

3.4 Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ x + y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

e scrivere le equazioni (parametriche) della retta che passa per la soluzione e per il punto $(1,1,0)$.

Risposta. Il determinante dei coefficienti delle prime 3 equazioni non è nullo, quindi la matrice dei coefficienti ha rango 3. La matrice completa ha determinante nullo, quindi ha rango 3. Cancellando l'ultima equazione e risolvendo con la regola di Cramer, si trova che la soluzione è $(0,1,-1)$:

Con meno calcoli, dalla prima e terza equazione si ricava $x + y = 1$ che, sostituito nella prima porta $z = -1$ e sostituito nella quarta porta $y = 1$; ciò implica $x = 0$. Poichè $(0,1,-1)$ soddisfa anche la seconda equazione, questa è combinazione delle altre, per cui la matrice completa ha determinante nullo.

Le equazioni parametriche della retta che passa per $(0,1,-1)$ e $(1,1,0)$ si ricavano dalla formula del testo e si ottiene: $x = t$; $y = 1$; $z = t - 1$.

3.5 Sia R il rettangolo di vertici:

$$(0, -2) \quad (1, -2) \quad (1, 2) \quad (0, 2)$$

e

$$f(x, y) = \sqrt{x^3 - 2x^2y + 4x}.$$

Dimostrare che R è contenuto nel dominio di f e trovare $f(R)$.

Risposta. I punti del rettangolo sono definiti da $0 \leq x \leq 1$ e $-2 \leq y \leq 2$. Occorre dimostrare che per questi valori il radicando è positivo.

Poichè $x \geq 0$, basta dimostrare che $x^2 - 2xy + 4 \geq 0$. Essendo $-2 \leq y \leq 2$, il discriminante del trinomio di II grado è negativo, per cui il trinomio ha sempre segno positivo, e ciò risolve la questione.

Il minimo della funzione in R è 0, assunto per $x = 0$. Essendo x positivo, il massimo si ha se $-2xy > 0$ quindi per y negativo. Ne segue che il punto di massimo è $(1,-2)$ in cui la funzione vale 3.

Essendo R un convesso, in base al teorema di Bolzano il codominio è $[0, 3]$.

Assumendo che f è definita in R , massimo e minimo possono anche calcolarsi guardando la funzione sulla frontiera, poichè la derivata rispetto ad y non è nulla all'interno. Si ottiene così lo stesso risultato.