore quanto più piccoli sono i valori di  $|\zeta|$ . Il diagramma dipende dal segno di  $\zeta$ .

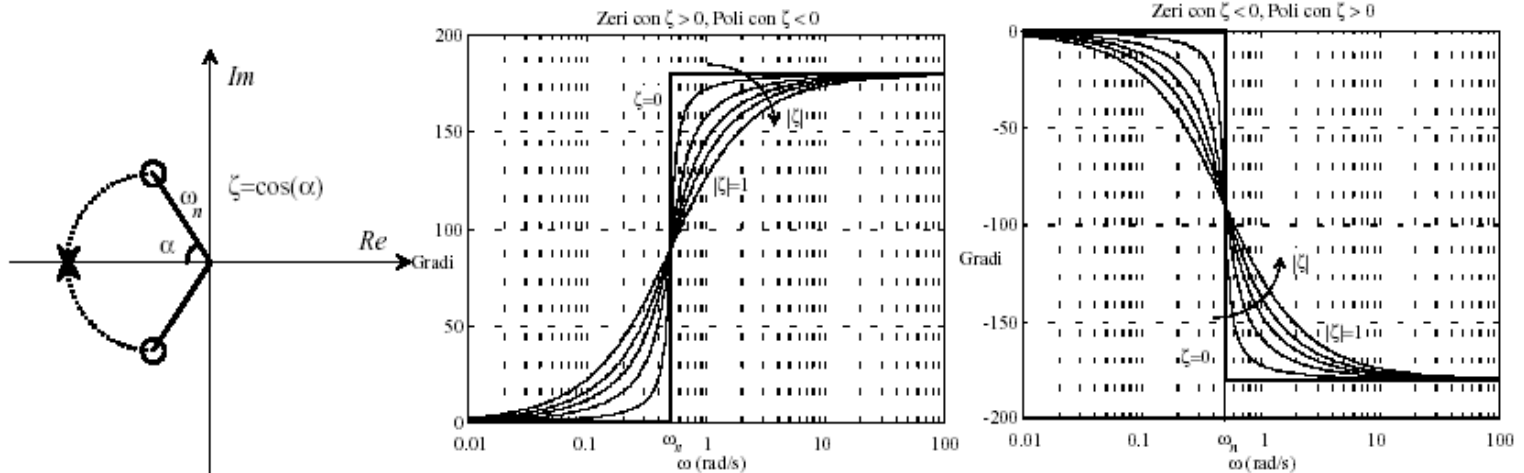
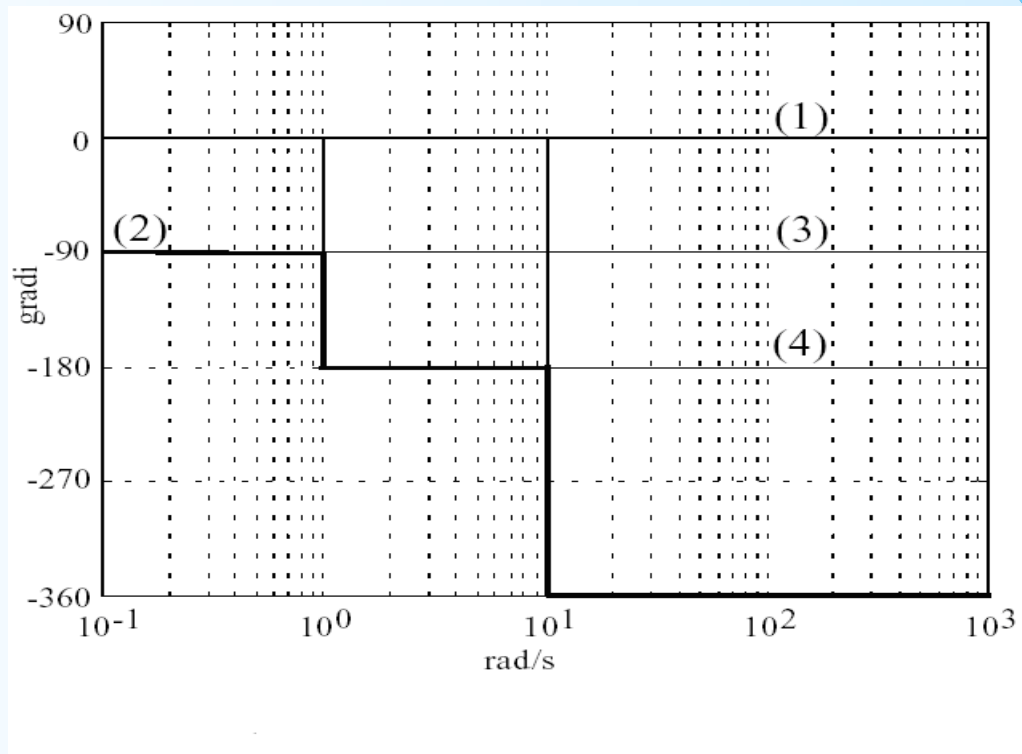


Fig. 17 : Diagrammi della fase di zeri/poli complessi e coniugati

## *Esempio di tracciamento*

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1-s}{(1+0.1s)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \overset{(1)}{\angle 10} + \overset{(2)}{\angle \frac{1}{j\omega}} + \overset{(3)}{\angle (1-j\omega)} + \overset{(4)}{\angle \frac{1}{(1+j0.1\omega)^2}}$$



Per il **tracciamento veloce** del diagramma asintotico della fase, ci si può servire delle seguenti **regole pratiche**:

1. A bassa frequenza ( $\omega \rightarrow 0$ ) il diagramma giace sulla retta orizzontale di ordinata  $\angle K - g 90$ .
2. Ad ogni pulsazione corrispondente a  $p$  zeri reali nel semipiano sinistro o  $p$  poli reali nel semipiano destro, il diagramma ha un salto positivo di  $p90^\circ$ .
3. Ad ogni pulsazione corrispondente a  $p$  zeri reali nel semipiano destro o  $p$  poli reali nel semipiano sinistro, il diagramma ha un salto negativo di  $p90^\circ$ .
4. Ad ogni pulsazione corrispondente alla pulsazione naturale di  $p$  coppie di zeri complessi e coniugati nel semipiano sinistro o  $p$  coppie di poli complessi e coniugati nel semipiano destro, il diagramma ha un salto positivo di  $p180^\circ$ .
5. Ad ogni pulsazione corrispondente alla pulsazione naturale di  $p$  coppie di zeri complessi e coniugati nel semipiano destro o  $p$  coppie di poli complessi e coniugati nel semipiano sinistro, il diagramma ha un salto negativo di  $p180^\circ$ .
6. Per il calcolo preciso della fase di una risposta in frequenza ad una determinata pulsazione  $\omega$ , assumendo la funzione di trasferimento dotata solo di poli o zeri reali (o di poli e zeri complessi ad elevato smorzamento, approssimati con poli e zeri reali), occorrerà calcolare la seguente espressione dove gli arctan sono da calcolare in gradi:

$$\angle G(j\omega) = \angle K - g90^\circ + \sum_i \arctan(1 + j\omega\tau_i) - \sum_k \arctan(1 + j\omega\tau_k)$$

## Azione filtrante dei sistemi dinamici

Per i sistemi dinamici lineari asintoticamente stabili si è visto che la risposta in frequenza consente di calcolare la risposta a transitorio esaurito a ingressi sinusoidali. Questo risultato si può estendere a categorie di ingressi più generali.

### *Ingressi periodici*

Si consideri un ingresso periodico  $u(t)$ :  $u(t+T) = u(t), \quad \forall t.$

Sotto ipotesi molto generali, tra cui l'assoluta integrabilità nel periodo,  $\int_0^T |u(t)| dt < \infty$ , è noto che il segnale è suscettibile di sviluppo in serie di sinusoidi (**serie di Fourier**):

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

I coefficienti  $U_n$  e  $\varphi_n$  prendono il nome di coefficienti di Fourier di  $u$ . Risulta allora che, esaurito un transitorio, anche l'uscita è periodica, con lo stesso periodo dell'ingresso, e si può scrivere:

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(n\omega_0 t + \psi_n), \quad \text{con} \quad \begin{cases} Y_n = |G(jn\omega_0)| U_n \\ \psi_n = \varphi_n + \angle G(jn\omega_0) \end{cases}.$$

**In sintesi il teorema della risposta in frequenza vale per tutte le sinusoidi in cui è scomponibile il segnale di ingresso.**

### *Ingressi aperiodici*

Si consideri un ingresso aperiodico  $u(t)$ :  $\exists T: u(t+T) = u(t), \quad \forall t.$

Sotto ipotesi molto generali, tra cui l'assoluta integrabilità del segnale,

$\int_0^{\infty} |u(t)| dt < \infty$ , è noto che il segnale è suscettibile di sviluppo in integrale di sinusoidi (**integrale di Fourier**):

$$u(t) = \int_0^{\infty} U(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega.$$

Le funzioni  $U(\omega)$  e  $\varphi(\omega)$  costituiscono la trasformata di Fourier di  $u$ .

Risulta allora che, esaurito un transitorio, anche l'uscita è esprimibile con un integrale di Fourier:

$$y(t) = \int_0^{\infty} Y(\omega) \cos(\omega t + \psi(\omega)) d\omega,$$

$$\begin{cases} Y(\omega) = |G(j\omega)| U(\omega) \\ \psi(\omega) = \varphi(\omega) + \angle G(\omega) \end{cases}$$

In altre parole il teorema vale per tutte le sinusoidi in cui è scomponibile il segnale di ingresso.

La risposta in frequenza consente quindi di calcolare la risposta a qualsiasi ingresso, poiché determina come si modificano le componenti armoniche dell'ingresso. In questo senso un sistema dinamico asintoticamente stabile si può vedere sempre come un **filtro**. Particolare rilevanza assume una tipologia di filtro che prende il nome di **filtro passabasso**. Si tratta di un sistema dinamico asintoticamente stabile, che per semplicità considereremo a guadagno unitario, caratterizzato da un modulo della risposta in frequenza del tipo di quello riportato in figura:

Se risulta:  $|G(j\omega)|_{dB} < -3, \forall \omega,$

ossia se il sistema non presenta risonanze, definiamo **banda passante** del filtro

l'insieme di pulsazioni:  $\{\omega: |G(j\omega)|_{dB} > -3\} = [0, \omega_b],$

con  $\omega_b$  estremo superiore della banda passante. Si ha, quindi, che passano le armoniche le cui pulsazioni sono interne alla banda passante e si attenuano le altre.

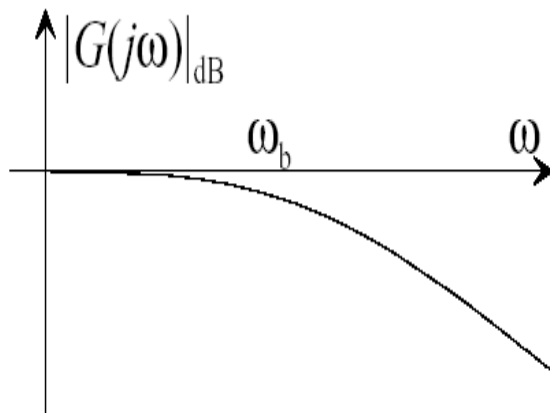


Fig. 20 : Diagramma del modulo di un filtro passabasso

## Esercizi

### Esercizio 1

Si scriva l'espressione dell'andamento di regime dell'uscita  $y(t)$  del sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{soggetto all'ingresso } u(t) = 3 \sin(t).$$

Utilizzando il teorema della risposta in frequenza, si ottiene, a transitorio esaurito (notiamo che  $\omega=1$ ):

$$y(t) = 3|\mathbf{G}(j)|\sin([t + \angle\mathbf{G}(j)]) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}(j) = \frac{1}{2+j} \\ \angle\mathbf{G}(j) = -\arctan(0.5) = -0.464 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\mathbf{G}(j)| = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \end{array} \right.$$
$$y(t) = \frac{3}{\sqrt{5}}\sin(t - 0.464)$$

$$\text{abs}(1/(2+j)) \Rightarrow 0.4472 \equiv 1/\sqrt{5} \quad \text{angle}(1/(2+j)) \Rightarrow -0.464$$

Simulare il comportamento in frequenza del sistema mediante simulink  
Applicando in ingresso un segnale sinusoidale con  $\omega=1$ ;  $\omega=2$ ;  $\omega=3$  rad/sec e confrontare con il diagramma di Bode l'effetto sull'ampiezza  
In uscita del segnale in ingresso di ampiezza uguale a 3;