

# Prestazioni dinamiche dei sistemi di controllo

## *Caratterizzazione delle prestazioni dinamiche*

Le prestazioni dinamiche fanno riferimento al comportamento del sistema di controllo durante i transitori, ossia alla modalità con cui le variabili del sistema, ed in particolare la variabile controllata, passano da una condizione di regime ad una nuova, a seguito di variazioni degli ingressi. Sono di particolare importanza, a questo riguardo:

- la **velocità di risposta**, ovvero la rapidità con cui la variabile controllata segue brusche variazioni (per esempio a scalino) del riferimento;
- lo **smorzamento dei transitori**, ovvero l'assenza o l'irrilevanza di oscillazioni nel transitorio.

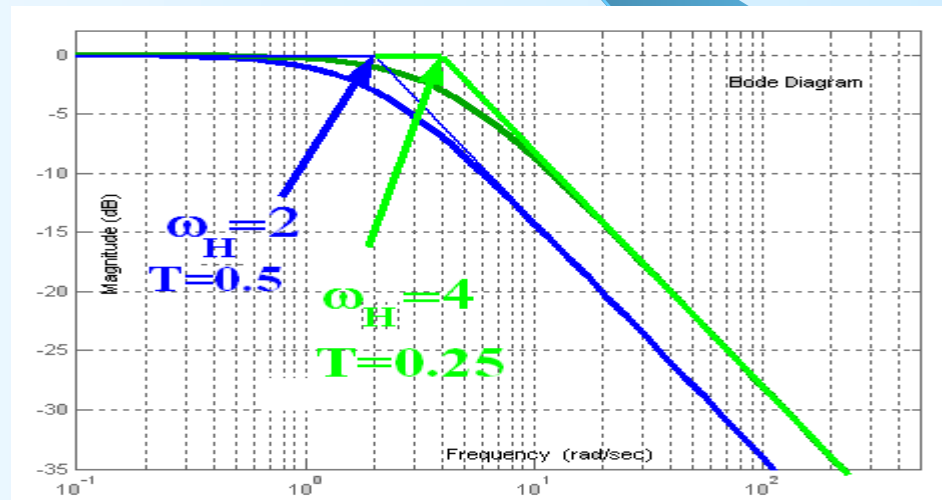
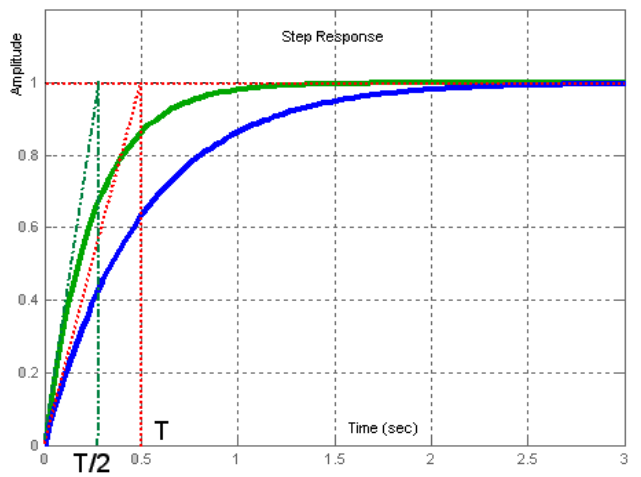
Con riferimento ai parametri con cui si era caratterizzata la risposta allo scalino di un sistema dinamico, potremo dire che la velocità di risposta corrisponde ad avere un tempo di salita della risposta allo scalino ridotto mentre lo smorzamento dei transitori corrisponde a sovra elongazione massima e tempo di assestamento contenuti.

Rientrano inoltre nel novero delle prestazioni dinamiche anche la reiezione dei disturbi, siano essi sulla linea di andata o su quella di retroazione, e la moderazione del controllo, ossia la proprietà del sistema di controllo per cui la variabile di controllo non è sottoposta ad eccessive sollecitazioni.

### Banda passante

$$H(s) = \frac{1}{1 + sT} \quad T > 0$$

Si consideri un sistema a costante di tempo:



La risposta allo scalino del sistema è tanto più rapida quanto minore è la costante di tempo  $T$ . Se  $\omega_H = 1/T$  è la pulsazione del polo, si vede che la risposta è tanto più veloce quanto più in alta frequenza è la pulsazione del polo: **essa è un buon indice della velocità di risposta del sistema**

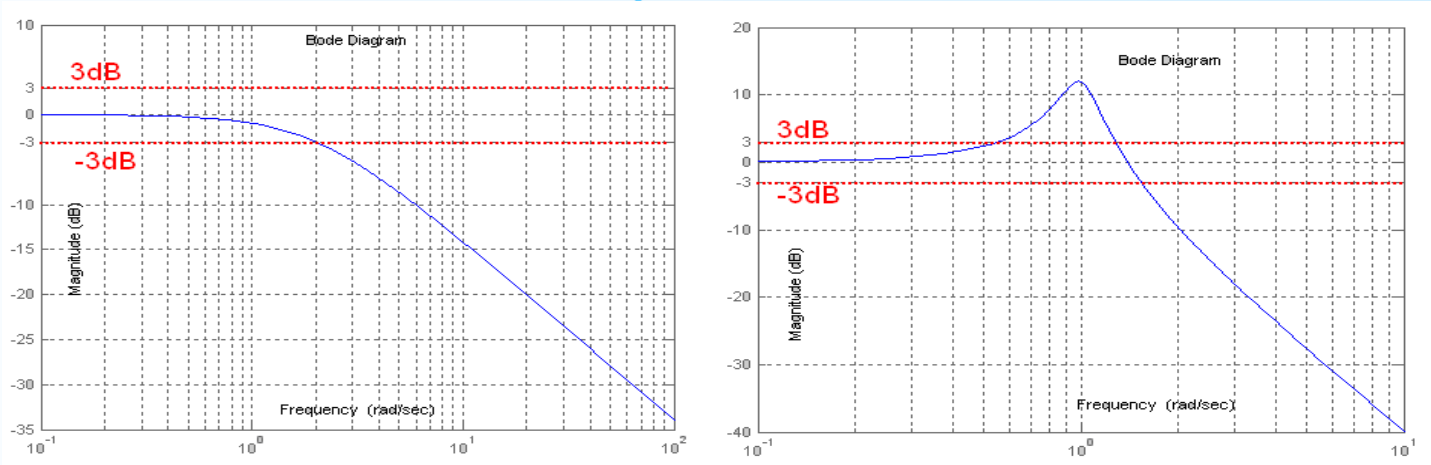
Si consideri ora un sistema di controllo in anello chiuso, ed in particolare la funzione di trasferimento dal riferimento  $y^\circ$  alla variabile controllata  $y$ :

$$\frac{Y(s)}{Y^\circ(s)} = F(s)$$

In virtù dell'imposizione dei requisiti statici,  $F(s)$  varrà 1, o comunque un valore prossimo a 1, in bassa frequenza (cioè per  $s \rightarrow 0$ ). Inoltre il sistema di controllo sarà progettato in modo tale che la sua funzione di trasferimento rifletta la caratteristica, propria dei sistemi fisici, di avere più poli che zeri. Da queste considerazioni si ottengono le due caratteristiche fondamentali del diagramma di Bode del modulo di  $F$ :

- Per  $\omega \Rightarrow 0, |F(j\omega)|_{dB} \approx 0$
- Per  $\omega \Rightarrow \infty, |F(j\omega)|_{dB} \Rightarrow \infty$

Andamenti plausibili del modulo di  $F$  potranno pertanto essere quelli riportati in figura:



Se il diagramma di Bode del modulo di  $F$  non supera per nessuna pulsazione il valore 3 dB, si definisce **banda passante** del sistema di controllo l'insieme delle pulsazioni  $[0, \omega_b]$ , essendo  $\omega_b$  la pulsazione alla quale il modulo vale -3 dB.

Si osservi che la condizione espressa preliminarmente alla definizione di banda passante esclude la presenza di rilevanti picchi o rigonfiamenti nel diagramma del modulo, e quindi le situazioni rappresentate dal diagramma di destra. In altre parole il sistema di controllo si comporta da **filtro passabasso**.

Se la pendenza del diagramma di  $|F|_{dB}$  dopo la pulsazione  $\omega_b$  vale  $-1$ , il sistema di controllo si comporta in prima approssimazione come un **sistema del primo ordine**, con pulsazione del polo pari a  $\omega_b$ . Ne consegue che i transitori del sistema in anello chiuso saranno caratterizzati da una costante di tempo approssimativamente pari a:

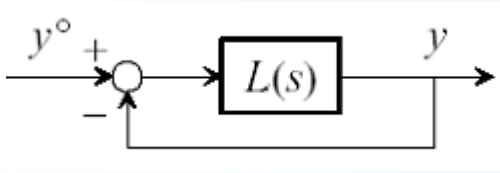
$$\tau = \frac{1}{\omega_b}$$

Il sistema sarà quindi tanto più veloce quanto più estesa è la sua banda passante, ossia l'estremo superiore della banda passante è un buon indice della **velocità di risposta** del sistema di controllo.

## Velocità di risposta e pulsazione critica

Ci si pone ora l'obiettivo di individuare un indice di velocità di risposta legato alla funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$ , piuttosto che alla funzione di trasferimento in anello chiuso  $F(s)$ . Ricordiamo che risulta:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{Y}^\circ(s)} = \frac{\mathbf{L}(s)}{1 + \mathbf{L}(s)} \xrightarrow{s=j\omega} \mathbf{F}(j\omega) = \frac{\mathbf{L}(j\omega)}{1 + \mathbf{L}(j\omega)}$$



$$|\mathbf{F}(j\omega)| = \frac{|\mathbf{L}(j\omega)|}{|1 + \mathbf{L}(j\omega)|}$$

Consideriamo la seguente **approssimazione**:

$$|\mathbf{F}(j\omega)| = \frac{|\mathbf{L}(j\omega)|}{|1 + \mathbf{L}(j\omega)|} \approx \begin{cases} 1 & \forall \omega : |\mathbf{L}(j\omega)| \gg 1 \\ |\mathbf{L}(j\omega)| & \forall \omega : |\mathbf{L}(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

Tracciato il diagramma di  $|L|$ , l'approssimazione consiste nell'attribuire a  $|F|$  il valore 1 per quelle pulsazioni per cui  $|L|$  è decisamente sopra l'asse a 0 dB, o il valore di  $|L|$  quando  $|L|$  è decisamente sotto l'asse a 0 dB.

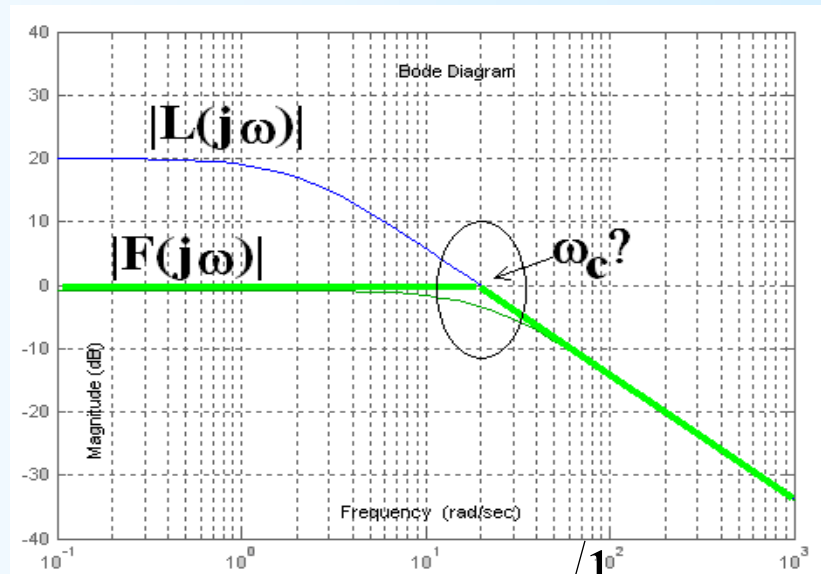
Poniamoci ora nelle ipotesi di **applicabilità del criterio di Bode**.

1.  $L(s)$  non ha poli a parte reale positiva.
2. Il diagramma di Bode del modulo di  $L(j\omega)$  interseca l'asse a 0 dB

**criterio di Bode** :in anello chiuso il sistema è asintoticamente stabile se e solo se il guadagno d'anello ed il margine di fase sono entrambi positivi:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_L > 0 \\ \phi_m > 0 \end{cases}$$

Considerando un tipico andamento di  $|L|$ , si avrà la situazione riportata in Figura



L' approssimazione consiste allora nel porre:

$$|F(j\omega)| \approx \begin{cases} 1 & \forall \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)| & \forall \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

L'approssimazione è evidentemente migliore a pulsazioni lontane dalla pulsazione critica  $\omega_c$ . Possiamo quindi concludere che  $F$  si comporta da filtro passa basso a guadagno unitario, ma non siamo ancora in grado di dire se presenta risonanza (ossia se il modulo di  $F$  presenta rigonfiamenti). Di conseguenza non è ancora chiaro se sia più opportuno approssimare  $F$  con un sistema del primo ordine o con uno del second'ordine a poli complessi.

### Smorzamento e margine di fase

Il calcolo esatto del modulo di  $F$  per  $\omega = \omega_c$  conduce al seguente risultato:

$$\begin{aligned}
 |F(j\omega_c)| &= \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{|1 + \cos \varphi_c + j \sin \varphi_c|} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi_c + 2 \cos \varphi_c + \sin^2 \varphi_c}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi_c)}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2[1 + \cos(180 - \varphi_m)]}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_m)}} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

$$|\mathbf{F}(j\omega_c)| = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)} \quad \text{Ricordando che e' } \varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|.$$

In particolare, per  $\varphi_m = 90^\circ$ , risulta:  $|\mathbf{F}(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\mathbf{F}(j\omega_c)|_{\text{dB}} = -3$   
 per cui  $\omega_c = \omega_b$ , ossia la **pulsazione critica** coincide con  
**l'estremo superiore della banda passante.**

Peraltro per valori inferiori a  $90^\circ$  del margine di fase, ma comunque elevati, il modulo di  $F$  in  $\omega_c$  rimane prossimo al valore già ottenuto: in particolare rimane inferiore a 1 per valori di  $\varphi_m$  superiori a  $60^\circ$ .

Considerando che valori di margine di fase elevato sono di norma associati ad attraversamenti dell'asse delle pulsazioni con pendenza del modulo di  $L$  pari a  $-1$ , possiamo concludere che in questo caso ( $\varphi_m > 60^\circ$ ) è adeguata un'approssimazione di  $F$  con una funzione di trasferimento del primo ordine a **costante di tempo**, con costante di tempo pari all'inverso della pulsazione critica:

Il transitorio quindi si assesterà al 99% del valore di regime dopo un tempo pari a circa  **$4.6/\omega_c$** .

$$|\mathbf{F}(s)| = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}}$$

Per valori inferiori del margine di fase ( $\varphi_m < 60^\circ$ ) appare più adeguata un'approssimazione con un sistema del secondo ordine con **poli complessi coniugati** alla pulsazione  $\omega_c$ : 
$$\mathbf{F}(s) \approx \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\zeta\omega_c s + \omega_c^2}$$

Lo smorzamento si può determinare confrontando il valore assunto in  $\omega_c$  dal modulo della risposta in frequenza dell'approssimante con il valore esatto determinato precedentemente:

$$|\mathbf{F}(j\omega_c)| = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)} \longrightarrow \zeta = \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \approx \frac{\varphi_m}{100}$$

dove l'ultima approssimazione è valida se  $\varphi_m$  è espresso in gradi. Il transitorio quindi si assesterà al 99% del valore di regime dopo un tempo pari a circa **4.6/(\zeta \omega\_c)**.

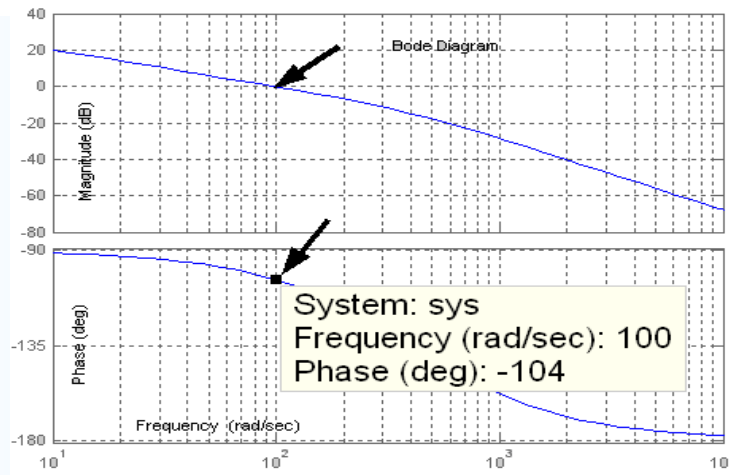
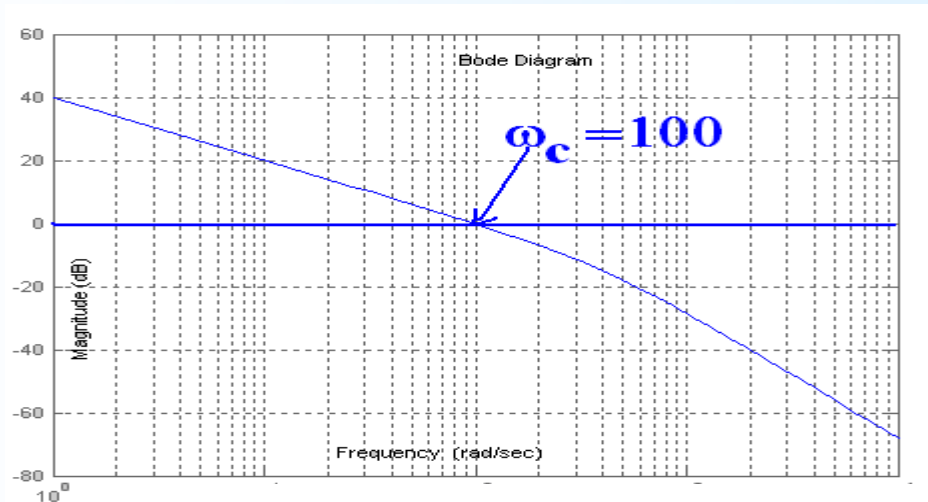
Si osservi che il risultato trovato stabilisce un'importante relazione tra lo smorzamento dei transitori in anello chiuso ed il margine di fase, il quale, quindi, oltre a costituire un indice di robustezza della stabilità, qualifica anche il "grado di stabilità" del sistema.

**Esempio**  $L(s) = \frac{100}{s(1 + 0.0025s)}$

Si vuole tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo

scalino della funzione di trasferimento  $F(s)$ .

Diagramma di Bode di  $|L(j\omega)|$



La pulsazione critica è

$\omega_c = 100$  rad/s, mentre il

margin di fase risulta:

$$\varphi_m = 180 - |\varphi_c| = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$$

$$\varphi_m > 60^\circ$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| =$$

$$180^\circ - \left| -90 - \arctan\left(\frac{100}{400}\right) \right| =$$

$$180^\circ - \left| -90^\circ - 14^\circ \right| = 76^\circ$$

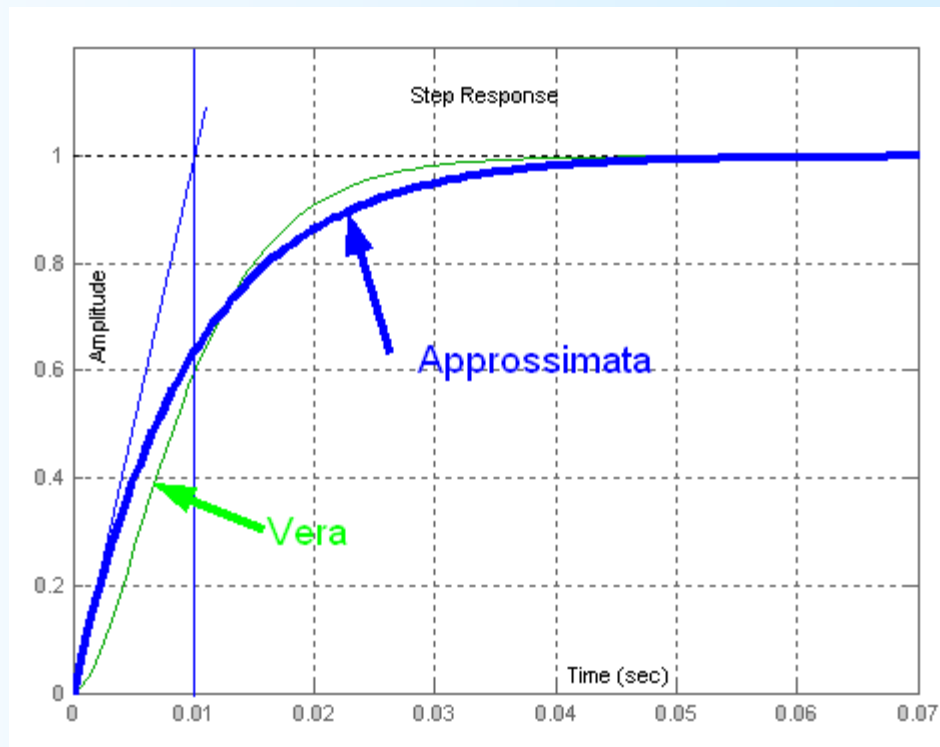
$$\gg ss = 100 / (-0.0025 * 100^2 + 100 * j);$$

$$\gg 180 * \text{angle}(ss) / \pi \rightarrow -104.0362$$

E' quindi possibile procedere all'approssimazione:

$$|F(s)| \approx \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}} = \frac{1}{1 + \frac{s}{100}} = \frac{1}{1 + 0.01s}$$

La risposta allo scalino approssimata di  $F(s)$  è riportata in Figura, dove viene confrontata con la risposta effettiva del sistema di controllo:



## *Larghezza di banda*

La frequenza corrispondente alla larghezza di banda viene definita come la frequenza alla quale la magnitudine della risposta in frequenza **ad anello chiuso** è uguale a  $-3$  dB. Comunque quando si progetta via risposta in frequenza, si è interessati nella previsione del comportamento del sistema a loop chiuso, partendo dalla risposta in frequenza a loop aperto. Per questo si può usare un'approssimazione con un sistema del secondo ordine ipotizzando che la frequenza determinante la larghezza di banda **è equivalente alla frequenza corrispondente ad una magnitudine a cui in anello aperto, corrisponde una risposta dell'ordine di  $-6 \div -7.5$  dB, assumendo che la fase in anello aperto sia compresa tra  $-135^\circ$  e  $-225^\circ$ .**

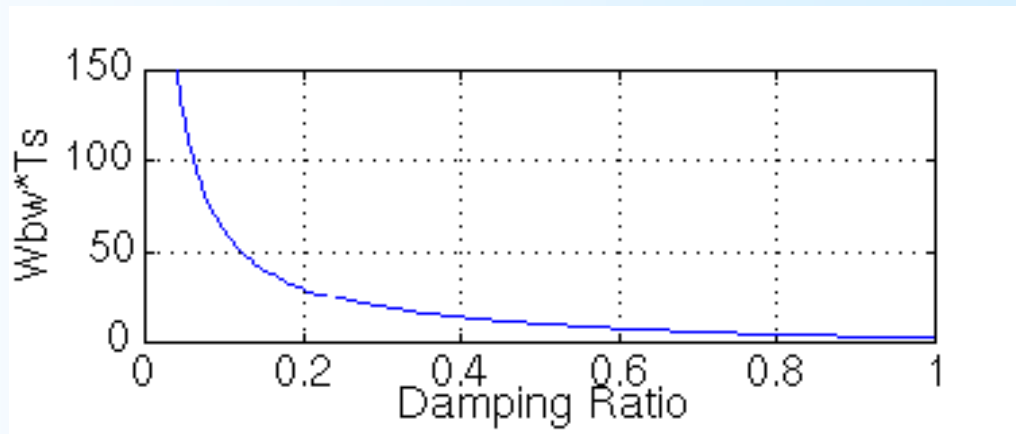
Il formulario per calcolare la larghezza di banda dal fattore di smorzamento e dalla pulsazione naturale a loop chiuso assieme al codice Matlab che permette di fare i conti e' riportato qui di seguito. Sono anche riportate le relazioni tra la frequenza terminale della banda passante, il fattore di smorzamento ed il tempo di salita o di assestamento.

### Tempo di assestamento

$$\omega_{\text{BW}} = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

$$\omega_n = \frac{4}{T_s \zeta}$$

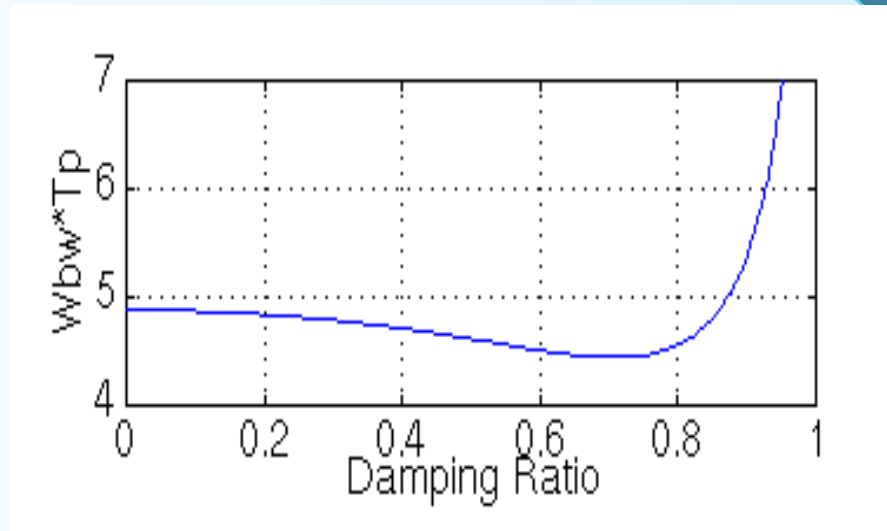
$$\omega_{\text{BW}} = \frac{4}{T_s \zeta} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$



## Tempo di salita

$$\omega_n = \frac{\pi}{T_P \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\omega_{BW} = \frac{\pi}{T_P \sqrt{1 - \zeta^2}} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

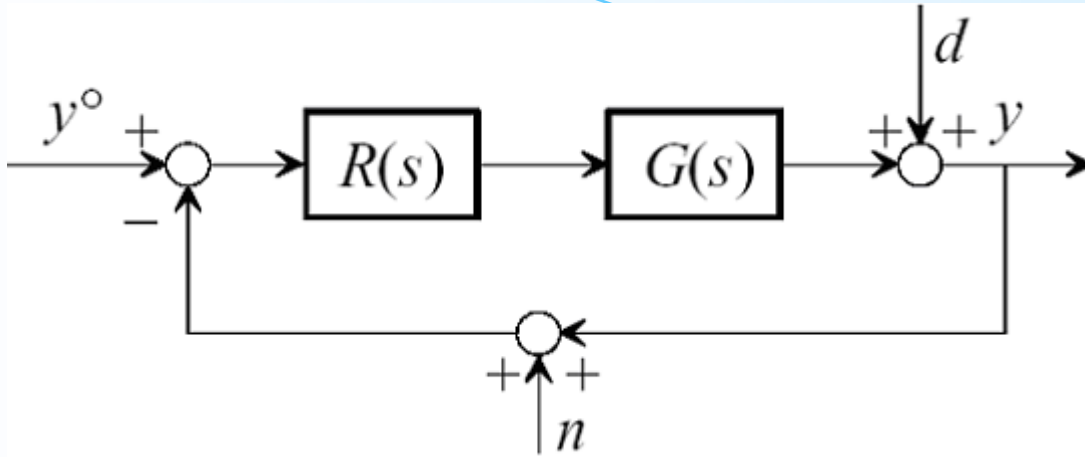


## Codice in Matlab

Per eseguire i conti si ci puo' avvalere della funzione wbw il cui m file e' riportato nel seguito:

```
function[] = wbw()
DR = input('Damping Ratio? ');
n = 0;
n = input('Settling Time(0) or Peak Time(1)? ');
if n == 0
ts = input('Settling Time? ');
temp1 = sqrt((4*DR^4) - (4*DR^2) +2);
temp2 = 1- (2*DR^2);
temp3 = 4/(ts*DR);
Wbw = temp3*sqrt(temp1 + temp2)
end
if n ==1
ts = input('Peak Time? ');
temp1 = sqrt((4*DR^4) - (4*DR^2) +2);
temp2 = 1- (2*DR^2);
temp3 = ts*sqrt( 1- DR^2);
temp4 = pi/temp3;
Wbw = temp4*sqrt(temp1 + temp2)
end
```

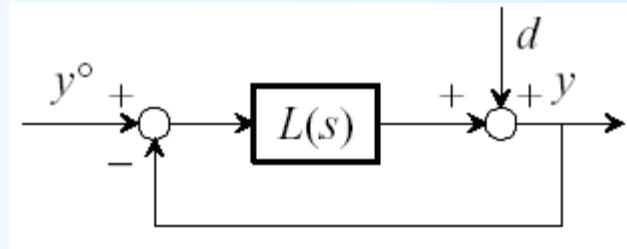
## Reiezione dei disturbi



Ricordiamo lo schema a blocchi da cui siamo partiti

### *Disturbo in linea di andata*

Consideriamo un disturbo  $d$  in linea di andata:



La funzione di trasferimento dal disturbo  $d$  alla variabile controllata  $y$  è data da:  $\frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{D}(s)} = \mathbf{S}(s) = \frac{1}{1 + \mathbf{L}(s)}$  dove  $S$  prende il nome di **funzione di sensitività**.

Possiamo **approssimare** il modulo della risposta in frequenza come fatto prima:

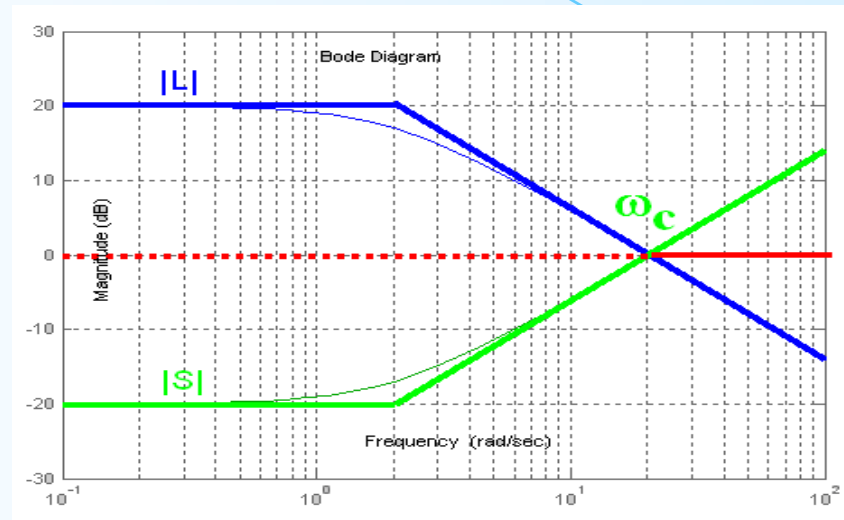
$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \forall \omega : |L(j\omega)| \gg 1 \\ \mathbf{1} & \forall \omega : |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

e nell'ipotesi di applicabilità del criterio di Bode:

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \forall \omega \ll \omega_c \\ \mathbf{1} & \forall \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

Tracciato il diagramma di  $|L|$ , quello di  $1/|L|$  si ottiene per ribaltamento rispetto all'asse a 0 dB. L'approssimazione consiste nell'attribuire a  $|S|$  il valore 1 per quelle pulsazioni per cui  $|L|$  è decisamente sotto l'asse a 0 dB, o il valore di  $1/|L|$  quando  $|L|$  è decisamente sopra l'asse a 0 dB.

Considerando un tipico andamento di  $|L|$ , si avrà la situazione riportata in figura (con le stesse considerazioni fatte prima circa la validità delle approssimazioni).



Pertanto le componenti armoniche (sinusoidi) del disturbo a pulsazioni inferiori alla pulsazione critica, e quindi interne alla banda passante, sono fortemente attenuate sulla variabile controllata. L'attenuazione è tanto maggiore quanto più alto è il valore del modulo di  $L$  sulla banda passante. Si conclude quindi che per un'efficace reiezione dei disturbi in linea di andata la **banda passante** deve essere **sufficientemente ampia** da contenere le armoniche significative del disturbo.

## ***Disturbo in linea di retroazione***

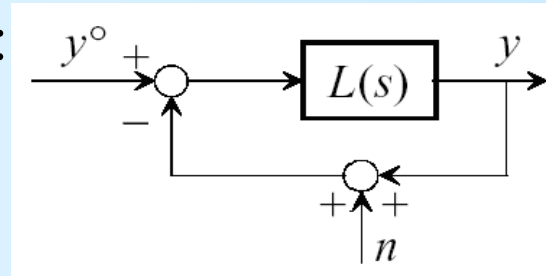
Consideriamo un disturbo  $n$  in linea di retroazione:

La funzione di trasferimento dal disturbo alla variabile controllata  $y$  è data da:

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = -F(s) = -\frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

La funzione di trasferimento  $F(s)$ , che prende il nome di **funzione di sensitività Complementare** (*Si osservi che  $F(s) = 1 - S(s)$* ), è la stessa esistente tra riferimento e variabile controllata. Sappiamo quindi già come ottenerne il modulo a partire da quello di  $L$ .

Possiamo concludere quindi che tutte le componenti armoniche del disturbo esterne alla banda passante del sistema di controllo vengono attenuate, mentre quelle interne passano. Ne consegue che per un'efficace reiezione dei disturbi in linea di retroazione (che tipicamente si caratterizzano come rumore di alta frequenza), è bene che la **banda passante non sia eccessivamente ampia**.

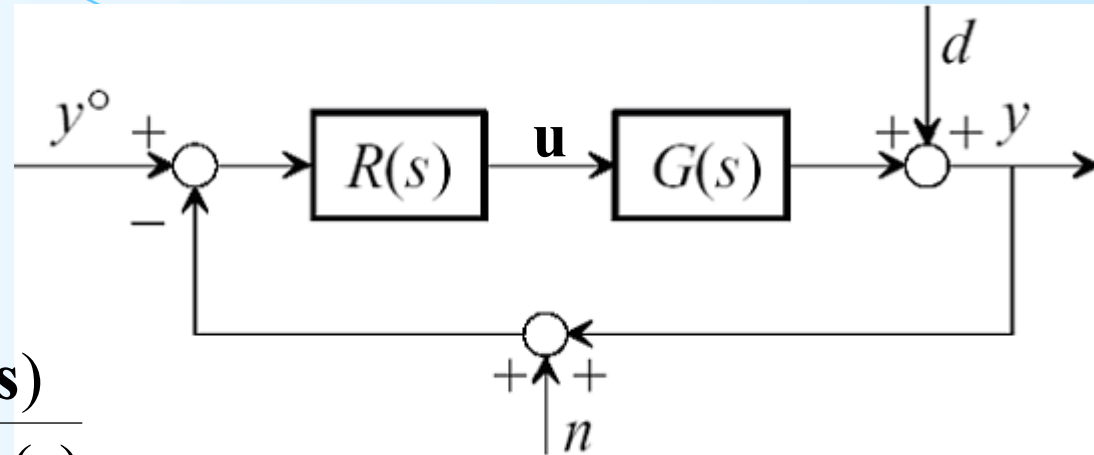


## Moderazione del controllo

Consideriamo un sistema di controllo in cui mettiamo in evidenza la variabile di controllo:

La funzione di trasferimento dal riferimento  $y^\circ$  alla variabile di controllo  $u$  è

$$\text{data da: } \frac{U(s)}{Y^\circ(s)} = Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$



dove  $Q$  prende il nome di **funzione di sensitività del controllo**.

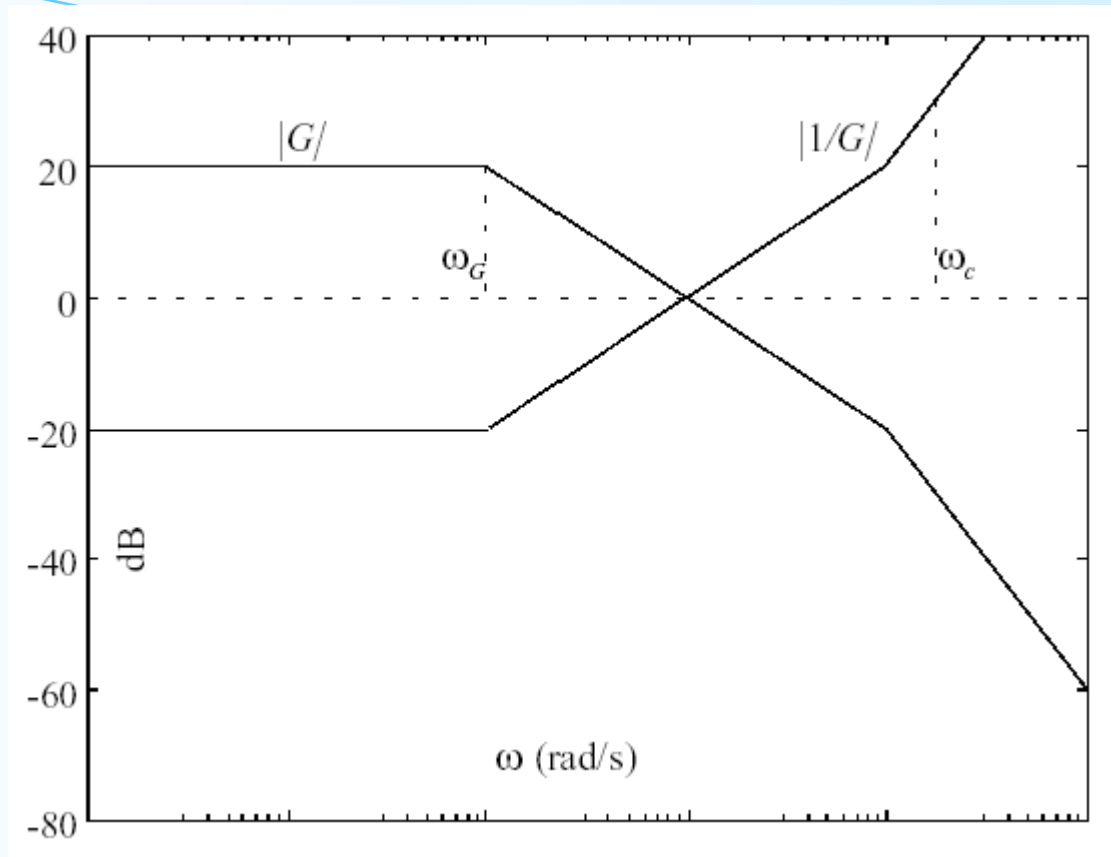
Si osservi che, a meno del segno, questa è anche la funzione di trasferimento dal disturbo  $d$  e dal disturbo  $n$  alla variabile di controllo. Poiché il riferimento e i due disturbi hanno caratteristiche armoniche differenti, è bene che la funzione di trasferimento attenui (o non amplifichi) su tutto l'asse delle pulsazioni.

Possiamo approssimare il modulo della risposta in frequenza:

$$|Q(j\omega)| \approx \frac{|R(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \forall \omega : |L(j\omega)| \gg 1 \quad (\omega \ll \omega_c) \\ |R(j\omega)| & \forall \omega : |L(j\omega)| \ll 1 \quad (\omega \gg \omega_c) \end{cases}$$

Poiché fuori dalla banda passante ( $\omega > \omega_c$ ) il modulo di  $Q$  coincide con quello di  $R$ , è bene che il **regolatore** sia progettato in modo che il suo **modulo non assuma valori eccessivi in alta frequenza**.

Per quanto riguarda invece il comportamento in banda passante, dobbiamo ipotizzare una tipologia di risposta in frequenza per  $G$ : ipotizziamo un comportamento di tipo filtro passa basso, con un certo guadagno maggiore di 1 e pulsazione di taglio pari a  $\omega_G$ . E' allora abbastanza evidente che se  $\omega_c$  è molto maggiore di  $\omega_G$ , il diagramma di  $1/|G|$ , in cui  $|Q|$  coincide in banda, può assumere valori molto elevati.



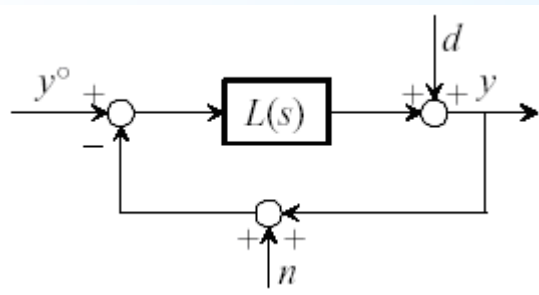
Concludiamo allora che per garantire moderazione al controllo la **banda passante non deve essere eccessivamente ampia rispetto alla banda che caratterizza la dinamica in anello aperto.**



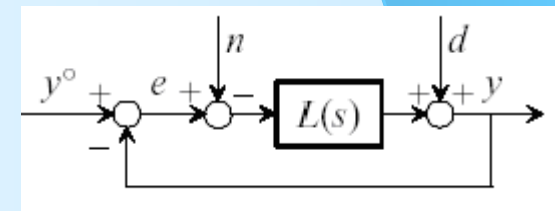
# Prestazioni statiche dei sistemi di controllo

## Errore a transitorio esaurito

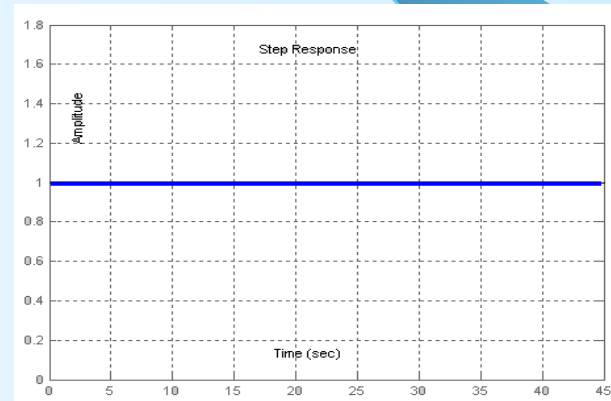
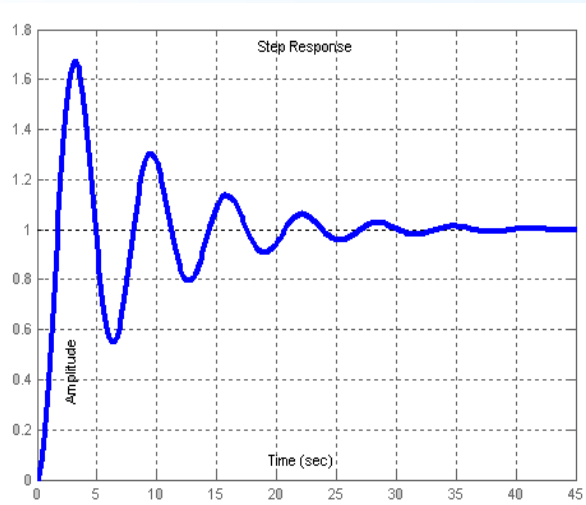
Le prestazioni statiche di un sistema di controllo fanno riferimento al suo comportamento a **transitorio esaurito**, ossia alla situazione in cui il sistema, dopo un transitorio dovuto alla variazione dei suoi ingressi, si è portato in una condizione di regime. In particolare saremo interessati, in questa condizione, all'**errore** tra il segnale di riferimento e la variabile controllata. Prerequisito del sistema di controllo, necessario per poter parlare di prestazioni statiche, è evidentemente l'**asintotica stabilità** del sistema in anello chiuso. Prenderemo in considerazione il seguente sistema di controllo, supposto asintoticamente stabile:



una rielaborazione formale dello schema a blocchi permette di mettere direttamente in evidenza l'errore tra  $y^o$  e  $y$ :



Per lo studio delle prestazioni statiche è sufficiente riferirsi ad un insieme dei segnali di ingresso ristretto ai cosiddetti **segnali canonici**, come lo scalino, la rampa, la parabola ecc. Infatti, ai fini della valutazione dell'errore a regime, sono del tutto irrilevanti le eventuali variazioni transitorie subite dal segnale di ingresso, del quale riveste interesse solo il comportamento asintotico ( $t \rightarrow \infty$ ).



Essendo il sistema di controllo lineare, potremo valutare separatamente l'effetto sull'errore dovuto al segnale di riferimento ed ai disturbi (principio di sovrapposizione degli effetti).

## Errore dovuto al segnale di riferimento

La funzione di trasferimento dal riferimento  $y^\circ$  all'errore  $e$  è la seguente:

$$\frac{\mathbf{E}(s)}{\mathbf{Y}^\circ(s)} = \frac{1}{1 + \mathbf{L}(s)}$$

Scriviamo la funzione di trasferimento d'anello nella seguente forma:

$$\mathbf{L}(s) = \frac{\mathbf{K}_L \prod_i (1 + s\mathbf{T}_i)}{s^{\text{gL}} \prod_k (1 + s\tau_k)}$$

e calcoliamo il valore limite dell'errore utilizzando il teorema del valore finale (applicabile essendo il sistema asintoticamente stabile):

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s\mathbf{E}(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1}{1 + \mathbf{L}(s)} \mathbf{Y}^\circ(s) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{K}_L \prod_i (1 + s\mathbf{T}_i)}{s^{\text{gL}} \prod_k (1 + s\tau_k)}} \mathbf{Y}^\circ(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^{\text{gL}+1}}{s^{\text{gL}} + \mathbf{K}_L} \mathbf{Y}^\circ(s) \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^{\mathbf{g}_{L+1}}}{s^{\mathbf{g}_L} + \mathbf{K}_L} \mathbf{Y}^\circ(s) \right] \quad \text{Se } y^\circ(t) = A \text{ sca}(t)$$

$$\mathbf{e}_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^{\mathbf{g}_{L+1}}}{s^{\mathbf{g}_L} + \mathbf{K}_L} \frac{\mathbf{A}}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \mathbf{A} \frac{s^{\mathbf{g}_L}}{s^{\mathbf{g}_L} + \mathbf{K}_L} \right] = \begin{cases} \mathbf{A}, & \mathbf{g}_L < 0 \\ \frac{\mathbf{A}}{1 + \mathbf{K}_L}, & \mathbf{g}_L = 0 \\ 0, & \mathbf{g}_L \geq 1 \end{cases}$$

Se  $y^\circ(t) = A \text{ ram}(t)$ , risulta:

$$\mathbf{e}_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^{\mathbf{g}_{L+1}}}{s^{\mathbf{g}_L} + \mathbf{K}_L} \frac{\mathbf{A}}{s^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \mathbf{A} \frac{s^{\mathbf{g}_L}}{s^{\mathbf{g}_{L+1}} + s\mathbf{K}_L} \right] = \begin{cases} \infty, & \mathbf{g}_L \leq 0 \\ \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{K}_L}, & \mathbf{g}_L = 1 \\ 0, & \mathbf{g}_L \geq 2 \end{cases}$$

Se  $y^\circ(t) = A \text{par}(t)$ , risulta:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^{g_L+1} \mathbf{A}}{s^{g_L} + \mathbf{K}_L} \frac{1}{s^3} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \mathbf{A} \frac{s^{g_L}}{s^{g_L+2} + s^2 \mathbf{K}_L} \right] = \begin{cases} \infty, & g_L \leq 1 \\ \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{K}_L}, & g_L = 2 \\ 0, & g_L \geq 3 \end{cases}$$

Pertanto, per valori negativi del tipo  $g_L$  della funzione di trasferimento d'anello, l'errore è sempre infinito, o, tutt'al più, nel caso dell'ingresso a scalino, pari all'ampiezza stessa dello scalino in ingresso: si tratta di situazioni di nessun interesse pratico. Per valori del tipo maggiori o uguali a zero, si può compilare la seguente tabella:

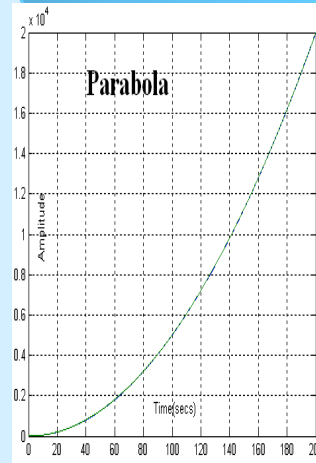
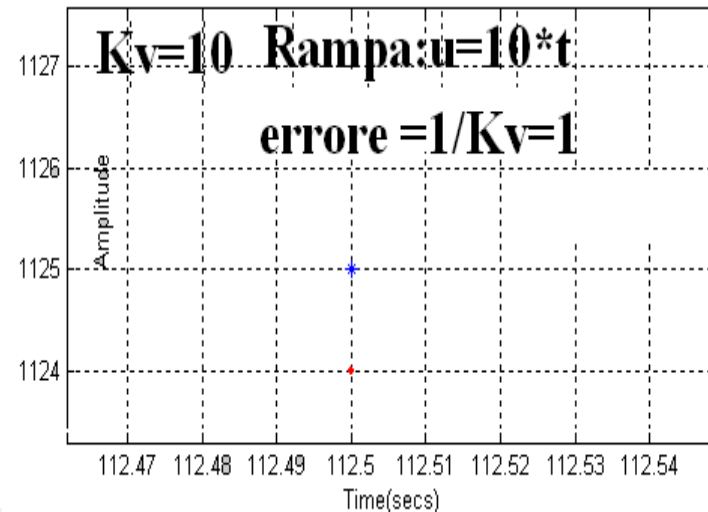
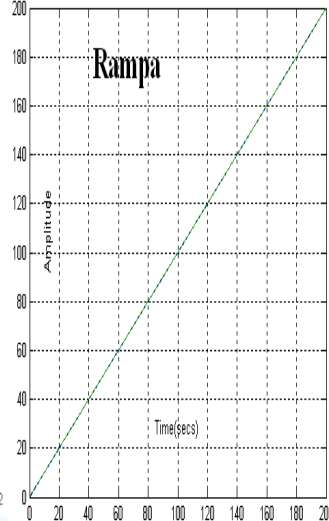
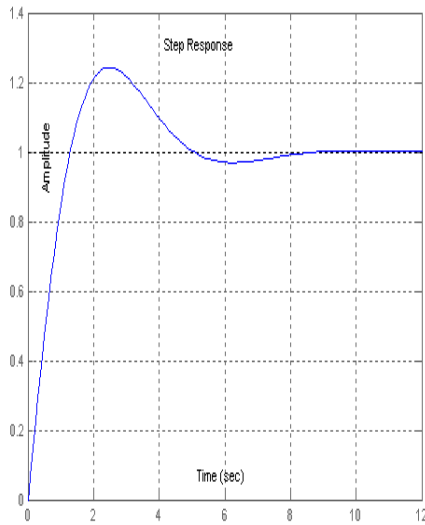
$g_L$	$A \text{asca}(t)$	$A \text{ramp}(t)$	$A \text{par}(t)$
Tipo 0	$A/(1+\mathbf{K}_L)$	$\infty$	$\infty$
Tipo 1	0	$A/\mathbf{K}_L$	$\infty$
Tipo 2	0	0	$A/\mathbf{K}_L$

Si osservi che, quando l'errore assume un valore finito e non nullo, esso è tanto più piccolo quanto maggiore è il valore del guadagno d'anello  $\mathbf{K}_L$ .

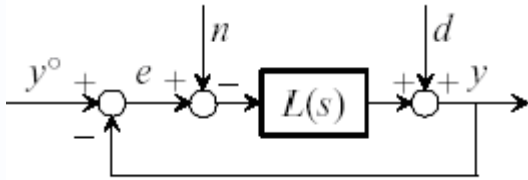
## Esempio

Sia: 
$$\mathbf{L}(s) = \frac{10}{s} \frac{1+s}{1+10s}$$

Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, come si ricava immediatamente dall'analisi del polinomio caratteristico in anello chiuso. Poiché il tipo di  $L$  vale  $g_L = 1$ , si ha errore a transitorio esaurito nullo con riferimento a scalino, infinito con riferimento a parabola, mentre con ingresso a rampa, l'errore a regime è pari all'ampiezza della rampa diviso 10.



## Errore dovuto al disturbo in linea di andata



Dallo schema di figura si ottiene la funzione di trasferimento dal disturbo  $d$  all'errore  $e$ :

$$\frac{\mathbf{E}(s)}{\mathbf{D}(s)} = -\frac{1}{1 + \mathbf{L}(s)}$$

A parte il segno, si tratta della stessa funzione di trasferimento presente tra il riferimento e l'errore.

$$\frac{\mathbf{E}(s)}{\mathbf{Y}^\circ(s)} = \frac{1}{1 + \mathbf{L}(s)}$$

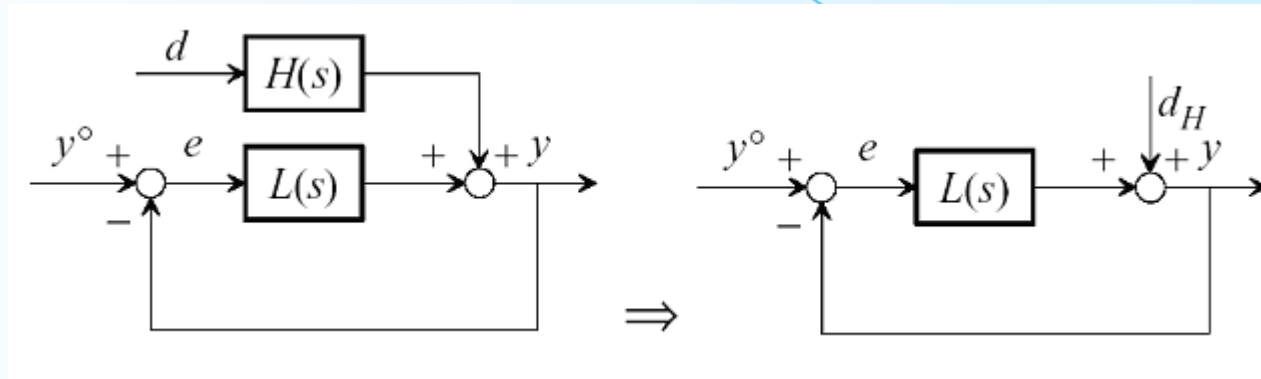
Pertanto tutti i risultati della discussione precedente possono ancora essere utilizzati, pur di tenere conto del cambiamento di segno.

Si possono tuttavia presentare dei casi in cui il disturbo non entra nello schema a blocchi del sistema di controllo come raffigurato in Figura, ossia direttamente in uscita alla funzione di trasferimento del processo.

Per poter utilizzare ancora la tabella delle prestazioni statiche, occorre allora “riportare” il disturbo in uscita, considerando uno schema analogo a quello di Figura, in cui il disturbo in uscita è tale da dare gli stessi effetti a transitorio esaurito del disturbo effettivo.

consideriamo i seguenti due casi:

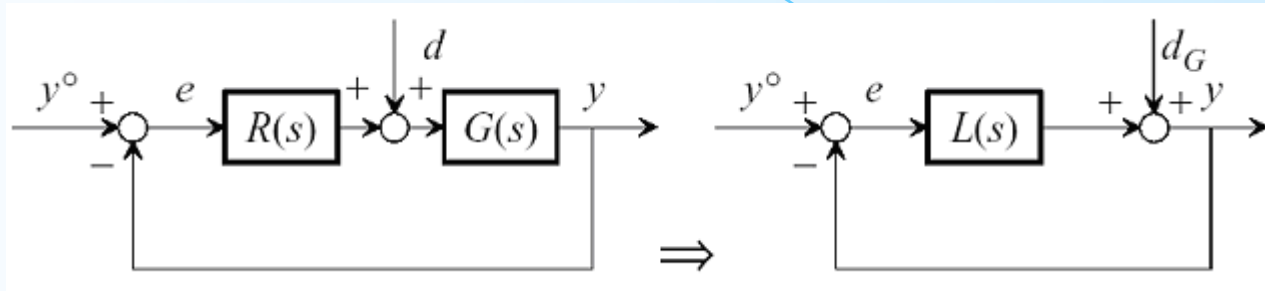
a) Il disturbo entra nel sistema di controllo passando attraverso un sistema di funzione di trasferimento  $H(s)$ :



Detti  $K_H$  e  $g_H$  guadagno e tipo di  $H(s)$ , il disturbo riportato in uscita,  $d_H$ , equivalente agli effetti statici al disturbo effettivo  $d$ , avrà trasformata: 
$$\mathbf{D}_H(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{K}_H}{\mathbf{s}^{g_H}} \mathbf{D}(\mathbf{s})$$

Si osservi infatti che gli eventuali poli o zeri di  $H$  non nell'origine non hanno alcun effetto sul comportamento a regime ( $s \rightarrow 0$ ).

**b)** Il disturbo entra nel sistema di controllo a monte del processo, ossia del sistema di funzione di trasferimento  $G(s)$  (disturbo di *carico*):

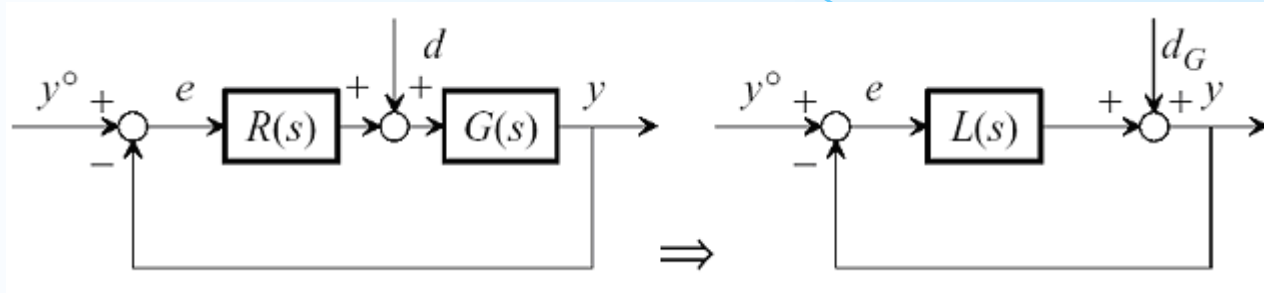


Detti  $K_H$  e  $g_H$  guadagno e tipo di  $G(s)$ , il disturbo riportato in uscita,  $d_G$ , equivalente agli effetti statici al disturbo effettivo  $d$ , avrà trasformata:

$$\mathbf{D}_G(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{K}_G}{\mathbf{s}^{g_G}} \mathbf{D}(\mathbf{s})$$

## Esempio

Con riferimento alla Figura, sia:  $\mathbf{R}(s)=5$ ;  $\mathbf{G}(s) = \frac{6(1+3s)}{s(1+4s)}$   $\mathbf{d}(t)=3sca(t)$



$$\mathbf{D}_G(s) = \frac{\mathbf{K}_G}{\mathbf{s}^{g_G}} \mathbf{D}(s) = \frac{63}{s s} = \frac{18}{s^2}$$