

FORME BILINEARI E QUADRATICHE (PRIMA LEZIONE)

Dato uno spazio vettoriale $V(K)$, si consideri un'applicazione $f: V \rightarrow V$.

Si ricorda che:

f è lineare $\Leftrightarrow f$ è un omomorfismo, ovvero conserva le operazioni.

DEFINIZIONE:

$f: (v, w) \in V \times V \rightarrow f(v, w) \in K$ è una forma bilineare \Leftrightarrow 1. f è lineare rispetto al primo argomento:
(K è visto come uno spazio vettoriale su se stesso) $\forall v, w, u \in V, \forall h \in K$ si ha:

$$f(v+w, u) = f(v, u) + f(w, u) \text{ e}$$

$$f(hv, w) = h f(v, w)$$

2. f è lineare rispetto al secondo argomento:

$$\forall v, w, u \in V, \forall h \in K \text{ si ha:}$$

$$f(v, w+u) = f(v, w) + f(v, u) \text{ e}$$

$$f(v, hw) = h f(v, w)$$

Una forma bilineare può essere :

1. simmetrica $\Leftrightarrow \forall v, w \in V, f(v, w) = f(w, v)$

2. antisimmetrica o alternante o simplettica $\Leftrightarrow \forall v, w \in V, f(v, w) = -f(w, v)$

OSSERVAZIONE:

Una forma bilineare simmetrica si dice anche prodotto scalare.

ESEMPI

1. Forme bilineari simmetriche:

Ogni prodotto scalare, compreso il prodotto scalare standard, è una forma bilineare simmetrica:

a. Il prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n così definito:

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^t Y$$

b. Il prodotto scalare standard nello spazio vettoriale dei vettori geometrici liberi

$V = \{ \overline{AB} \}$ associato ad una unità di misura u , così definito:

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cos \theta \quad \text{dove } \theta \text{ è l'angolo tra } \underline{v} \text{ e } \underline{w}$$

2. Si consideri $C^0([a,b]) = \{f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua} : a,b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b\}$.

Ovviamente $C^0([a,b])$ è uno spazio vettoriale su \mathbf{R} rispetto alle operazioni di addizione tra funzioni e di prodotto di una funzione per un numero reale; infatti:

a. $\forall f,g \in C^0([a,b])$, $f + g \in C^0([a,b])$

b. $\forall h \in \mathbb{R}$ $h \cdot f \in C^0([a,b])$

c. $+$ è associativa: $f+g: x \in [a,b] \rightarrow f(x)+g(x) \in \mathbb{R}$

d. valgono tutte le proprietà richieste per uno spazio vettoriale

Analogamente:

$C^1([a,b])$, insieme delle funzioni derivabili,

$C^2([a,b])$, insieme delle funzioni derivabili due volte,

$C^\infty([a,b])$, insieme delle funzioni derivabili infinite volte, sono spazi vettoriali su \mathbb{R} rispetto alle stesse operazioni.

Si definisce quindi $s: (f,g) \in C^0 \times C^0 \rightarrow \int_b^a f(x)g(x) dx \in \mathbb{R}$.

s è una forma bilineare simmetrica poichè:

$\forall f,g,h \in C^0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, per la linearità degli integrali, si ha:

$$\begin{aligned} s(f+g,h) &= \int_b^a [(f(x)+g(x))h(x)] dx = \int_b^a [f(x)h(x) + g(x)h(x)] dx = \\ &= \int_b^a [f(x)h(x)] dx + \int_b^a [g(x)h(x)] dx = s(f,h) + s(g,h) \end{aligned}$$

e analogamente si verifica che: $s(\alpha f,g) = \alpha s(f,g)$.

Inoltre s è definito positivo poichè:

$$s(f,f) = \int_b^a f^2(x) dx \geq 0$$

Si ha quindi che s è un prodotto scalare euclideo.

NOTA:

Si ricordi che $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è definito positivo $\Leftrightarrow \forall \underline{v} \in V, s(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0$ e $s(\underline{v}, \underline{v}) = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = 0$

3. Forma bilineare alternante:

In \mathbb{R}^2 , si consideri l'applicazione $f : ((x,y), (x',y')) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow xy' - x'y \in \mathbb{R}$.

f è bilineare (di seguito è verificata una sola delle proprietà richieste:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha(x,y), (x',y')) = f((\alpha x, \alpha y), (x',y')) = \alpha xy' - x'\alpha y = \alpha(xy' - x'y) = \alpha f((x,y), (x',y')).$$

Analogamente si verificano le altre).

Inoltre f è alternante; infatti:

$$f((x',y'), (x,y)) = x'y - xy' = -(xy' - x'y) = -f((x,y), (x',y'))$$

Si considerino, ora, lo spazio $V_n(K)$, la forma bilineare f e il riferimento $R=(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$.

NOTA:

Si ricordi che:

Considerati $V_n(K)$, $R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ e una forma bilineare $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, la matrice di Gram

associata ad f in R è la matrice $G = \begin{pmatrix} f(\underline{e}_1, \underline{e}_1) & \dots & f(\underline{e}_1, \underline{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(\underline{e}_n, \underline{e}_1) & \dots & f(\underline{e}_n, \underline{e}_n) \end{pmatrix} = (f(\underline{e}_i, \underline{e}_j)), 1 \leq i, j \leq n$.

Inoltre se $\underline{v}, \underline{w} \in V : C_R(\underline{v}) = X$ e $C_R(\underline{w}) = Y$, $f(\underline{v}, \underline{w}) = X^t G Y$.

Si prova quindi la seguente

PROPOSIZIONE:

una matrice $A \in K_{n,n}$ è matrice di Gram di f in $R \Leftrightarrow \forall \underline{v}, \underline{w} \in V_n, f(\underline{v}, \underline{w}) = X^t A Y$,

dove $X = C_R(\underline{v})$ e $Y = C_R(\underline{w})$.

Dimostrazione:

essendo già noto che la matrice di Gram di f in R è tale che $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V_n, f(\underline{v}, \underline{w}) = X^t G Y$, basta dimostrare il viceversa.

Pertanto, siano $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ e $G = \begin{pmatrix} f(\underline{e}_1, \underline{e}_1) & \dots & f(\underline{e}_1, \underline{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(\underline{e}_n, \underline{e}_1) & \dots & f(\underline{e}_n, \underline{e}_n) \end{pmatrix}$.

Poiché per ipotesi $f(\underline{v}, \underline{w}) = X^t A Y$, si ha:

$$f(\underline{e}_1, \underline{e}_1) = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}$$

Analogamente si procede per gli altri elementi e, in generale, si ottiene che:

$$f(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = (0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ij}$$

↑ i-esima posizione
 ← j-esima posizione

Pertanto $A = G$.

Si prova inoltre che:

Considerati $V_n(K)$, $R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, una forma bilineare $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e $G = (g(\underline{e}_i, \underline{e}_j))$, la matrice di Gram di f in R , si ha: G è simmetrica $\Leftrightarrow f$ è simmetrica.

Infatti:

presi $\underline{v}, \underline{w} \in V : C_R(\underline{v}) = X$ e $C_R(\underline{w}) = Y$,

$$f(\underline{v}, \underline{w}) = X^t G Y \in K_{1,1}.$$

Poiché G è per ipotesi simmetrica, $G = G^t$ e perciò:

$$X^t G Y = (X^t G Y)^t = Y^t G^t (X^t)^t = Y^t G X = f(\underline{w}, \underline{v}) \Rightarrow f \text{ è simmetrica.}$$

Viceversa,

se f è simmetrica, $f(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = f(\underline{e}_j, \underline{e}_i) \ \forall i, j = 1, \dots, n \Leftrightarrow G = G^t \Leftrightarrow G$ è simmetrica.

DEFINIZIONE:

Una matrice $G=(g_{ij})$ si dice antisimmetrica se risulta $G^t = -G$, cioè $g_{ij} = -g_{ji}$.

Si ha allora che, fissato un riferimento $R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, se f è una forma bilineare alternante, allora la matrice di Gram di f in R è antisimmetrica (la dimostrazione è analoga a quella fatta per le forme simmetriche).

Inoltre vale la seguente PROPRIETÀ:

Sia K un campo infinito (in realtà è sufficiente $\text{car } K \neq 2$, dato che in questo caso è $a \neq -a$).

Se G è una matrice antisimmetrica \Rightarrow la diagonale principale di G è formata da 0 dovendo essere $g_{ij} = -g_{ji} \forall i$.

Sia $f: (\underline{v}, \underline{w}) \in V \times V \rightarrow f(\underline{v}, \underline{w}) \in K$ una forma bilineare e simmetrica;

si dice forma quadratica associata a f l'applicazione così definita:

$q: \underline{v} \in V \rightarrow q(\underline{v}) := f(\underline{v}, \underline{v}) \in K$.

In particolare, in termini di componenti, se $\dim V = n$ e $R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ è un riferimento,

$q(\underline{v}) = X^t G X$ dove $C_R(\underline{v}) = X$ e G è la matrice di Gram associata a f in R .