11 . Spazi topologici compatti.

Un'altra nozione topologica importante è la *compattezza*. Vediamo di che si tratta.

Uno spazio topologico (S , A) è detto *compatto* se ha la seguente proprietà :

(k) *da ogni ricoprimento di aperti di S si può estrarre un ricoprimento finito.*

In simboli :

Per ogni famiglia $\{ A_i \}$ $i \in I$ di aperti tali che $S = \bigcup A_i$ esiste $F \subseteq I$ con F ***finito*** tale che sia $S = \bigcup Aj$, $j \in F$.

Un sottoinsieme Y dello spazio topologico (S , A) è detto compatto se risulta compatto lo spazio topologico (Y , A_Y).

E' facile riconoscere che il sottoinsieme Y è compatto se e solo se è verificata la seguente proprietà :

(k') Per ogni famiglia $\{ A_i \}$ $i \in I$ di aperti tali che $Y \subseteq \bigcup A_i$ esiste $F \subseteq I$ con F ***finito*** tale che sia $Y \subseteq \bigcup Aj$, $j \in F$.

(Esempi e controesempi : ...)

La compattezza è una proprietà topologica in quanto si conserva per omeomorfismi . Più in generale sussiste la seguente :

Proposizione 11.1 Sia $f: S \to S'$ *una funzione continua tra due spazi topologici (S , A) ed (S , A'). Se X è un sottoinsieme compatto di S allora f(X) è un sottoinsieme compatto di S' .*

Dimostrazione*.* Per provare che f(X) è compatto basterà verificare la proprietà (k') . Sia quindi $\{ A_i^{'} \}$ $i \in I$ una famiglia di aperti di S' tali che

$$f(X) \subseteq \bigcup A_i^{'} \ .$$

Da questa segue, passando alla controimmagine , e chiamando per ogni $i \in I$, $A_i = f^{-1}(A'_i)$

$$X \subseteq f^{-1}[f(X)] \subseteq \bigcup A_i \quad , \quad i \in I$$

Ora essendo f continua, per ogni $i \in I$ l'insieme A_i è un aperto e poiché X è compatto esiste $F \subseteq I$ con F ***finito*** tale che sia

$$X \subseteq \bigcup Aj \quad , \quad j \in F$$

Da questa segue

$$f(X) \subseteq f(\bigcup Aj) \subseteq \bigcup f(Aj) \subseteq \bigcup A'_j \quad , \; j \in F$$

e si ha quindi l'asserto.

Sono molto utili le proprietà espresse dalle due proposizioni che seguono.

Proposizione 11.2 *Sia (S, A) uno spazio topologico compatto. Un sottoinsieme Y chiuso di S risulta compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{A_i\}$, $i \in I$ una famiglia di aperti tali che sia

$$Y \subseteq \bigcup A_i \; , i \in I \; .$$

Poiché Y è chiuso S-Y è un aperto e si ha ovviamente :

$$S = (S - Y) \cup \bigcup A_i \; , \qquad i \in I \; .$$

Poiché S è compatto esiste $F \subseteq I$ con F ***finito*** tale che sia

$$S = (S - Y) \cup \bigcup Aj \quad , \quad j \in F$$

e da questa segue che è

$$Y \subseteq \bigcup Aj \quad , \quad j \in F$$

e ciò prova che Y è compatto.

Non sempre però un sottoinsieme compatto di uno spazio topologico è chiuso. Sia ad esempio (R , S) lo spazio topologico ottenuto considerando come aperti di R, il vuoto, R e tutte le semirette] ∞ , a [, $a \in R$ sinistre aperte. In tale spazio un sottoinsieme Y ridotto ad un singolo punto è compatto ma non è chiuso.

Sussiste però la seguente :

Proposizione 11.3 *Sia (S, A) uno spazio topologico di Hausdorff. Un sottoinsieme Y compatto di S risulta chiuso.*

Dimostrazione. Per provare che Y è chiuso basterà controllare che S - Y è aperto. Sia quindi y un punto di S – Y . Per ogni punto x di Y si ha ovviamente $x \neq y$ e quindi , essendo lo spazio di Hausdorff , esistono due aperti A_x e V_y^x l'uno contenente x e l' altro contenente y tra loro disgiunti. Si ha ovviamente :

$$Y \subseteq \bigcup_{x \in Y} A_x$$

Essendo Y compatto esistono $x_1 , x_2 , \ldots, x_n$ in Y tali che sia :

$$Y \subseteq A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \ldots \cup A_{x_n}$$

Siano : V_y^1 l' aperto contenente y e disgiunto da A_{x_1}

V_y^2 l' aperto contenente y e disgiunto da A_{x_2}

……

V_y^n l' aperto contenente y e disgiunto da A_{x_n}

L'insieme $V_y = V_y^1 \cap V_y^2 \cap \ldots \cap V_y^n$ è quindi un aperto contenente y ed esso come ora proveremo , è disgiunto da Y .

Infatti se esiste z in $Y \cap V_y$ allora z appartenendo a V_y appartiene ad *ognuno* degli aperti $V_y^1, V_y^2 ,\ldots , V_y^n$ ed appartenendo ad Y ($Y \subseteq A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \ldots \cup A_{x_n}$) esiste j tra 1 ed n tale che il punto z appartiene ad A_{xj} . Pertanto z appartiene a $V_y^j \cap A_{xj}$ il che è assurdo perché V_y^j e A_{xj} sono disgiunti .

L'aperto V_y è quindi contenuto in S- Y e così l'insieme S-Y , essendo intorno di ogni suo punto, è un aperto e si ha così l'asserto.

(Proviamo ora che : Se (S, A_d) è uno spazio con topologia indotta dalla matrica d, allora : K compatto $\Rightarrow$ K chiuso e limitato. Dimostrazione. ....)

Significativa è la seguente proprietà degli spazi compatti .

Proposizione 11.4 *Ogni sottoinsieme infinito di uno spazio topologico compatto ha almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Sia (S, A) uno spazio topologico compatto e sia Y un sottoinsieme infinito di S Supponiamo per assurdo che Y non abbia punti di accumulazione. Per ogni x di S è allora possibile trovare un aperto A_x tale che sia $A_x \cap Y = \varnothing$ oppure $A_x \cap Y = \{ x \}$.

Si ha ovviamente $S = \bigcup A_x$ è poiché S è compatto esistono n punti $x_1, x_2, .., x_n$ di S per cui sia $S = A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \ldots \cup A_{x_n}$.

Si ha :

$Y = Y \cap S = Y \cap (A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \ldots \cup A_{x_n}) =$

$= (Y \cap A_{x_1}) \cup (Y \cap A_{x_2}) \cup \ldots \cup (Y \cap A_{x_n})$

da cui segue che Y è finito essendo , per ogni i= 1,..,n $| Y \cap A_{x_i} | \leq 1$.

12. ***I compatti di R dotato della topologia naturale.***

Indichiamo con N la topologia naturale di R . Ricordiamo che gli aperti di tale topologia sono il vuoto , R e le unioni di intervalli aperti.

Così come abbiamo caratterizzato i sottoinsiemi connessi di (R , N) proviamo a caratterizzare i suoi sottoinsiemi compatti.

Premettiamo alcune nozioni. Un sottoinsieme Y di R si dice *limitato* se è contenuto in un intervallo chiuso [a , b]. Perverremo alla caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di R dopo aver acquisito la seguente :

Proposizione 12.1 *Ogni intervallo chiuso e limitato [a , b] è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\{ A_i \}$, $i \in I$ una famiglia di aperti di R la cui unione contiene [a , b]. Sia T il seguente sottoinsieme di [a , b]

$T = \{x \in [a , b] \ : \text{ esiste } F \subseteq I \text{ con } F$ ***finito*** $: [a , x] \subseteq \bigcup Aj \ , \ j \in F \}$

L' insieme T è non vuoto perché $a \in T$ e perverremo all' asserto se mostreremo che $b \in T$. Poiché T è una parte di $[a, b]$ esso è limitato superiormente e quindi possiamo considerare il suo estremo superiore che indichiamo con c.

Risulta quindi $a \leq c \leq b$. Poiché $[a, b] \subseteq \bigcup A_i$ allora esiste un aperto A_h della famiglia $\{A_i\}$ che contiene a. Esiste allora un intervallo aperto $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ di centro a contenuto in A_h. Fanno allora parte di T tutti i punti di $[a, b] \cap [a, a + \varepsilon[$. Quindi è $a < c$.

Poiché c appartiene ad $[a, b] \subseteq \bigcup A_i$ esiste un aperto A_j della famiglia $\{A_i\}$ che contiene c. Conseguentemente esiste un intervallo aperto $I_{ä} =]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ contenuto in A_j. Essendo $c = \sup T$ esiste $y \in T$ tale che sia $c - \varepsilon < y \leq c$. Quindi $c \in T$.

Se fosse per assurdo $c < b$ ogni punto z maggiore di c e minore di b ed appartenente ad $I_{ä} \cap]c, b]$ farebbe parte di T.

La proposizione che segue fornisce una caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di (R, N).

Proposizione 12.2 *Un sottoinsieme Y di (R, N) è compatto se e solo se esso è chiuso e limitato. (Teorema di H. P. Borel in R)*

Dimostrazione. Supponiamo che Y sia chiuso e limitato e proviamo che è compatto. Poiché è limitato esso è contenuto in un intervallo chiuso $[a, b]$. Ma tale intervallo è un compatto e quindi Y essendo un suo chiuso (perché $[a, b]$ è chiuso) è un compatto (cfr. Proposizione 11.2).

Viceversa supponiamo che Y sia compatto e proviamo che è chiuso e limitato. Poiché (R, N) è di Hausdorff allora Y essendo compatto è chiuso per la proposizione 11.3. Inoltre esso è limitato.

Infatti sia y un punto di Y e sia $R = \{A_n\}$ la famiglia di aperti così definita : per ogni n intero sia

$$A_n =]y - n, y + n[$$

E' chiaro che è $Y \subseteq \bigcup A_n$, $n \in N$ e poiché Y è compatto Y è contenuto nell'unione di un numero finito A_{m_1} , A_{m_2} ,… , A_{m_t} di tali aperti.

Detto $m = \max \{ m_1, m_2, .., m_t \}$ si ha

$$Y \subseteq A_{m_1} \cup A_{m_2} \cup \ldots \cup A_{m_t} =]\, y-m,\ y+m\, [\subseteq [\, y-m,\ y+m\,]$$

e ciò prova che Y è limitato.

Il teorema ora provato per i sottoinsiemi di R è un caso particolare di un teorema generale che caratterizza i sottoinsiemi compatti di R^n dotato della topologia naturale. Proveremo infatti successivamente con argomentazioni del tutto simili , che i sottoinsiemi compatti di R^n , dotato della topologia naturale , sono tutti e soli i sottoinsiemi chiusi e limitati.

Per fare ciò dobbiamo però prima introdurre la nozione di spazio prodotto di due spazi topologici.

13. Spazio topologico prodotto.

Siano (S_1 , A_1) ed (S_2 , A_2) due spazi topologici. Sia $S = S_1 \times S_2$ il prodotto cartesiano degli insiemi S_1 ed S_2 . Gli elementi di S sono quindi le coppie ordinate (x_1, x_2) con $x_1 \in S_1$ ed $x_2 \in S_2$. La famiglia B di parti di S i cui elementi sono tutti i possibili prodotti

$$A_1 \times A_2 \quad \text{con} \quad A_1 \in A_1 \quad \text{ed} \quad A_2 \in A_2$$

verifica , come facilmente si controlla , le proprietà a) e b) della proposizione 1.1 ed è quindi in grado di generare una topologia A su S i cui aperti sono il vuoto e tutte le possibili unioni di elementi di B . La topologia A di S così ottenuta è detta la *topologia prodotto* delle due topologie A_1 ed A_2 e lo spazio topologico (S , A) cosi ottenuto è chiamato *spazio topologico prodotto*.

Evidentemente la definizione di spazio prodotto può essere estesa al caso in cui i fattori siano un numero finito maggiore o eguale a due.

Lo spazio prodotto "eredita" le eventuali buone proprietà topologiche dei due spazi che lo hanno generato. Noi per brevità non mostreremo in dettaglio questo aspetto anche se molte dimostrazioni sono piuttosto semplici. Ci limitiamo quindi solo ad elencare ***alcune*** proprietà dello spazio prodotto.

a) *le due funzioni naturali (proiezioni)*

$$p_1 : (x_1, x_2) \in S_1 \times S_2 \rightarrow x_1 \in S_1$$
$$p_2 : (x_1, x_2) \in S_1 \times S_2 \rightarrow x_2 \in S_2$$

che legano lo spazio prodotto ai singoli spazi sono entrambe continue, aperte e suriettive.

b) *lo spazio prodotto di due spazi di Hausdorff è di Hausdorff. (Dimostrazione. ...)*

c) *Lo spazio prodotto di due spazi a base numerabile è a base numerabile. (Dimostrazione. ...)*

d) *lo spazio prodotto di due spazi connessi è connesso. (Dimostrazione. ...)*

e) *lo spazio prodotto di due spazi compatti è compatto.*

(Esempi ed esercizi sugli spazi prodotto).

14. I compatti di R^n dotato della topologia naturale.

In questo numero forniremo alcune caratterizzazioni dei sottoinsiemi compatti di R^n munito della topologia naturale. Preliminarmente diamo alcune definizioni.

Sia $\underline{y} = (y_1, y_2,\ldots, y_n)$ un punto di R^n e siano $d_1, d_2,\ldots, d_n$ n numeri reali positivi.

Si definisce *n-rettangolo* (o *n-cubo*) *aperto* di centro $\underline{y}$ e semidimensioni $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ il seguente sottoinsieme di R^n :

$$K(\underline{y},(d_1,d_2,\ldots,d_n)) = \,]y_1 - d_1, y_1 + d_1[\times]y_2 - d_2, y_2 + d_2[\times \ldots \times]y_n - d_n, y_n + d_n[.$$

L' *n-rettangolo chiuso* di centro $\underline{y}$ e semidimensioni $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ è il seguente sottoinsieme di R^n :

$K(\underline{y},(d_1,d_2,\ldots,d_n)) = [y_1 - d_1, y_1 + d_1] \times [y_2 - d_2, y_2 + d_2] \times \ldots \times [y_n - d_n, y_n + d_n]$.

Quando è $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = d$ l'n-rettangolo viene chiamato *n-cubo* di centro $\underline{y}$ e di lato 2d.

Non è difficile provare che fissato un cerchio aperto $C(\underline{y}, r)$ di centro $\underline{y}$ e raggio r si possono trovare due n-rettangoli aperti di centro $\underline{y}$ ed opportune semidimensioni, uno contenuto nel cerchio C e l'altro contenente il cerchio C.

Gli n-rettangoli aperti di R^n al pari dei cerchi aperti hanno le proprietà a) e b) della Proposizione 1.1 e quindi definiscono anch'essi una topologia di R^n. Per l'osservazione fatta prima un sottoinsieme che sia unione di cerchi aperti è anche unione di n-rettangoli aperti e viceversa. Pertanto gli n-rettangoli aperti ed i cerchi aperti definiscono la stessa topologia su R^n.

La topologia naturale di R^n che è quella indotta dalla metrica euclidea può quindi anche pensarsi come la topologia che si ottiene su R^n quando si faccia il prodotto di (R, N) per se stesso n volte.

Gli n-rettangoli chiusi essendo prodotto di intervalli chiusi di R sono prodotto di spazi compatti e sono quindi anch'essi compatti.

Un sottoinsieme Y di R^n è detto *limitato* se esso è contenuto in un n-rettangolo o equivalentemente in un cerchio.

Siamo ora in grado di provare il seguente :

Teorema (di H. P. Borel) *Un sottoinsieme Y di R^n è compatto se e solo se esso è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo che Y sia chiuso e limitato. Poiché esso è limitato allora esso è contenuto in n-rettangolo chiuso K . Ma K , come già osservato, è un compatto e quindi Y essendo un suo chiuso è anch'esso compatto.

Viceversa supponiamo che Y sia compatto. Poiché lo spazio R^n è di Hausdorff Y è chiuso. Proviamo che è anche limitato. Infatti sia $\underline{y}$ un punto di Y e sia $R = \{C_n\}_{n \in N}$ la famiglia di cerchi aperti con centro in $\underline{y}$ e raggio n intero positivo.

E' chiaro che è $Y \subseteq \bigcup C_n$, $n \in N$ e poiché Y è compatto Y è contenuto nell'unione di un numero finito C_{m_1} , C_{m_2} ,… , C_{m_t} di tali cerchi aperti.

Detto $m = \max \{ m_1, m_2, .., m_t \}$ si ha

$$Y \subseteq C_{m_1} \cup C_{m_2} \cup \ldots \cup C_{m_t} = C_m$$

e ciò prova che Y è limitato.

Un'altra caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di $R^{nß}$ è fornita dal seguente

Teorema (di Weierstrass) *Un sottoinsieme K di R^n è compatto se e solo se ogni suo sottoinsieme Y infinito ha almeno un punto di accumulazione in K.*

Dimostrazione. Supponiamo K compatto (quindi chiuso e limitato) e sia Y un suo sottoinsieme infinito. Per la proposizione 11.4 , Y ha almeno un punto di accumulazione e sia z tale punto. Il punto z essendo di accumulazione per Y è aderente ad Y e quindi anche a K che contiene Y. Ma K è chiuso e quindi il punto z appartiene a K.

Supponiamo che ogni sottoinsieme infinito di K abbia un punto di accumulazione in K e proviamo che K è compatto. Sarà ovviamente sufficiente provare che K è chiuso e limitato. Prima di provare ciò ricordiamo un risultato che abbiamo già provato (Proposizione 3.5) ma del quale faremo ora uso :

Poiché R^n è di Hausdorff , allora:

se z è un punto di accumulazione per il sottoinsieme X , in ogni aperto che contenga z ci sono infiniti punti di X.

Proviamo quindi che K è chiuso e limitato nell'ipotesi che ogni suo sottoinsieme infinito abbia un punto di accumulazione in K .

Cominciamo a provare che è limitato. Supponiamo per assurdo che K non sia limitato. Fissiamo un punto y di K . Per ogni intero n, consideriamo il cerchio aperto di centro y e raggio n. Poiché K non è limitato esiste almeno un punto x_n di K fuori dal cerchio C (y , n) . Si ha quindi

$$\text{per ogni } n \;,\quad d(x_n, y) > n$$

inoltre è sempre possibile fare in modo che risulti

$$d(x_{n+1}, y) > d(x_n, y).$$

In tal modo gli elementi della successione $x_1, x_2, .., x_n, ..$ di punti di K sono tutti distinti tra loro e costituiscono quindi un sottoinsieme X infinito di K . Il punto y non è d'accumulazione per X in quanto nel cerchio aperto C(y, $\frac{1}{2}$) non c'è alcun punto di X . Sia z un punto di K diverso da y e sia C (z , r) un cerchio aperto di centro z e raggio r . Scelto un intero m tale che sia

$$m > d(y,z) + r$$

il cerchio C (y , m) di centro y e raggio m contiene il cerchio C (z , r). Infatti per ogni punto t di C (z , r) si ha :

$$d(t , y) \leq d(t , z) + d(z , y) < r + d(z , y) < m$$

Poichè tutti i punti $x_m, x_{m+1},.., x_n,..$ della successione sono fuori dal cerchio C(y, m) nel cerchio C (z , r) ci sono al più un numero finito di elementi di X e così z non è d'accumulazione per X. Il sottoinsieme X di K è infinito ma è privo di punti di accumulazione in K e ciò è contro l'ipotesi.

Proviamo ora che K è chiuso. Sia z un punto di accumulazione per K. Per ogni intero n consideriamo il cerchio aperto di centro z e raggio $\frac{1}{n}$. Poiché z è d'accumulazione esiste in tale cerchio un punto x_n di K distinto da z . Si ha quindi

per ogni n $\quad d(x_n , z) < \frac{1}{n}$

Possiamo inoltre fare in modo che risulti altresì

per ogni n $\quad d (x_{n+1} , z) < d (x_n , z)$.

In tal modo gli elementi della successione $x_1, x_2,.., x_n,..$ di punti di K così costruita , sono tutti distinti tra loro e costituiscono quindi un sottoinsieme X infinito di K. Poiché per ogni n, è $d(x_n , z) < \frac{1}{n}$ allora la successione $x_1, x_2,.., x_n, ..$ converge manifestamente al punto z .

Poiché X è infinito, per l' ipotesi in cui siamo, esso ammette un punto y di accumulazione in K . Se proviamo che z = y allora z è un punto di K e quindi K è chiuso in quanto contiene i suoi punti di accumulazione.

Supponiamo per assurdo che sia $z \neq y$. Poiché lo spazio è di Hausdorff esistono due cerchi aperti C (z , r) e C (y , r') di centro z ed y disgiunti tra loro.

Poiché $x_1, x_2,.., x_n,..$ converge al punto z esiste un intero m tale che i punti $x_m, x_{m+1},.., x_n,..$ siano tutti nel cerchio C (z , r) . Conseguentemente nel cerchio

$C(y , r')$ ci sono solo un numero finito di elementi di X e ciò contraddice la proprietà che abbiamo richiamato all'inizio relativa ai punti di accumulazione di uno spazio di Hausdorff.

Esercizi su compatti e connessi in R, R^2 ed R^3 dotati della topologia naturale : quali coniche in R^2 sono compatte ? e quali connesse ? e quali quadriche in R^3 ?

15. Spazio topologico quoziente.

Concludiamo queste note con la nozione di *spazio topologico quoziente.* Vediamo di che si tratta. Sia (S , A) uno spazio topologico . Sia R una relazione d'equivalenza definita nell'insieme S . Lo spazio quoziente S/ R è, come è noto, l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza che R crea.

Possiamo munire l'insieme S/ R di una topologia al seguente modo. Indichiamo con p la funzione che associa ad ogni punto x di S la classe d'equivalenza di x che indichiamo con [x].

$$p : x \in S \rightarrow [x] \in S/R$$

Ora una classe d'equivalenza [x] è un elemento di S/ R ma è anche un sottoinsieme di S quando si pensi agli elementi che di essa fanno parte cioè quando si faccia la sua controimmagine tramite p . Selezioniamo in S/ R una famiglia A' di parti al seguente modo.

Un sottoinsieme A' di S/ R appartiene ad A' e viene chiamato *aperto* se p^{-1} (A') è un aperto di S. In sostanza bisogna considerare le classi che fanno parte di A' come sottoinsiemi di S e controllare che la loro unione dia un sottoinsieme aperto di S. Si controlla immediatamente che la famiglia A' ora definita è una topologia per l'insieme S/ R . Quando l'insieme S/ R si munisca di questa topologia A' lo spazio topologico che si ottiene viene chiamato *spazio topologico quoziente.*

Per la definizione data, la funzione suriettiva

$$p : x \in S \rightarrow [x] \in S/R$$

quando la si pensi come funzione tra i due spazi topologici (S , A) ed (S/ R , A') è una funzione continua .

Come conseguenza si ha allora che se (S , A) è connesso o compatto tale risulta anche lo spazio quoziente (S/ R , A').

Facciamo un esempio. Consideriamo lo spazio topologico R^2 dotato della topologia naturale.

Due punti (x_1 , y_1) ed (x_2 , y_2) li diciamo R - equivalenti se risulta $x_1 = x_2$.

Tale relazione R è d'equivalenza e nella classe [(a , b)] ci sono quindi tutte le coppie del tipo (a , y) .

Rappresentando R^2 nel piano facendo uso di un riferimento monometrico ortogonale si ha che le classi d'equivalenza sono le rette parallele all'asse y. Conseguentemente gli aperti dello spazio topologico quoziente R^2 / R sono strisce aperte del tipo $]\, a , b\, [\times R$ oppure unioni di strisce di questo tipo.

La relazione R introdotta ha voluto identificare tutte le coppie del tipo (a , y) (*con a fisso ed y variabile in R*) col singolo numero a . La funzione

$$f : a \in R \to [(a , y)] \in R^2 / R$$

diventa quindi un omeomorfismo tra R (dotato della topologia naturale) e lo spazio quoziente R^2 / R .

Altri esempi di quozienti.

Cenno alla rappresentazione di un quoziente.

Quando io ero studente universitario i tempi dedicati all'insegnamento non erano contingentati. I corsi duravano un tempo ragionevole e non c'erano difficoltà a fare qualche lezione in più rispetto all'orario previsto. Tutto ciò favoriva l'apprendimento e non c'era nessuna vessazione. I testi erano per lo più consigliati e si poteva attraverso la loro consultazione ricostruire ed approfondire quanto ascoltato a lezione.

Ora pare che il tempo scorra più rapidamente e tutto questo non si può più realizzare.

Questo cambiamento di ritmi rende utile la stesura di questo libretto di appunti in cui si riassumono sinteticamente i contenuti del corso di Geometria II da me tenuto questo anno accademico.

Certo ci vorrebbero degli approfondimenti , ma questi vengono lasciati a quegli studenti che trovano in queste note gli stimoli ed il gusto di una conoscenza più profonda .

Prof. Domenico Olanda

“ Ascoltare senza ritenere

non è sapere”

Dante Alighieri