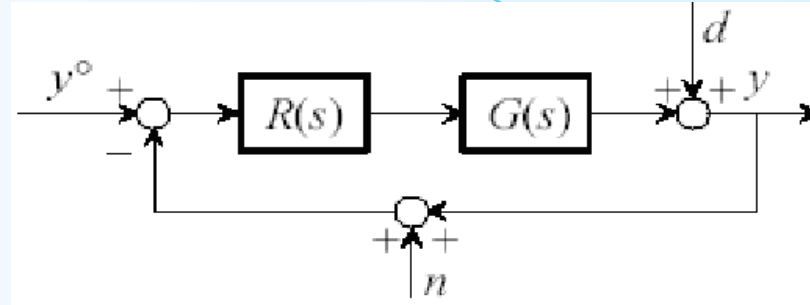


Progetto del controllore

Specifiche di progetto

Consideriamo nuovamente un sistema di controllo in retroazione:



Supporremo assegnata la funzione di trasferimento $G(s)$, e ci porremo l'obiettivo della **sintesi** (o **progetto**) della funzione di trasferimento $R(s)$ del controllore, sulla base di un certo numero di specifiche.

Il metodo che seguiremo sarà basato sul criterio di Bode, e come tale prevederà il rispetto, da parte della funzione di trasferimento d'anello $L(s) = R(s)G(s)$, delle ipotesi necessarie per l'applicabilità del criterio. Ciò comporta, in particolare, che il metodo non sarà applicabile se $G(s)$ ha poli a parte reale positiva. Infatti tali poli, che non possono essere cancellati da corrispondenti zeri nella funzione di trasferimento $R(s)$, si presentano anche in $L(s)$, violando una condizione del criterio.

Le specifiche con le quali tipicamente si imposta il progetto sono le seguenti:

1. Asintotica stabilità

In base al criterio di Bode questa specifica implica: $\varphi_m > 0$

2. Grado di stabilità e robustezza

La stabilità deve essere garantita con un certo margine rispetto ad inesattezze nella modellistica del sistema sotto controllo. Inoltre si vuole che il sistema di controllo, sollecitato da ingressi canonici (scalino, impulso), esibisca risposte ben smorzate. Entrambe queste condizioni sono approssimativamente soddisfatte se il margine di fase dell'anello è superiore di un valore limite, di volta in volta specificato:

$$\varphi_m > \bar{\varphi}_m$$

3. Velocità di risposta

Il sistema di controllo deve reagire prontamente a variazioni nel segnale di riferimento o sui disturbi. Sappiamo che, se il margine di fase è sufficientemente elevato, i transitori del sistema in anello chiuso sono governati da una costante di tempo pari all'inverso della pulsazione critica ω_c . Imporre un valore massimo alla durata dei transitori equivale quindi ad imporre un valore minimo alla pulsazione critica:

$$\omega_c \geq \bar{\omega}_c$$

4. Precisione statica

A seguito dell'imposizione di assegnati segnali canonici agli ingressi, l'errore tra riferimento e variabile controllata deve essere, a transitorio esaurito, nullo o inferiore in modulo ad una assegnata soglia:

$$|e_\infty| \geq \bar{e}_\infty$$

5. Specifiche aggiuntive

Talvolta possono essere date delle ulteriori specifiche, come l'uso di un controllore dalla struttura assegnata (cioè con un dato numero di poli e zeri), limitazioni all'azione di controllo, attenuazione di specifici disturbi (tipicamente sinusoidali).

Strutture Classiche di controllori:

- ➤ Controllore Proporzionale (P)
- ➤ Controllore Proporzionale + Integrabile (PI)
- ➤ Controllore Proporzionale + Derivativo (PD)
- ➤ Controllore Proporzionale+Integrabile+Derivativo (PID)
- ➤ Controllore ad anticipo di fase
- ➤ Controllore a ritardo di fase
- ➤ Controllore ad anticipo - ritardo di fase

Controllore Proporzionale (P)

La funzione di trasferimento del controllore è una costante, in altre parole si agisce sul guadagno dell'impianto per stabilizzare il sistema.

$$\mathbf{K R(s)=costante}$$

Controllore Proporzionale + Integrabile (PI)

$$\mathbf{KR(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s} = k_p \frac{s + \frac{k_i}{k_p}}{s}}$$

La caratteristica di questo controllore è di avere uno zero in $-k_i/k_p$ ed un polo nell'origine.

Controllore Proporzionale + Derivativo (PD)

$$\mathbf{KR}(s) = \mathbf{k}_d s + \mathbf{k}_p = \mathbf{k}_d \left(s + \frac{\mathbf{k}_p}{\mathbf{k}_d} \right)$$

La caratteristica di questo controllore e' di avere un solo zero in $-\mathbf{k}_p/\mathbf{k}_d$: **non è fisicamente realizzabile**

Controllore Proporzionale + Derivativo (PD)

Realizzabile fisicamente mediante inserimento di un polo in alta frequenza

$$\mathbf{KR}(s) = \frac{\mathbf{k}_d s + \mathbf{k}_p}{s + \eta} = \mathbf{k}_d \left(\frac{s + \frac{\mathbf{k}_p}{\mathbf{k}_d}}{s + \eta} \right)$$

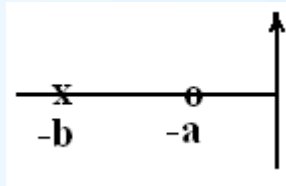
Controllore Proporzionale+Integrale+Derivativo (PID)

$$KR(s) = k_d s + k_p + \frac{k_i}{s} = k_d \left(\frac{s^2 + \frac{k_p}{k_d} s + \frac{k_i}{k_d}}{s} \right)$$

La caratteristica di questo controllore e' di avere due zeri che possono essere reali o complessi coniugati, accoppiati con un polo nell'origine. In aggiunta occorre prevedere un polo in alta frequenza per la fisica realizzabilità della parte derivativa.

Controllore ad anticipo di fase

$$KR(s) = K \frac{s + a}{s + b}, a < b$$



Polo a sinistra dello zero

o equivalentemente

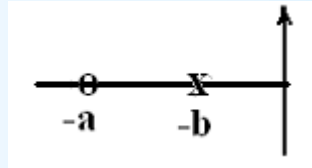


$$G(s) = \frac{1 + sT}{1 + aTs} \quad (a < 1)$$

Controllore a ritardo di fase

La funzione di trasferimento è strutturata in modo da avere un polo alla destra di uno zero:

$$KR(s) = K \frac{s + a}{s + b}, a > b$$



o equivalentemente

$$G_c(s) = \frac{(Ts + 1)}{(T\beta s + 1)} \quad \beta > 1$$

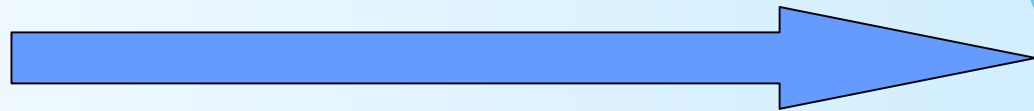
Le caratteristiche salienti ai fini della compensazione sono riassunte nella tabella che segue:

RISPOSTA Loop Chiuso	TEMPO SALITA	SOVRAELONGAZIONE	TEMPO ASSESTAMENTO	ERRORE A REGIME
Kp	Diminuisce	Aumenta	Piccola Variazione	Diminuisce
Ki	Diminuisce	Aumenta	Aumenta	Minimizza o Elimina
Kd	Piccola Variazione	Diminuisce	Diminuisce	Piccola Variazione

Occupiamoci ora delle modalità con cui si implementa un PID, un compensatore ad anticipo di fase, un compensatore a ritardo di fase ed un compensatore ad anticipo-ritardo di fase (rete a sella) attraverso esempi.

Gli esempi prevedono l'uso del luogo delle radici che è un diagramma che permette di valutare la stabilità di sistemi a loop chiuso dall'analisi della FdT a loop aperto.

D:\CorsoSistemi\Corso PowerPP\root_loci_ital.ppt



Esempio: Doppio integratore con differenti compensatori

Prendiamo in considerazione
la seguente funzione di trasferimento
che e' tipica di parecchi sistemi meccanici:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

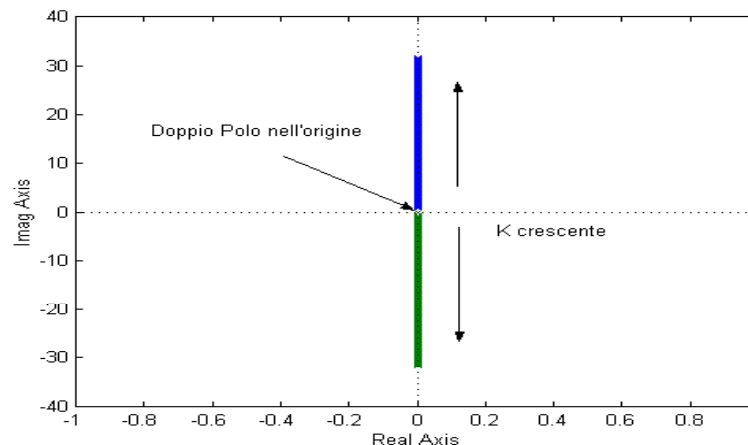
e proviamo a compensare con i differenti compensatori che
abbiamo visto usando per verifica della situazione il luogo delle
radici.

Controllore Proporzionale (P)

Il guadagno d'anello sar  dato da : $K R(s)G(s) = K \frac{1}{s^2}$

Usando Matlab con le seguenti righe di codice: `s1=zpk([], [0 0], 1);`
`rlocus(s1)` si ottiene :

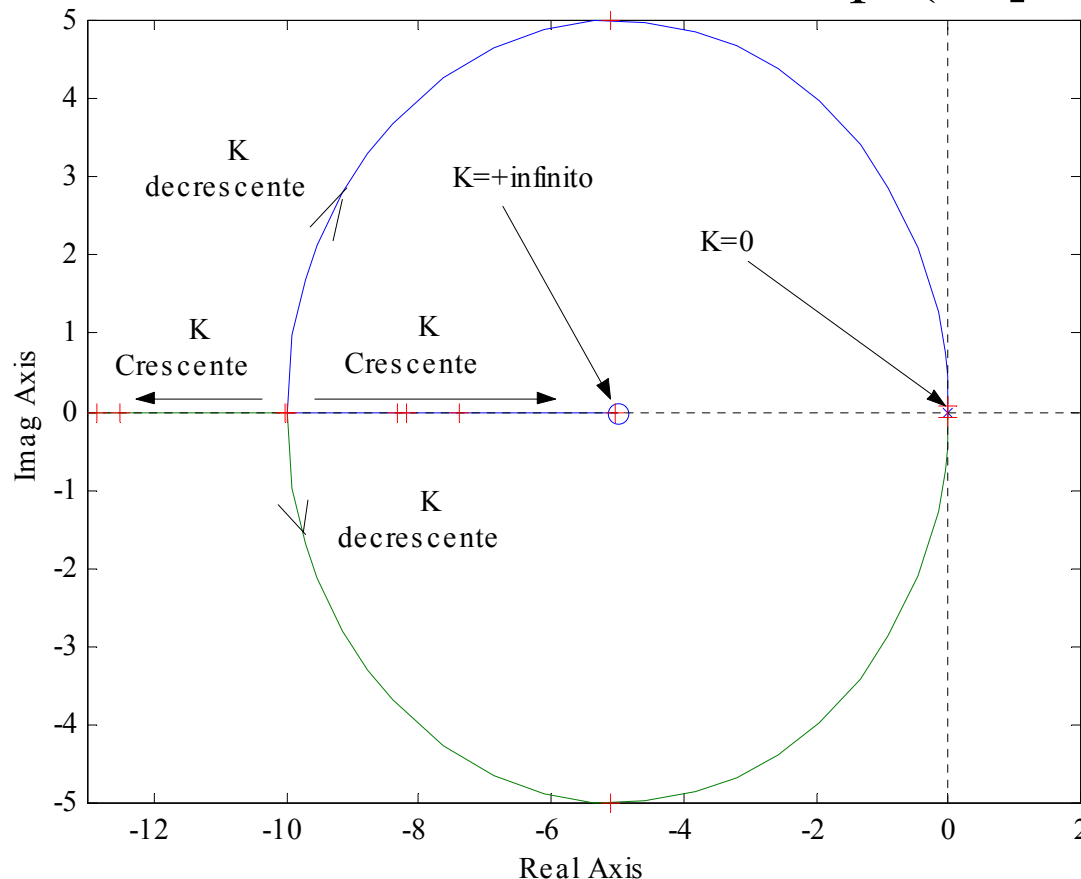
**Il compensatore
proporzionale come si
vede non stabilizza il
sistema.**



Controllore Proporzionale + Derivativo (PD)

scegliamo $k_p/k_d=5$ ed otteniamo il luogo delle radici mostrato in figura e come si puo' vedere il compensatore PD stabilizza il doppio integratore. Usando Matlab con le seguenti righe di codice:
`s1=zpk(-5,[0 0],1); rlocus(s1)` si ha:

$$\mathbf{KR(s)G(s) = k_d \frac{\left(s + \frac{k_p}{k_d} \right)}{s^2}}$$



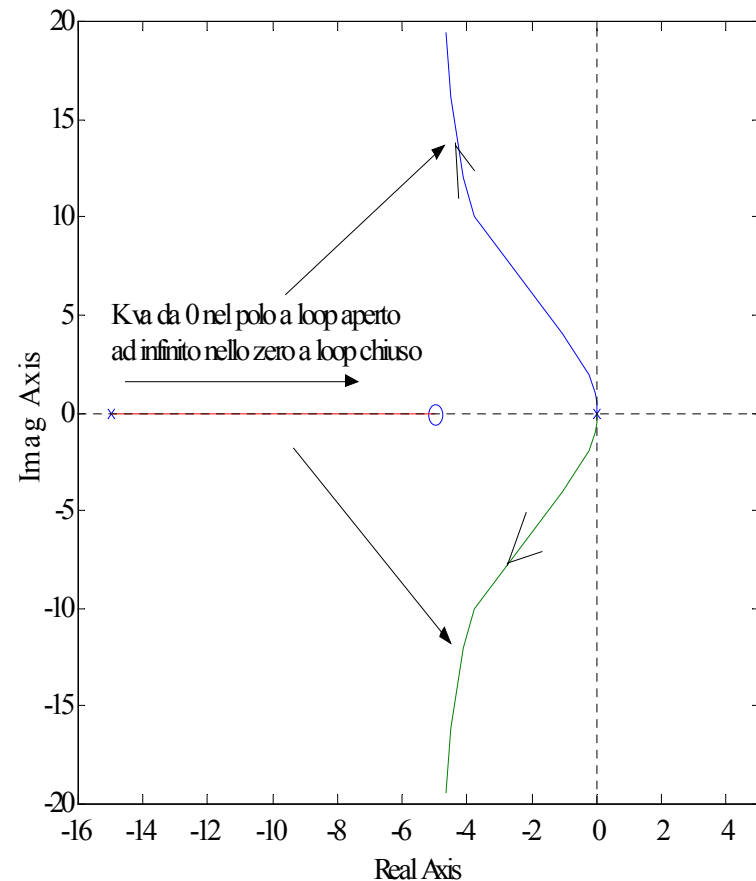
In questa versione
Si introduce rumore
in alta frequenza
per effetto del
processo di derivazione

Controllore Proporzionale + Derivativo (PD)

Realizzabile fisicamente mediante inserimento di un polo in alta frequenza
Quindi il controllore PD pratico stabilizza il doppio integratore

$$KR(s)G(s) = k_d \left(\frac{s + \frac{k_p}{k_d}}{s^2 (s + \eta)} \right)$$

In pratica, quando si usa un controllore PD occorre includere un polo filtrante in alta frequenza per smussare il rumore dovuto al processo di derivazione.
Es. $k_p/k_d=5$ ed il polo filtrante in alta frequenza $\eta=15$ ed otteniamo il luogo delle radici mostrato in figura e come si puo' vedere il compensatore PD stabilizza il doppio integratore.
`s1=zpk(-5,[0 0 -15],1); rlocus(s1)`



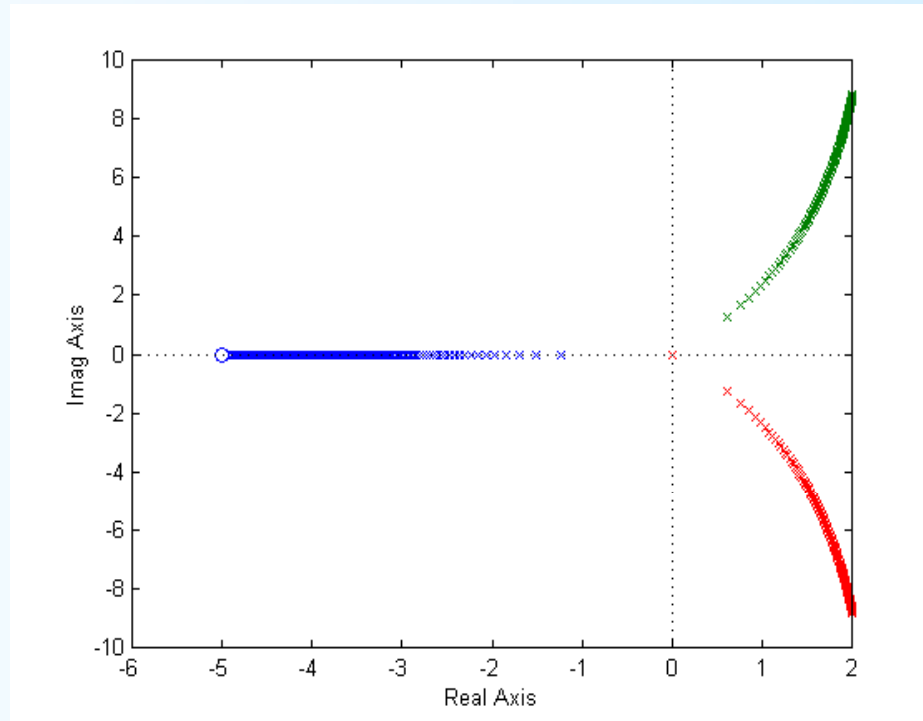
Controllore Proporzionale + Integrale (PI)

$$s + \frac{k_i}{k_p} \frac{1}{s^3}$$

il guadagno d'anello è dato da:

$$KR(s)G(s) = k_p \frac{1}{s^3}$$

Scegliamo $k_i/k_p=5$. Il controllore PI non può stabilizzare il sistema perché la differenza di grado relativo è pari a 2 e gli asintoti del luogo delle radici si trovano nella parte destra del piano s . In Matlab useremo le seguenti righe di codice: `s1=zpk(-5,[0 0 0],1);k=0:0.5:1000;rlocus(s1,k)` otteniamo il grafico seguente:



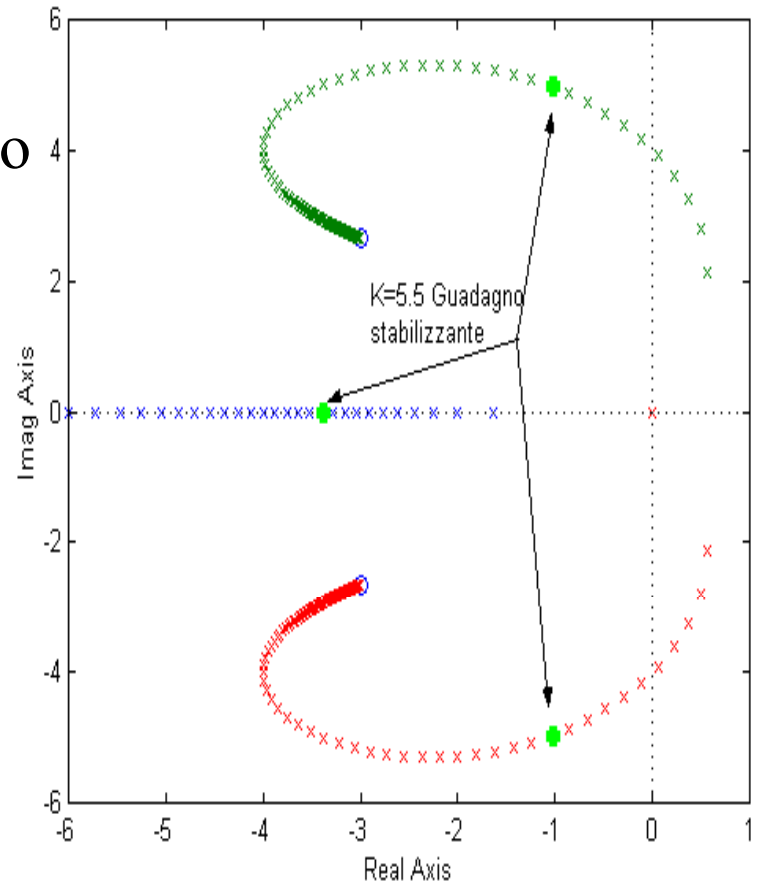
Controllore Proporzionale+Integrale+Derivativo (PID)

Il guadagno d'anello è dato da:

$$KR(s)G(s) = k_d \left(\frac{s^2 + \frac{k_p}{k_d} s + \frac{k_i}{k_d}}{s^3} \right)$$

e scegliamo per i guadagni del PID $k_p/k_d = 6$ e $k_i/k_d = 16$ in modo da avere una coppia di zeri complessi coniugati. Il luogo delle radici mostra che il sistema viene stabilizzato per alti valori del guadagno derivativo. Il valore del guadagno stabilizzante si puo' trovare o con l'analisi di ROUTH o con

rlocfind di Matlab. Le righe di codice da usare sono le seguenti:
`num=[1 6 16]; den=[1 0 0 0];`
`s1=tf(num,den);k=0:0.5:1000;`
`rlocus(s1,k); rlocfind(s1)`

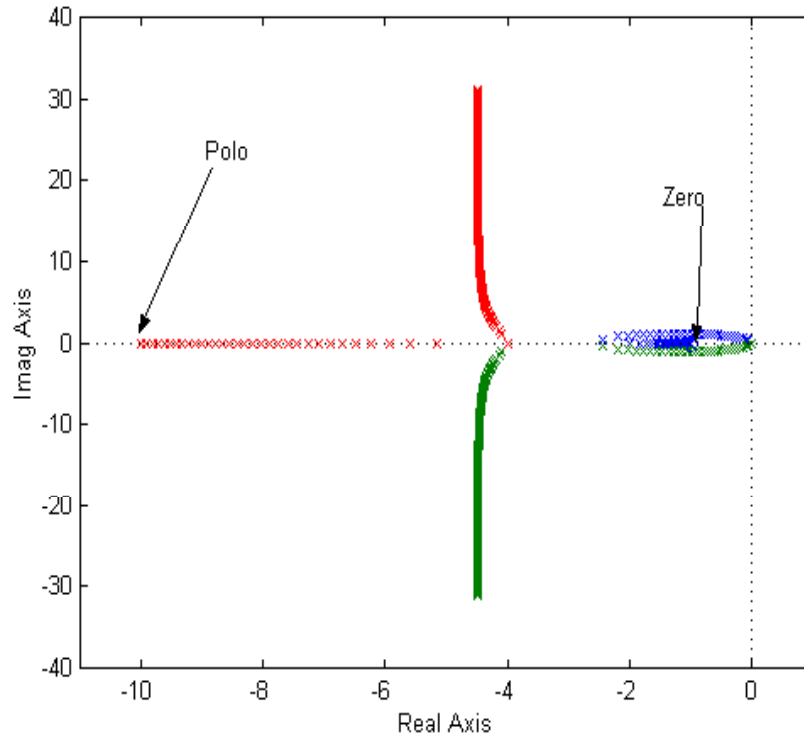


Compensatore ad Anticipo di fase

Il guadagno d'anello con anticipo di fase, scegliendo $a=1$ e $b=10$ è dato da:

$$\mathbf{KR}(s)\mathbf{G}(s) = \mathbf{K} \frac{s + 1}{s^2 (s + 10)}$$

Il luogo delle radici mostra che il sistema viene compensato. Le righe di codice da usare in Matlab sono le seguenti: `num=[1 1]; den=conv([1 0 0],[1 10]);s1=tf(num,den);k=0:0.5:1000; rlocus(s1,k)`



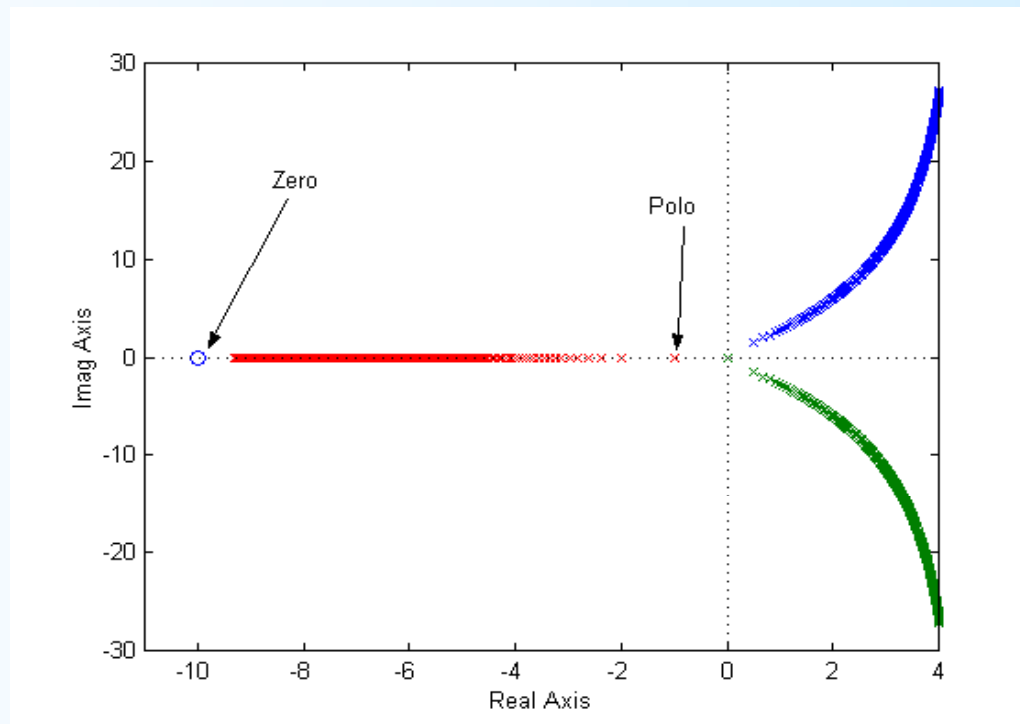
Compensatore a Ritardo di fase

Il guadagno d'anello con ritardo di fase, scegliendo $a=10$ e $b=1$ è dato da:

$$\mathbf{KR}(s)\mathbf{G}(s) = \mathbf{K} \frac{s + 10}{s^2 (s + 1)}$$

Il luogo delle radici mostra che il sistema non viene compensato.

Le righe di codice da usare in Matlab sono le seguenti: `num=[1 10]; den=conv([1 0 0],[1 1]);s1=tf(num,den);k=0:0.5:1000; rlocus(s1,k)`



Progetto di un PID mediante le regole di Ziegler-Nichols

Per progettare un compensatore PID occorre determinare tre parametri e cioè i guadagni Proporzionale, Integrabile e Derivativo : k_p, k_i, k_d . Ziegler e Nichols hanno suggerito una procedura per risolvere il problema della scelta dei guadagni PID che funziona per la classe di sistemi che hanno rami del luogo delle radici che attraversano l'asse immaginario del piano s. La procedura si svolge in due passi:

1. Si pongono $k_i = k_d = 0$ chiudendo il solo loop Proporzionale **P**. Si aumenta il guadagno k_p sino a che il sistema non oscilla (in modo che i poli a loop chiuso si trovano sull'asse immaginario). Si determina il guadagno K_m a cui comincia la oscillazione del sistema e la corrispondente pulsazione ω_m .
2. Si calcolano i guadagni PID in accordo alle seguenti relazioni:

$$k_p = 0.6K_m, k_d = \frac{k_p \pi}{4\omega_m}, k_i = \frac{k_p \omega_m}{\pi}$$

Esempio di Progetto di un PID con le regole di Ziegler-Nichols.

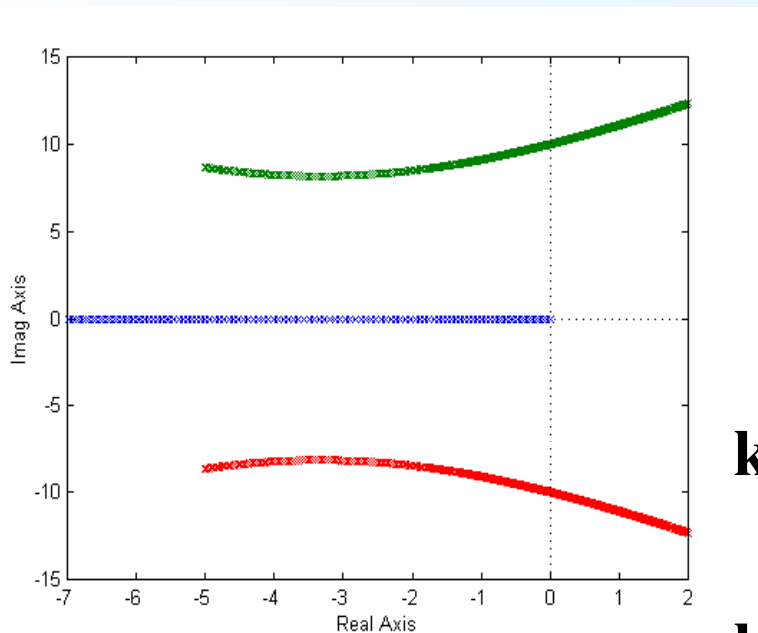
Sia la FdT a loop aperto data da:

$$G(s) = \frac{5}{s(s^2 + 10s + 100)}$$

Vogliamo compensare il sistema mediante un regolatore PID, pertanto dobbiamo trovare i guadagni del PID. Lo faremo seguendo le regole di Ziegler-Nichols. Da Matlab num=5;

```
den=conv([1 0],[1 10 100]);s1=tf(num,den);k=0:0.5:1000;rlocus(s1,k)
```

Otteniamo il luogo delle radici



Usando la istruzione rlocfind(s1) troviamo che l'attraversamento dell'asse immaginario è nei punti $s = \pm j9.95$ quindi $\omega_m = 9.95 \text{ rad/sec}$ e $K_m = 200$. Da cui ricaviamo:

$$k_p = 0.6K_m = 120, k_d = \frac{k_p \pi}{4\omega_m} = \frac{120\pi}{4 \times 9.95} = 9.47,$$

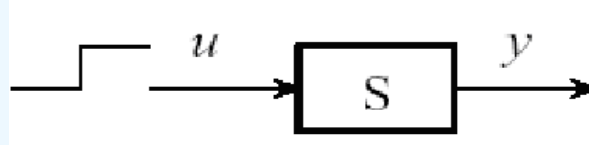
$$k_i = \frac{k_p \omega_m}{\pi} = \frac{120 \times 9.95}{\pi} = 380$$

Il metodo non è sempre applicabile: ci sono infatti sistemi che non generano oscillazioni, anche con guadagni proporzionali elevati. Altre volte può essere pericoloso, o comunque sconsigliabile, portare il sistema al limite di stabilità.

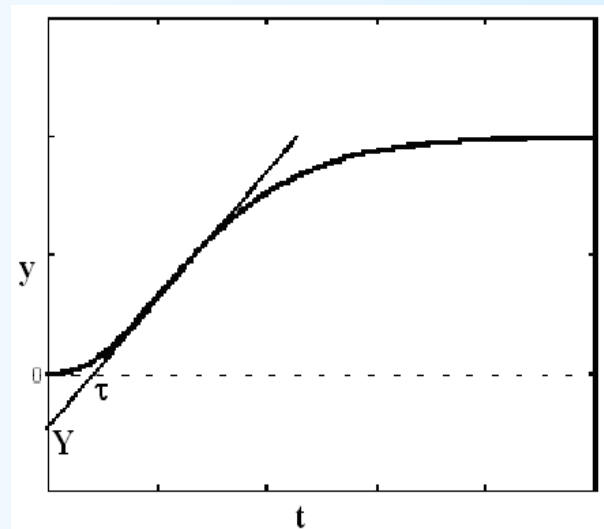
Metodo di Ziegler e Nichols in anello aperto

Il metodo si articola nei seguenti passi:

1. Si applica una variazione a scalino all'ingresso del sistema sotto controllo.



2. Si traccia la tangente alla risposta nel **punto di flesso**:



3. Si individuano graficamente le intercette τ e Y della tangente sugli assi t e y ,rispettivamente.
4. Si tarano i parametri di un regolatore **P**, **PI** o **PID** sulla base della seguente tabella:

	K_p	T_I	T_D
P	$1/Y$	-	-
PI	$0.9/Y$	3τ	-
PID	$1.2/Y$	2τ	0.5τ

$$T_I = \frac{k_p}{k_I} \text{ Tempo integrale}$$

$$T_D = \frac{k_D}{k_p} \text{ Tempo derivativo}$$

Il metodo non è ovviamente applicabile se la risposta allo scalino non presenta flesso o se la risposta presenta oscillazioni. Inoltre non sempre è possibile operare sul processo in anello aperto, o perturbare bruscamente il suo ingresso

Esempio da sviluppare come esercizio:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 20}$$

Lo scopo dello studio di questo problema é di comprendere come K_p , K_i e K_d contribuiscono ad ottenere

- Tempo di salita rapido
- Sovraelongazione minima
- Errore a regime nullo

I passi da seguire sono i seguenti:

1. Dalla risposta indiciale (risposta allo scalino unitario) e dal luogo delle radici si valuta quale metodo si può usare per tarare il PID.
2. Si determinano i parametri utili al progetto e si verifica che le specifiche siano soddisfatte.

Nel caso in specie si progetti un semplice Proporzionale, un PD, un PI ed infine un PID.

Note generali da considerare quando si progetta un PID

Conviene per il progetto di un PID seguire la procedura seguente:

1. Ottenere una risposta a loop aperto per determinare cosa occorre migliorare.
 2. Aggiungere un controllo proporzionale per migliorare il tempo di salita
 3. Aggiungere un controllo derivativo per migliorare la sovraelongazione
 4. Aggiungere un controllo integrale per eliminare l'errore a regime.
 5. Correggere K_p , K_i , e K_d sino ad ottenere la risposta globale .
- Può essere utile riferirsi alla tavola riassuntiva riportata all'inizio della lezione per trovare quale controllore controlla quale caratteristica.

RISPOSTA Loop Chiuso	TEMPO SALITA	SOVRAELONGAZIONE	TEMPO ASSESTAMENTO	ERRORE A REGIME
K_p	Diminuisce	Aumenta	Piccola Variazione	Diminuisce
K_i	Diminuisce	Aumenta	Aumenta	Minimizza o Elimina
K_d	Piccola Variazione	Diminuisce	Diminuisce	Piccola Variazione

Infine si osservi che e' buona regola realizzare il controllore piu' semplice possibile: questo significa che non e' necessario progettare il PID completo, ma molte volte e' sufficiente un PI o un PD per soddisfare le specifiche.

Compensatore ad Anticipo di fase mediante uso della risposta in frequenza

Un Compensatore del primo ordine ad anticipo di fase si puo' progettare usando la risposta in frequenza ed ha la seguente funzione di trasferimento:

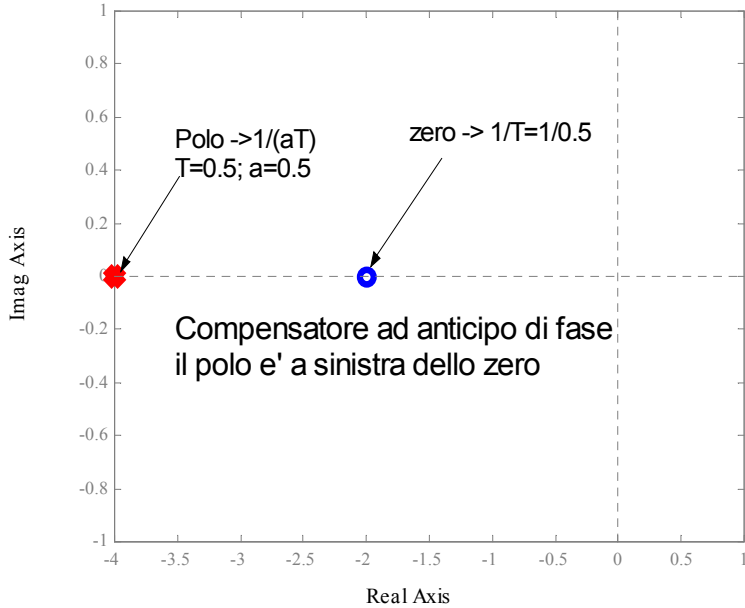
$$\mathbf{G(s)} = \frac{1 + \mathbf{sT}}{1 + \mathbf{aTs}} \quad (\mathbf{a} < 1)$$

In progetti basati sulla risposta in frequenza, il compensatore ad anticipo di fase aggiunge fase positiva al sistema nell'intervallo di frequenze $1/T \div 1/(aT)$. Il diagramma di Bode del compensatore ad anticipo di fase risulta simile a quello dell'esempio mostrato in figura.

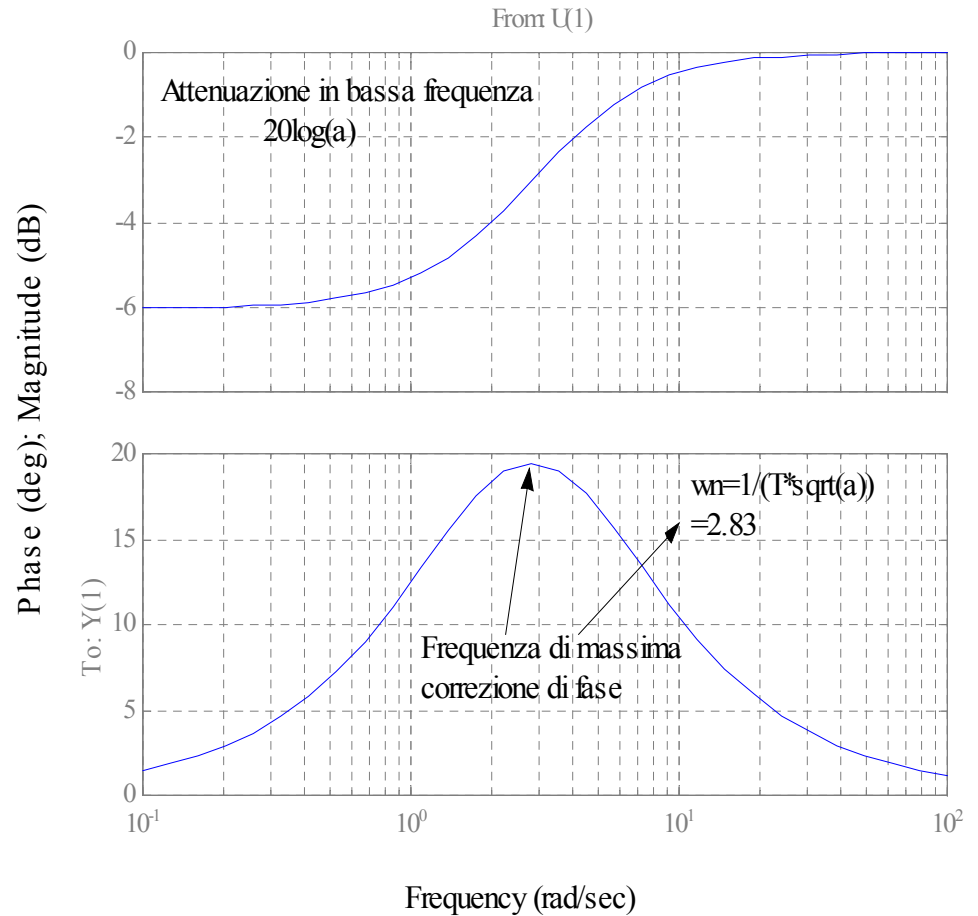
Si noti che in un compensatore ad anticipo di fase lo zero si trova a destra del polo, come si può notare nell'esempio che segue.

num=[1 2]; den=[1 4]; s1=tf(num,den) →
 → Transfer function: $(s + 2)/(s + 4)$; pzmap(s1)

Pole-zero map



Bode Diagrams



Le due frequenze limite sono rispettivamente $1/T$ ed $1/(aT)$. A seconda del valore di a , il massimo di fase che si puo' aggiungere va sin quasi a 90° . Se occorre correggere la fase per piu' di 90° si possono mettere due compensatori ad anticipo in serie. La massima quantita' di fase viene aggiunta ad una frequenza data da: $\omega_n = \frac{1}{T\sqrt{a}}$

La equazione che determina la fase massima e' data da: $\sin \phi = \frac{1 - a}{1 + a}$

L'aggiunta di fase positiva aumenta il margine di fase migliorando cosi' la stabilita' del sistema. Questo tipo di compensatore si progetta determinando a dalla quantita' di fase necessaria per soddisfare le specifiche del margine di fase e determinando T per posizionare la fase aggiunta alla nuova frequenza di attraversamento del guadagno unitario. Un altro effetto del compensatore ad anticipo si puo' rilevare dal diagramma del modulo: si nota un aumento del guadagno(pari ad a) in alta frequenza e questo fa aumentare la frequenza di attraversamento del guadagno unitario. La conseguenza e' che migliora il tempo di salita e di assestamento del sistema.

In Matlab, possiamo usare il codice che segue per progettare un compensatore ad anticipo:

```
num=input('coefficienti del numeratore del sistema da correggere es. [1 2] ');
den=input('coeff. Denom. del sistema da correggere es. conv([1 2],[1 2 1]) ');
figure
s1=tf(num,den)
grid on
margin(s1)
'Valuta dal Diagramma di Bode la correzione di fase'
pause
T=input('Tempo di anticipo in secondi= ');
fimax=input('Correzione di Fase massima = ');
Fcom=input('Fattore compenso fase: 0°÷20°= ');
fimax=(fimax+Fcom)*pi/180;
a=(1-sin(fimax))/(1+sin(fimax))
wn=1/(T*sqrt(a))
pause
numlead=[T 1];
denlead=[aT 1];
comp=tf(numlead,denlead)
grid on
bode(s1)
hold on
bode(comp)
newnum=conv(num,numlead);
newden=conv(den,denlead);
scorr=tf(newnum,newden)
figure
grid on
bode(scorr)
```

Compensatore a Ritardo di fase mediante uso della risposta in frequenza

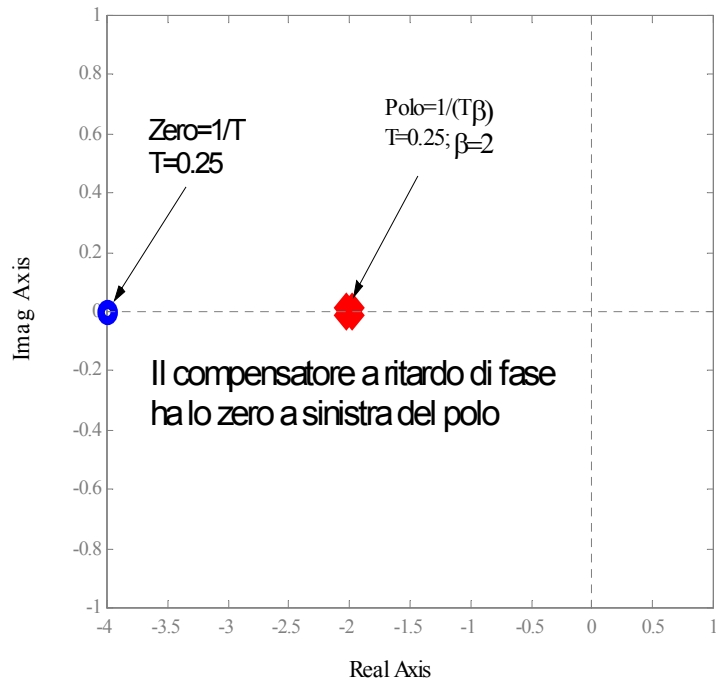
Un compensatore a ritardo di fase del primo ordine si puo' progettare usando la risposta in frequenza ed ha una f.d.t. del tipo:

$$\mathbf{G}_c(\mathbf{s}) = \frac{(\mathbf{T}\mathbf{s} + 1)}{(\mathbf{T}\beta\mathbf{s} + 1)} \quad \beta > 1$$

Osserviamo che la fdt di questo tipo di compensatore e' simile a quella del compensatore ad anticipo di fase, pero' con β che e' sempre maggiore di 1. La differenza principale con il compensatore ad anticipo di fase sta nel fatto che il compensatore a ritardo somma fase negativa al sistema nell'intervallo di frequenze $1/(\beta T) \div 1/T$, mentre il compensatore ad anticipo somma fase positiva nell'intervallo di frequenze $1/T \div 1/(\beta T)$. Il diagramma di Bode del compensatore a ritardo di fase risulta simile a quello dell'esempio mostrato in figura. La differenza fondamentale tra il compensatore ad anticipo di fase e quello a ritardo di fase sta nel fatto che mentre in un caso(anticipo) il polo sta a sinistra dello zero, nell'altro caso(ritardo) il polo sta alla destra dello zero.

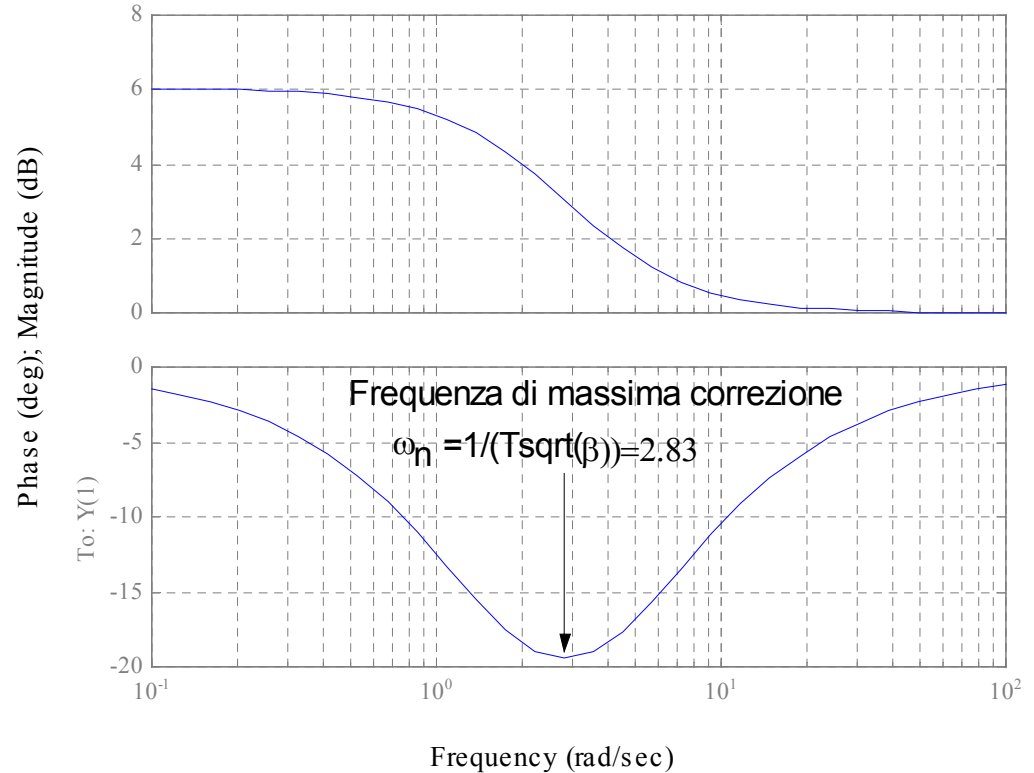
num=[1 4]; den=[1 2]; s1=tf(num,den); Transfer function:(s + 4)/(s+2)
 → T=0.25; β=2;

Pole-zero map



Bode Diagrams

From: U(1)



Le due frequenze limite sono rispettivamente a $1/(\beta T) \div 1/T$.

A seconda del valore di β , il massimo di fase che si puo' sottrarre e' dell'ordine di -90° . La massima quantita' di fase viene sottratta ad

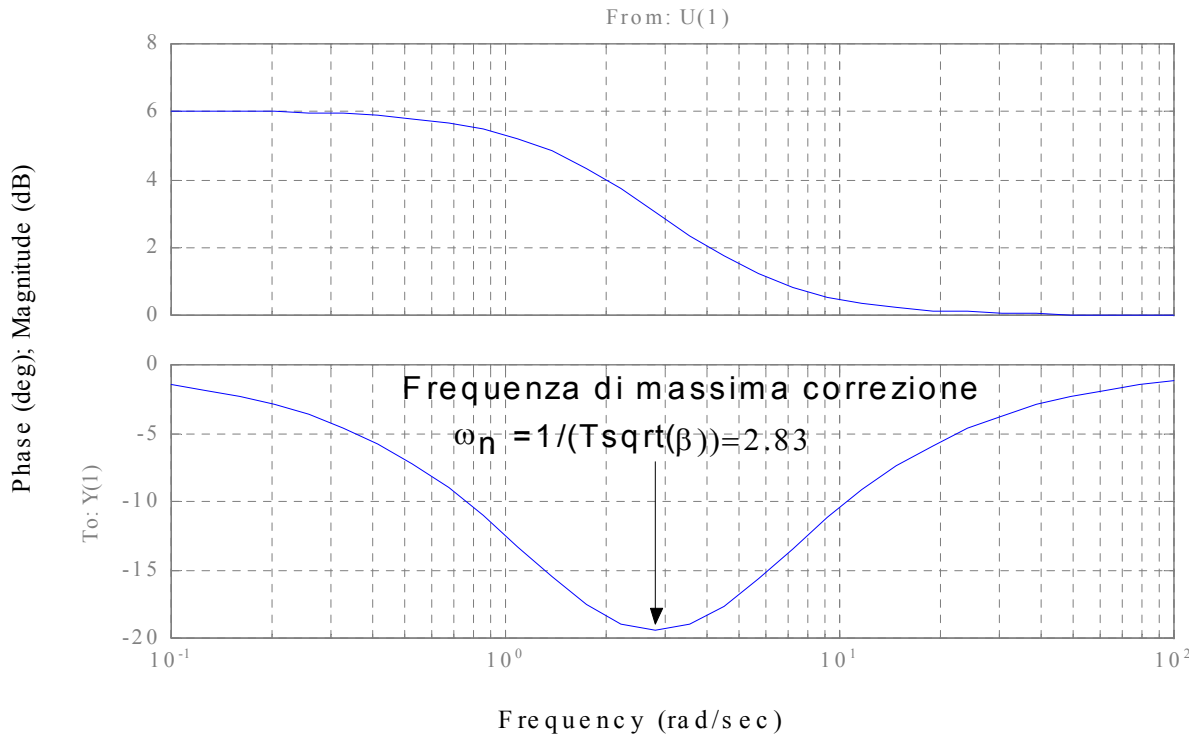
una frequenza data da: $\omega_n = \frac{1}{T\sqrt{\beta}}$

Equazione per

la massima fase sottratta

$$\sin \phi = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

Bode Diagrams



$$20 \cdot \log_{10}(2)$$

$$6.0206$$

$$\beta = 2$$

Il principale effetto di questo compensatore si rileva dal diagramma del modulo: viene aggiunto guadagno alle basse frequenze per un importo pari ad β . L'incremento di guadagno alle basse frequenze provoca una diminuzione dell'errore a regime in loop chiuso in retroazione di un fattore pari a β . Poiché il guadagno di questo compensatore è circa unitario alle medie ed alte frequenze, la risposta transitoria e la stabilità del sistema da controllare non sono influenzate molto.

Codice Matlab, per progettare un compensatore a ritardo di fase:

```
num=input('coefficienti del numeratore del sistema da correggere es. [1 2] ');
den=input('coeff. Denom. del sistema da correggere es. conv([1 2],[1 2 1]) ');
figure
s1=tf(num,den)
grid on
margin(s1)
'Valuta dal Diagramma di Bode la correzione di fase'
pause
T=input('Tempo di ritardo in secondi= ');
fimax=input('Fase massima correzione negativa in gradi= ');
fimax=fimax*pi/180;
a=(1+sin(fimax))/(1-sin(fimax))
wn=1/(T*sqrt(a))
pause
numlag=[a*T 1];
denlag=a*[T 1];
comp=tf(numlag,denlag)
grid on
bode(s1)
hold on
bode(comp)
newnum=conv(num,numlag);
newden=conv(den,denlag);
scorr=tf(newnum,newden)
figure
grid on
bode(scorr)
```

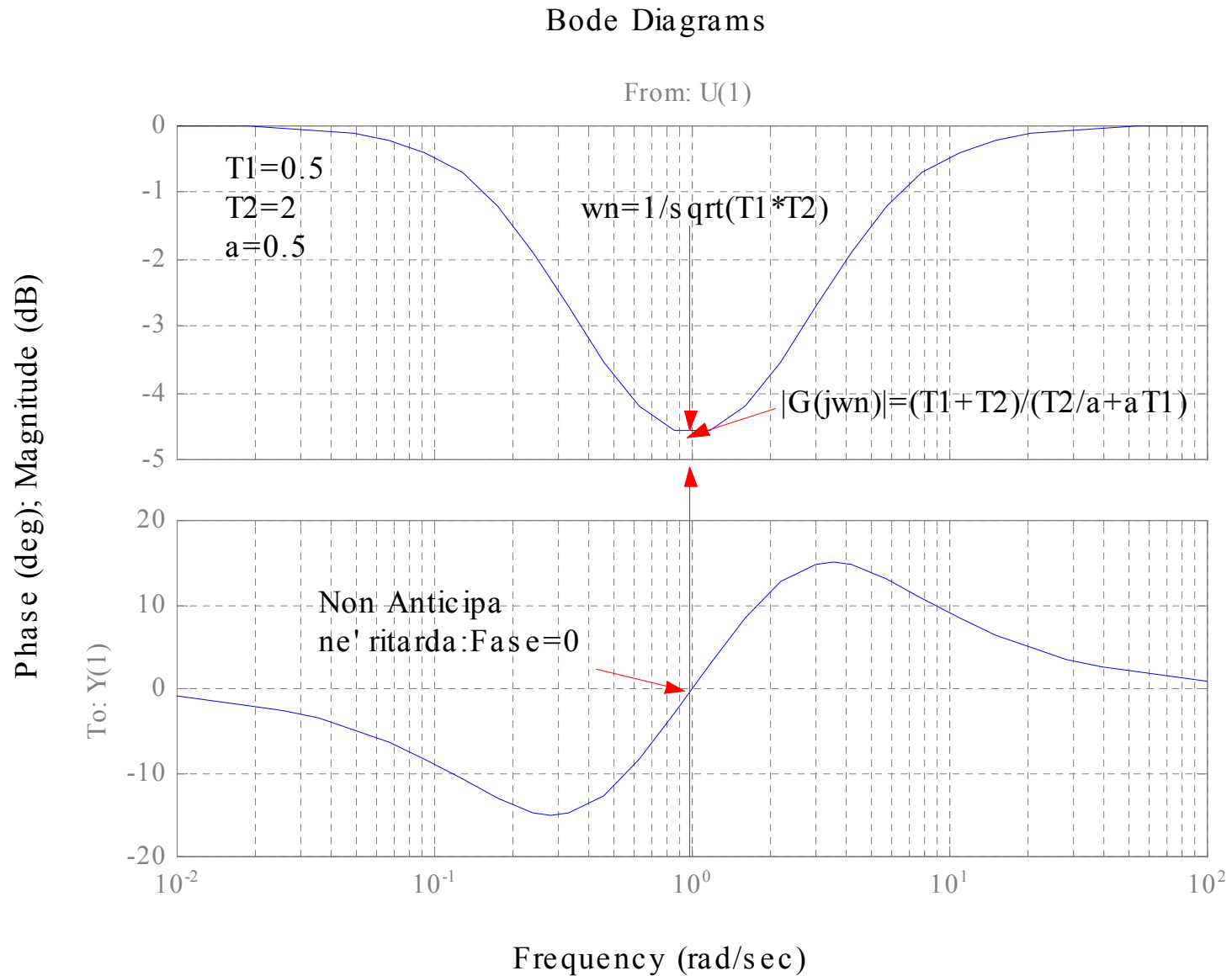
Compensatore ad anticipo-Ritardo di fase (**Rete a sella**) mediante uso della risposta in frequenza

Un compensatore ad anticipo-ritardo di fase combina gli effetti di un compensatore ad anticipo con quelli di un compensatore a ritardo di fase. Il risultato è un sistema compensato con una migliore risposta transitoria, una migliore stabilità e un ridotto errore a regime. Per realizzare un compensatore ad anticipo-ritardo si progetta prima il compensatore ad anticipo per ottenere la risposta transitoria e la stabilità desiderate, poi si progetta il compensatore a ritardo per migliorare la risposta a regime. La funzione di trasferimento complessiva è data da:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{(1 + \mathbf{T}_1 s)(1 + \mathbf{T}_2 s)}{\left(1 + \frac{\mathbf{T}_2 s}{\mathbf{a}}\right)(1 + \mathbf{a} \mathbf{T}_1 s)} \quad (\mathbf{a} < 1)$$

con $\mathbf{T}_1 < \mathbf{T}_2$ ed $\mathbf{a} < 1$

Il diagramma di Bode si presenta così':



Scrivendo i polinomi a numeratore e a denominatore in forma non fattorizzata si ha:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1 + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$\delta' = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2}{\sqrt{\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2}} > 1$$

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{T}_1 / \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{T}_2}{\sqrt{\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2}} > \delta' > 1$$

Osserviamo che in corrispondenza della pulsazione $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2}}$

la rete non sfasa e attenua di $|\mathbf{G}(j\omega_n)| = \frac{\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2}{\frac{\mathbf{T}_2}{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \mathbf{T}_1}$

Per $0 < \omega < \omega_n$ la rete fornisce un ritardo di fase, per $\omega_n < \omega < \infty$ un anticipo di fase. In corrispondenza della pulsazione nulla e della pulsazione infinita non si ha ne' sfasamento ne' attenuazione.

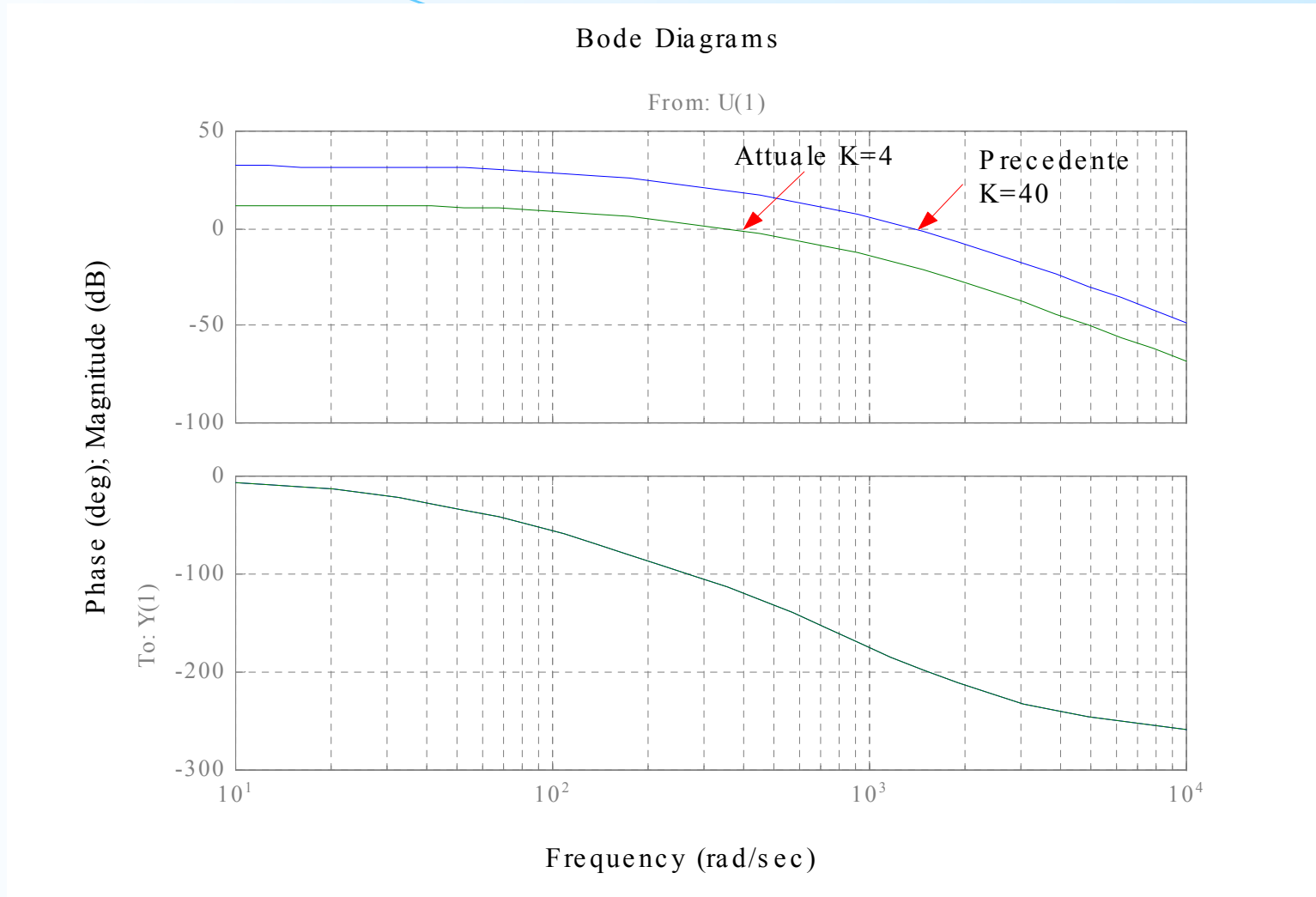
Compensazione mediante reti ritardatrici.

Lo studio della compensazione di un sistema di controllo parte dall'analisi dei diagrammi di Bode per verificare se e quanto risultano soddisfatti i dati di specifica del sistema da compensare. Un primo metodo può essere quello di effettuare una compensazione per semplice variazione (ad esempio diminuzione) della costante di guadagno del sistema. È un metodo che può andare bene per sistemi di tipo 0 e tipo 1. Facciamo un esempio e consideriamo la seguente f.d.t. di un certo impianto:

$$G(j\omega) = \frac{K}{\left(1 + \frac{j\omega}{100}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{1000}\right)^2}$$

dove $K=40$. Vogliamo che $K_p = 40$ e vogliamo ottenere un margine di fase di $45^\circ \pm 5^\circ$.

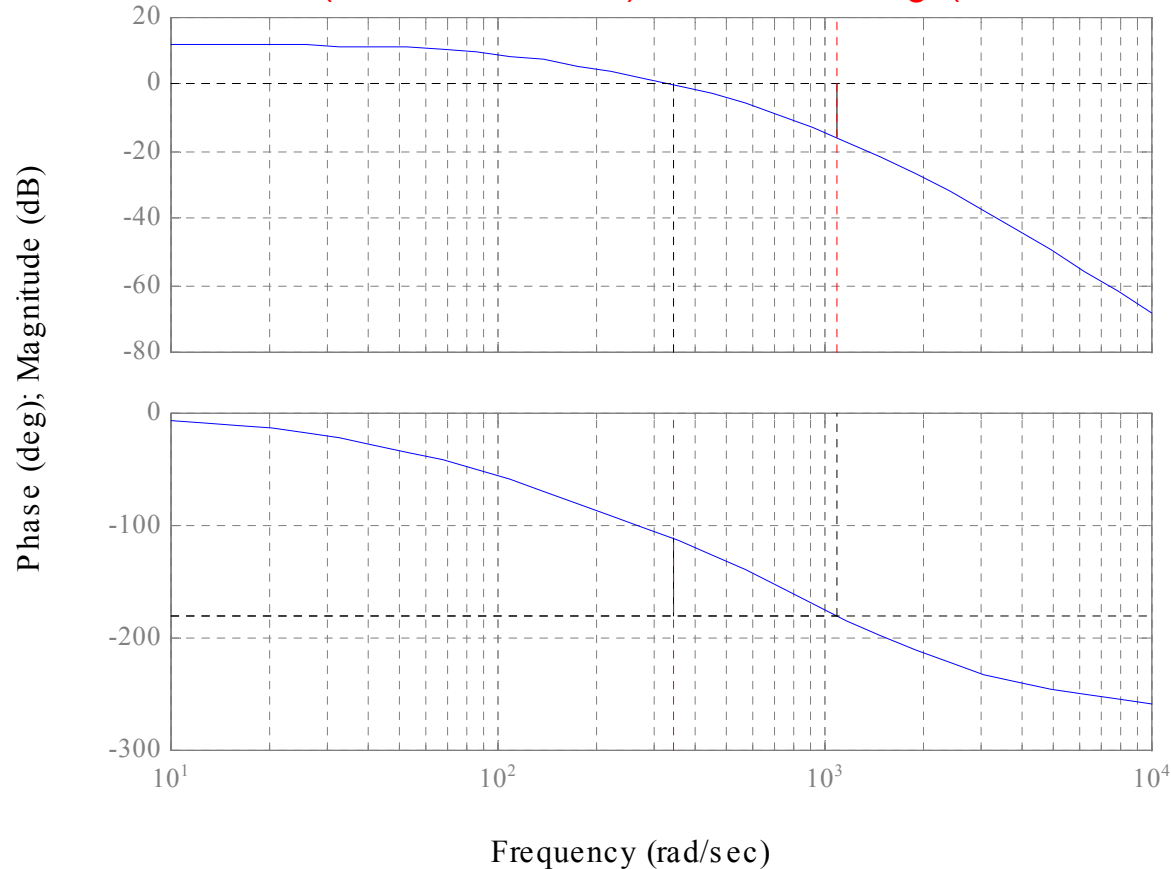
I diagrammi di Bode sono i seguenti



Diminuendo il guadagno di un fattore 10 (-20 dB) si ottiene un buon margine di fase e il sistema viene stabilizzato, come si puo' vedere dal successivo diagramma di Bode

Bode Diagrams

$G_m=15.635$ dB (at 1095.4 rad/sec), $P_m=68.313$ deg. (at 343.52 rad/sec)



Osserviamo, tuttavia che una correzione consistente nella riduzione della costante di guadagno, puo' avere effetti non desiderabili se si tiene conto che per la reiezione dei disturbi e la prontezza del sistema occorre avere un elevato guadagno di anello.

Inoltre le specifiche spesso impongono di ottenere un assegnato errore a regime e la diminuzione del guadagno quindi e' vincolata da un valore minimo dello stesso. In casi del genere si può intervenire con una rete ritardatrice: la rete diminuisce il guadagno alle alte frequenze senza influire sulla costante di guadagno. Ad esempio se nel caso dell'esempio che abbiamo fatto i dati di specifica non permettono di far diminuire il guadagno, con una rete ritardatrice possiamo risolvere il problema. Per il suo progetto occorre determinare come si vede dalla fdt

$$G_c(s) = K_c \frac{(Ts + 1)}{(T\beta s + 1)} \quad \beta > 1$$

β e T . Ricordiamoci che β rappresenta di quanto diminuisce il guadagno in alta frequenza, mentre $1/T$ e $1/(\beta T)$ rappresentano le pulsazioni entro cui viene sottratta la maggior parte della fase. Conviene pertanto sottrarre fase a bassa frequenza e scegliere opportunamente sia T che β mediante la procedura riportata nel seguito.

Passo 1: Correggere il guadagno per ottenere il K_p conforme alle specifiche

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) G(s)$$

dove: $G_c(s)$ é il..compensatore..a..ritardo: $K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{T\beta}\right)} \dots \beta > 1$

$$40 = \lim_{s \rightarrow 0} K_c \times \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{T\beta}\right)} \times \frac{40}{\left(1 + \frac{s}{100}\right) \left(1 + \frac{s}{1000}\right)^2}$$

$$40 = K_c \beta (40)$$

$$K_c \beta = 1$$



La nuova funzione di trasferimento é data da:

$$\mathbf{G(s) = Kc\beta} \frac{40}{\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{100}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{s}}{1000}\right)^2}$$

$$\mathbf{G(s) =} \frac{40}{\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{100}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{s}}{1000}\right)^2}$$

Passo 2: Diagramma di Bode della FdT

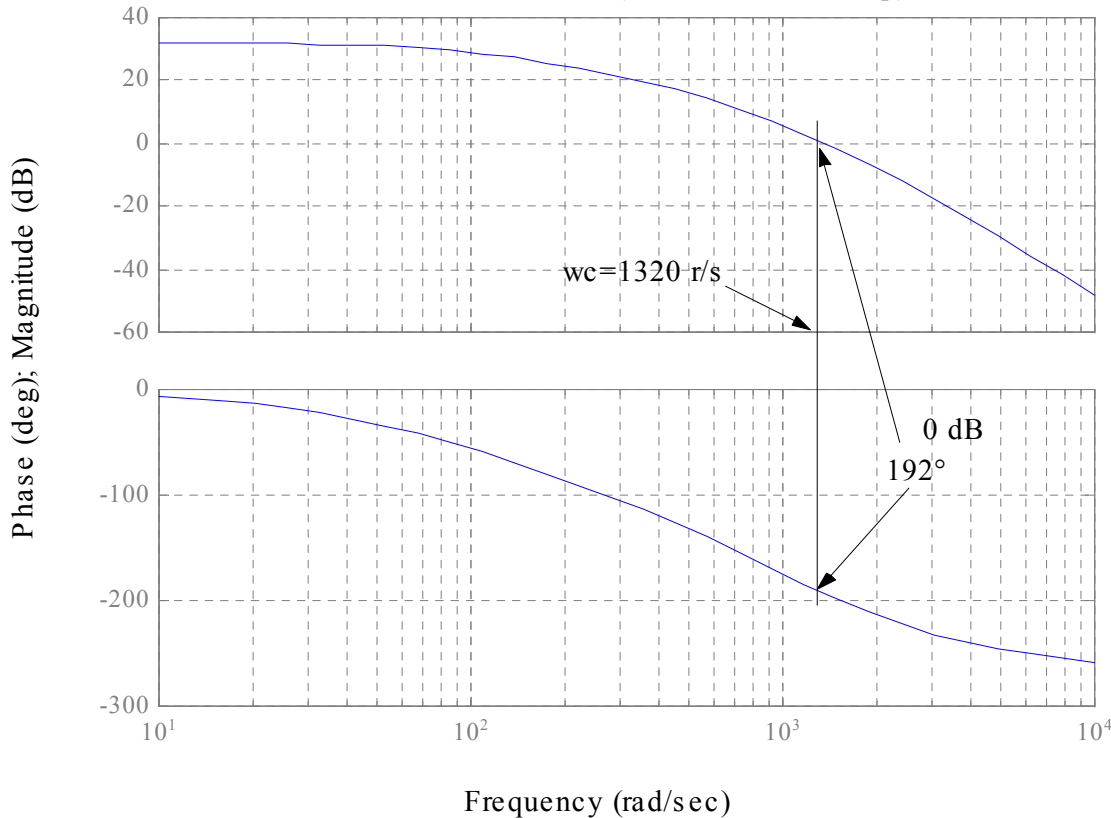


Passo 2: Diagramma di Bode della FdT

$$G(j\omega) = \frac{40}{\left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{1000}\right)^2}$$

Bode Diagrams

Gm = 0 dB, Pm = 0 (unstable closed loop)



Dal diagramma di Bode rileviamo che alla frequenza di attraversamento a 0 dB corrisponde una fase di -192° e quindi un margine di fase di -12° . Il sistema pertanto risulta instabile.

Passo 3: Determinazione della correzione al margine di fase e della nuova frequenza di attraversamento del guadagno unitario(0 dB) **Progetto del compensatore a ritardo**

Il margine richiesto è di $45^\circ \pm 5^\circ$. Dobbiamo introdurre un fattore di compenso **FCom** (scelto tra $5^\circ \div 20^\circ$) per il guadagno per tener conto dello slittamento del punto di attraversamento dello 0 dB.

Perciò l'angolo totale che serve è:

$$\phi_M = \text{richiesto} - \text{margine..attuale} + \text{FCom}$$

$$\text{Incremento di fase} = -180^\circ + 45^\circ + 10^\circ = -125^\circ \rightarrow \omega = 397 \text{ rad/s}$$

Localizzazione dello ZERO del compensatore

Per trovare $\frac{1}{T}$:

Scegliamo $\frac{1}{T}$ una decade sotto: quindi $\frac{1}{T} = 39.7 \text{ rad/s}$

Passo 4: Ricaviamo il POLO del compensatore

Il guadagno alla frequenza di 397 rad/s \rightarrow 17.5 dB

$$20 \log_{10}(\beta) = 17.5 \text{ dB}$$

$$\therefore \beta = 7.5$$

perciò la posizione del polo è a

$$\frac{1}{\beta T} = \frac{1}{7.5} \times 39.7 = 5.3$$

Passo 6: Ricaviamo il guadagno del compensatore

$$K_c \beta = 1$$

$$K_c = \frac{1}{7.5} = 0.133$$

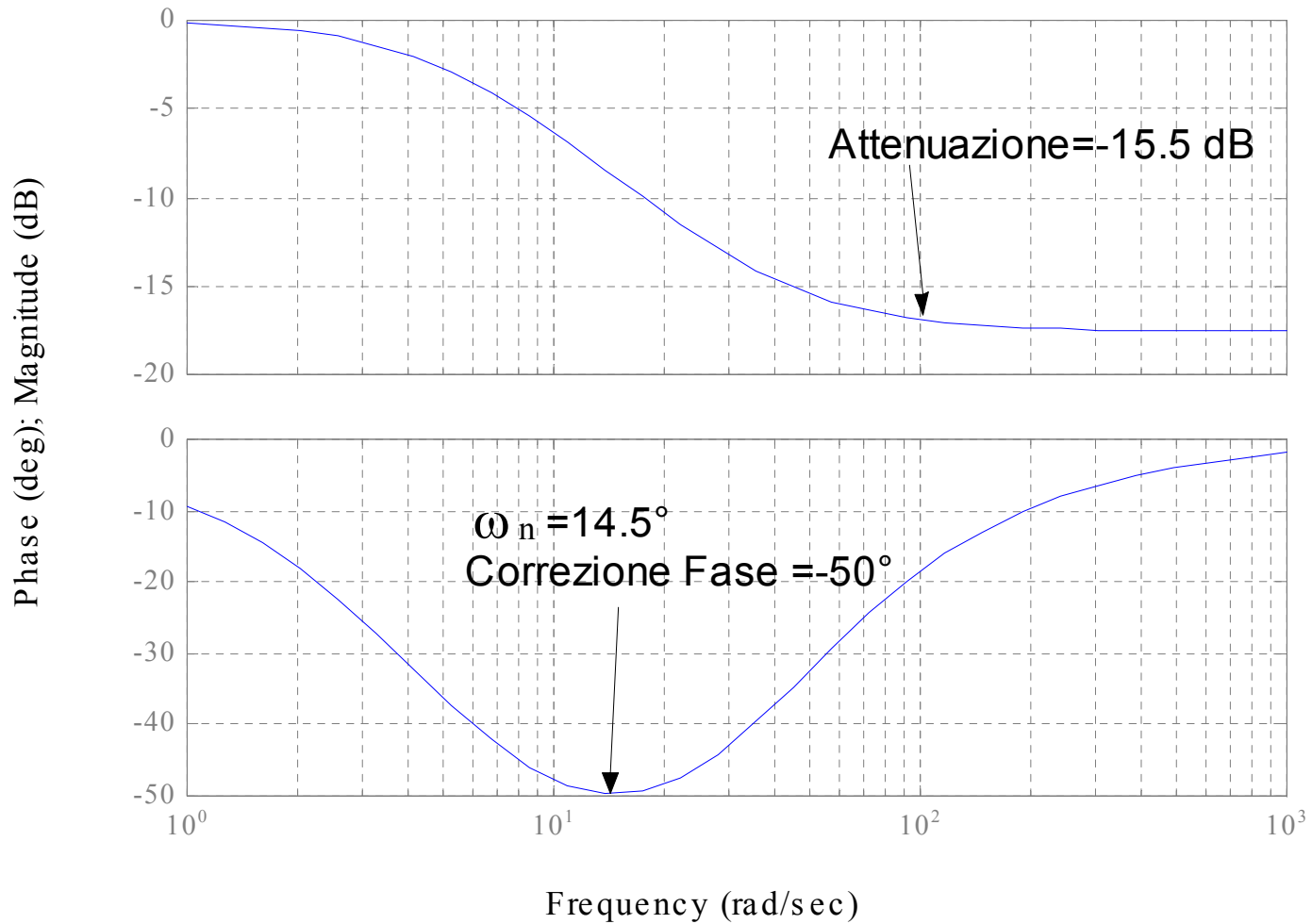
$$\rightarrow G_c(s) = 0.133 \frac{(s + 39.7)}{(s + 5.3)}$$

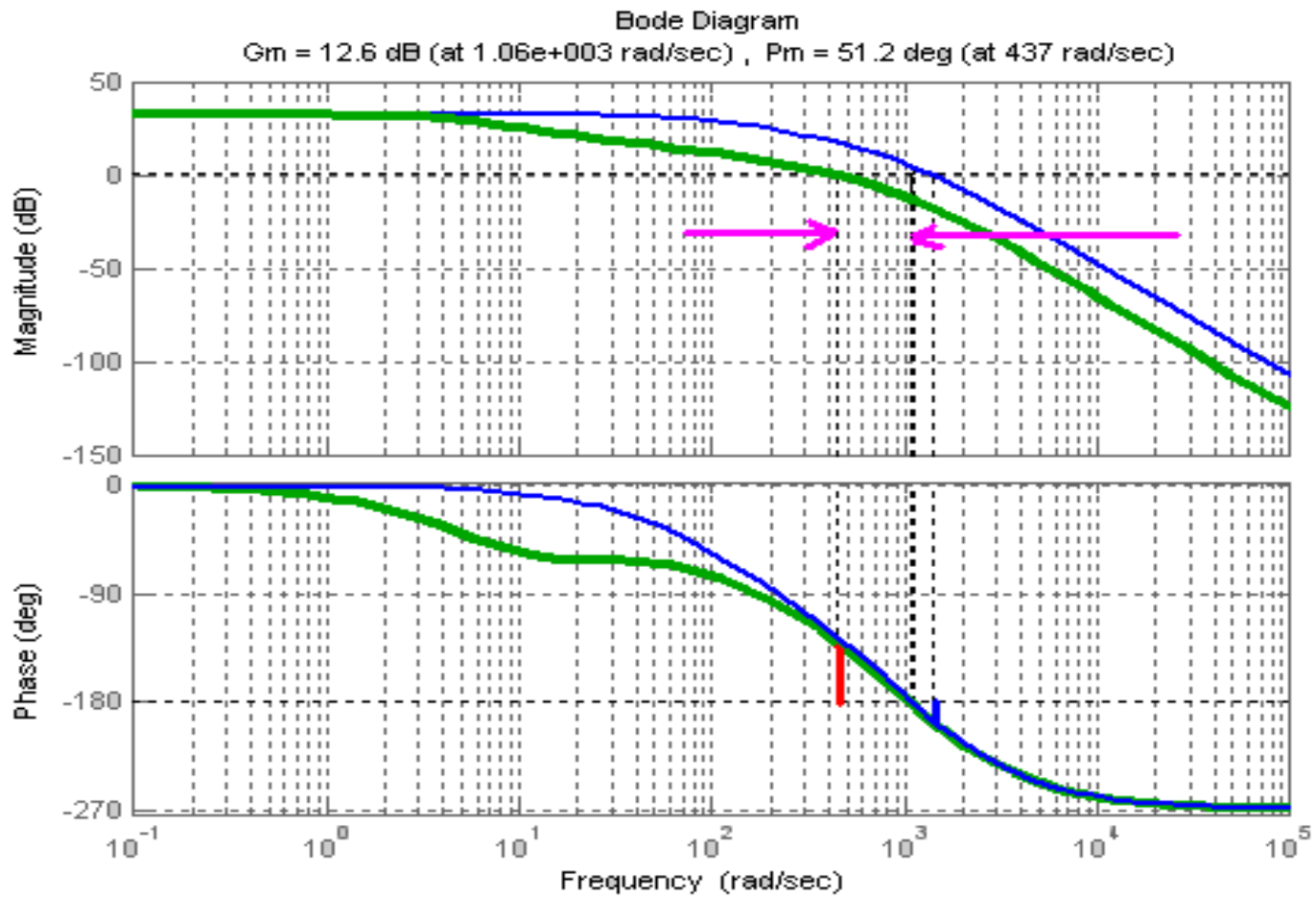
$$G_c(s)G(s) = 0.133 \frac{(s + 39.7)}{(s + 5.3)} \cdot \frac{40}{\left(1 + \frac{s}{100}\right) \left(1 + \frac{s}{1000}\right)^2}$$

FdT compensata
a loop aperto

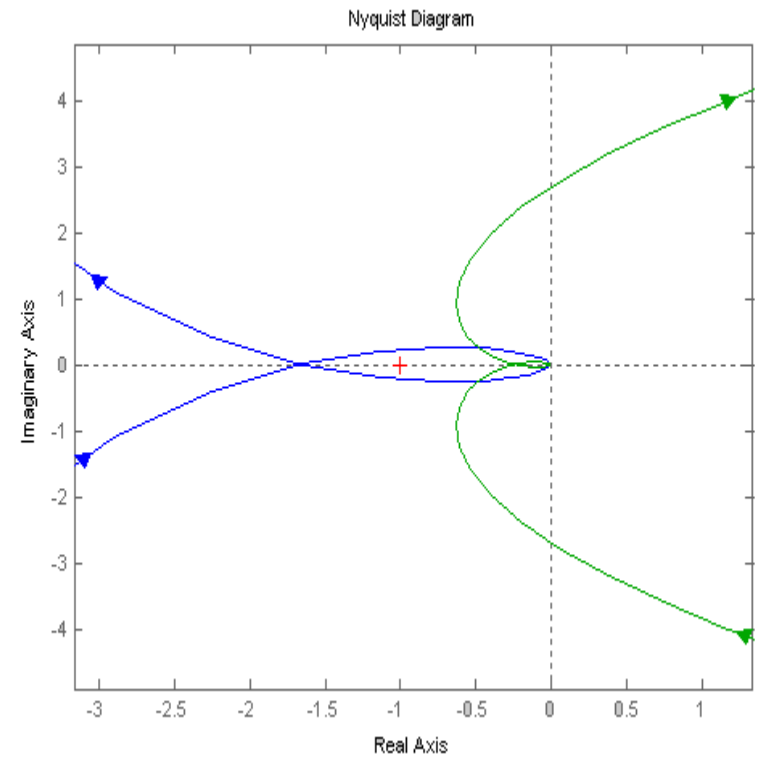
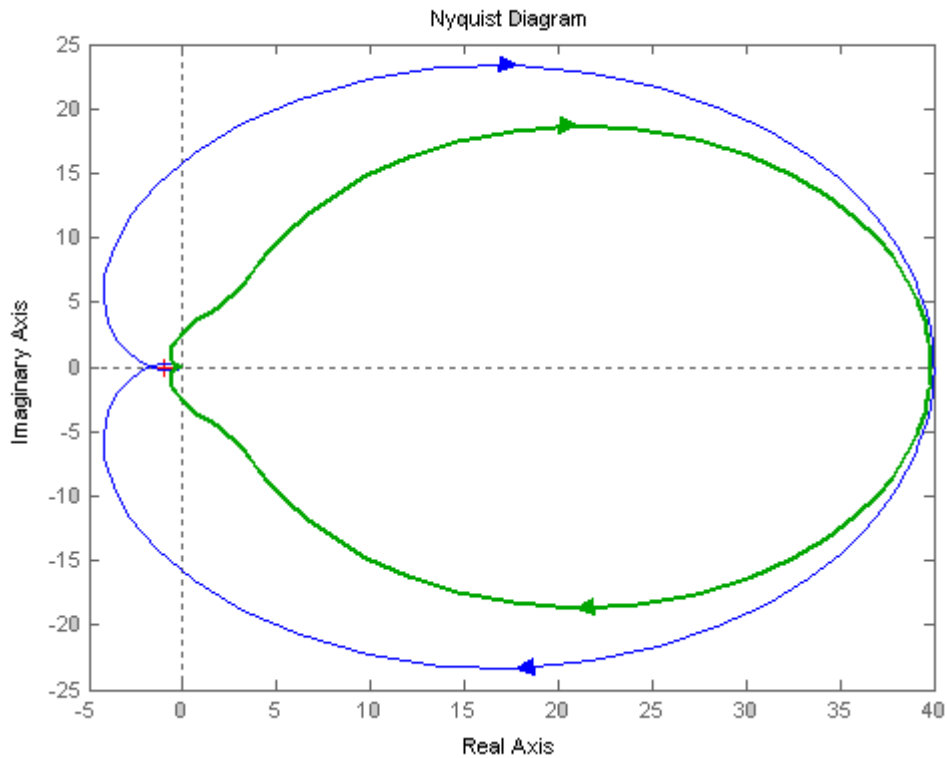
Bode Diagrams

$G_m = \text{Inf}$, $P_m = \text{Inf}$





Dal diagramma del sistema compensato si vede chiaramente che la banda passante è di circa 550 rad/sec ed è molto diminuita rispetto a quella del sistema non corretto. Pertanto attraverso una serie di tentativi si può trovare il trade-off adeguato per avere una sufficiente velocità di risposta e nel contempo un basso errore a regime con il sistema stabile in modo abbastanza robusto (margine di fase $> 45^\circ$). Il margine di fase ottenuto è un po' più grande di quanto previsto in specifica. Per correggerlo si possono ripetere i passi dal 3 al 6 correggendo o il fattore di compenso per la fase oppure andando a scegliere lo zero del compensatore mezza decade più in giù del punto di attraversamento desiderato, eseguendo tutti i passi previsti. Si riporta qui anche il diagramma di Nyquist del sistema non compensato e del sistema con compensatore a ritardo di fase



Ingrandendo in corrispondenza di -1 si vede chiaramente che il sistema non corretto e' instabile, mentre quello corretto (curva verde), risulta Stabile.

Compensazione mediante reti anticipatrici.

Nell'esempio precedente sulle reti ritardatrici usate come compensatori si è visto che l'effetto stabilizzante è legato più propriamente all'attenuazione alle alte frequenze che non al ritardo di fase che da solo potrebbe costituire un effetto nocivo ai fini della stabilità del sistema da controllare. Il meccanismo di funzionamento di una rete anticipatrice è differente, in quanto, a valle della giunzione sommanza dove è inserita introduce un termine proporzionale alla derivata dell'errore, che si somma al segnale di errore applicato all'ingresso della rete.

$$G_c(s) = \frac{1 + Ts}{1 + aTs} \quad (a < 1)$$

1. Si determina il margine di fase del sistema non compensato e si sceglie un valore di a tale che l'anticipo di fase massimo sia sufficiente a riportare il margine di fase al valore voluto.
2. Si determina T per tentativi in modo che alla pulsazione corrispondente al guadagno unitario si abbia il margine di fase voluto, correggendo, se è il caso il valore di a .

La rete anticipatrice ha l'effetto di aumentare il guadagno alle alte frequenze e quindi la larghezza di banda del sistema in retroazione. Per quanto concerne il transitorio, si ottiene una risposta piu' pronta (minor tempo di salita nella risposta a scalino).

Vediamo con l'impianto avente funzione di trasferimento data da:

$$G(j\omega) = \frac{100}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{10}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)}$$

come si puo' procedere per compensare il sistema con una rete anticipatrice. Specifiche: margine di fase di $45^\circ \pm 5^\circ$. $K_V = 4 \text{ s}^{-1}$

Passo 1: Correggere il guadagno per ottenere il K_V conforme alle specifiche

Passo 2: Diagramma di Bode della FdT Corretta per il guadagno

Passo 3: Determinazione della correzione al margine di fase e della nuova frequenza di attraversamento del guadagno unitario (0 dB). Progetto del compensatore ad anticipo.

Passo 4: Determinazione del POLO del compensatore

Passo 5: Determinazione della nuova frequenza di attraversamento dello 0 dB

Passo 6: Localizzazione dello ZERO del compensatore

Passo 1: Correggere il guadagno per ottenere il K_V conforme alle specifiche

Quindi sapendo che $K_V = 40 \text{ s}^{-1}$. Da qui troviamo il nuovo guadagno e verifichiamo che il risultato soddisfi le specifiche applicando il teorema del valore finale:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s K G_c(s) G(s) H(s)$$

dove: $G_c(s)$ é il compensatore: $\frac{(1 + Ts)}{(1 + \alpha Ts)}$

$$40 = \lim_{s \rightarrow 0} s K \frac{(1 + Ts)}{(1 + \alpha Ts)} \times \frac{100}{s \left(1 + \frac{s}{10}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)}$$

$$40 = K(100)$$

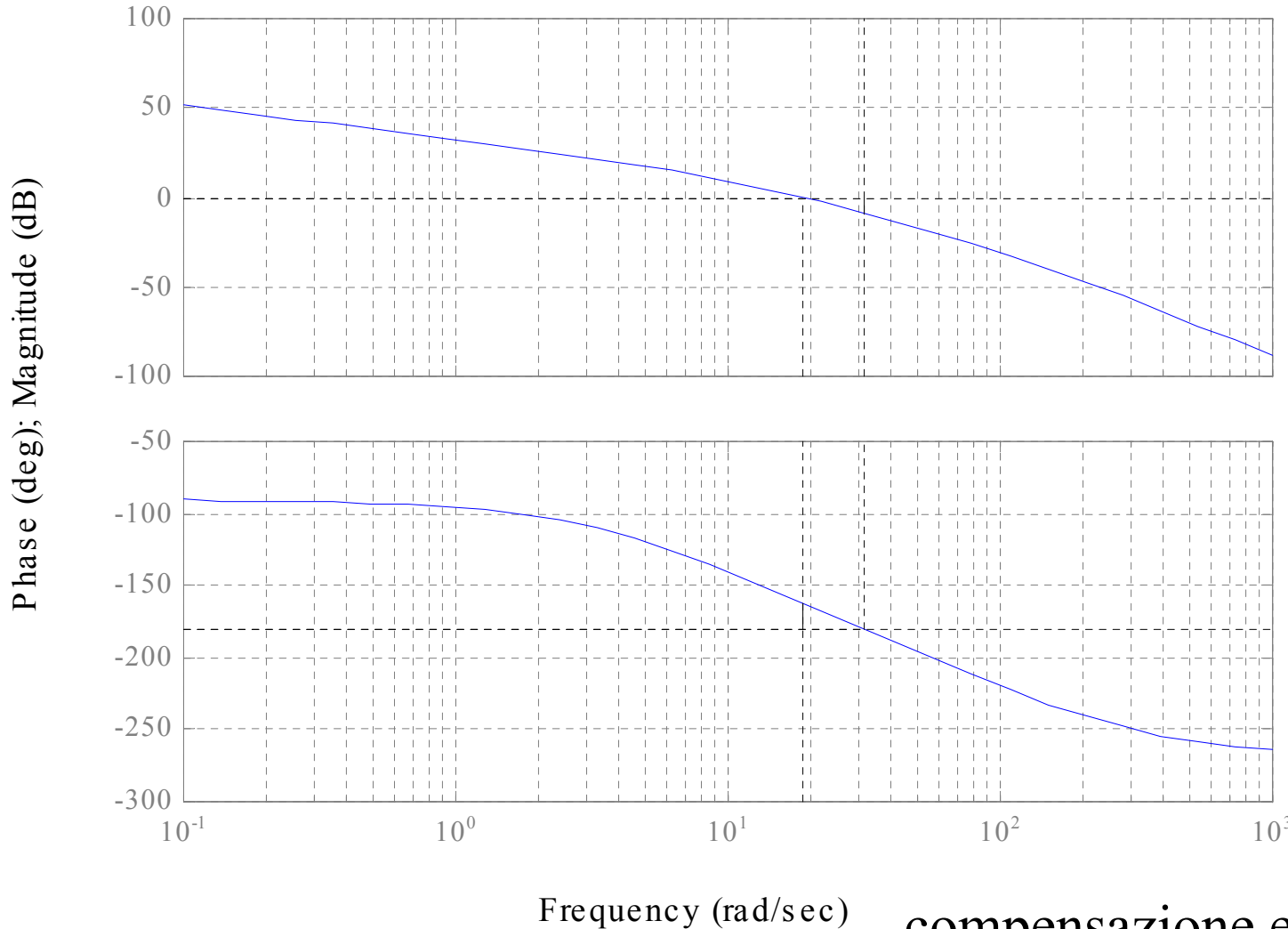
$$K = 0.4$$

$$G(s) = 0.4 \frac{100}{s \left(1 + \frac{s}{10}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)} \rightarrow G(s) = \frac{40}{s \left(1 + \frac{s}{10}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)}$$

Passo 2: Diagramma di Bode della FdT Corretta per il guadagno

Bode Diagrams

Gm=8.7867 dB (at 31.623 rad/sec), Pm=17.705 deg. (at 18.612 rad/sec)



Il margine di fase del sistema non compensato risulta pari a $+17.7^\circ$ a $\omega \approx 18.6$ rad/sec. Il sistema risulta stabile, ma siamo fuori specifica per il margine di fase. Occorre operare una compensazione e la effettueremo con una rete ad anticipo.

Passo 3: Determinazione della correzione al margine di fase e della nuova frequenza di attraversamento del guadagno unitario (0 dB). Progetto del compensatore ad anticipo.

$$G_c(s) = \frac{(1 + Ts)}{(1 + \alpha Ts)} \quad \alpha < 1$$

Il margine richiesto è di $45^\circ \pm 5^\circ$

Perciò : $-180 + 45 = -135^\circ \pm 5^\circ$ è la fase richiesta a 0dB.

Con $K_V = 40 \text{ s}^{-1}$ e margine di fase = 17.7° (dal diagramma di Bode)

Dobbiamo introdurre un fattore di compenso per la fase

FCom ($5^\circ \div 20^\circ$) per il guadagno per tener conto dello slittamento del punto di attraversamento dello 0 dB.

Perciò l'angolo totale che serve è:

$$\phi_M = \text{richiesto} - \text{margine attuale} + \text{FCom}$$

$$\phi_M = 45 - 17.7 + 10 = -37.3^\circ$$

Passo 4: Ricaviamo il POLO del compensatore

Troviamo α :

$$\sin(\phi_M) = \frac{(1 - \alpha)}{(1 + \alpha)}$$

quindi

$$\alpha = \frac{(1 - \sin(\phi_M))}{(1 + \sin(\phi_M))}$$

$$\alpha = \frac{(1 - \sin(37.3))}{(1 + \sin(37.3))}$$

$$\alpha = 0.2453$$

Passo 5: Determiniamo la nuova frequenza di attraversamento dello 0 dB

Dal valore di α trovato otteniamo la magnitudine del sistema non compensato essendo il fattore di attenuazione pari ad A ed è dato da:

$$\mathbf{A(dB)} = -20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) = -20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{0.2453}} \right) = \mathbf{-6.10dB}$$

Posizioniamo questa attenuazione sul diagramma di bode del modulo e troviamo la frequenza corrispondente: $-6.1 \text{ dB} \rightarrow \omega_A = 25.5 \text{ rad/sec}$ che sarà il nuovo punto di zero crossing.

Passo 6: Localizzazione dello ZERO del compensatore

Per trovare T usiamo la relazione:

$$\omega_A = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

Perciò il compensatore finale é dato da:

$$25.5 = \frac{1}{T\sqrt{0.2453}}$$

$$T = 0.0792$$

$$\mathbf{G}_c(\mathbf{s}) = \frac{(0.0792\mathbf{s} + 1)}{(0.0194\mathbf{s} + 1)} \quad \text{dove: } \mathbf{G}_c(\mathbf{s}) = \frac{(1 + \mathbf{T}\mathbf{s})}{(1 + \alpha\mathbf{T}\mathbf{s})}$$

cosi' il sistema finale ha F.d.T :

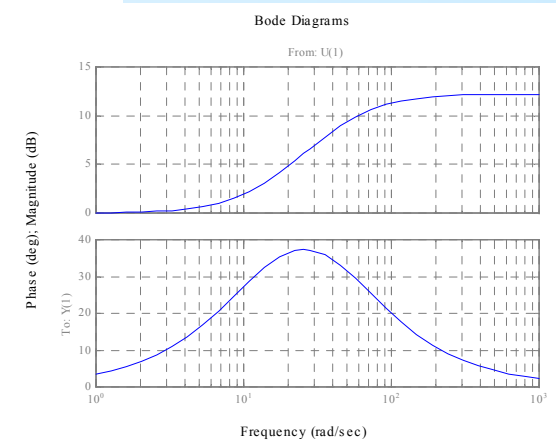
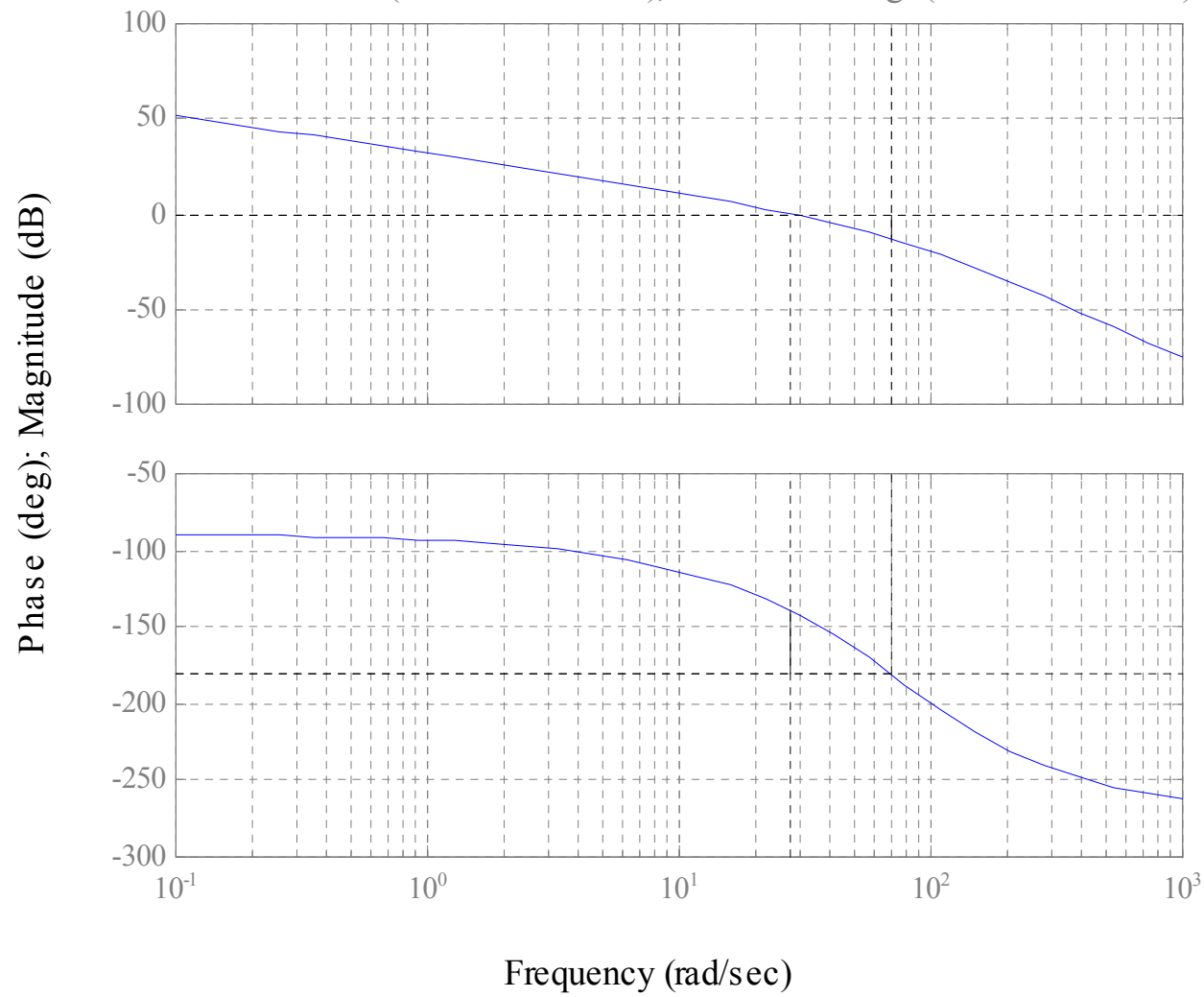
$$\mathbf{T}_F(\mathbf{s}) = \mathbf{G}_c(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{s}) = \frac{(1 + \mathbf{T}\mathbf{s})}{(1 + \alpha\mathbf{T}\mathbf{s})} \times \frac{40}{\mathbf{s}(0.1\mathbf{s} + 1)(0.01\mathbf{s} + 1)}$$

$$\mathbf{T}_F(\mathbf{s}) = \frac{(0.0792\mathbf{s} + 1)}{(0.0194\mathbf{s} + 1)} \frac{40}{\mathbf{s}(0.1\mathbf{s} + 1)(0.01\mathbf{s} + 1)}$$

Il diagramma di Bode del sistema compensato e del compensatore sono mostrati di seguito:

Bode Diagrams

Gm=12.869 dB (at 69.043 rad/sec), Pm=41.517 deg. (at 27.773 rad/sec)



ed il sistema ha un buon margine di fase in accordo alle specifiche.

Compensazione mediante reti ad anticipo-ritardo

La rete ad anticipo-ritardo o rete a sella presenta il vantaggio di riunire in sé i vantaggi dell'una e dell'altra configurazione. In aggiunta il progetto della compensazione con i diagrammi di Bode è molto facilitato, rispetto alle reti esaminate precedentemente, per il fatto che in corrispondenza della pulsazione

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad \text{la rete non sfasa e}$$

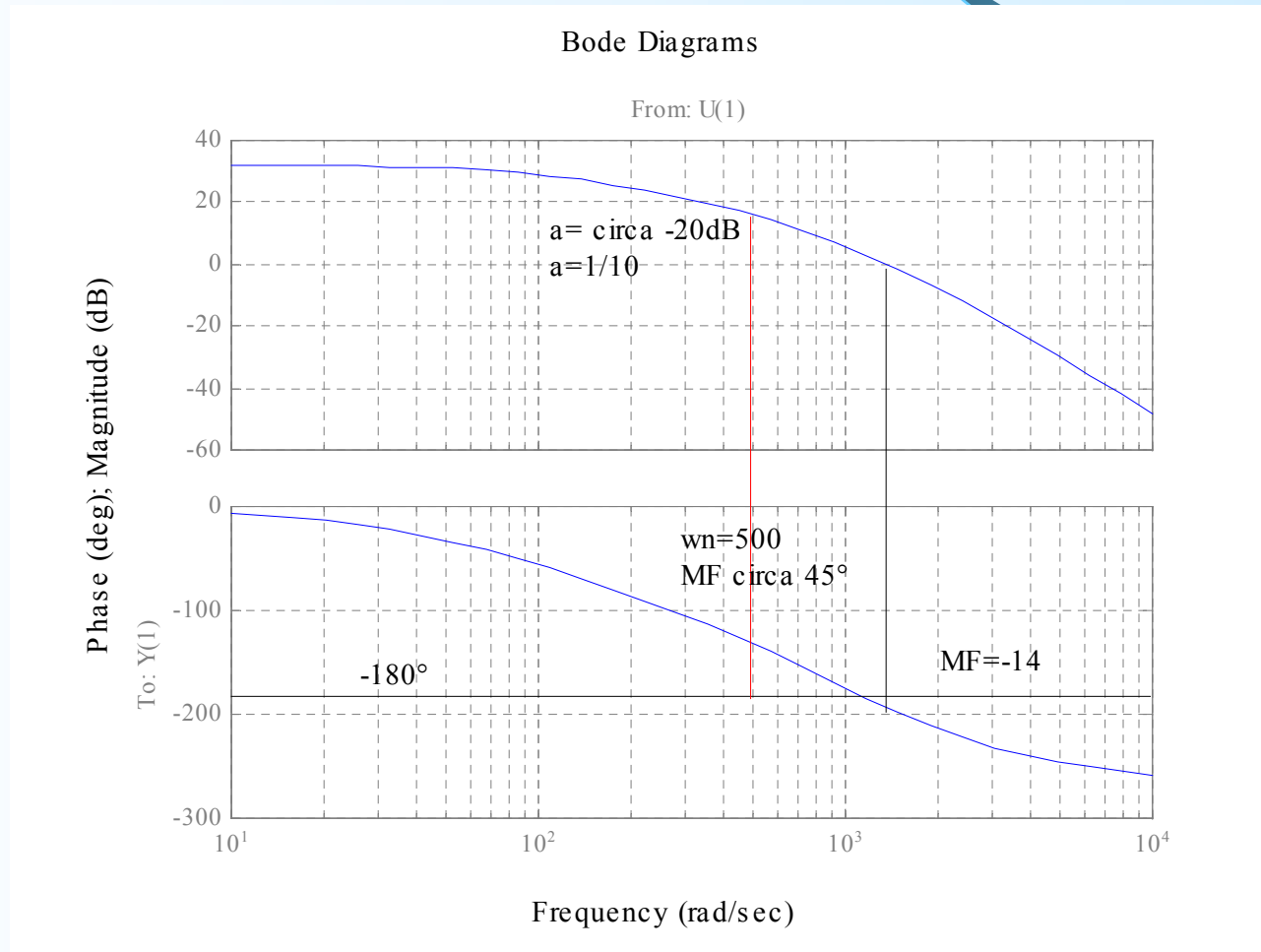
attenua di $|G(j\omega_n)| = \frac{T_1 + T_2}{\frac{T_2}{a} + aT_1}$

Fissato il margine di fase voluto, si determina la pulsazione ω_n alla quale la fase è uguale a $-\pi + M_F$ e l'attenuazione a che occorrerebbe introdurre per abbassare il diagramma delle ampiezze in modo da ottenerne l'intersezione con l'asse delle ascisse alla stessa pulsazione ω_n . In modo analogo si procede per ottenere un margine di ampiezza voluto: si sceglie ω_n uguale alla pulsazione alla quale il sistema non compensato presenta la fase $-\pi$ e a in modo che in corrispondenza di tale pulsazione l'ampiezza della funzione di risposta armonica del sistema corretto presenti il margine voluto.

Consideriamo uno degli esempi già fatti:

$$G(j\omega) = \frac{K}{\left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{1000}\right)^2}$$

dove $K=40$. Il diagramma di Bode è presentato nella figura :



Dal diagramma di Bode si vede che deve essere $\omega_n \approx 500$ rad/sec e $a=1/10$. Restano da determinare T_1 e T_2 . Si possono determinare se si considera il seguente sistema e si impone che $|G(j\omega)|=1$

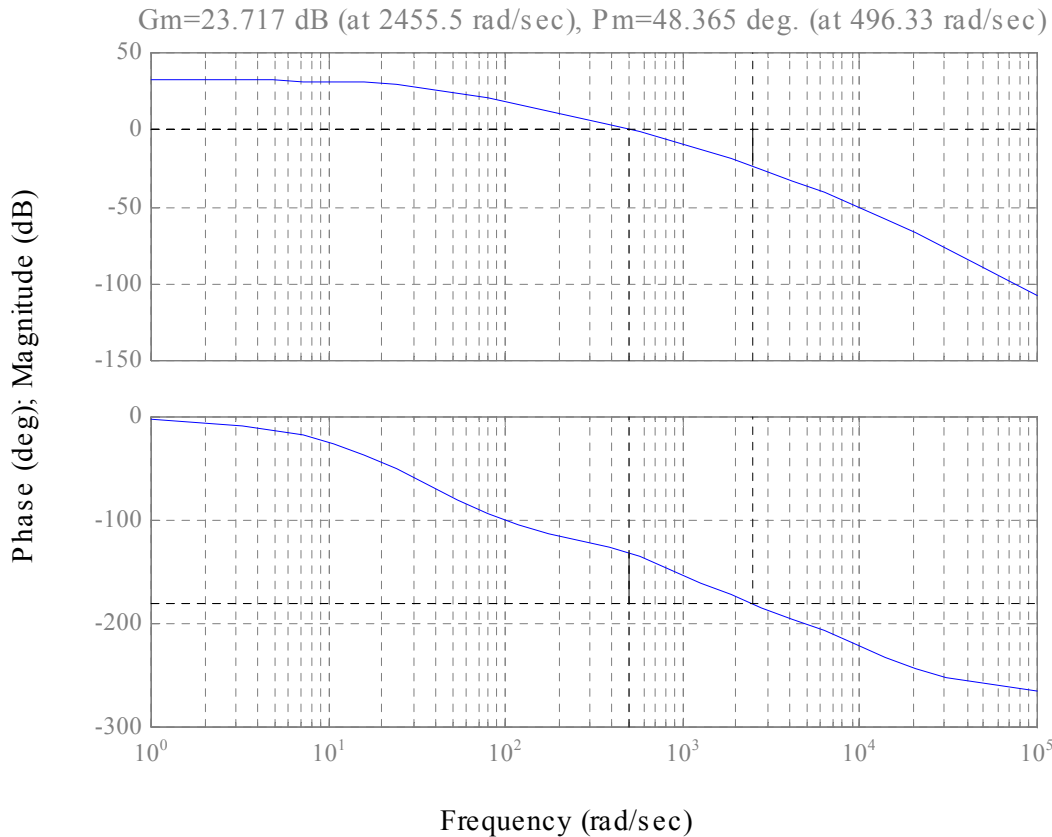
$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad |G(j\omega_n)| = \frac{T_1 + T_2}{\frac{T_2}{a} + aT_1} \rightarrow T_1 = 0.00063 \text{ e } T_2 = 0.0063.$$

Rapporto $k = T_2 / T_1 = 10$
tempi

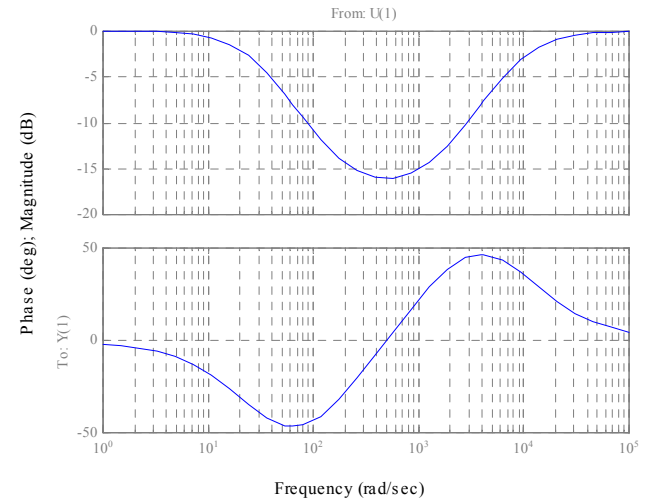
Possiamo anche procedere scegliendo il rapporto tra i tempi T_1 e T_2 ad esempio pari a un certo valore k che deve servire a osservare le specifiche per la larghezza di banda o per le proprietà filtranti del sistema. Scegliendo un valore del rapporto dei tempi $k = T_2 / T_1$ pari ad esempio a 10 si ha: $T_1 = \sqrt{k} / \omega_n$ $T_2 = 1 / (\sqrt{k} \omega_n)$ e la rete correttiva ha pertanto funzione di trasferimento pari a:

$$G(s) = \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{\left(1 + \frac{T_2 s}{a}\right)(1 + aT_1 s)} \quad (a < 1) \rightarrow \frac{(4 \cdot 10^{-6} s^2 + 0.006112 s + 1)}{(4 \cdot 10^{-6} s^2 + 0.03874 s + 1)}$$

Bode Diagrams



Bode Diagrams



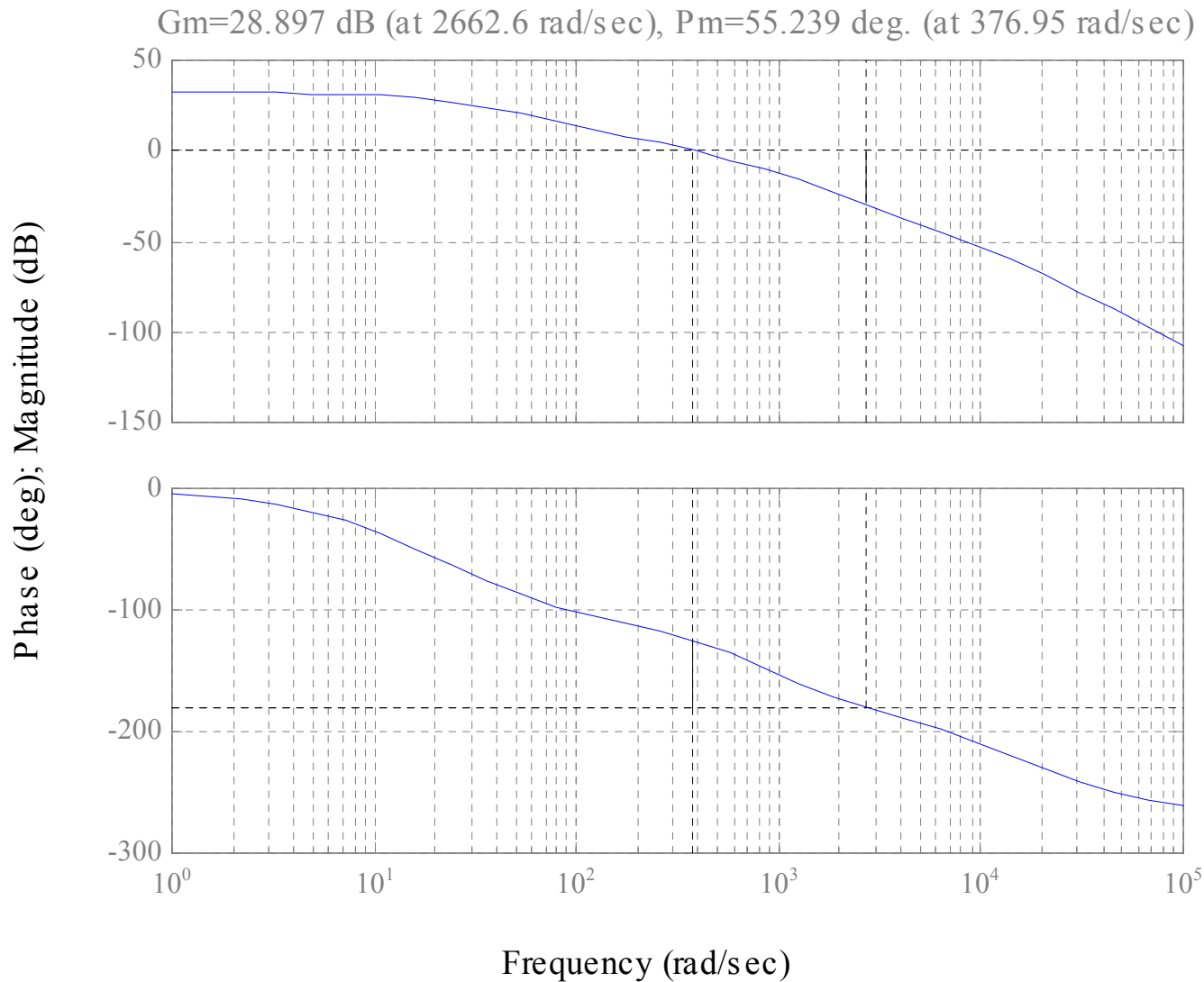
$$(0.00016s^2 + 0.2445s + 40)$$

$$(4 \cdot 10^{-14} s^5 + 4.714 \cdot 10^{-10} s^4 + 8.72 \cdot 10^{-7} s^3 + 0.0004899 s^2 + 0.05074 s + 1)$$

Dal grafico si può osservare che le specifiche sono rispettate.

NB provando si è trovato $k=7.2$ come valore adeguato per le specifiche da rispettare.

Infatti per $k=10$ si ha: Bode Diagrams



con una larghezza di banda abbastanza ridotta e che fa perdere prontezza al sistema.