

FORME BILINEARI E QUADRATICHE (SECONDA LEZIONE)

Si prenda in considerazione uno spazio vettoriale euclideo $(V_n(\mathbb{R}), s)$ di dimensione n .

Per definizione : un riferimento $R=(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ è detto ortonormale $\Leftrightarrow s(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$;

ovvero, R si dirà ortonormale quando è ortogonale (:= vettori distinti del riferimento sono a due a due ortogonali tra loro) e ogni vettore $\underline{v} \in R$ è normalizzato (:= \underline{v} ha lunghezza unitaria).

NOTA :

1. Dire che due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in V_n$ sono ortogonali tra loro, significa dire che $s(\underline{v}, \underline{w}) = 0$.
2. In uno spazio vettoriale euclideo, il modulo di un vettore $\underline{v} \in V_n$ si ottiene da: $|\underline{v}| = \sqrt{s(\underline{v}, \underline{v})}$

In uno spazio vettoriale euclideo si trovano sempre riferimenti ortonormali, perché possono essere costruiti in maniera diretta oppure mediante il teorema di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Si dimostra facilmente che il prodotto scalare di due vettori \underline{v} e \underline{w} , in termini di componenti rispetto al riferimento ortonormale R , si calcola come prodotto scalare standard ,ovvero:

dette $X = C_R(\underline{v})$ e $Y = C_R(\underline{w})$, è $s(\underline{v}, \underline{w}) = X^t Y$.

Infatti: Se R è un riferimento ortonormale, la matrice di Gram di s in R è proprio la matrice identica I_n e quindi si avrà: $X^t G Y = X^t I_n Y = X^t Y$.

Inoltre, se R è ortonormale, per calcolare le componenti del vettore \underline{v} in tale riferimento basterà calcolare il prodotto scalare del vettore per i vettori del riferimento :

se $(x_1, \dots, x_n) = C_R(\underline{v})$, allora è $x_i = s(\underline{v}, \underline{e}_i) \quad \forall i=1, \dots, n$.

Tali coefficienti vengono chiamati coefficienti di Fourier di \underline{v} in R .

Matrici Ortogonali : matrici di passaggio tra due riferimenti ortogonali

Si dimostra che dato un riferimento R ortonormale e un riferimento R' generico, R' è ortonormale \Leftrightarrow la matrice di passaggio tra i due riferimenti è ortogonale.

In particolare, se R e R' sono ortonormali, la matrice di passaggio P da R a R' è una matrice ortogonale.

Considerando che se A è una matrice è ortogonale anche la sua inversa A^{-1} è una matrice ortogonale, è ovvio che: se la matrice di passaggio da R a R' è ortogonale allora anche la matrice di passaggio da R' a R è ortogonale.

NOTA:

Ricordiamo che,

presa una matrice $A \in \mathbb{R}_{n,n}$, A è ortogonale $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$ e risulta $A^{-1} = A^t$.

Considerata la struttura $(\mathbb{R}_{n,n}, \times)$, dove \times è il prodotto righe per colonne nello spazio $\mathbb{R}_{n,n}$ delle matrici quadrate di ordine n su \mathbb{R} , osserviamo che

- \times è associativa
- \exists l'elemento neutro : I_n , ma
- non tutti gli elementi hanno inverso .

Dunque $(\mathbb{R}_{n,n}, \times)$ non è un gruppo.

Tuttavia essa contiene sottoinsiemi che sono gruppi :

consideriamo $GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}_{n,n} : \exists A^{-1} \}$.

Tale insieme

- è chiuso rispetto \times : essendo $A \in GL(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ prese $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$,
 $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$ per cui $AB \in GL(n, \mathbb{R})$ e inoltre $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$
- \times è associativa
- \exists l'elemento neutro : I_n
- tutti gli elementi hanno inverso : essendo $A A^{-1} = I_n \Rightarrow |A A^{-1}| = |A| |A^{-1}| = |I_n| = 1$, da cui si ha che: $|A^{-1}| = 1/|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R}) \forall A \in GL(n, \mathbb{R})$.

Perciò $GL(n, \mathbb{R})$ è un gruppo detto gruppo lineare.

Tale gruppo ammette dei sottogruppi.

Nel caso del campo reale ci sono due sottogruppi notevoli : il gruppo delle matrici ortogonali e quello delle matrici ortogonali speciali.

NOTA:

$GL(n, \mathbb{R})$ non è un sottogruppo rispetto all'operazione di addizione .

Infatti:

$$I_n + (-I_n) \text{ non appartiene a } GL(n, \mathbb{R})$$

Si consideri $O(n, \mathbb{R}) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^{-1} = A^t \}$.

Si vede facilmente che $(O(n, \mathbb{R}), \cdot)$

1. è un sottoinsieme chiuso rispetto \cdot :

$$\text{siano } A, B \in O(n, \mathbb{R}) \Rightarrow AB \in O(n, \mathbb{R}) \text{ perché } \exists (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t$$

2. \cdot è associativa

3. \exists l'elemento neutro : I_n

4. \exists l'inversa di ogni elemento :

$$\forall A \in O(n, \mathbb{R}) \text{ si ha } : (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^t (=A) \Rightarrow A^{-1} \in O(n, \mathbb{R}) .$$

Pertanto $O(n, \mathbb{R})$ è un gruppo detto gruppo ortogonale .

A sua volta $O(n, \mathbb{R})$ ammette un sottogruppo formato dalle matrici ortogonali che hanno determinante uguale a 1.

ESEMPIO:

$$A \in O(2, \mathbb{R}) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ con } \theta \in [0, \pi] \text{ oppure } B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \text{ e si ha:}$$

$$|A| = 1 \text{ e } |B| = -1$$

NOTA:

Ricordiamo che : $A \in \mathbb{R}_{n,n}$ è ortogonale $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow AA^t = AA^{-1} = I_n = A^{-1}A = A^tA \Leftrightarrow$ poiché \cdot è il prodotto righe per colonne, calcolare il prodotto AA^t (A^tA) equivale a calcolare il prodotto delle righe (o delle colonne) di A per se stesse e visto che $AA^t = I_n$ (o anche $I_n = A^tA$) \Rightarrow le righe (e le colonne) di A sono a due a due ortogonali tra loro e di lunghezza unitaria, cioè sono una base ortonormale di \mathbb{R}^n .

Vogliamo ora provare che:

ad ogni spazio di matrici corrisponde uno spazio di applicazioni lineari tra spazi vettoriali.

NOTA 1.:

Si premetta che $\{ A : A \in K_{m,n} \}$ forma uno spazio vettoriale e lo spazio delle applicazioni lineari ad esso isomorfo è lo spazio di tutte le applicazioni lineari di K^n in K^m .

Si ricordi infatti che gli spazi vettoriali di dimensione finita n sono tutti isomorfi allo spazio vettoriale K^n poiché si possono costruire degli isomorfismi (non canonici): fissato un riferimento R , si può considerare l'isomorfismo $C_R : \underline{v} \in V_n \rightarrow C_R(\underline{v}) = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ detto isomorfismo coordinato associato a $R \Rightarrow V_n \cong K^n$.

Si ricordi inoltre che ogni applicazione lineare tra due spazi vettoriali numerici $f: K^n \rightarrow K^m$ può essere vista come applicazione associata ad una matrice: $f: (x_1, \dots, x_n) \in K^n \rightarrow (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots) \in K^m$.

Infatti, posta $M_{RR'}(f) = A$, $f \equiv F_A : X \in K^n \rightarrow AX \in K^m$.

Pertanto ogni applicazione lineare tra due spazi vettoriali numerici è del tipo F_A .

Si considerino ora $V_n(K)$ e $V'_m(K)$.

Fissati due riferimenti R e R' , $V_n \cong K^n$ mediante l'isomorfismo C_R e $V'_m \cong K^m$ mediante l'isomorfismo $C_{R'}$.

Si consideri l'insieme $\text{Hom}(V_n, V'_m) = \{ f : V_n \rightarrow V'_m \text{ lineari} \}$.

In tale insieme si possono introdurre le due operazioni necessarie per definire uno spazio vettoriale, ottenendo la struttura: $(\text{Hom}(V_n, V'_m), +, \cdot)$.

Prese $f, g \in \text{Hom}(V_n, V'_m)$ e preso $h \in K$ si ha:

1. $f+g : \underline{v} \in V_n \rightarrow (f+g)(\underline{v}) = f(\underline{v}) + g(\underline{v}) \in V'_m$, si vede che se f e g sono lineari $\Rightarrow f+g$ è lineare
2. $hf : \underline{v} \in V_n \rightarrow (hf)(\underline{v}) = h f(\underline{v}) \in V'_m$, si vede che se f è lineare $\Rightarrow hf$ è lineare.

Pertanto $+$ e \cdot sono operazioni interne a $\text{Hom}(V_n, V'_m)$ e inoltre $\text{Hom}(V_n, V'_m)$ è uno spazio vettoriale.

Infatti:

1. $+$ è associativa e commutativa
2. $f_0 : \underline{v} \in V \rightarrow 0 \in V'$ è l'elemento neutro (è l'unica applicazione costante lineare)
3. $-f$ è l'opposto di $f \forall f \in \text{Hom}(V_n, V'_m)$
4. $1f = f$, essendo 1 l'unità di K
5. $h(kf) = (hk)f$
6. valgono le due proprietà distributive di \cdot rispetto a $+$ tra vettori e $+$ tra scalari.

Tale spazio vettoriale è detto spazio delle applicazioni lineari.

Di tale spazio vettoriale vogliamo determinare uno spazio vettoriale isomorfo; in particolare proviamo che $\text{Hom}(V_n, V'_m) \cong K_{m,n}$.

Infatti:

Fissati un riferimento R in V_n e un riferimento R' in V'_m , si costruisce l'applicazione ψ così definita: $\psi: f \in \text{Hom}(V_n, V'_m) \rightarrow \psi(f) = M_{R,R'}(f) = A \in K_{m,n}$.

Ψ è un isomorfismo ovvero conserva la struttura (in questo caso, addizione e moltiplicazione) ed è biunivoca:

1. ψ è biettiva :
 - è iniettiva perché applicazioni diverse hanno matrici diverse
 - è suriettiva perché ogni matrice A può essere vista come matrice associata ad un'applicazione $f: V_n \rightarrow V'_m$ che, in termini di componenti rispetto ai riferimenti R ed R' , coincide con la F_A (vedi Nota 2.);
2. ψ è lineare :
 - $M_{R,R'}(f+g) = A + B$ se $A = M_{R,R'}(f)$ e $B = M_{R,R'}(g)$:
 le matrici A e B hanno come colonne le componenti in R' dei vettori $f(\underline{e}_i)$ e $g(\underline{e}_i)$, al variare di \underline{e}_i in R , e le colonne della matrice associata a $f+g$ nei riferimenti R e R' saranno le componenti in R' di $(f+g)(\underline{e}_i) = f(\underline{e}_i) + g(\underline{e}_i) \Rightarrow$
 le componenti di $(f(\underline{e}_i) + g(\underline{e}_i))$ saranno proprio le componenti di $f(\underline{e}_i) +$ le componenti di $g(\underline{e}_i)$, cioè la somma delle colonne i -esime di A e B , questo $\forall i$.
 - $M_{R,R'}(hf) = hA$ se $A = M_{R,R'}(f)$ (analogamente a sopra).

NOTA 2.:

Data una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, per trovare un'applicazione f tale che $A = M_{R,R'}(f)$,

ogni colonna di A può essere vista come la colonna delle componenti in R' di un vettore di V'_m .

In tal modo si ottengono i vettori: $\underline{v}'_1 = a_{11} \underline{e}'_1 + \dots + a_{m1} \underline{e}'_m, \dots, \underline{v}'_n = a_{1n} \underline{e}'_1 + \dots + a_{mn} \underline{e}'_m$.

Per il teorema di esistenza ed unicità per le applicazioni lineari, dati due spazi vettoriali V e V' , una base B in V e n vettori di V' , esiste un'unica applicazione lineare $f: \underline{v} \rightarrow \underline{v}'$ che muta i vettori di B negli n vettori fissati del secondo spazio ($\exists! f$ lineare: $f(\underline{e}_i) = \underline{v}'_i \forall i$), e questa f , per costruzione, è tale che $A = M_{R,R'}(f)$.

Automorfismi

Si considerino le applicazioni lineari di uno spazio vettoriale in sé (endomorfismi) :

$$\text{End}(V_n) = \text{Hom}(V_n, V_n) \cong K_{n,n} .$$

Poiché $K_{n,n}$ ammette dei sottogruppi notevoli, anche lo spazio vettoriale $\text{End}(V_n)$ ammette dei sottogruppi notevoli.

In particolare, tra tutte le applicazioni di V_n in sé si possono considerare quelle lineari e biettive e queste vengono dette Automorfismi.

Considerati due automorfismi f e g , l'applicazione $f+g$ non è necessariamente un automorfismo; essa infatti è lineare, ma non sempre biettiva.

ESEMPIO:

Automorfismi di \mathbb{R}^2 la cui somma non è un automorfismo:

Si consideri l'applicazione $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x+y, 2x) \in \mathbb{R}^2$.

f è un'applicazione lineare ed è l'applicazione associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, ottenuta

prendendo la base naturale $B = \{(1,0), (0,1)\}$ e calcolando $f(1,0) = (1,2)$ che è la prima colonna di A , e $f(0,1) = (1,0)$ che è la seconda colonna di A .

(Osserviamo che, poiché $f \equiv F_A$, per determinare A basta considerare i coefficienti di x e y nel vettore immagine di (x,y) mediante $f: (x+y, 2x)$).

Per dimostrare che f è biettiva, bisogna dimostrare che è suriettiva e iniettiva :

f è suriettiva perché $\text{Im } f = L((1,2), (1,0)) \Rightarrow \dim \text{Im } f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Da ciò si deduce anche che f è iniettiva dovendo essere $\dim \text{ker } f = 0$ (per il teorema che lega la nullità e il rango di f).

Quindi f è un automorfismo.

Considerata ora l'applicazione $-f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (-x-y, -2x) \in \mathbb{R}^2$, la matrice associata a $-f$ è uguale a

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ovviamente $-f$ è biettiva e lineare $\Rightarrow -f$ è un automorfismo .

Si può quindi considerare l'applicazione $g=f+(-f)$;

g è così definita : $g: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (0,0) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow g$ non è un automorfismo .

Dall'esempio si deduce anche che l'insieme degli automorfismi non è uno spazio vettoriale.

Gruppo degli automorfismi

La struttura $(\text{Aut}(V_n), \circ)$, dove con \circ viene indicata l'operazione di composizione, è un gruppo.

Infatti, ricordando che

- $\forall f, g \in \text{Aut}(V_n), g \circ f : \underline{v} \in V_n \rightarrow g(f(\underline{v})) \in V_n$
- la composta di due applicazioni biettive è biettiva

si ha che :

1. \circ è un'operazione interna a $\text{Aut}(V_n)$
2. \circ è associativa
3. \exists l'elemento neutro : $\text{id} : \underline{v} \in V_n \rightarrow \underline{v} \in V_n$
4. \exists l'inverso di ogni elemento : $\forall f \in \text{Aut}(V_n) \Rightarrow f$ è biettiva $\Rightarrow \exists f^{-1}$ biettiva e si prova che f^{-1} è lineare $\Rightarrow f^{-1}$ è un automorfismo di V_n

ESEMPIO:

Considerata l'applicazione $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x+y, 2x) \in \mathbb{R}^2$ e

l'applicazione $-f$ è così definita $-f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (-x-y, -2x) \in \mathbb{R}^2$,

allora, $f \circ (-f) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow f(-f(x,y)) = f(-x-y, -2x) = (-3x-y, -2x-2y) \in \mathbb{R}^2$

e si verifica facilmente che la matrice associata a $f \circ (-f)$ è : $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = A(-A)$,

dove $A = M(f)$ e $-A = M(f^{-1})$.

Si consideri $\text{Aut}(V_n) \subseteq \text{End}(V_n)$. Vogliamo dimostrare che $(\text{Aut}(V_n), \circ) \cong (\text{GL}(n, K), \cdot)$.

Bisogna, però, premettere che:

Se f e $g \in \text{Aut}(V_n)$, R è un riferimento, $A = M_R(f)$ e $B = M_R(g) \Rightarrow M_R(g \circ f) = BA$.

Infatti:

Data $f \in \text{Aut}(V_n)$, $f: \underline{v} \in V_n \rightarrow f(\underline{v}) \in V_n$ e, in termini di componenti, dette $X = C_R(\underline{v})$,

$$f \equiv F_A: X \rightarrow AX$$

Dato $g \in \text{Aut}(V_n)$, $g: \underline{v} \in V_n \rightarrow g(\underline{v}) \in V_n$ e, in termini di componenti, dette $X = C_R(\underline{v})$,

$$g \equiv F_B: X \rightarrow BX$$

Allora $g \circ f \in \text{Aut}(V_n)$ è l'applicazione così definita :

$g \circ f : \underline{v} \in V_n \rightarrow g(f(\underline{v})) \in V_n$, ovvero, in termini di componenti, $g \circ f: X \rightarrow B(AX) = (BA)X$.

Quindi $Y = (BA)X$ sono le equazioni di $g \circ f$ in $R \Rightarrow M_R(g \circ f) = BA$.

Si può ora costruire un isomorfismo tra $\text{Aut}(V_n)$ e $GL(n, K)$.

Si fissa un riferimento $R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ di V_n .

Si considera l'applicazione $\psi_R : f \in \text{Aut}(V_n) \rightarrow A = M_R(f) \in K_{n,n}$.

Osserviamo che $A \in GL(n, K)$, infatti si ha :

$$f \in \text{Aut}(V_n) \Leftrightarrow A = M_R(f) \in GL(n, K)$$

(Infatti, siano $f \in \text{Aut}(V_n)$ ed $A = M_R(f) \Rightarrow r(A) = \dim(\text{Im } f) = \dim V_n$ (dato che f in particolare è suriettiva, e quindi $\text{Im } f = V_n$).

Si può ragionare così:

f è biettiva \Rightarrow (in particolare)

f è iniettiva \Rightarrow

conserva l'indipendenza lineare .

Inoltre, la coordinazione è iniettiva \Rightarrow

le componenti dei vettori $(f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n))$ che formano le colonne della matrice $A = M_R(f)$ sono indipendenti \Rightarrow

poiché il rango di una matrice è uguale alla dimensione dello spazio generato dalle colonne, $r(A) = n$.

Poiché $r(A) = n$, le colonne sono indipendenti $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A \in GL(n, K)$.

Viceversa, sia $A \in GL(n, K)$. Poiché $r(A) = \dim \text{Im } f$ e per ipotesi $r(A) = n$, allora

$\dim \text{Im } f = n \Rightarrow \text{Im } f = V_n \Rightarrow f$ è suriettiva, da cui f è anche iniettiva $\Rightarrow f \in \text{Aut}(V_n)$.

Avendo dimostrato che $A \in GL(n, K)$, l'applicazione ψ_R si può scrivere:

$$\psi_R : f \in \text{Aut}(V_n) \rightarrow A = M_R(f) \in GL(n, K)$$

Proviamo che ψ_R è un isomorfismo tra gruppi (ovvero è biettiva e conserva le operazioni).

Infatti:

- ψ_R è biettiva perchè $\forall A \in GL(n, K)$, $\exists! f : M_R(f) = A$ (in termini di componenti in R : $f \equiv F_A$)

- ψ_R conserva l'operazione \circ (: prodotto righe per colonne) :

$$\text{presi } f, g \in \text{Aut}(V_n) \Rightarrow \psi_R(f \circ g) = M_R(f \circ g) = M_R(f) \cdot M_R(g) = \psi_R(f) \cdot \psi_R(g)$$