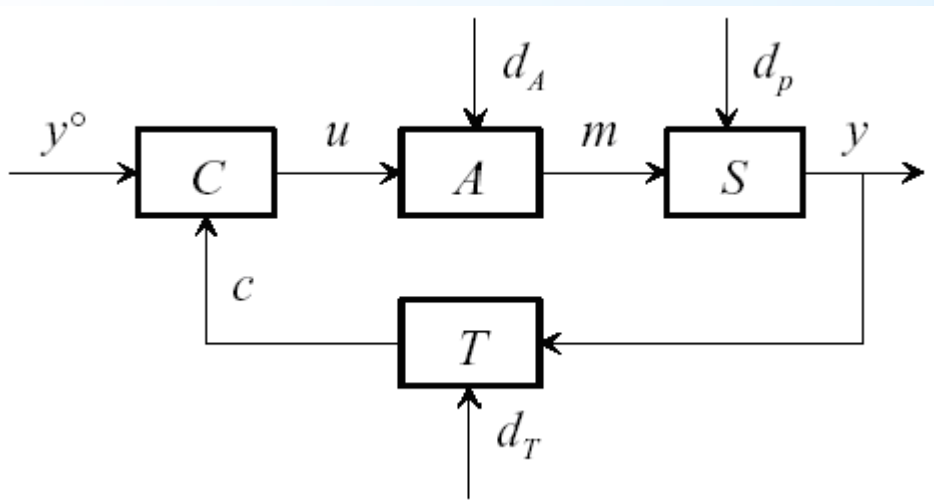


Requisiti di un sistema di controllo

Componenti di uno schema di controllo

Esaurita la trattazione dei sistemi dinamici, si torna ora al problema di controllo, che aveva dato origine a tale studio. In figura è riportata la struttura tipica di un sistema di controllo in retroazione:



- S**: sistema sotto controllo
- T**: trasduttore
- A**: attuatore
- C**: controllore (o regolatore)

Sistema sotto controllo

E' l'oggetto dello studio delle precedenti lezioni. Su di esso si interviene attraverso la variabile manipolabile m ed il suo comportamento è influenzato dal disturbo d_p . La sua uscita è la variabile controllata y . Se il sistema è lineare, le sue proprietà dinamiche possono essere espresse per mezzo di due funzioni di trasferimento: $y(s) = P(s) m(s) + H(s) d_p(s)$.

Trasduttore

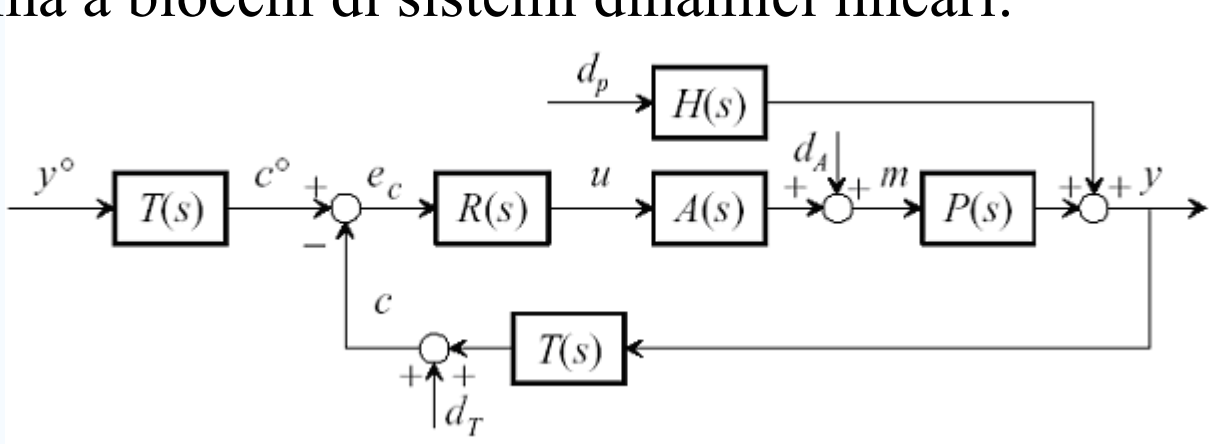
E' lo strumento che misura una grandezza fisica del sistema sotto controllo (la variabile controllata y) e ne invia la misura c al controllore, in una forma compatibile con la sua tecnologia. E' generalmente caratterizzabile con due proprietà, **precisione** e **ripetibilità**. Si può distinguere tra **precisione statica** (a transitorio esaurito il segnale che esprime la misura della grandezza è proporzionale al valore assunto dalla grandezza stessa) e **precisione dinamica** (velocità del transitorio con il quale lo strumento reagisce a variazioni nella grandezza misurata). La **ripetibilità** invece è la proprietà per cui il comportamento del trasduttore, sia statico che dinamico, non varia nel tempo. Se il comportamento dinamico del trasduttore è approssimabile a quello di un sistema dinamico lineare, la relazione che intercorre tra le trasformate della grandezza controllata y e della misura c è esprimibile con una funzione di trasferimento e può essere affetta da un disturbo: **$c(s) = T(s) y(s) + d_T(s)$** . Se il trasduttore è ripetibile, $T(s)$ non varia nel tempo. In tal caso è anche possibile individuare un andamento desiderato della misura c° , elaborando con un sistema di funzione di trasferimento $T(s)$ l'andamento desiderato y° : **$c^\circ(s) = T(s) y^\circ(s)$** .

Attuatore

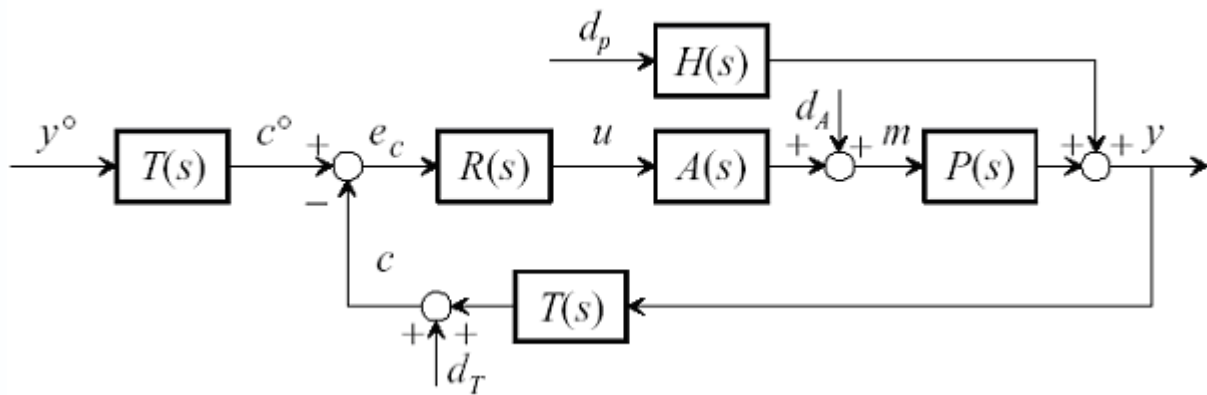
L'attuatore traduce l'azione di controllo elaborata dal controllore, ed espressa dalla variabile di controllo u , in un'azione efficace sulla variabile manipolabile m . Ad esso è quindi di norma associato uno stadio di *amplificazione di potenza* ed eventualmente di *conversione di potenza* (si pensi ad un motore elettrico che converte potenza elettrica in potenza meccanica). Anche per gli attuatori ipotizzeremo un comportamento dinamico lineare affetto da disturbo, per cui: $m(s) = A(s) u(s) + d_A(s)$.

Controllore

Il controllore riceve in ingresso la misura c della variabile controllata ed il relativo segnale di riferimento c° . Dovendo rendere questi due segnali quanto più possibile simili, è naturale che il controllore agisca sulla loro differenza, ossia sull'errore $e_c = c^\circ - c$. Ipotizzeremo che Anche il controllore abbia un comportamento dinamico lineare, per cui si avrà: $u(s) = R(s) e_c(s)$. Alla luce delle precedenti considerazioni, siamo in grado di riformulare un problema di controllo sulla base di uno schema a blocchi di sistemi dinamici lineari:



Ipotizzeremo le funzioni di trasferimento $P(s)$, $H(s)$, $T(s)$ e $A(s)$ date, insieme con l'andamento del segnale di riferimento y° . L'incognita del problema sarà la funzione di trasferimento $R(s)$.



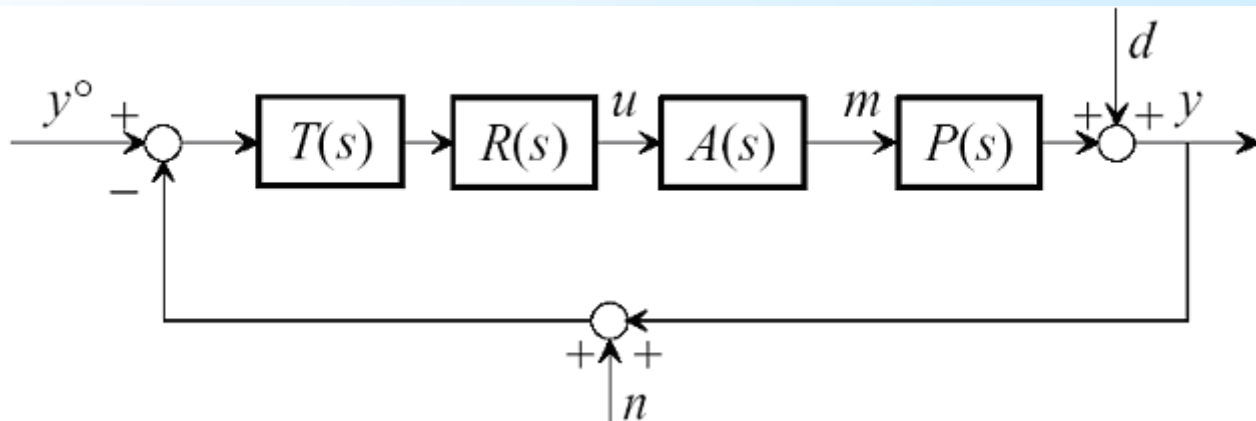
Lo schema a blocchi di Figura può essere semplificato osservando che l'effetto dei due disturbi d_p e d_A in linea di andata equivale

all'effetto di un unico disturbo d riportato direttamente sull'uscita del processo: $d(s) = P(s) d_A(s) + H(s) d_p(s)$. Inoltre

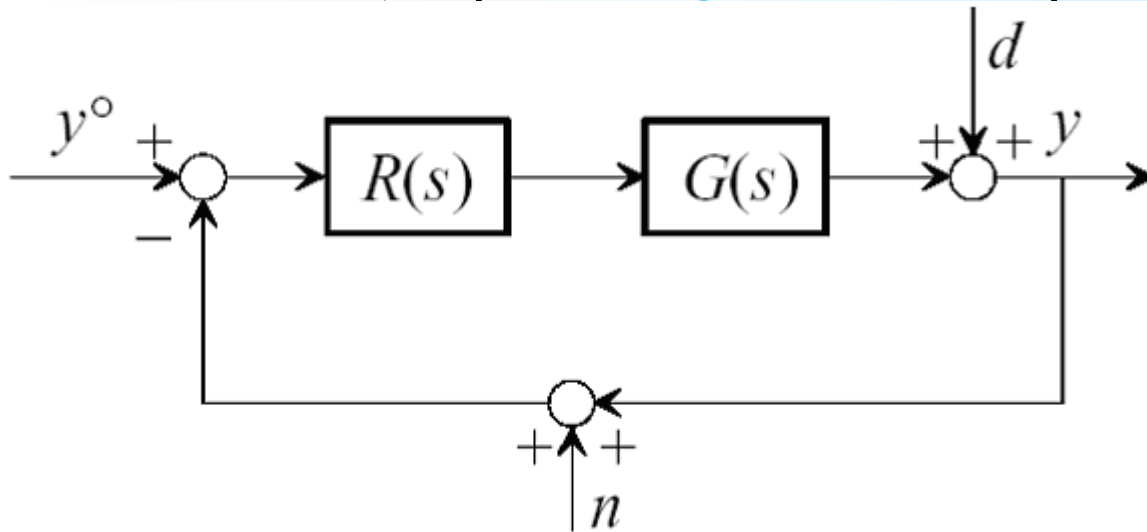
$$e_c(s) = c^o(s) - c(s) = T(s)y^o(s) - T(s)y(s) - d_T(s) = T(s)[y^o(s) - y(s) - n(s)],$$

con

$$n(s) = T(s)^{-1} d_T(s).$$



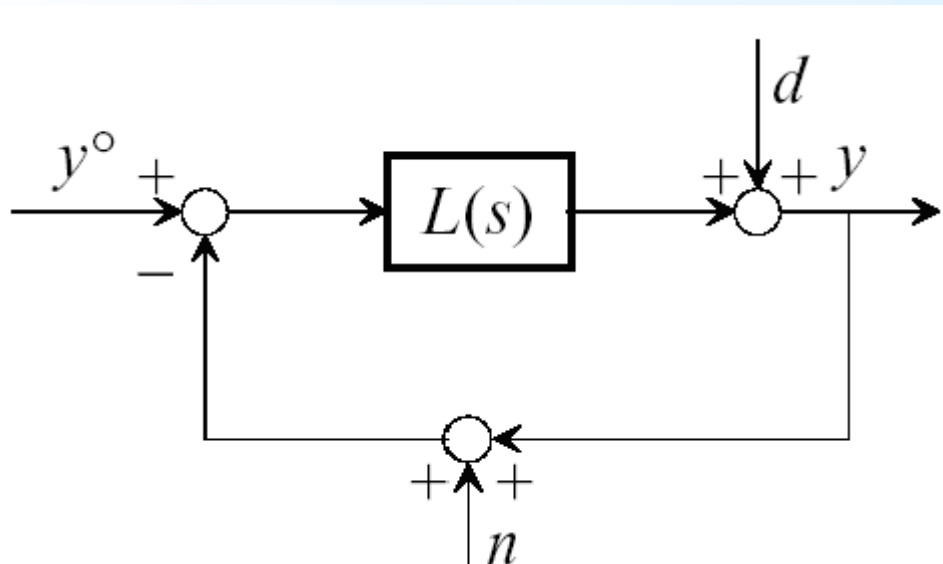
A questo punto, sfruttando la commutatività del prodotto tra funzioni di trasferimento, si può ulteriormente semplificare lo schema a blocchi:



con:

$$G(s) = T(s) P(s) A(s).$$

Infine, una terza elaborazione porta al seguente schema:



dove: $L(s) = R(s) G(s)$.

Si osservi che $L(s)$ è la **funzione di trasferimento d'anello** del sistema.

L'obiettivo ideale $y = y^{\circ}$ non è realizzabile, a causa dei limiti connessi alla dinamica del sistema sotto controllo, dell'attuatore e del trasduttore. Si definiscono allora una serie di **requisiti** (o specifiche) che il progetto del controllore dovrà soddisfare:

Stabilità:

Il sistema in anello chiuso deve essere **asintoticamente stabile**, altrimenti qualsiasi perturbazione agente in qualsiasi punto dell'anello si amplificherebbe indefinitamente.

Precisione statica:

A regime, a seguito di assegnate perturbazioni (a scalino, a rampa ecc.) degli ingressi, l'errore tra riferimento e variabile controllata deve essere nullo, oppure inferiore ad una soglia prefissata.

Precisione dinamica:

La variabile controllata deve inseguire le variazioni del riferimento, e reagire a perturbazioni sui disturbi, con sufficiente rapidità, e senza manifestare comportamenti oscillatori.

Intensità dell'azione di controllo:

A causa dei limiti di funzionamento lineare degli attuatori, oltre che per non danneggiare gli attuatori stessi, occorre evitare che la variabile di controllo subisca brusche variazioni o assuma valori eccessivi.

Metodi di analisi

In sintesi la procedura per l'analisi di un sistema di controllo e' la seguente:

1. Determinare le equazioni o la funzione di trasferimento per ciascun componente di un sistema.
2. Scegliere un modello per rappresentare il sistema (schemi a blocchi)
3. Formulare il modello giustapponendo i componenti (blocchi o nodi dei rami).
4. Determinare le caratteristiche del sistema.

Diciamo subito che il metodo diretto di soluzione delle equazioni differenziali descriventi il comportamento dinamico del sistema nel dominio del tempo per ottenere le soluzioni a regime e in transitorio non è facilmente attuabile per sistemi di ordine superiore al secondo ed inoltre la stabilità è abbastanza difficile da studiare nel dominio del tempo.

Per modelli lineari di sistemi di controllo retroazionati sono disponibili quattro metodi grafici fondamentali più semplici e diretti del metodo nel dominio del tempo:

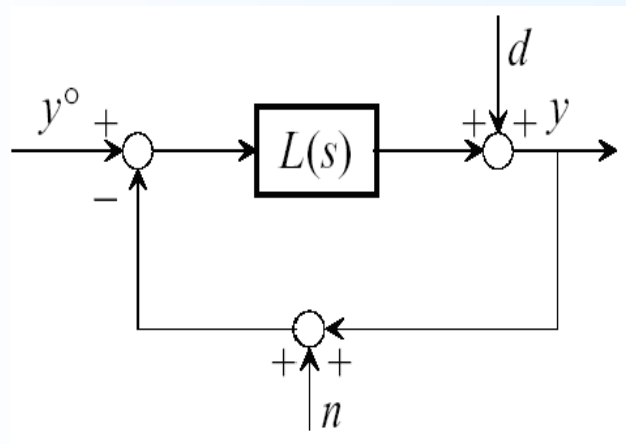
1. Il metodo del luogo delle radici
2. Rappresentazioni in diagramma di Bode
3. Diagrammi di Nyquist
4. Le carte di Nichols

Le ultime tre tecniche operano nel dominio delle frequenze.

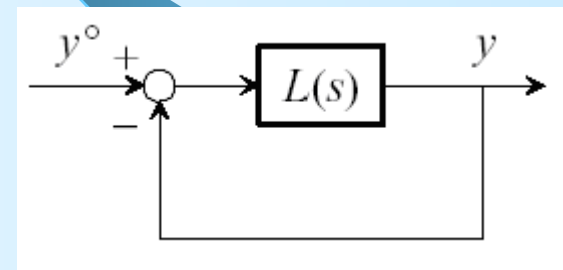
Stabilità dei sistemi di controllo

Poli di un sistema di controllo

Riprendiamo lo schema a blocchi di un sistema di controllo in retroazione:



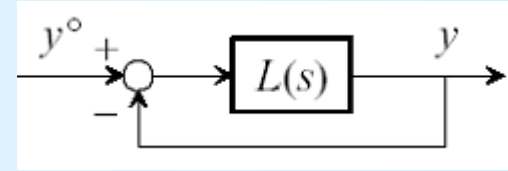
Essendo la stabilità una proprietà del sistema, indipendente dagli ingressi, possiamo considerare il sistema di controllo privo dei disturbi.



Tale forma è anche detta **forma canonica** di un sistema di controllo in retroazione con guadagno unitario.

Esprimiamo la funzione di trasferimento d'anello come rapporto di polinomi:

$$\mathbf{L(s)} = \frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{D(s)}}$$



la funzione di trasferimento da y^o a y assume l'espressione:

$$\frac{\mathbf{Y(s)}}{\mathbf{Y^o(s)}} = \frac{\mathbf{L(s)}}{1 + \mathbf{L(s)}} = \frac{\frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{D(s)}}}{1 + \frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{D(s)}}} = \frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{N(s) + D(s)}}$$

Definiamo il denominatore di questa funzione di trasferimento **polinomio caratteristico in anello chiuso**: $\chi(s) = \mathbf{N(s) + D(s)}$

Le radici di tale polinomio sono quindi i **poli** del sistema in anello chiuso.

Pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico hanno parte reale negativa.

Esempio

Studiamo la Fdt $\mathbf{L}(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1}$

In retroazione la Fdt diventa: $\frac{\mathbf{L}(s)}{1 + \mathbf{L}(s)} = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{N}(s) + \mathbf{D}(s)} = \frac{s^2 - s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2}$

Poichè: $\chi(s) = \mathbf{N}(s) + \mathbf{D}(s) = s^2 - s + 1 + s^3 + s^2 + s + 1 = s^3 + 2s^2 + 2$

il polinomio caratteristico in anello chiuso non soddisfa la condizione necessaria perché le sue radici abbiano tutte parte reale negativa, il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile.

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)	Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
-1.67e-016 + 1.0i	1.61e-016	1.00e+000	1.80e-001 + 9.03e-001i	-1.95e-001	9.21e-001
-1.67e-016 - 1.0i	1.61e-016	1.00e+000	1.80e-001 - 9.03e-001i	-1.95e-001	9.21e-001
-1.00	1.00e+000	1.00e+000	-2.36e+000	1.00e+000	2.36e+000

Loop aperto

Loop Chiuso

Se nel formare il prodotto $L(s)$ tra $R(s)$ e $G(s)$ intervengono cancellazioni tra poli (o zeri) di $R(s)$ e zeri (o poli) di $G(s)$, i poli cancellati non compaiono più come radici del polinomio caratteristico. Ricordando tuttavia la discussione fatta in precedenza riguardo gli effetti delle cancellazioni tra poli e zeri sulla stabilità dei sistemi interconnessi, osserviamo che, se i poli cancellati non hanno parte reale negativa, il sistema nel suo complesso non può dirsi asintoticamente stabile, dal momento che nasce una instabilità (o, comunque, una non asintotica stabilità) interna. Poiché zeri e poli della funzione di trasferimento **$G(s)$ sono da ritenersi assegnati**, le considerazioni precedenti conducono alle seguenti

conclusioni:

- a) Se il sistema sotto controllo $G(s)$ ha un polo a parte reale positiva o nulla, tale polo non può essere cancellato da un corrispondente zero di $R(s)$.
- b) Se il sistema sotto controllo $G(s)$ ha uno zero a parte reale positiva o nulla, tale zero non può essere cancellato da un corrispondente polo di $R(s)$.

Il criterio di Nyquist

Il criterio di Nyquist è un criterio grafico di stabilità molto generale e di più immediata utilità del criterio del polinomio caratteristico ai fini della sintesi del controllore.

In questo corso ci si limiterà a dare l'enunciato del criterio, senza entrare in ulteriori approfondimenti. Il criterio di Nyquist si basa sul tracciamento del cosiddetto **diagramma di Nyquist** associato alla funzione di trasferimento d'anello $L(s)$: si tratta del diagramma polare della risposta in frequenza di L , orientato nel senso delle ω crescenti, cui si aggiunge il simmetrico rispetto all'asse reale del piano complesso. Occorre poi introdurre due quantità:

P_d : numero di poli a parte reale strettamente positiva di $L(s)$

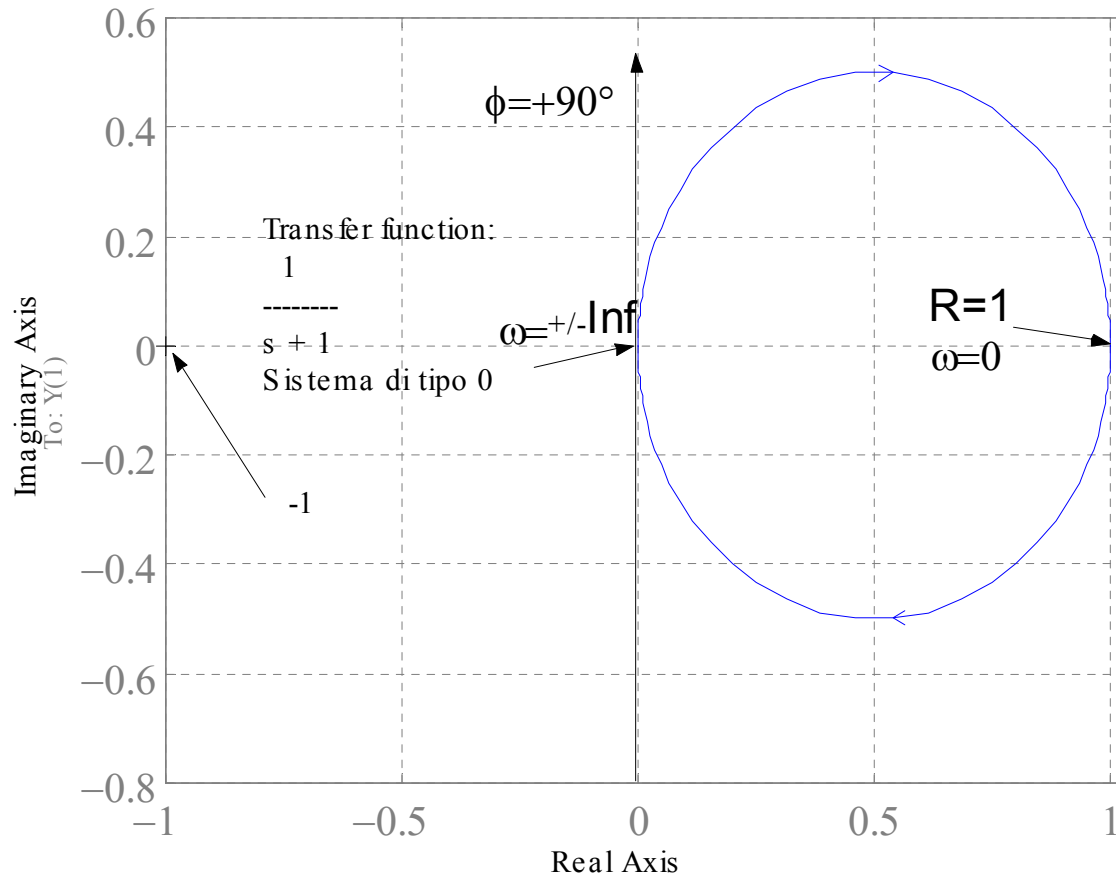
N : numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist intorno al punto -1 dell'asse reale, contati positivamente in senso antiorario.

Se il diagramma passa per il punto -1 , N si dice non definito.

Il criterio afferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se N è ben definito e risulta: $N = P_d$

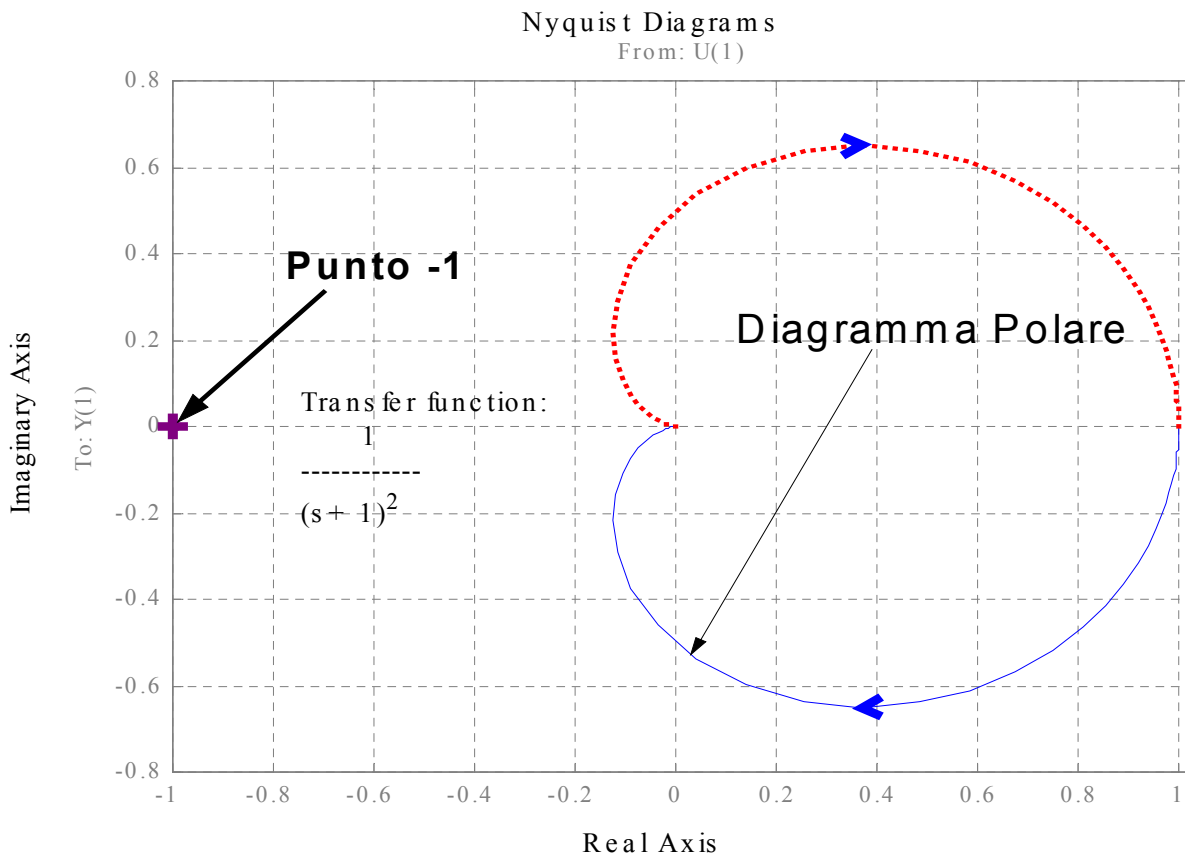
Nyquist Diagrams

From: U(1)



Esempio $L(s) = \frac{10}{(1+s)^2}$

Il diagramma polare si traccia sulla base dei diagrammi di Bode asintotici (il modulo parte da 1 e decresce monotonicamente, la fase parte da 0 e decresce monotonicamente fino a -180°). Dal diagramma polare è immediato tracciare il diagramma di Nyquist:



Si osservi che $P_d = 0$, e che il diagramma di Nyquist non compie giri intorno al punto -1 , per cui $N = 0$. Poiché $N = P_d = 0$ il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Per verifica, osserviamo che il polinomio caratteristico in anello chiuso è il seguente: $\chi(s) = 10 + (1 + s^2) = s^2 + 2s + 11$

ed ha entrambe le radici: $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{10}$ nel semipiano sinistro.

Se invece: $L(s) = \frac{10}{(1 + s)^3}$ il diagramma di Nyquist qualitativo si può tracciare di nuovo facilmente.

Anche in questo caso $P_d=0$, mentre per determinare il valore di N occorre stabilire dove si trova il punto P in cui il diagramma attraversa l'asse reale. Tale punto può essere caratterizzato come quello in cui la parte immaginaria della risposta in frequenza si annulla o come quello in cui la fase della risposta in frequenza vale -180° .

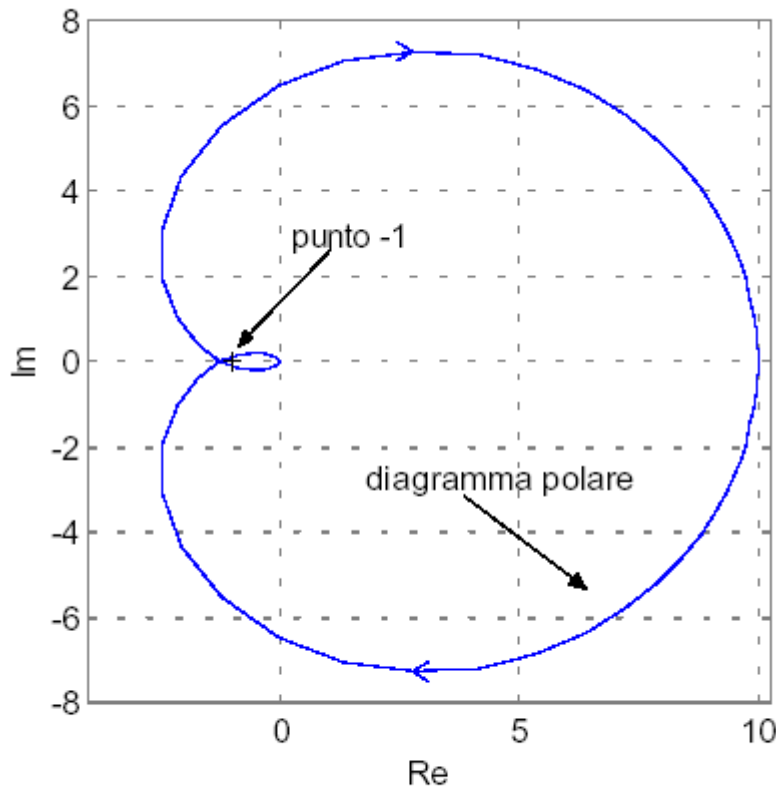


Fig. 4 : Diagramma di Nyquist di L

Determiniamo il punto in cui la fase della risposta in frequenza vale -180° . Seguendo quest'ultima strada, e denominando ω_p la pulsazione cui è associato il punto P , ricaviamo ω_p dall'equazione:

$$\angle \mathbf{L}(j\omega_p) = -180^\circ \Rightarrow -3\angle(1 + j\omega_p) = -180^\circ \Rightarrow \arctan(\omega_p) = 60^\circ \Rightarrow \omega_p = \sqrt{3}$$

$$\text{Poiché: } |\mathbf{L}(j\omega_p)| = \frac{10}{|1 + j\omega_p|^3} = \frac{10}{(\sqrt{1 + \omega_p^2})^3} = \frac{10}{8} > 1$$

il punto P si trova a sinistra del punto -1 , attorno al quale il diagramma compie quindi due giri in senso orario. Pertanto $N = -2 \neq P_d$ ed il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile.

Per verifica, osserviamo che il polinomio caratteristico in anello chiuso è il seguente:

$$\chi(s) = 10 + (1 + s)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 11,$$

ed ha due radici $s_{1,2} = 0.07 \pm j1.86$, $s_3 = -3.15$

nel semipiano destro.

Possiamo fare anche il seguente ragionamento: Il punto P è un punto del diagramma di Nyquist dove si registra una fase di -180° e il valore in P di $L(j\omega_p)$ è reale. Quindi si deve avere che $-j\omega_p^3 + 3j\omega_p = 0$ e questa condizione si verifica per $\omega_p = 0$ e $\omega_p = \pm\sqrt{3}$

Infatti:

```
»syms w
```

```
» solve('-j *w^3 + 3 *j* w = 0')
```

```
ans = [ 0] [ 3^(1/2)] [-3^(1/2)]
```

poi:

```
» polyval(10,j*sqrt(3))/polyval([1 3 3 1],j*sqrt(3))
```

```
ans = -1.2500 - 0.0000i    Nota:10/8=1.25
```

il punto P si trova a sinistra del punto -1 , attorno al quale il diagramma compie quindi due giri in senso orario. Pertanto

$N = -2 \neq P_d$ ed il sistema in anello chiuso

non è asintoticamente stabile.

Versione alternativa per capire meglio:

Il criterio di Nyquist per verificare graficamente la stabilità di un sistema di controllo (per sistemi che non hanno poli con parte reale positiva) si può enunciare nel seguente modo:

Criterio di Nyquist: Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $L(s)$ abbia tutti i poli con parte reale negativa, ad eccezione di un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $L(j\omega)$ non circonda né tocchi il punto critico $-1+j0$.

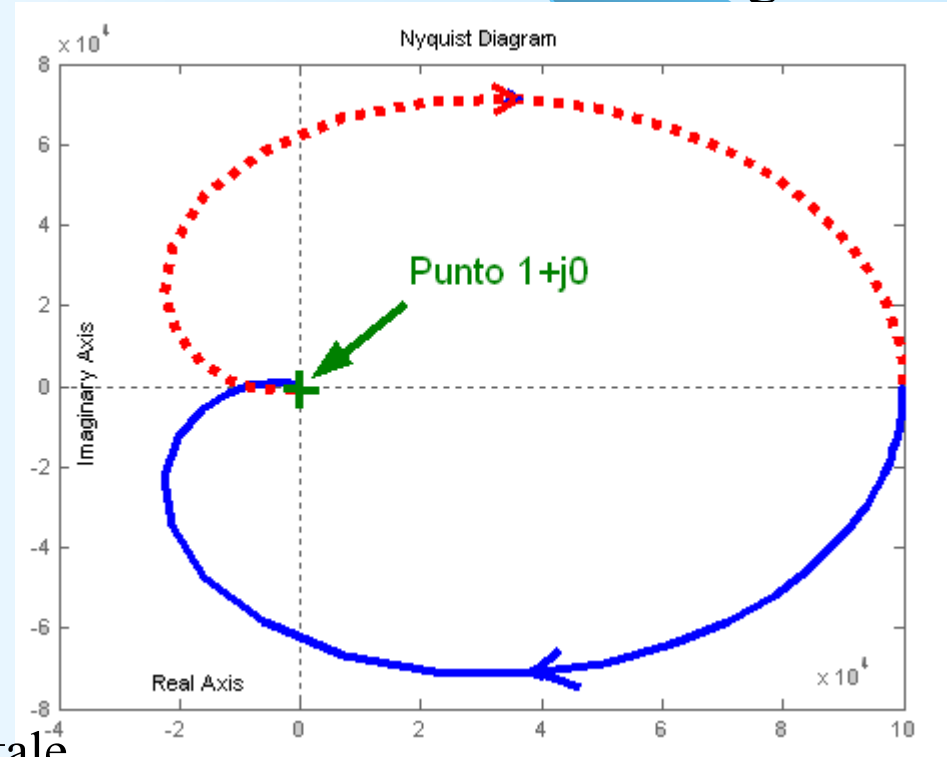
Il diagramma polare si ottiene sostituendo $j\omega$ al posto di s in $L(s)$ e graficando nel piano cartesiano la curva del luogo geometrico di punti che hanno, per ogni valore di ω compreso tra $-\infty$ e ∞ , come ascissa (x) la parte reale di $L(j\omega)$ e come ordinata (y) la parte immaginaria.

Il criterio di Nyquist permette di riconoscere la stabilità del sistema, una volta che ne sia stato disegnato il diagramma polare in maniera semplice anche per sistemi complessi. Consideriamo qualche esempio:

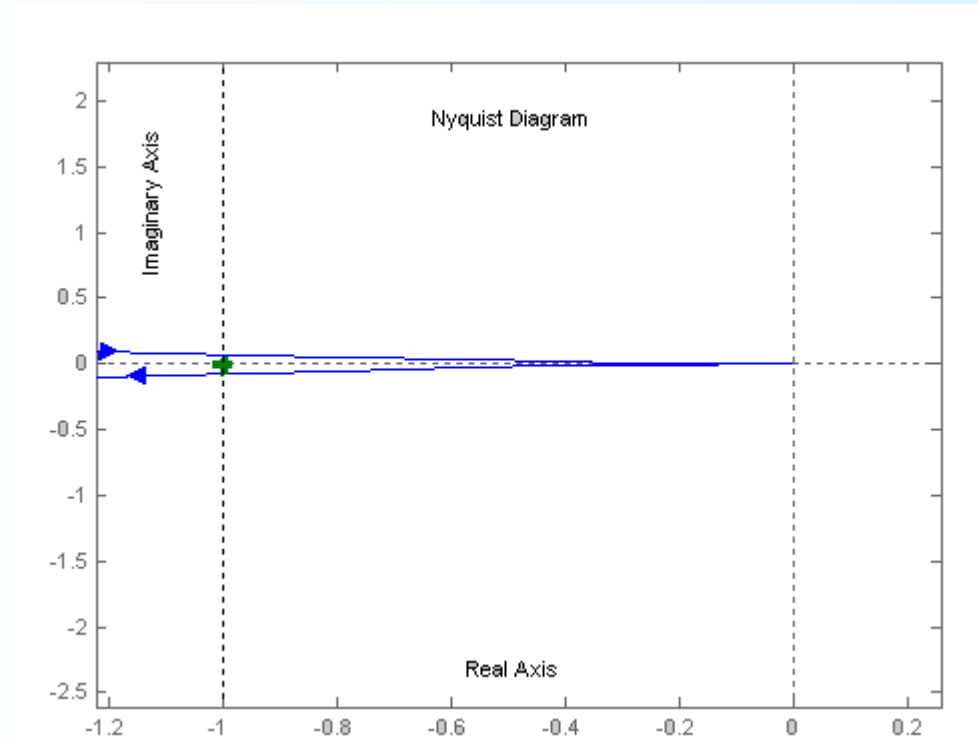
$$\mathbf{L}_1(s) = \frac{10^5 \left(\frac{s}{10} + 1 \right)}{(s + 1)^3}$$

Questa funzione presenta tre poli reali coincidenti per $s = -1$, uno zero reale per $s = -10$ ed ha un guadagno “in continua” di 10^5 . Il diagramma polare è mostrato di seguito:

Nel grafico la curva è rappresentata con tratto continuo per frequenze positive $[0, +\infty]$ e con tratto punteggiato per frequenze negative $[-\infty, 0]$, quindi percorrendola per frequenze crescenti da $-\infty$ a $+\infty$ (nel senso delle frecce) si percorre prima il tratto punteggiato e poi quello continuo; si può facilmente notare come le due metà della curva siano speculari rispetto all'asse orizzontale.



Inoltre in generale si tratta di una curva chiusa che passa per lo stesso punto per $\omega = \pm \infty$.
In questo caso, data la scala, è difficile vedere se il punto critico (rappresentato da una croce verde) viene circondato o meno; conviene quindi ingrandire la parte centrale del grafico come nella figura seguente:



Si vede come in questo caso il punto critico sia racchiuso dalla curva, e quindi il sistema in controreazione sarà instabile.

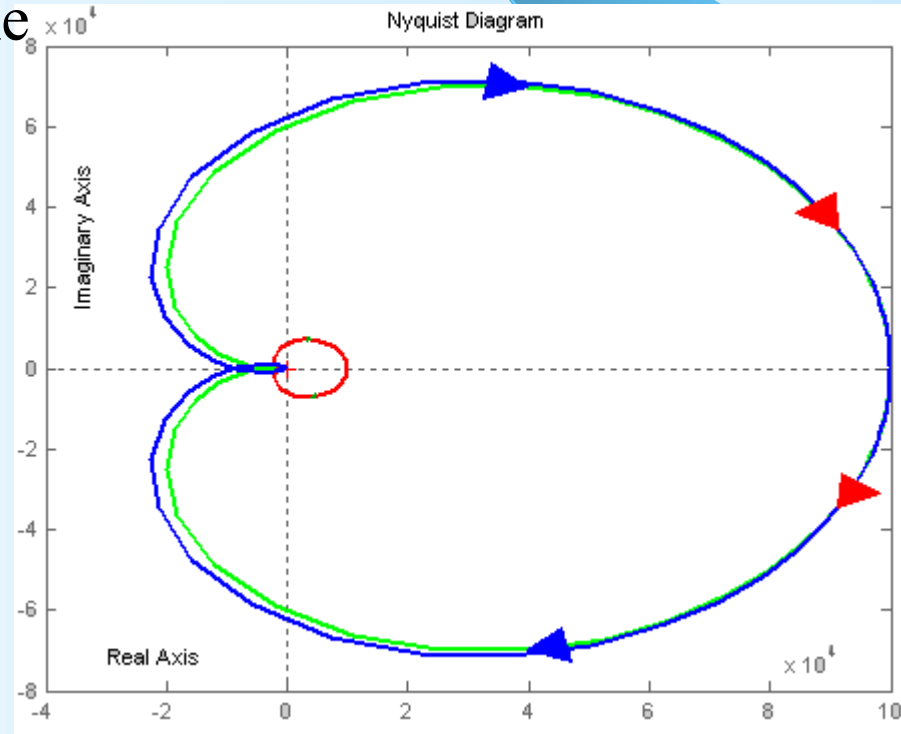
Come secondo esempio consideriamo, il diagramma polare del sistema rappresentato da:

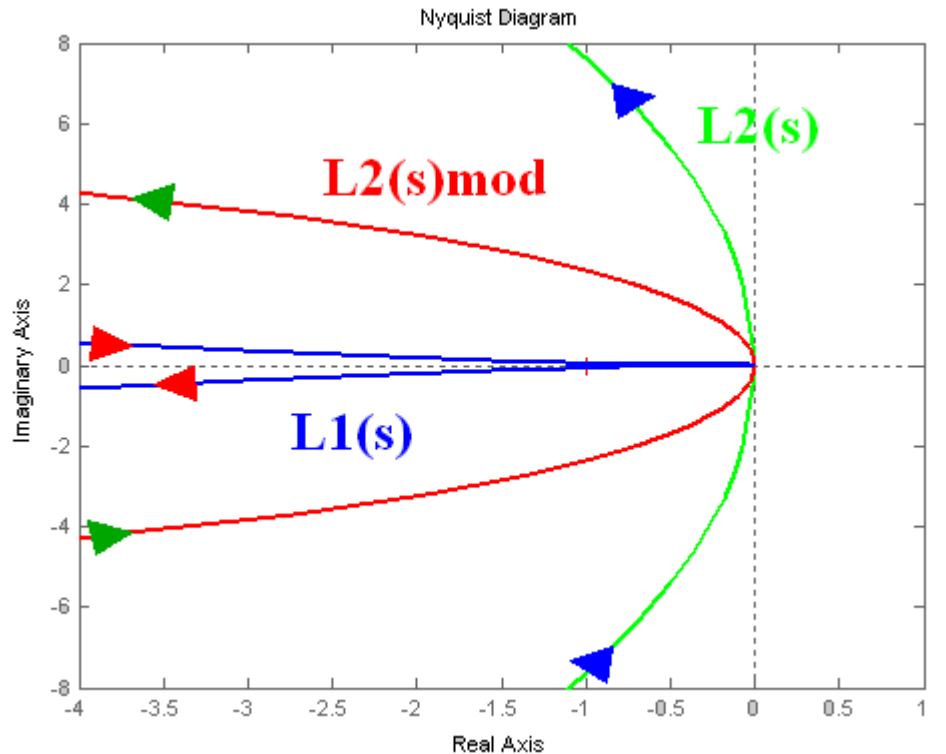
$$L_2(s) = \frac{10^5 \left(\frac{s}{10} + 1\right)^2}{(s+1)^3}$$

$L_2(s)$ ha lo stesso guadagno in continua di $L_1(s)$ e gli stessi poli, ma presenta uno zero di molteplicità doppia per $s=-10$. Nel grafico successivo sono rappresentati i diagrammi polari di $L_1(j\omega)$ (curva blu) ed $L_2(j\omega)$ (curva verde). Viene anche raffigurato (curva rossa) il diagramma polare per una funzione

uguale ad $L_2(j\omega)$ ma con un guadagno ridotto di un fattore 10 (10^4 invece di 10^5).

Anche in questo caso conviene ingrandire la parte centrale del grafico.



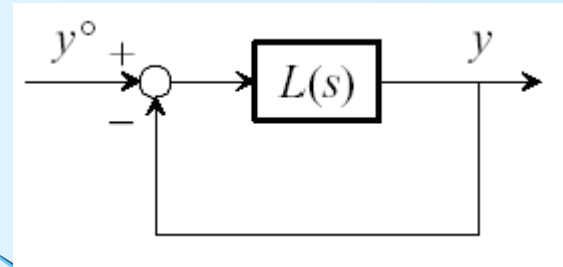


In questo caso possiamo vedere che il sistema rappresentato da $L_1(s)$ è instabile perché circonda il punto critico (come abbiamo visto precedentemente) mentre quello rappresentato da $L_2(s)$ è stabile perché non lo circonda. Un modo semplice per capire se un diagramma polare

circonda o meno il punto critico consiste nel percorrere la curva da $-\infty$ a $+\infty$; se il punto critico si trova sempre alla sinistra della curva allora il sistema è stabile, se si trova alla destra è instabile. È anche interessante notare come cambiando il guadagno in continua (cioè la costante moltiplicativa) di $L_2(s)$ si può passare da una situazione stabile (curva verde) ad una instabile (curva rossa).

Il criterio di Bode

Consideriamo un sistema di controllo retroazionato in forma canonica:



Introduciamo le seguenti *ipotesi* sulla funzione di trasferimento d'anello $L(s)$:

1. $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva.
2. Il diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$ interseca l'asse a 0 dB una e una sola volta.

Diamo le seguenti *definizioni*:

Pulsazione critica ω_c : pulsazione alla quale il diagramma di $|L(j\omega)|_{\text{dB}}$ taglia l'asse a 0 dB, ossia: $|L(j\omega_c)|=1$;

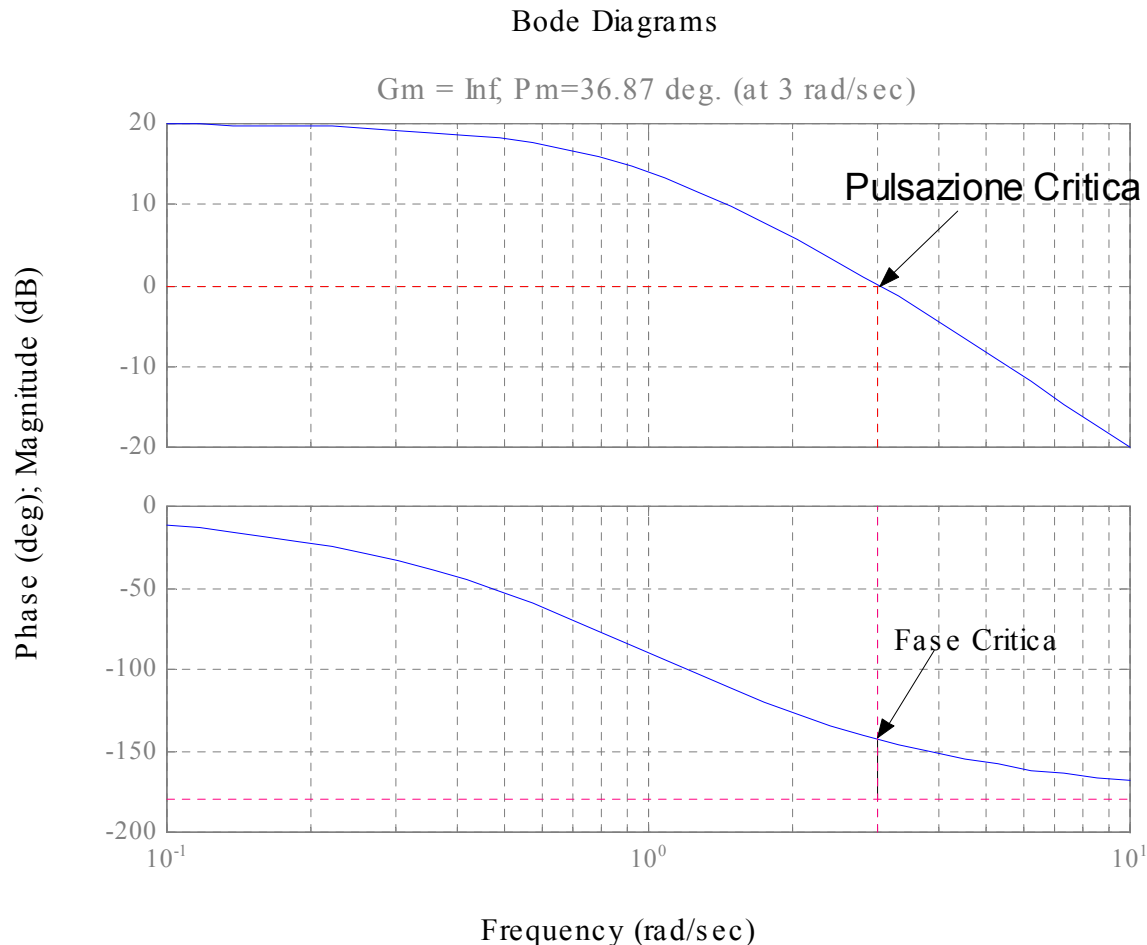
Fase critica ϕ_c : fase di $L(j\omega)$ in corrispondenza della pulsazione critica $\phi_c = \angle L(j\omega_c)$;

Margine di fase ϕ_m : differenza tra 180° e la fase critica, presa in modulo, ossia $\phi_m = 180^\circ - |\phi_c|$;

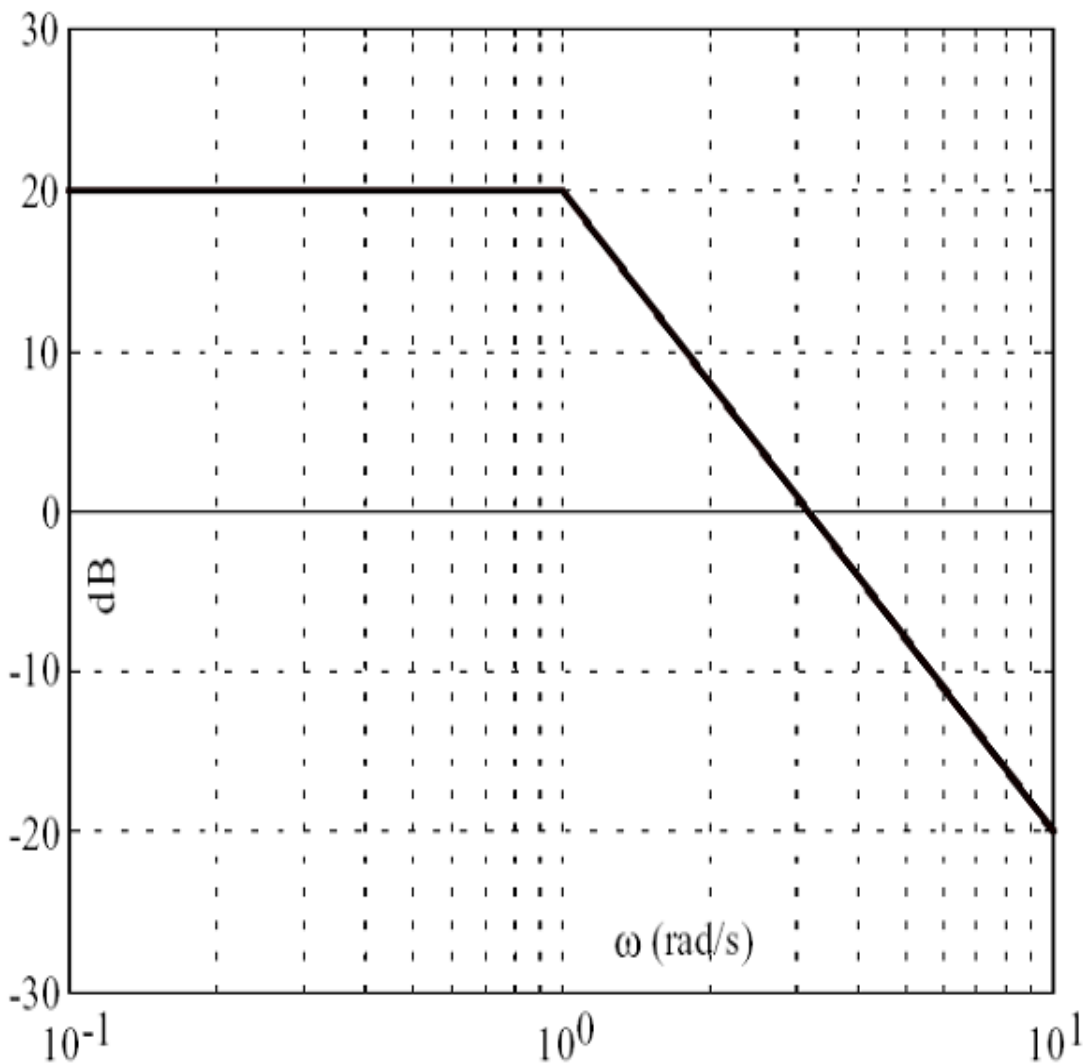
Guadagno d'anello K_L : guadagno (generalizzato) di $L(s)$.

Il **criterio di Bode** afferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile **se e solo se** il guadagno d'anello ed il margine di fase sono entrambi positivi: $\begin{cases} \mathbf{K_L} > 0 \\ \phi_m > 0 \end{cases}$

Esempio:
$$\mathbf{L(s)} = \frac{10}{(1 + s)^2}$$



Il diagramma di Bode asintotico del modulo di L è riportato in figura:



La pulsazione critica vale $\omega_c \approx 3$ rad/s. La fase critica può essere calcolata analiticamente.

$\phi_c = -2 \arctan(3) = -2 \times 72^\circ = -144^\circ$. Il margine di fase è quindi:

$$\phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = 36^\circ > 0$$

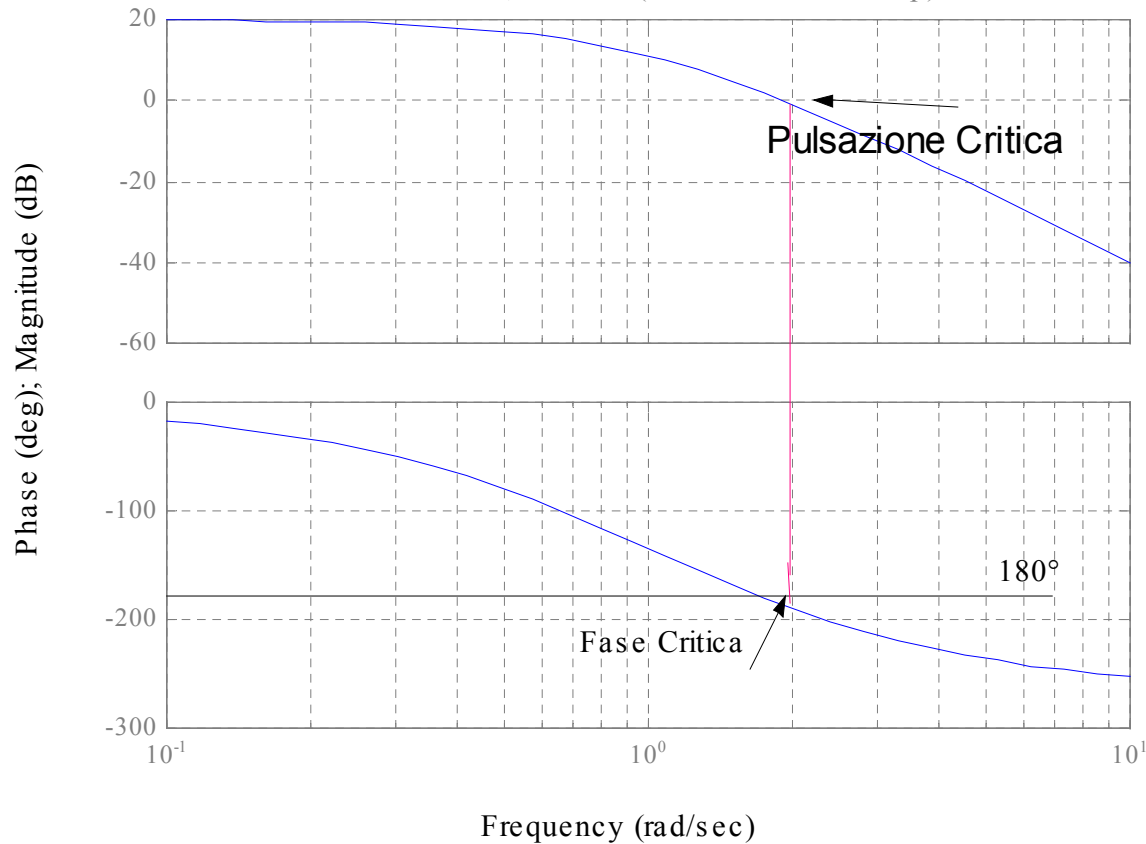
Poiché anche il guadagno d'anello (pari a 10) è positivo, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, coerentemente con quanto determinato con il criterio di Nyquist.

Se invece: $L(s) = \frac{10}{(1+s)^3}$

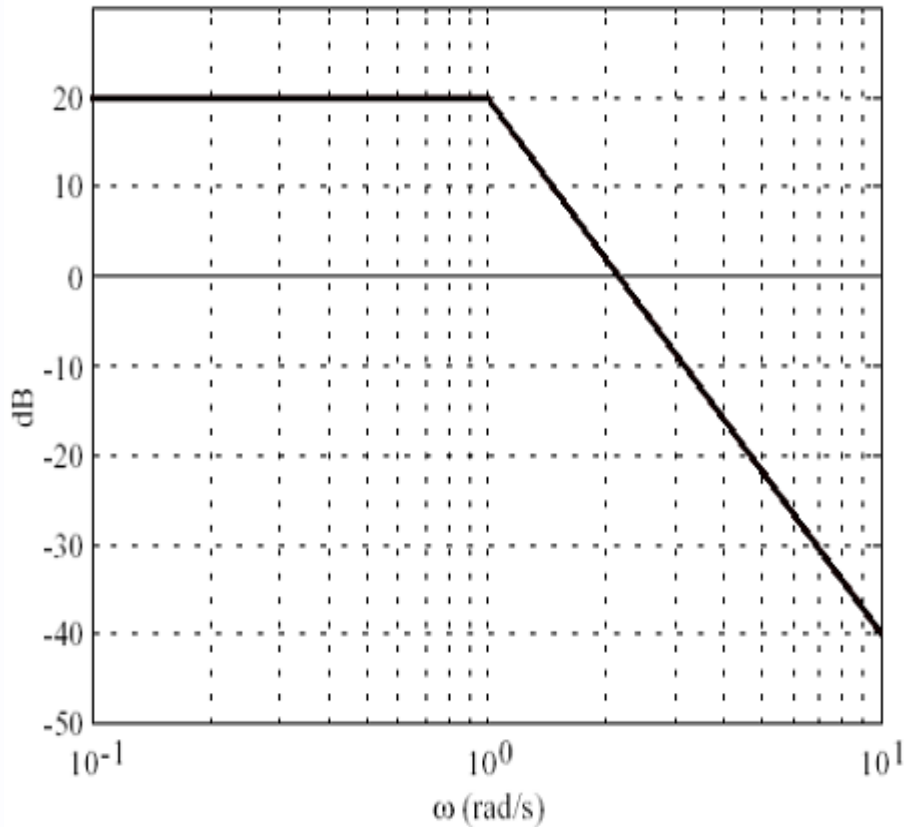
```
num=10;  
den=conv(conv([1 1],[1 1]),[1 1]);  
sys=tf(num,den); margin(sys)
```

Bode Diagrams

Gm = 0 dB, Pm = 0 (unstable closed loop)



il diagramma asintotico del modulo di L è il seguente:



La pulsazione critica vale $\omega_c \approx 2$ rad/s. La fase critica può essere calcolata analiticamente.

$$\phi_c = -3 \arctan(2) = -3 \times 64^\circ = -192^\circ.$$

Il margine di fase è quindi:

$$\phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = -12^\circ < 0$$

Pertanto il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile, coerentemente con quanto determinato con il criterio di Nyquist.

Osservazioni sul criterio di Bode

1) Giustificazione

Il criterio di Bode è un caso particolare del criterio di Nyquist: non è infatti difficile verificare che nelle condizioni di applicabilità del criterio di Bode (che corrispondono a $P_d = 0$), le condizioni sul guadagno d'anello e sul margine di fase espresse dal criterio equivalgono a garantire l'assenza di giri del diagramma di Nyquist intorno al punto -1 ($N = 0$). Rispetto al criterio di Nyquist, il criterio di Bode ha il vantaggio di richiedere il tracciamento dei diagrammi di Bode, di norma più agevole del tracciamento del diagramma di Nyquist.

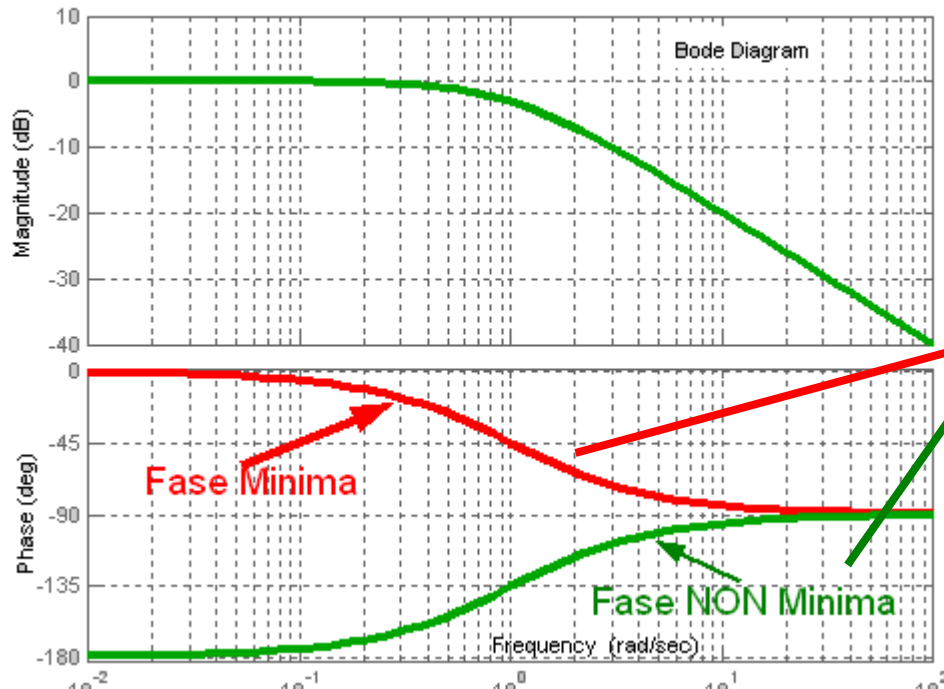
2) Uso dei diagrammi asintotici

La pulsazione critica può essere stimata con buona precisione utilizzando il diagramma di Bode asintotico del modulo, a patto che non vi siano cambiamenti di pendenza nelle vicinanze della pulsazione critica stessa. Occorre quindi tenere presente che più vicini alla pulsazione critica sono i cambiamenti di pendenza, più inaccurata sarà la stima della pulsazione critica.

Inoltre gli eventuali poli o zeri complessi e coniugati devono essere ad alto smorzamento, altrimenti i diagrammi asintotici possono scostarsi sensibilmente da quelli reali.

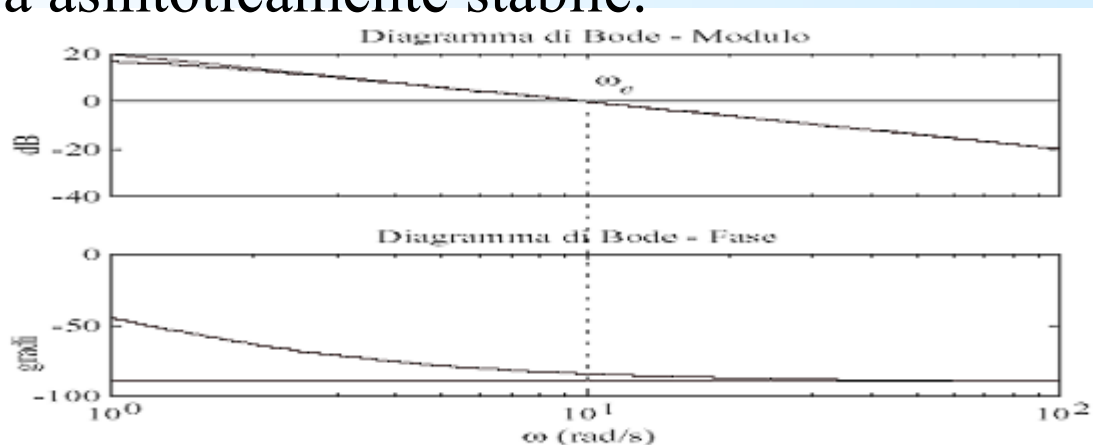
3) Sistemi a fase minima

Un sistema dinamico si dice a **fase minima** se ha guadagno positivo e tutte le singularità (poli e zeri) sono nel semipiano sinistro chiuso del piano complesso. Tale dizione deriva dal fatto che, se si tracciano i diagrammi di Bode della fase di tutte le funzioni di trasferimento a guadagno positivo e con poli nel semipiano sinistro chiuso, aventi lo stesso diagramma del modulo della funzione di trasferimento a fase minima, in quella a fase minima la fase si trova, per ciascuna pulsazione, ad un valore di ordinata superiore (e quindi, se le fasi come spesso avviene sono negative, la fase è più piccola in modulo).



$$\frac{1}{s-1} \quad \frac{1}{s+1}$$

Per un sistema a fase minima, ad ogni polo corrisponde un decremento unitario della pendenza del diagramma del modulo ed un decremento di 90° del valore della fase, e viceversa per gli zeri. Ne consegue che il diagramma asintotico della fase si può immediatamente ottenere da quello del modulo, semplicemente moltiplicandone in ogni tratto la pendenza per 90° . Se allora il diagramma asintotico del modulo, in corrispondenza al **taglio** dell'asse a 0 dB ha **pendenza -1** , e non vi sono cambiamenti di pendenza nelle immediate vicinanze della pulsazione critica, allora la fase critica sarà prossima al valore asintotico (-90°). Ne consegue che il sistema in anello chiuso, essendo il margine di fase ampiamente positivo, sarà asintoticamente stabile.



Taglio dell'asse a 0 dB con pendenza -1 per un sistema a fase minima

4) Sistemi con ritardo

Un sistema in cui ad ogni istante l'uscita ha il valore assunto dall'ingresso τ istanti prima: $y(t)=u(t-\tau)$ prende il nome di **ritardo** (si ricordi l'esempio del nastro trasportatore).

Trasformando secondo Laplace entrambi i membri dell'equazione si ha: $Y(s)=e^{-s\tau}U(s)$ per cui la **funzione di trasferimento** del ritardo è la seguente: $G(s)=e^{-s\tau}$. La **risposta in frequenza** associata a questa funzione di trasferimento è quindi:

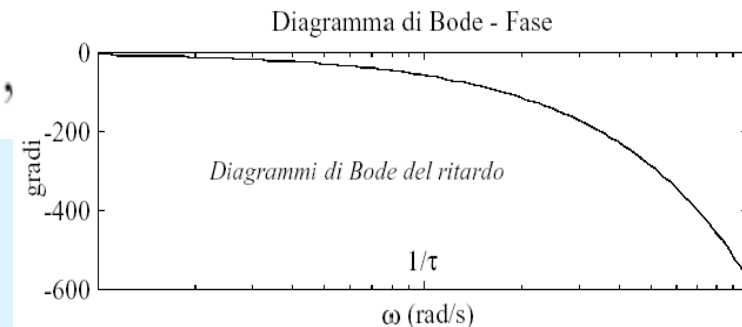
$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j \sin(\omega\tau).$$

Poiché risulta:

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega\tau}| = \sqrt{\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)} = 1,$$

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega\tau} = \arctan\left(-\sin(\omega\tau)/\cos(\omega\tau)\right) = -\omega\tau,$$

il diagramma di Bode del modulo coincide con l'asse a 0 dB, mentre la fase decresce linearmente con ω (sulla scala logaritmica si ha una curva monotona decrescente).



E' poi molto comune il caso in cui la funzione di trasferimento d'anello sia il prodotto di una funzione di trasferimento razionale $L_r(s)$ e della funzione di trasferimento del ritardo: $\mathbf{L}(s) = \mathbf{L}_r(s)e^{-s\tau}$. Si dimostra che, se il criterio di Bode è applicabile per la funzione di trasferimento $L_r(s)$ (cioè se tale funzione di trasferimento ne rispetta le ipotesi), allora rimane applicabile anche per la funzione di trasferimento $L(s)$. Osservando poi che risulta:

$$\left|L(j\omega)\right| = \left|L_r(j\omega)e^{-j\omega\tau}\right| = \left|L_r(j\omega)\right| \left|e^{-j\omega\tau}\right| = \left|L_r(j\omega)\right| ,$$

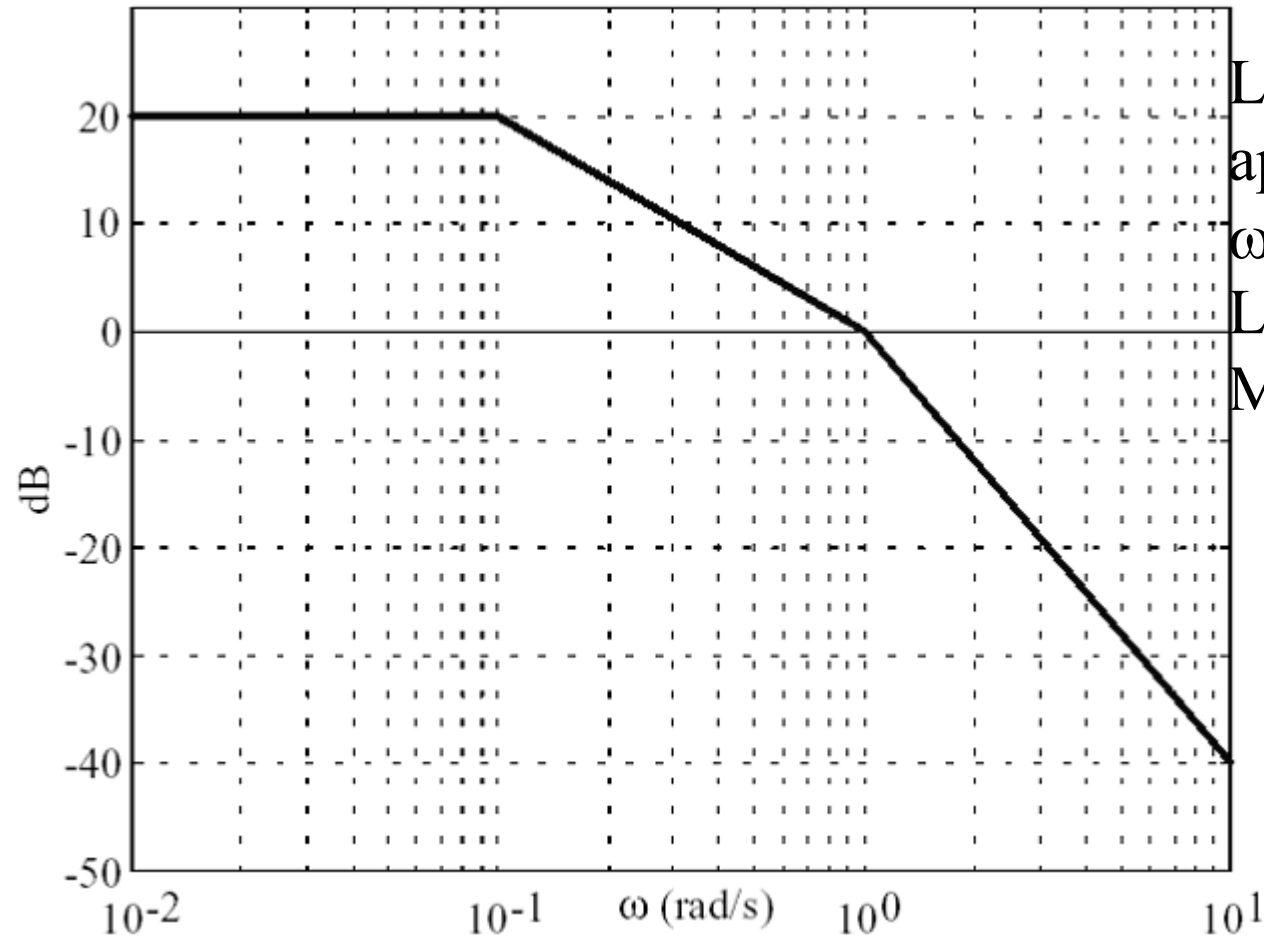
$$\angle L(j\omega) = \angle \left(L_r(j\omega)e^{-j\omega\tau} \right) = \angle L_r(j\omega) + \angle e^{-j\omega\tau} = \angle L_r(j\omega) - \omega\tau ,$$

si conclude che la presenza del ritardo non altera il diagramma di Bode del modulo, per cui la pulsazione critica si può ricavare direttamente dall'analisi della funzione di trasferimento priva di ritardo. Per quanto riguarda la fase critica, al termine dovuto alla parte razionale della funzione di trasferimento occorrerà sommare un termine pari a: $-\omega_c\tau \frac{180^\circ}{\pi}$. espresso in gradi

Esempio

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+10s)} e^{-s\tau}, \tau > 0$$

Il diagramma di Bode del modulo è riportato in figura.



La pulsazione critica vale approssimativamente $\omega_c = 1$ rad/s. Calcoliamo la fase critica ed il Margine di fase.



La fase critica risulta:

$$\varphi_c = -\arctan\left(\frac{1}{0.1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{1}\right) - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} \approx -84^\circ - 45^\circ - 57^\circ \tau = -129^\circ - 57^\circ \tau$$

Il margine di fase vale quindi:

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 180^\circ - |-129^\circ - 57^\circ \tau| = 180^\circ - (129^\circ + 57^\circ \tau) = 51^\circ - 57^\circ \tau$$

Pertanto se, per esempio, $\tau = 0.1$, il margine di fase è positivo ed il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile; se $\tau = 2$, il margine di fase è negativo ed il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile.

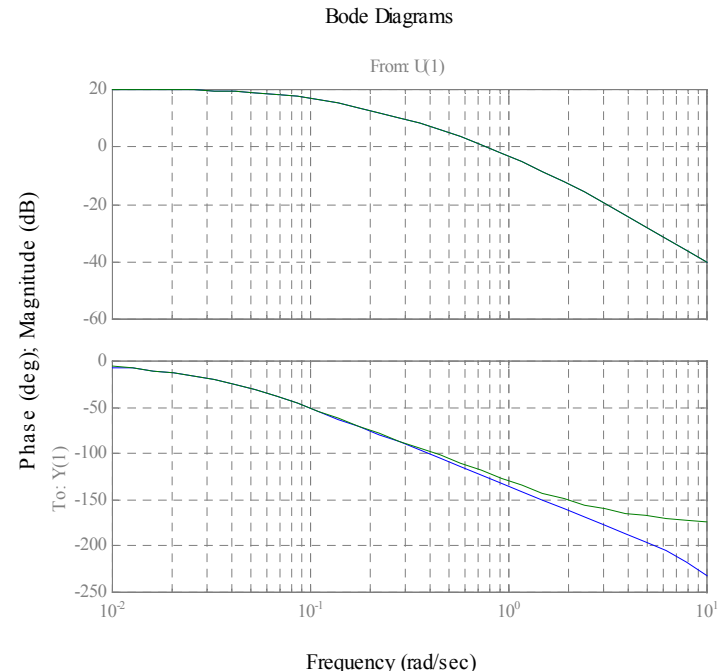
Calcolo con Matlab

```
» num=10; den=conv([1 1],[10 1]);
```

```
» s1=tf(num,den,'InputDelay',0.1)
```

Transfer function:

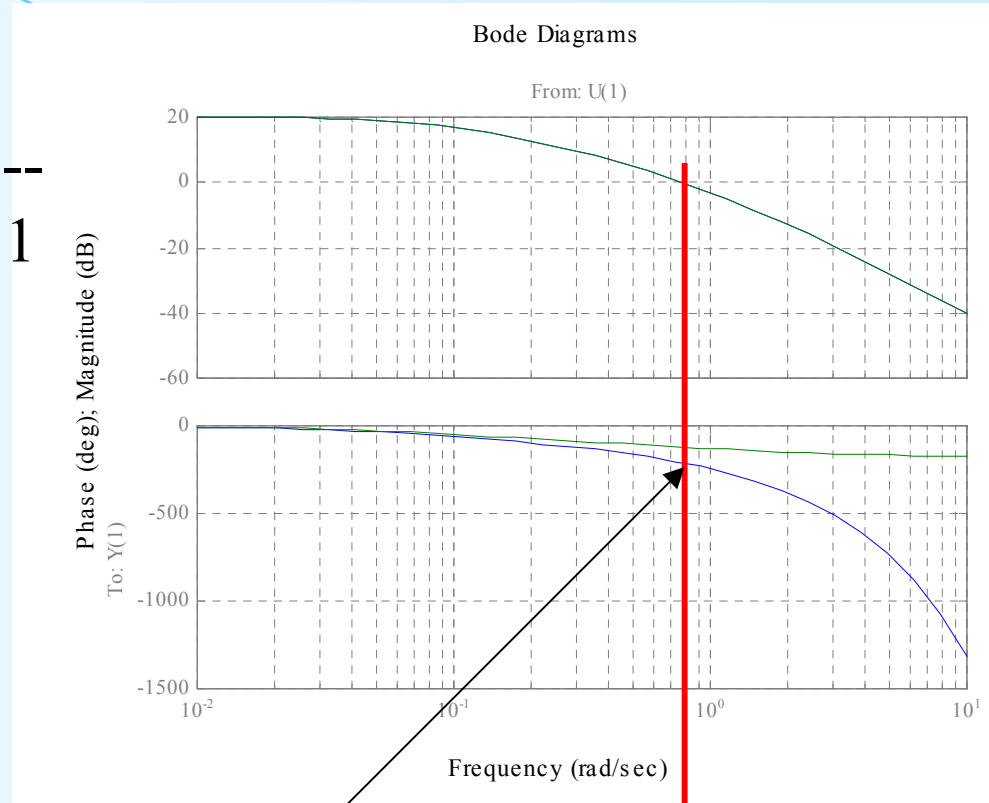
$$\exp(-0.1*s) * \frac{10}{10 s^2 + 11 s + 1}$$



» s2=tf(num,den,'InputDelay',2)

Transfer function:

$$\exp(-2*s) * \frac{10}{10 s^2 + 11 s + 1}$$



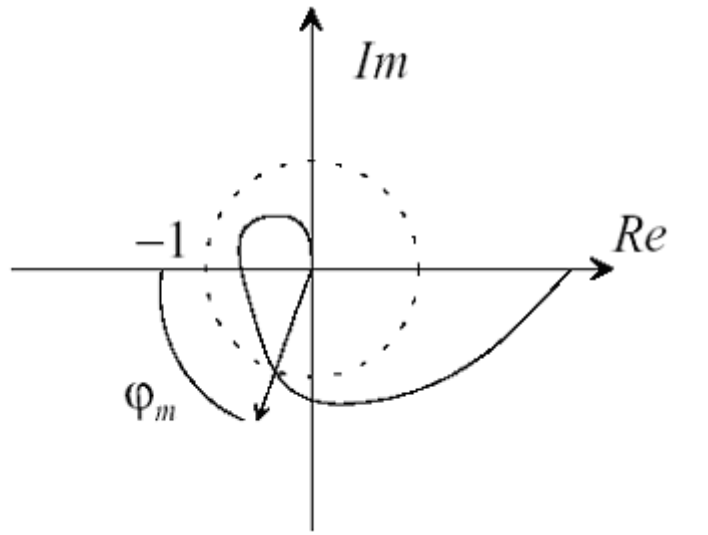
> -180°

Margine di guadagno

Il margine di fase, oltre a dare un'indicazione binaria sull'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso, quantifica anche la **robustezza della stabilità**, ossia il margine di sicurezza con cui possiamo tollerare incertezze sul modello senza compromettere l'asintotica stabilità.

Più alto è il margine di fase, più robusto è il sistema. Vi sono tuttavia casi in cui il margine di fase non costituisce un indicatore attendibile, come riportato nell'esempio in figura:

Diagramma polare di L ad alto margine di fase ma bassa robustezza



Pur essendo il margine di fase elevato, il diagramma polare passa molto vicino al punto -1 , rendendo il sistema scarsamente robusto a fronte di incertezze di modello.

Un indicatore da usare in congiunzione con il margine di fase è il margine di guadagno. Sempre nell'ipotesi $P_d=0$, si supponga che il diagramma polare di L attraversi il semiasse reale negativo in uno e un solo punto:

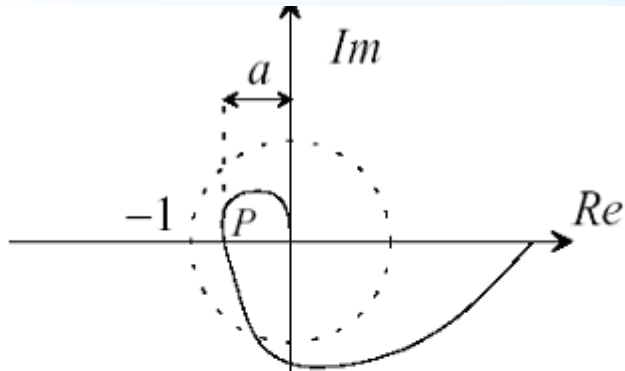


Diagramma polare di L con indicazione del punto P dall'origine

Un indice di robustezza è la distanza del punto P di intersezione dal punto -1 , ovvero la vicinanza del punto P all'origine. Detta allora a la distanza del punto dall'origine, definiamo **margine di guadagno** la quantità:

$$k_m = \frac{1}{a} = \frac{1}{\left|L(j\omega_p)\right|}, \quad \text{con } \angle L(j\omega_p) = -180^\circ.$$

Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se $k_m > 1$, ed è tanto più robusto quanto maggiore è k_m .

Esempio

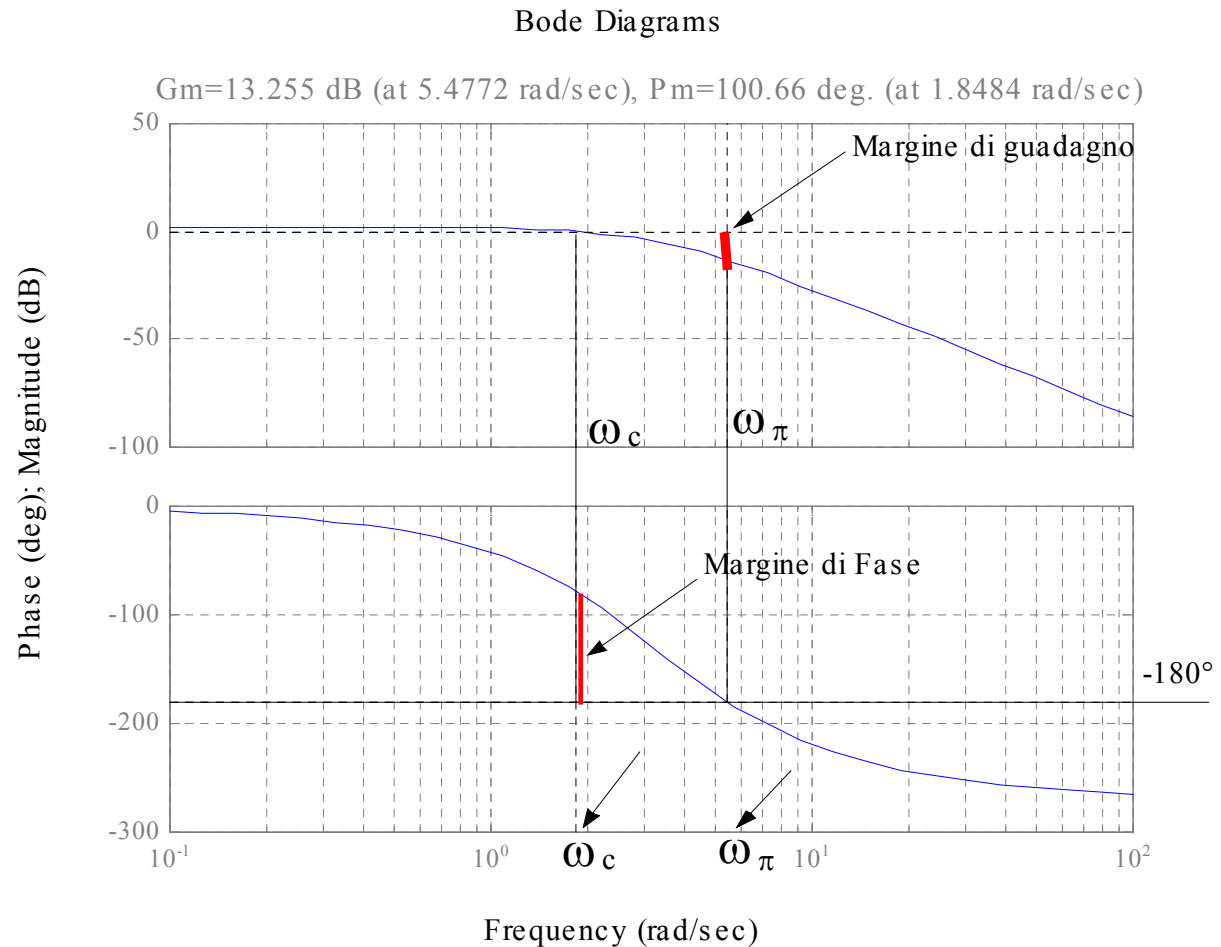
```
» s1=tf(50,[1 9 30 40])
```

Transfer function:

$$50 / (s^3 + 9s^2 + 30s + 40)$$

```
» dcgain(s1)
```

```
ans = 1.2500
```



Cambiamo il guadagno di un fattore 100

» `s1=tf(100*50,[1 9 30 40])`

Transfer function:

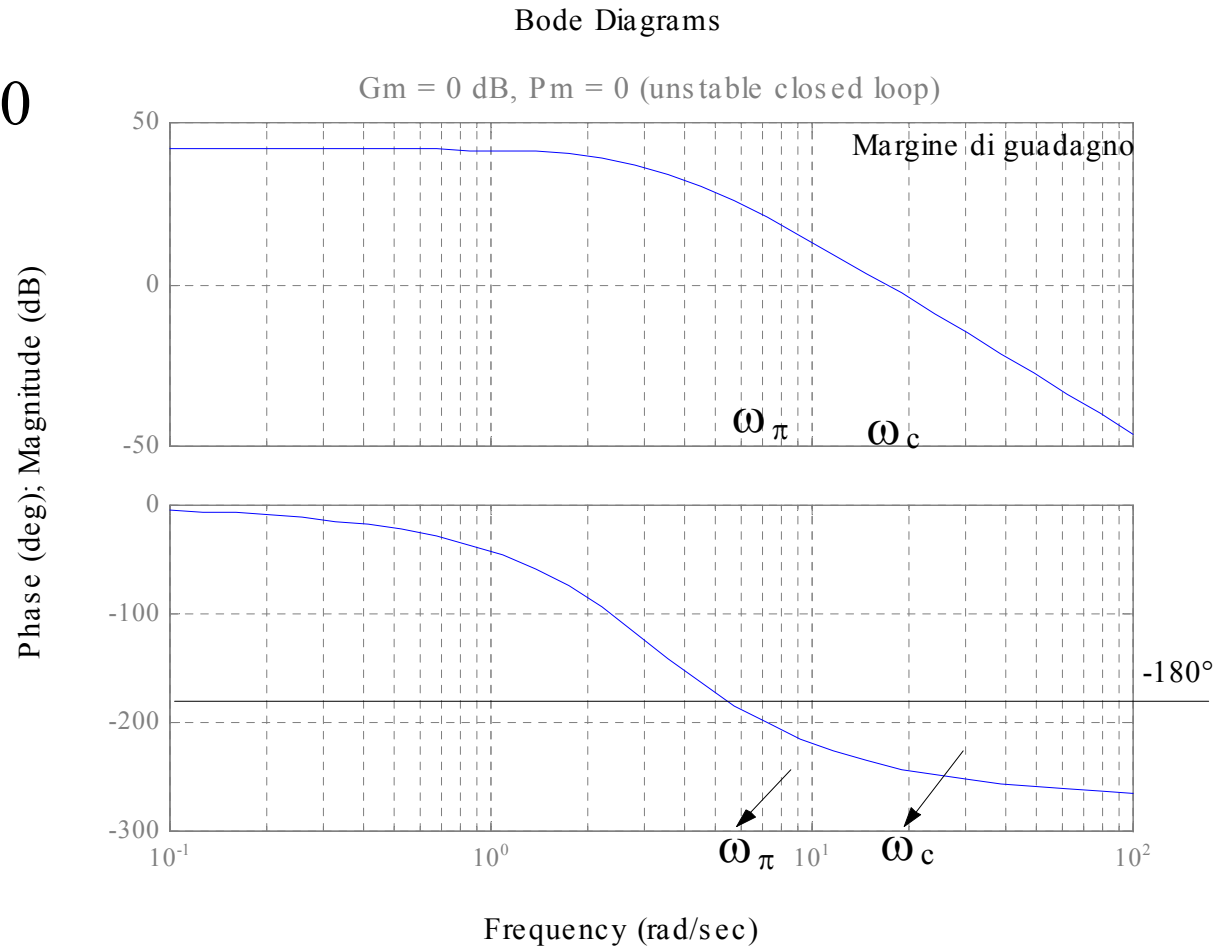
5000

 $s^3 + 9s^2 + 30s + 40$

» `dcgain(s1)`

ans = 125

» `margin(s1)`



Tutto questo e' confermato dall'analisi di Nyquist

» `s2=tf(100*50,[1 9 30 40])`

Transfer function:

5000

 $s^3 + 9 s^2 + 30 s + 40$

» `nyquist(s2)`

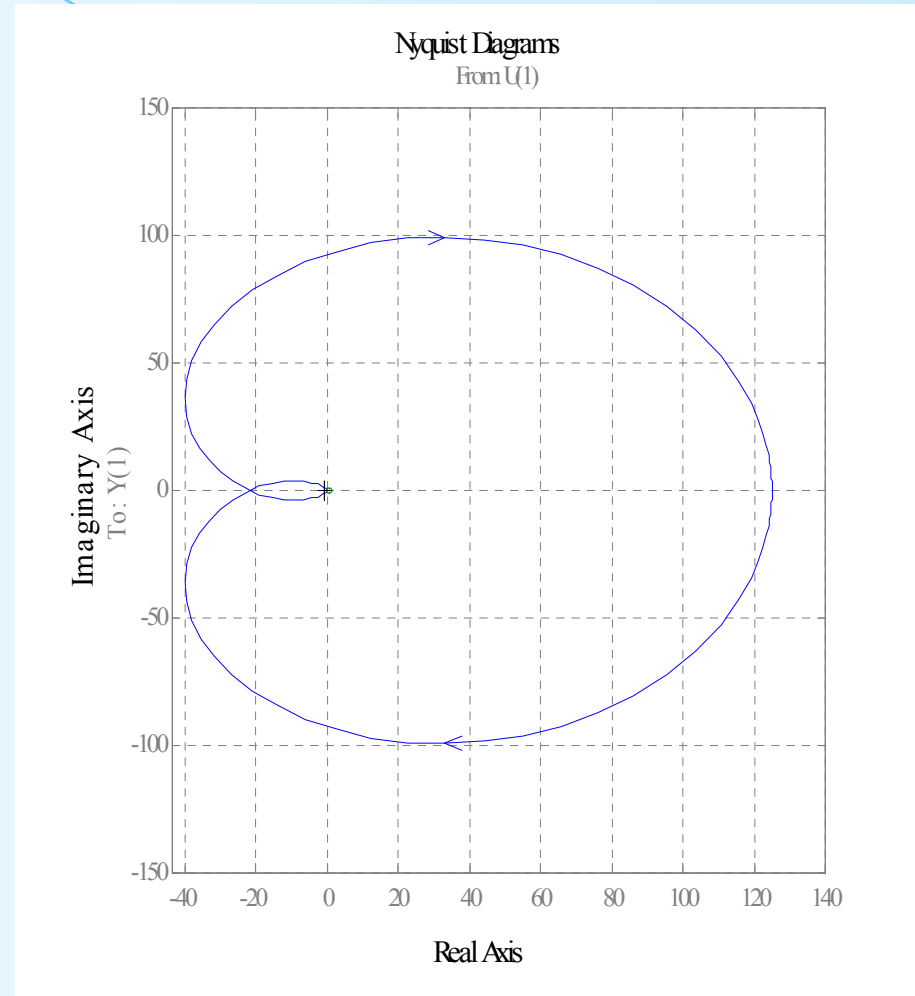
» hold on

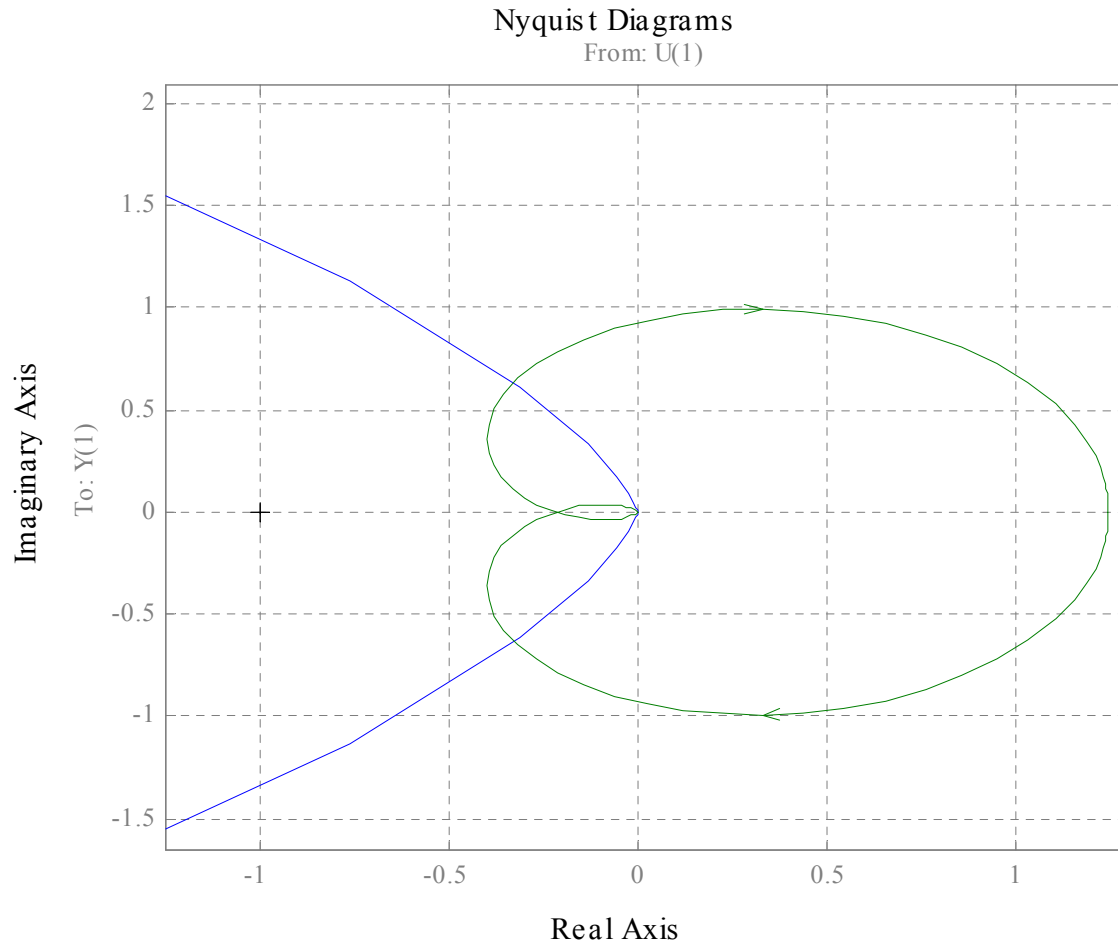
» `s1=tf(50,[1 9 30 40])`

$50/(s^3 + 9 s^2 + 30 s + 40)$

» `nyquist(s1)`

Occorre ingrandire la figura per vedere attorno a -1 come stanno le cose:





Per il diagramma blu il guadagno in continua e' di 125, per il diagramma in verde il guadagno in continua e' di 1.25 a parita' di funzione di trasferimento si vede che variando il guadagno si puo' portare il sistema all'instabilita'.